

תוכן העניינים:

פרק 15	2
חשבון דיפרנציאלי – פונקציה מעריכית	2
סיכום כללי :	2
הגדרות כלליות :	2
תכונות כלליות :	2
תכונות נוספות :	3
נגזרות של פונקציות מעריכיות :	3
תזכורת – כללי הגזירה :	4
שאלות יסודיות – חישובי נגזרות :	5
שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :	6
שאלות שונות העוסקות בחקירה של פונקציות מעריכיות :	6
תשובות סופיות :	13
תירגול נוסף :	17
תשובות סופיות :	22
סקיצות לשאלות :	24

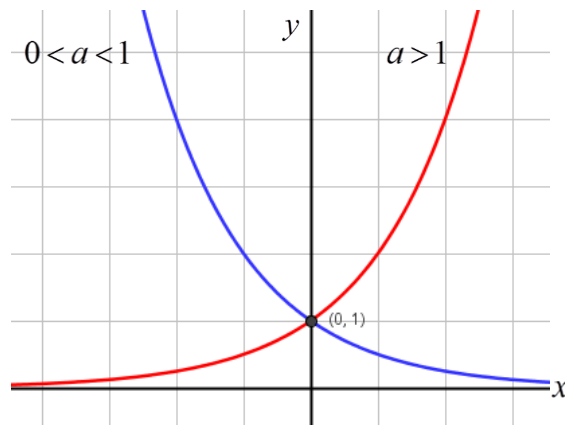
פרק 15

חשבון דיפרנציאלי – פונקציה מעריכית

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

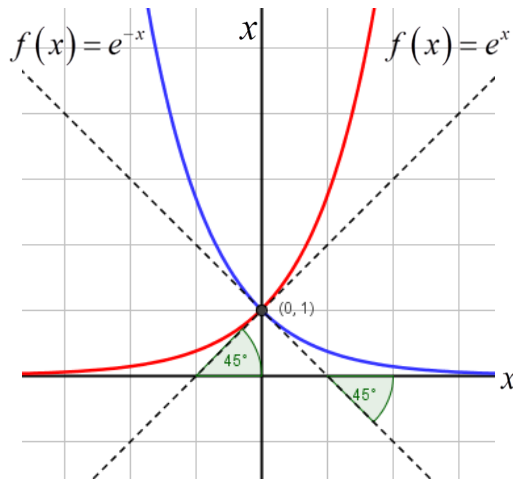
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$
 עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0,1)$.
4. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

תזכורת – כללי הגזירה:

הנגזרת	תיאור	הפונקציה	מספר כלל
$y' = a \cdot f'(x)$	מכפלה בקבוע	$y = a \cdot f(x)$.1
$y' = f'(x) + g'(x)$	סכום פונקציות	$y = f(x) + g(x)$.2
$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	מכפלת פונקציות	$y = f(x) \cdot g(x)$.3
$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	מנת פונקציות	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$.4
$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	פונקציה מורכבת	$y = f(g(x))$.5

שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$ ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$

ג. $f(x) = 2^{3x}$ ד. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x) = x \cdot e^x$ ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$ ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$ ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$ ג. $f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x) = e^{2x}$ ב. $f(x) = e^x + 1$

ג. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ד. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

ה. $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1)$ ו. $f(x) = e^{3x-2}$

ז. $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}$ ח. $f(x) = x^3 e^{2x}$

ט. $f(x) = e^{-2x}(x+4)$ י. $f(x) = e^{2x+1}(1-x)$

יא. $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}}$ יב. $f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}}$

יג. $f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}}$ יד. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$

טו. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{-x}}$ טז. $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x+1}}$

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.
- (9) נתונה הפונקציה: $y = e^{2x} + 3ex$.
לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x = 2$.
מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

שאלות שונות העוסקות בחקירה של פונקציות מעריכיות:

- (11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:
- | | | |
|---|--|---|
| $f(x) = \frac{x+1}{e^x - 5}$.ג | $f(x) = \frac{3}{e^x - 1}$.ב | $f(x) = \frac{2x-1}{e^x}$.א |
| $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{5x - 2}$.ו | $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$.ה | $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$.ד |
| | | $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 4e^x + 3}$.ז |
- (12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$.
- (13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 9}{e^x}$

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x - 1}{e^{3x} - e}$

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-3)e^x$.

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $(1, \frac{2}{e})$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

(28) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $f(x) = (x-1)e^x$ ב. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

ג. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{4}x^2}$ ד. $f(x) = e^{x^2-x}$

ה. $f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1}$ ו. $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}}$

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(34) נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. לאלו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון אחד?

35 נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

36 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

37 שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}}$ בנקודה שבה $x=1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$.

38 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8.$$

- א. מצא את a .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$.
- ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- ג. מצא את b .
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

39 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 6x - e^x$ ו- $g(x) = ae^x - e^{2x} + b$. ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- y .

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
 ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

40 לגרף הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2, \frac{4}{e}\right)$, $a, b \neq 0$.

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b וכתוב את הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ה. מעבירים ישר: $y = k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

41 לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a .
 ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(43) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- א. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. בכמה נקודות חותך הישר $y = -0.01$ את גרף הפונקציה?

(44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$f'(x) + f''(x) = 12 \quad \text{הנגזרות מקיימות:} \quad x = \ln \frac{2}{3}$$

- א. מצא את a .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$.
- ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- ג. מצא את b .
- ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot a^x$, $(a > 0)$.

$$\text{לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:} \quad x = -\frac{1}{\ln 2}$$

- א. מצא את a .
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- הנקודה שבה $x = 2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה: $g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$.
- ג. מצא את k .
- ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

(46) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

(1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$ ד. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

(2) א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x \ln 2 + \ln 2)$

(3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

(5) א. $2e^{2x}$ ב. e^x ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ד. $(x+1)^2 e^x$ ה. $e^{-x}(-x^2-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ח. $x^2 e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$ י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ יב. $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$ יד. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

טו. $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

יז. $y = ex$ (6)

יח. $y = 3x+1$ (7)

יט. $y = (-e^2 + e)x + e^2$, $y = (e-1)x + e$ (8)

כ. $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$ (9)

כא. $b = -1$, $a = 2$ (10)

כב. א. כל x ב. $x \neq 0$ ג. $x \neq \ln 5$ ד. $x \neq \ln 2$, $x \neq 0$ ה. כל x (11)

ו. $0 \leq x \leq \frac{2}{5}$ ז. $x \leq 0$, $x \geq \ln 3$

ח. $\min(0,0)$, $\max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ (12)

ט. $\min(3, e^3)$ (13)

י. $\min(1.5, 0)$, $\max(3.5, 0.483)$, $b = -12$, $a = 4$ (14)

יא. $p = -27$, $q = 35$ (15)

יב. $y = 0$ (16)

יג. $y = 0$ (17)

$$x=0, y=-5, y=1 \quad (18)$$

$$x=\ln 5, y=-\frac{1}{5} \quad (19)$$

$$y=-1, y=1 \quad (20)$$

$$(\ln 2, -1) \text{ נקודת אי הגדרה: } x=\ln 3, y=-\frac{1}{3}, y=0 \quad (21)$$

$$x=0, y=0 \quad (22)$$

$$y=0 \quad (23)$$

$$x=\frac{1}{3}, y=0 \quad (24)$$

$$y=0 \quad (25)$$

$$(0,0) \text{ נקודת אי הגדרה: } x=0 \quad (26)$$

$$\left(3, \frac{10}{e^3}\right), a=1, b=1 \quad (27)$$

$$x < 0 \text{ יורדת: } x > 0 \text{ עולה: } \min(0, -1) \quad (1,0), (0,-1) \quad x \text{ כל } \quad (28)$$

$$x < -1, x > -1 \text{ עולה: } \text{פיתול} \left(-1, \frac{2}{e}\right) \quad (0,1) \quad x \text{ כל } \quad (29)$$

$$\max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right) \quad (0,0) \quad x \text{ כל } \quad (30)$$

$$x > 2, -2 < x < 0 \text{ יורדת: } x < -2, 0 < x < 2 \text{ עולה: } \quad (31)$$

$$x < 0.5 \text{ יורדת: } x > 0.5 \text{ עולה: } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad (0,1) \quad x \text{ כל } \quad (32)$$

$$x > 0 \text{ יורדת: } x < 0 \text{ עולה: } \max(0,1) \quad (0,1) \quad x \text{ כל } \quad (33)$$

$$x < 0 \text{ יורדת: } x > 0 \text{ עולה: } \min(0, 2e^{-1}) \quad (0, 2e^{-1}) \quad x \text{ כל } \quad (34)$$

$$x < 2 \text{ תחומי ירידה: } x > 2 \text{ תחומי עלייה: } \min(2, -e^2) \quad x \text{ כל } \quad (35)$$

$$(3,0), (0,-3) \quad (36)$$

$$\max(0,3), \min(\ln 3, 1.59) \quad x \text{ כל } \quad (37)$$

$$\ln 0 < x < \ln 3 \text{ תחומי ירידה: } x < 0 \text{ או } x > \ln 3 \quad (0,3) \quad (38)$$

$$\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right), \max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right) \quad x \text{ כל } \quad (39)$$

$$-1 < x < 1 \text{ תחומי עלייה: } x < -1 \text{ או } x > 1 \quad (0,0) \quad (40)$$

$$x > 3 \text{ יורדת: } x < 3 \text{ עולה: } \max\left(3, \frac{27}{e^3}\right) \quad x \text{ כל } \quad (41)$$

(33) א. כל x ב. $\min(-0.91, -0.67)$ ג. עולה: $x > -0.91$ יורדת: $x < -0.91$ ד. $(0, 0)$

(34) א. כל x ב. $\max(1, 2\sqrt{e})$, $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ ג. עולה: $-1 < x < 1$ יורדת: $x < -1$, $x > 1$

ד. $(0, 2)$ ה. $y = 2$ ז. $m = 2$, $m = 2\sqrt{e}$, $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$

(35) א. $x \neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$ ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, יורדת: $0 \neq x < \frac{1}{2}$ ד. אין

(36) א. כל x ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$, $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$

ג. עולה: $x < \frac{1}{6}$, $x > \frac{1}{2}$ יורדת: $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$ ד. $(0, 1)$

(37) א. $k = 1$, $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1, e^2)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$

(38) א. $a = 4$ ב. $x = \ln 2$ ג. $b = -5$ ד. $(0, 0)$

(39) א. $a = 12$, $b = -12$ ב. עולות: $x < \ln 6$ יורדות: $x > \ln 6$

(40) א. $a = 1$, $b = 0.25$, $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ב. $\min(0, 0)$ ג. $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$ ד. $(0, 0)$ ה. $0 < k < \frac{4}{e}$

(41) א. $a = \frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1 < x < 11$ יורדת: $x < 1$, $x > 11$

ד. $(-1, 0)$, $(7, 0)$, $(0, -7e)$

(42) א. $m = -6$, $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$ ב. $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$, $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$ ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

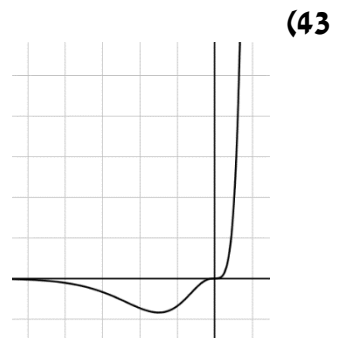
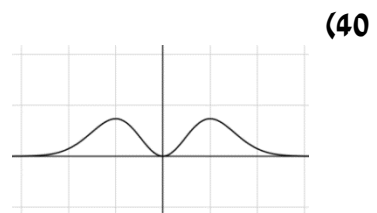
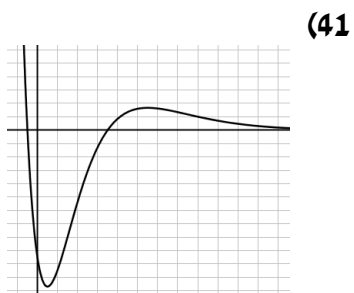
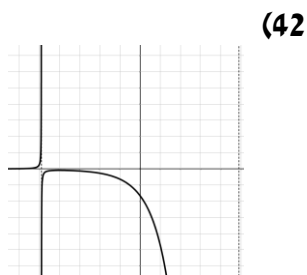
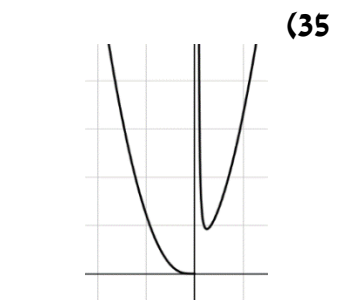
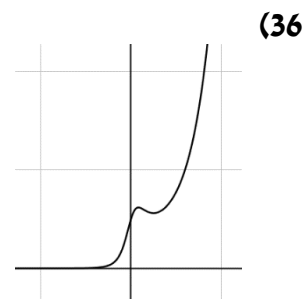
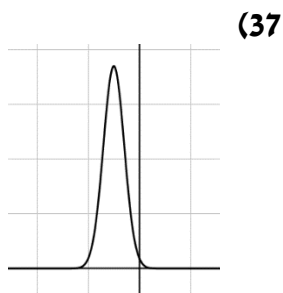
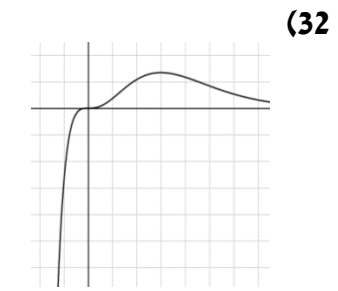
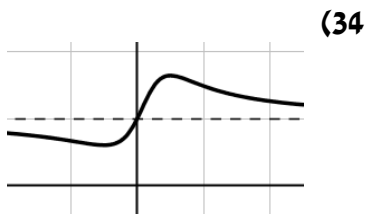
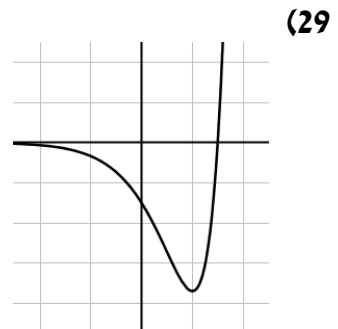
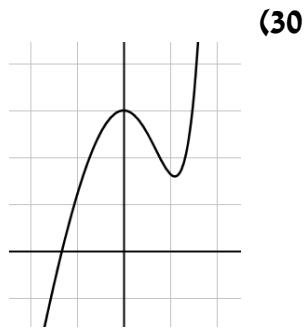
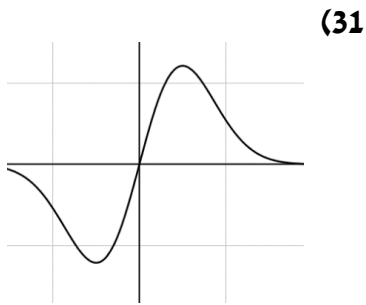
(43) א. $x = 0, -1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ ב. $y = 0$ ד. 2 נקודות

(44) א. $a = 7$ ב. $x = \ln 2$ ג. $b = 10$ ד. לא

(45) א. $a = 2$ ב. עולה: $x > -\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x < -\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k = 1$ ד. $(0, 0)$

(46) א. $y = -x \ln 81 + 7$ ג. $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:



תירגול נוסף:

(1) חקור את הפונקציה $y = e^{4(x-1)}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) חקור את הפונקציה $y = xe^x$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) חקור את הפונקציה $y = (x+2)e^x$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) חקור את הפונקציה $y = (x^2 - 5x + 5)e^x$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) חקור את הפונקציה $y = \frac{e^x}{x+2}$ לפי הסעיפים הבאים:

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) חקור את הפונקציה $y = \frac{x^2}{e^{x+1}}$ לפי הסעיפים הבאים:

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) חקור את הפונקציה $y = \frac{(x-4)^2}{e^x}$ לפי הסעיפים הבאים:

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8) חקור את הפונקציה $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9) חקור את הפונקציה $y = x^2 e^{x^2}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10) חקור את הפונקציה $y = \frac{x - e^x}{x}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

11) חקור את הפונקציה $y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) חקור את הפונקציה $y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 15}$ לפי הסעיפים הבאים:

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^3 - 3x^2 - 9x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = (3x^2 - 4)e^{6x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{x^2 - 24}}{x^2 - 24}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16 לפונקציה: $y = \frac{ae^x}{x+b}$ יש נקודת קיצון: $(4, 5e^4)$.

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

17 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 8$.

- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18 נתונה הפונקציה: $f(x) = 4^x + 4^{1-x}$.

- הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B.
- א. הוכח כי אחת מהנקודות נמצאת על ציר ה- y .
 - ב. הוכח כי שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה שווה לממוצע של שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.
 - ג. כתוב את משוואת המשיק בנקודת הקיצון של הפונקציה.

19 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{kx}$.

- ידוע כי יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון שבה $x = 1$.
- א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
 - ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
 - ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

- (1) א. כל x ב. אין קיצון ג. עולה בכל ת.ה. ד. $(0, e^{-4})$
- (2) א. כל x ב. $\min(-1, e^{-1})$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$ ד. $(0, 0)$
- (3) א. כל x ב. $\min(-3, -e^{-3})$ ג. עולה: $x > -3$ יורדת: $x < -3$ ד. $(0, 2)$, $(-2, 0)$
- (4) א. כל x ב. $\max(0, 5)$, $\min(3, -e^3)$ ג. עולה: $x < 0, x > 3$ יורדת: $0 < x < 3$ ד. $(0, 5)$, $(3.61, 0)$, $(1.38, 0)$
- (5) א. $x \neq -2$ ב. $\min(-1, e^{-1})$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$, $x \neq -2$ ד. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ה. $x = -2$
- (6) א. כל x ב. $\min(0, 0)$, $\max(2, 4e^{-3})$ ג. עולה: $0 < x < 2$ יורדת: $x < 0, x > 2$ ד. $(0, 0)$
- (7) א. כל x ב. $\min(4, 0)$, $\max(6, 4e^{-6})$ ג. עולה: $4 < x < 6$ יורדת: $x < 4, x > 6$ ד. $(0, 16)$, $(4, 0)$
- (8) א. $x \neq 0$ ב. אין קיצון ג. יורדת בכל ת.ה. ד. אין חיתוכים עם הצירים כלל. ה. $x > 0: y = 1, x < 0: y = 0, x = 0$
- (9) א. כל x ב. $\min(0, 0)$ ג. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$ ד. $(0, 0)$
- (10) א. $x \neq 0$ ב. $\max(1, 1 - e)$ ג. עולה: $x < 1, x \neq 0$ יורדת: $x > 1$ ד. אין חיתוכים ה. $x < 0: y = 1$
- (11) א. כל x ב. $\max(0, 0.5)$ ג. עולה: $x < 0$ יורדת: $x > 0$ ד. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ה. $y = 0$
- (12) א. $x \neq \pm\sqrt{15}$ ב. $\min\left(-5, \frac{e^5}{10}\right)$, $\max\left(3, -\frac{1}{6e^3}\right)$ ג. עולה: $-5 < x < 3, x \neq -\sqrt{15}$ יורדת: $x \neq \sqrt{15}, x < -5, x > 3$ ד. $\left(0, -\frac{1}{15}\right)$ ה. $x = \pm\sqrt{15}$

(13) א. כל x ב. $\min(3, e^{-27})$, $\max(-1, e^5)$ ג. עולה: $x < -1, x > 3$ יורדת: $-1 < x < 3$ ד. $(0, 1)$

(14) א. כל x ב. $\min(1, -e^6)$, $\max\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3e^8}\right)$ ג. עולה: $x < -\frac{4}{3}, x > 1$ יורדת: $-\frac{4}{3} < x < 1$ ד. $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $(0, -4)$

(15) א. $x \neq \pm\sqrt{24}$ ב. $\max\left(0, -\frac{1}{24e^{24}}\right)$, $\min(-5, e)$, $\min(5, e)$ ג. עולה: $-5 < x < 0, x > 5$ יורדת: $x \neq -\sqrt{24}, 0 < x < 5, x < -5$ ד. $\left(0, -\frac{1}{24e^{24}}\right)$ ה. $x = \pm\sqrt{24}$

(16) א. $a = 5, b = -3$ ב. $x \neq 3$ ג. עולה: $x > 4$ יורדת: $x < 4, x \neq 3$ ד. $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

(17) א. $\min(\ln 3, -1)$ ב. עולה: $x > \ln 3$ יורדת: $x < \ln 3$ ג. $(\ln 2, 0)$, $(\ln 4, 0)$, $(0, 3)$

(18) ג. $y = 4$

(19) א. $f(x) = x^3 e^{-3x}$, $k = -3$ ב. לא ג. עולה: $x < 1, x \neq 0$ יורדת: $x > 1$

סקיצות לשאלות:

