

תוכן העניינים:

2	פרק 4
2	גיאומטריה אנליטית - מקומות גאומטריים ותרגילי הוכחה
2	מקום גיאומטרי :
2	הגדרה :
2	טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים :
3	שאלות :
5	תשובות סופיות :
6	תרגילי הוכחה :

פרק 4

גיאומטריה אנליטית - מקומות גאומטריים ותרגילי הוכחה

מקום גיאומטרי:

הגדרה:

מקום גאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.
מקום גאומטרי הוא משוואה המקשרת בין x ל- y .

טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים:

בשאלות של מקום גאומטרי נפוץ השימוש בדברים הבאים:

- שיפועים:

i. שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה).

ii. שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא -1).

iii. שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע.

- משפט פיתגורס.

- אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון.

- משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס.

- קטע מרכזים:

i. במעגלים המשיקים מבחוץ – סכום הרדיוסים.

ii. במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים.

- משפטים מגאומטריה (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)

- אם נתונה משוואה בשאלה – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעליה במשוואה.

שאלות:

- (1) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(-7, -6)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(9, 2)$.
- (2) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(3, -6)$ גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה $B(-1, 10)$.
- (3) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(1, 0)$ קטן פי 3 ממרחקן מהישר $x = 9$.
- (4) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שעוברים בנקודה $(6, 0)$ ומשיקים לישר $x = -6$.
- (5) נתונים שני ישרים: I. $3x + y - 6 = 0$, II. $2x + 6y - 1 = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 ממרחקן מישר II.
- (6) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שמשיקים לציר ה- y מימין ומשיקים מבפנים למעגל קנוני שרדיוסו 4. מהן ההגבלות?
- (7) מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה $(4, -10)$ עם נקודות על הישר $y = 6x + 2$.
- (8) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברים בראשית הצירים.
- (9) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 36$. הכפילו את שיעורי ה- y של כל הנקודות על המעגל ב- $\frac{2}{3}$. מצא את המקום הגאומטרי שמתקבל באופן הזה.
- (10) נתונות הנקודות $A(2, 0)$ ו- $B(10, 0)$. מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים ABC אם ידוע שהקודקוד C מונח על הישר $y = 3x - 12$. מהי ההגבלה?

11 נתון המעגל $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקן מהנקודה $(7, 2)$.

12 מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ בזווית של 120° .

13 מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בזווית של 60° .

14 נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו $x^2 + y^2 - 12x - 64 = 0$. מנקודה A שעל המעגל העבירו אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C. בנקודה B העבירו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה- x . המקביל ל-AM והמקביל לציר ה- x נפגשים בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודה D. מהן ההגבלות?

15 האליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ חותכת את חלקו החיובי של ציר ה- x בנקודה A ואת חלקו החיובי של ציר ה- y בנקודה B. מנקודה C שעל ציר ה- x בין O ל-A (O ראשית הצירים) העלו אנך לציר ה- x שחותך את הישר AB בנקודה D. מצא את המקום הגאומטרי של נקודת מפגש הישרים BC ו-OD.

16 נתון מעגל קנוני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה C. נסמן ב-B את אמצע הקטע AC. מנקודה C העבירו מקביל ל-AO (O ראשית הצירים). מצא את המקום הגאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל-AO.

17 נתונות הנקודות $A(4, 0)$ ו- $B(-2, 0)$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C כך שהקטע CO (ראשית הצירים) הוא חוצה זווית $\sphericalangle C$ במשולש $\triangle ABC$.

18 נתון מעגל קנוני שרדיוסו R. את נקודה A שעל המעגל חיברו עם ראשית הצירים ועל הקטע AO (O ראשית הצירים) סימנו נקודה B כך שמתקיים $AB : BO = a : b$. מנקודה A העבירו אנך לציר ה- x ומנקודה B העבירו אנך לציר ה- y . א. מצא את המקום הגאומטרי של מפגש האנכים הללו. ב. המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- y בנקודות P ו-Q. מצא את אורך הקטע PQ.

תשובות סופיות:

- $$\left(x+1\frac{1}{2}\right)^2+(y-12)^2=38\frac{1}{4} \quad \text{(2)}$$
- $$y^2=24x \quad \text{(4)}$$
- $$y^2=16-8x, 0 < x < 4, -4 < y < 4 \quad \text{(6)}$$
- $$(x+3)^2+(y-4)^2=25 \quad \text{(8)}$$
- $$y=3x-16, x \neq 5\frac{1}{3} \quad \text{(10)}$$
- $$(x-2)^2+(y-1)^2=12 \quad \text{(12)}$$
- $$x=6, -10 < y < 10 \quad \text{(14)}$$
- $$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \text{(16)}$$
- $$y=-2x \quad \text{(1)}$$
- $$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1 \quad \text{(3)}$$
- $$x+11y+4=0, 7x+13y-8=0 \quad \text{(5)}$$
- $$y=6x-16 \quad \text{(7)}$$
- $$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \text{(9)}$$
- $$y=3x-7 \quad \text{(11)}$$
- $$(x-a)^2+(y-b)^2=4R^2 \quad \text{(13)}$$
- $$3x+8y-12=0, 0 < y < 3, 0 < x < 4 \quad \text{(15)}$$
- $$(x+4)^2+y^2=16 \quad \text{(17)}$$
- $$PQ=\frac{2bR}{a+b} \quad \text{ב.} \quad b^2x^2+(a+b)^2y^2=R^2b^2 \quad \text{א.} \quad \text{(18)}$$

תרגילי הוכחה:

- (1) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישרים $x = R$ ו- $x = -R$ בנקודות A ו-B. הוכח: $y_A \cdot y_B = R^2$.
- (2) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$, שחותך את ציר ה-y בנקודות $A(0, R)$ ו- $B(0, -R)$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר $y = R$ בנקודה T. הוכח: $OT \parallel BP$.
- (3) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ש- F_1 ו- F_2 הם מוקדיה. הוכח: $PO^2 + PF_1 \cdot PF_2 = a^2 + b^2$ (O ראשית הצירים).
- (4) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A וקדקודה השמאלי הוא B. הישר AP חותך את הישר $x = -a$ בנקודה K והישר BP חותך את הישר $x = a$ בנקודה L. הוכח: $y_K \cdot y_L = 4b^2$.
- (5) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. הוכח: היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדול, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדול שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע.
- (6) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A, קדקודה השמאלי הוא B ומוקדה הימני הוא F_1 . הישר AP חותך את הישר $x = \frac{a^2}{c}$ בנקודה M והישר BP חותך את הישר $x = \frac{a^2}{c}$ בנקודה N. הוכח: $\angle MF_1N = 90^\circ$.
- (7) נתונה האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא $-\frac{b^2}{a^2}$.
- (8) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים נורמל. הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה-x הוא גודל קבוע.

(9) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים משיקים משתי נקודות שעליה, A ו-B. המשיקים נפגשים בנקודה C. הוכח: $y_A + y_B = 2y_C$.

(10) בנקודה A, שעל הפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים משיק לפרבולה שחותך את המדרוך שלה בנקודה B. ממוקד הפרבולה מעלים אנך לציר ה- x שחותך את המשיק בנקודה C. הוכח: $FB = FC$ (F - מוקד הפרבולה).

(11) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים מיתר, החותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. המיתר חותך את ציר ה- x בנקודה C. הוכח: $x_A \cdot x_B = (x_C)^2$.