

תוכן העניינים:

2	פרק 26
2	חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי ומציאת פונקציה קדומה
2	האינטגרל הכללי :
2	הגדרה וכללי האינטגרציה :
2	שאלות :
2	שאלות העוסקות בחישובי אינטגרלים :
6	שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה :
9	תשובות סופיות :

פרק 26

חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי ומציאת פונקציה קדומה

האינטגרל הכללי:

הגדרה וכללי האינטגרציה:

• כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

• עבור מקדם קבוע a נקבל: $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

• כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

שאלות:

שאלות העוסקות בחישובי אינטגרלים:

1) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$ ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$ ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$ ו. $\int 7 dx$

ז. $\int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$ ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

2 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int x^{-3} dx & \text{א.} \\ \int \frac{1}{x^3} dx & \text{ב.} \\ \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx & \text{ג.} \\ \int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx & \text{ד.} \end{array}$$

3 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int x^{\frac{1}{2}} dx & \text{א.} \\ \int \sqrt{x} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{ג.} \\ \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx & \text{ד.} \end{array}$$

4 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \int (5x-1)^3 dx & \text{א.} & \int 3(2-7x)^4 dx \quad \text{ב.} \\ \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx & \text{ד.} & \int \sqrt{ax+bdx} \quad \text{ה.} \\ \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx & \text{ג.} & \end{array}$$

5 מצא את תוצאת החילוק :

$$\begin{array}{ll} \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} = & \text{א.} \\ \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} = & \text{ב.} \\ \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} = & \text{ג.} \\ \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} = & \text{ה.} \\ \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} = & \text{ד.} \end{array}$$

6 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} dx & \text{ה.} \\ \int \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{2x^5 + x^4 - 4x^2 + 1}{2x + 1} dx & \text{ו.} \end{array}$$

7 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\int -\frac{2x}{(x^2-1)^2} dx \quad \text{א.}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^3+6)^2} dx \quad \text{ב.}$$

$$\int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2} dx \quad \text{ג.}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}} dx \quad \text{ה.}$$

$$\int 8x(x^2+1)^3 dx \quad \text{ו.}$$

$$\int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx \quad \text{ז.}$$

8 חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \left(\sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx \quad \text{א.}$$

$$\int \left(\cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx \quad \text{ג.}$$

9 חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות) :

$$\int (2 \sin x \cos x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int (\sin 3x \cos 3x) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx \quad \text{ג.}$$

$$\int (\sin^2 x) dx \quad \text{ד.}$$

10 חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx \quad \text{א.}$$

$$\int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int (\cos x \sin^2 x) dx \quad \text{ג.}$$

11 חשב את האינטגרלים הבאים :

ב. $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$

א. $\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$

ד. $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

ג. $\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$

ו. $\int (\cos x + \sin x)^2 dx$

ה. $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

ח. $\int \tan^2 x dx$

ז. $\int (\sin x \cos x \cos(2x)) dx$

י. $\int \cos^2 x dx$

ט. $\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx$

יא. $\int \sin^2 4x dx$

12 חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר) :

ב. $\int \cos^4 x dx$

א. $\int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx$

ד. $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$

ג. $\int \sin^4 4x dx$

ה. $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$

שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה:

13 נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2, -1)$.

14 נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצא את הפונקציה.

15 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x^2 - 8x + 2$. נתון: $f(-2) = 1$.

א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

16 נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x) = 9x^2 - 4$.

ערך הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

17 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 3$.

לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

18 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -6x - 5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.

ג. מצא את משוואת המשיק.

19 הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x - 4$.

הישר $y = 2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

20 נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$. שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1. מצא את הפונקציה.

21 נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x) : f''(x) = 8x - 6$.

א. מצא את $f'(x)$ אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = 2$.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא $\frac{2}{3}$.

22 נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x) : f''(x) = 2x - 3$.

א. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 4. מצא את $f'(x)$.

ב. ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצא את $f(x)$.

23 נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.

המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$. מצא את הפונקציה.

24 נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$ הוא 3. מצא את הפונקציה.

25 נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \cos x + 4 \sin 2x$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2})$.

26 נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = -\cos x - 4 \sin 2x$.

שיפוע הפונקציה בנקודה (π, π) הוא 3. מצא את הפונקציה.

(27) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \sin x + \cos x$.

- א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים.
 הוכח כי הנגזרת $f'(x)$ והפונקציה המקורית $f(x)$ מקיימות את המשוואה: $f(x) + f'(x) = 2\sin x + 1$.
- ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ באופן הבא: $g(x) = f(x) + f'(x)$.
- i. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.
 - ii. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.
 - iii. כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת.

תשובות סופיות:

$$7x+c. \text{א} \quad \frac{x^6}{9}+c. \text{ב} \quad \frac{x^4}{2}+c. \text{ג} \quad \frac{x^5}{5}+c. \text{ד} \quad 2x^6+c. \text{ה} \quad \frac{x^4}{4}+c. \text{ו} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c. \text{א} \quad \frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c. \text{ב}$$

$$.2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c. \text{א} \quad -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c. \text{ב} \quad -\frac{1}{2x^2}+c. \text{ג} \quad -\frac{x^{-2}}{2}+c. \text{ד} \quad \text{(2)}$$

$$.8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c. \text{א} \quad 2\sqrt{x}+c. \text{ב} \quad \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c. \text{ג} \quad \frac{x^{1.5}}{1.5}+c. \text{ד} \quad \text{(3)}$$

$$-\frac{3}{6x+5}+c. \text{א} \quad -\frac{3(2-7x)^5}{35}+c. \text{ב} \quad \frac{(5x-1)^4}{20}+c. \text{ג} \quad \text{(4)}$$

$$\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c. \text{א} \quad \frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c. \text{ב}$$

$$x^3-2x^2+5x-1. \text{א} \quad x^2+2x+5. \text{ב} \quad x-7. \text{ג} \quad \text{(5)}$$

$$x^2-4. \text{א} \quad x^2-x-3. \text{ב}$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c. \text{א} \quad \frac{x^3}{3}+x^2+5x+c. \text{ב} \quad \frac{x^2}{2}-7x+c. \text{ג} \quad \text{(6)}$$

$$\frac{x^5}{5}-x^2+x+c. \text{א} \quad \frac{x^3}{3}-4x+c. \text{ב} \quad \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+c. \text{ג}$$

$$-\frac{1}{2(x^2-4x+1)}+c. \text{א} \quad -\frac{1}{3(x^3+6)}+c. \text{ב} \quad \frac{1}{x^2-1}+c. \text{ג} \quad \text{(7)}$$

$$(x^2+1)^4+c. \text{א} \quad -6\sqrt{x-x^2}+c. \text{ב} \quad \sqrt{x^2+2}+c. \text{ג}$$

$$\frac{(6x-x^3)^3}{9}+c. \text{ד}$$

$$\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4 \tan 3x}{3}+c. \text{א} \quad -\cos x-3 \sin x+4 \tan x+5x+c. \text{ב} \quad \text{(8)}$$

$$\cos(\pi-x)+\tan x+x+c. \text{ג}$$

$$-\frac{\sin 2x}{2}+c. \text{א} \quad -\frac{\cos 6x}{12}+c. \text{ב} \quad -\frac{1}{2}\cos 2x+c. \text{ג} \quad \text{(9)}$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c. \text{ד}$$

$$\frac{1}{3}\sin^3 x+c. \text{א} \quad \frac{1}{\cos x}+c. \text{ב} \quad 2\sqrt{\sin x}+c. \text{ג} \quad \text{(10)}$$

$$-\frac{1}{10}\cot 10x+c .\lambda \quad \frac{1}{4}\tan 4x+c .\beth \quad -\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin \frac{x}{3}+c .\aleph \quad \mathbf{(11)}$$

$$x-\frac{1}{2}\cos 2x+c .\iota \quad \frac{1}{2}\sin 2x+c .\hept \quad \frac{1}{2}\sin 2x+c .\daleth$$

$$\tan x-\cot x+c .\upsilon \quad \tan x-x+c .\hefty \quad -\frac{1}{16}\cos 4x+c .\aleph$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+c .\aleph \quad \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c .\daleth$$

$$\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c .\beth \quad \frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c .\aleph \quad \mathbf{(12)}$$

$$-\cot x-x+c .\daleth \quad \frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c .\lambda$$

$$-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c .\hept$$

$$. f(x) = x^3 - 7x + 5 \quad \mathbf{(13)}$$

$$. f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad \mathbf{(14)}$$

$$. y = -5x + 27 .\beth \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3} .\aleph \quad \mathbf{(15)}$$

$$.(0, -2) , (0.4, 0) .\lambda \quad f(x) = 3x^3 - 4x + 4 .\beth \quad y = 5x - 2 .\aleph \quad \mathbf{(16)}$$

$$. f(x) = x^2 - 3x + 7 .\beth \quad x = 0 .\aleph \quad \mathbf{(17)}$$

$$. y = x - 5 .\lambda \quad f(x) = -3x^2 - 5x - 8 .\beth \quad x = -1 .\aleph \quad \mathbf{(18)}$$

$$. f(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + 11 \quad \mathbf{(19)}$$

$$. f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad \mathbf{(20)}$$

$$. f(x) = \frac{4x^3}{3} - 3x^2 - 4x + 10 .\beth \quad f'(x) = 4x^2 - 6x - 4 .\aleph \quad \mathbf{(21)}$$

$$. f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{6} .\beth \quad f'(x) = x^2 - 3x + 6 .\aleph \quad \mathbf{(22)}$$

$$. f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad \mathbf{(23)}$$

$$. f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad \mathbf{(24)}$$

$$. f(x) = \sin x - 2 \cos 2x + 2 \quad \mathbf{(25)}$$

$$. f(x) = \sin 2x + \cos x + x + 1 \quad \mathbf{(26)}$$

$$. y = -0.746x + 4.172 \quad \text{.iii} \quad (0.75\pi, \sqrt{2} + 1) \quad \text{.ii} \quad (0.5\pi, 3) \quad \text{.i} \quad \mathbf{(27)}$$