

תוכן עניינים:

2	פרק 18
2	נגזרות ומשיקים
2	סיכום כללי :
2	פונקציות נפוצות :
2	הנגזרת :
3	כללי הגזירה :
3	שיפוע של פונקציה :
4	שאלות :
8	תשובות סופיות :

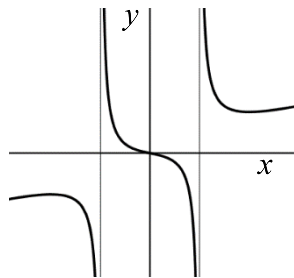
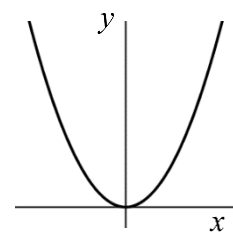
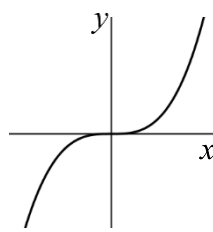
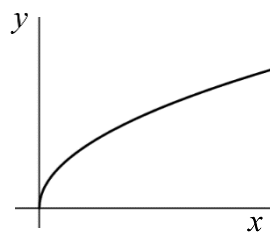
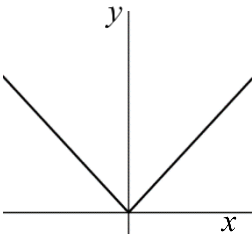
פרק 18

חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1 : $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע) : $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע) : $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש) : $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת) : $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$) : $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה) : $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה) : $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש) : $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר : $m = f'(x_1)$
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = x^2$.ג	$f(x) = x^7$.ב	$f(x) = x^3$.א
$f(x) = x^{-1}$.ו	$f(x) = x^{-3}$.ה	$f(x) = x$.ד
$f(x) = x^{\frac{3}{4}}$.ט	$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.ח	$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.ז

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = \frac{1}{2}x^4$.ג	$f(x) = 3x^7$.ב	$f(x) = 2x^3$.א
$f(x) = 3x^{-2}$.ו	$f(x) = 8x$.ה	$f(x) = \frac{x^6}{7}$.ד
$f(x) = \frac{x^3}{3}$.ט	$f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$.ח	$f(x) = \frac{4}{x}$.ז

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = \frac{7}{8}$.ב	$f(x) = 12$.א
-------------------------	----------------

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$.ב	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$.א
---	---------------------------------

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = 3(x-x^2)^2$.ג	$f(x) = (x^3+6)^5$.ב	$f(x) = (5x-2)^3$.א
	$f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$.ה	$f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$.ד

6 גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$.ג	$f(x) = -\frac{2}{x}$.ב	$f(x) = \frac{3}{x}$.א
$f(x) = \frac{2}{3-x}$.ו	$f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$.ה	$f(x) = \frac{3}{x^3}$.ד
		$f(x) = \frac{6}{x+5}$.ז

7 גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = (5x+1)^3(x-3)$.ב	$f(x) = (5x+1)(x-3)$.א
	$f(x) = x^3(6-x)^4$.ג

8 גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$.ג	$f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$.ב	$f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$.א
$f(x) = \frac{3}{x^3}$.ו	$f(x) = \frac{1}{x}$.ה	$f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$.ד

9 גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = \sqrt{x^3-1}$.ג	$f(x) = 4\sqrt{x+1}$.ב	$f(x) = \sqrt{x}$.א
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$.ו	$f(x) = x^2\sqrt{x+3}$.ה	$f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$.ד

10 גזור את הפונקציות הבאות:

$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a}$.ג	$f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c$.ב	$f(x) = ax^4 - bx$.א
		$f(x) = a\sqrt{bx^2+c}$.ד

11 מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

12 מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x = -2$.

13 מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

14 מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

15 מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

16 מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

17 מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

18 נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

19 מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

20 מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

21 מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ ששיפועו -2.

22 מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

23 שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ (פרמטר a) בנקודה שבה $x=3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(24) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ (פרמטר a) בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(25) נתונה הפונקציה $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (פרמטר a).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר a .

(26) נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (פרמטר A).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A .

(27) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ (פרמטרים a, b) בנקודה $(1, 6)$ הוא -6.
מצא את ערכי הפרמטרים a, b ואת משוואת המשיק.

(28) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה בה $x = t$.
- ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

תשובות סופיות:

(1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$

ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

(2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

(3) א. 0 ב. 0

(4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$

(5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$

(6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$

ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$

(7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$

(8) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$

(9) א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

(10) א. $4ax^3 - b$ ב. $\frac{2ax}{3} - \frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$

$m = 17$ (11)

$m = 4$ (12)

$m = 2$ (13)

$y = 24x + 22$ (14)

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad \text{(15)}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \quad \text{(16)}$$

$$y = 22x - 56 \quad \text{(17)}$$

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ .ג} \quad y = 3x - 1 \text{ .א} \quad \text{(18)}$$

$$y = 6x - 24, y = -6x - 12 \quad \text{(19)}$$

$$y = 2x - 3 \quad \text{(20)}$$

$$y = -2x + 8 \quad \text{(21)}$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \quad \text{(22)}$$

$$a = 2, y = 8x - 18 \quad \text{(23)}$$

$$a = 2, y = -4x - 2 \quad \text{(24)}$$

$$a = 4 \quad \text{(25)}$$

$$A = 1 \quad \text{(26)}$$

$$b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \quad \text{(27)}$$

$$.t = 0, -2 \text{ .ג} \quad y = 2tx - t^2 + 1 \text{ .א} \quad \text{(28)}$$