

מתמטיקה 4 יחידות שאילון 804

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תלמידים יקרים

ספר תרגילים זה הוא פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד על פי תכנית הלימודים של משרד החינוך. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

יוחאי טוויג



תוכן עניינים כללי:

אלגברה	4
גיאומטריה אוקלידית	164
טריגונומטריה	261
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	281
נספחים	450

הערות כלליות:

1. בכל נושא מופיע תוכן העניינים המפורט.
2. הפרקים בספר בנויים מחלק תיאורטי, תרגול נוסף ותרגול מבגרויות. השאלות שבמסגרת החלקים התיאורטיים מוקלטות בוידאו באתר גול. התרגול הנוסף והתרגול מבגרויות מכיל שאלות נוספות שאינן מוקלטות ומטרתן היא לתרגל את החומר הנלמד.
3. בשאלות החקירה תוכלו למצוא את הסקיצות באופן מרוכז בסוף דפי התשובות.
4. בנושאים "בעיות מקסימום ומינימום" ו-"חשבון אינטגרלי" תוכלו למצוא קובץ שאלות חזרה מבגרויות משנים קודמות ברמה של 3 יחידות לימוד, אשר מוקלטות בוידאו באתר גול.
5. קישור לחוברת הבחינות : <http://www.gool.co.il/misc/exams-804-805-lachman.pdf>

תוכן העניינים – פרקי אלגברה:

7	פרק 1 – מבוא לאלגברה:
18	פרק 2 – טכניקה אלגברית:
18	פירוק הטרינום:
19	משוואות:
19	משוואה ממעלה ראשונה:
20	מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:
21	משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:
21	משוואה ממעלה שנייה:
22	משוואות ממעלה שלישית ומשוואות דו-ריבועיות:
22	משוואות עם פרמטרים:
23	משוואות עם שורשים:
24	משוואות עם ערך מוחלט:
24	מערכת משוואות ממעלה שנייה:
25	תשובות סופיות:
27	אי שוויונים:
27	אי-שוויונים ממעלה ראשונה:
27	אי-שוויונים ממעלה שנייה:
28	אי-שוויונים ממעלה שלישית:
28	אי-שוויונים עם מנה:
28	אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:
29	שאלות מסכמות – אי-שוויונים:
29	תשובות סופיות:
30	תחום הגדרה:
30	תשובות סופיות:
31	פרק 3 – בעיות מילוליות:
31	בעיות תנועה:
34	תשובות סופיות:
35	בעיות קנייה ומכירה:
40	תשובות סופיות:
41	בעיות בהנדסת המישור:
44	תשובות סופיות:
45	בעיות בהנדסת המרחב:
46	תשובות סופיות:
47	תירגול נוסף:
47	בעיות תנועה:

52	בעיות קנייה ומכירה :
56	בעיות בהנדסת המישור :
58	בעיות בהנדסת המרחב :
61	תשובות סופיות :
63	תרגול מבגרויות :
63	בעיות קנייה ומכירה :
64	בעיות תנועה :
65	בעיות הנדסת המישור :
65	בעיות בהנדסת המרחב :
66	תשובות סופיות :
67	פרק 4 – גאומטריה אנליטית :
67	הישר :
69	תשובות סופיות :
69	המעגל :
70	תשובות סופיות :
71	תרגול נוסף – הישר (שאלות מסכמות) :
84	תשובות סופיות :
87	תרגול נוסף - המעגל (שאלות מסכמות ללא משיק) :
92	תרגול נוסף – המעגל (שאלות מסכמות כולל משיק) :
100	תרגול נוסף – המעגל (שאלות מסכמות עם שני מעגלים) :
102	תשובות סופיות :
105	תרגול מבגרויות :
109	תשובות סופיות :
110	פרק 5 - הסתברות קלאסית :
110	הגדרות כלליות :
111	שאלות יסודיות :
117	תרגול נוסף - שאלות שונות לפי נושאים :
117	כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות בלתי תלויים :
118	כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות תלויים :
122	שאלות עם נעלמים :
125	התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי :
132	תרגילים עם הסתברות מותנה :
137	תרגילי חישוב הכוללים שימוש בנוסחאות בהסתברות :
139	תרגילי הוכחה בעזרת נוסחאות ההסתברות :
141	תשובות סופיות :
143	תרגול נוסף - שאלות משולבות :
157	תשובות סופיות :

159.....: תרגול מבגרויות

163.....: תשובות סופיות :

פרק 1 – מבוא לאלגברה:

בסרטון זה הסבר על פעולות חשבון במספרים

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 2$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$6-1 \quad (3) \qquad 6+1 \quad (2)$$

$$-6+1 \quad (5) \qquad -6-1 \quad (4)$$

$$-5-13+9 \quad (6)$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$5+7-23+1 \quad (7)$$

$$5-8-12+17 \quad (8)$$

בסרטון זה הסבר על כפל וחילוק במספרים מכוונים

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$-2 \cdot (-5) \quad (10) \qquad 2 \cdot 5 \quad (9)$$

$$2 \cdot (-5) \quad (12) \qquad -2 \cdot 5 \quad (11)$$

$$(-2) \cdot 3 \cdot (-4) \quad (14) \qquad (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \quad (13)$$

$$-50 : -10 \quad (16) \qquad 8 : 4 \quad (15)$$

$$6 : -2 \quad (18) \qquad -15 : 3 \quad (17)$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$-7 \cdot (-2) \quad (21) \qquad (-30) : 3 \quad (20) \qquad (-25) : (-5) \quad (19)$$

$$0 : 5 \quad (24) \qquad \frac{-12}{-3} \quad (23) \qquad \frac{32}{-4} \quad (22)$$

$$(-2) \cdot 0 \quad (25)$$

בסרטון זה הסבר על חזקה ושורש

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| 2^6 (27) | 2^4 (26) |
| $(-2)^4$ (29) | 2^3 (28) |
| -2^4 (31) | $(-2)^3$ (30) |
| (-2^4) (33) | -2^3 (32) |
| $\sqrt[3]{64}$ (35) | $\sqrt{64}$ (34) |
| $\sqrt{-16}$ (37) | $\sqrt[5]{32}$ (36) |
| $\sqrt[4]{-64}$ (39) | $\sqrt[4]{64}$ (38) |
| $-3^4 + \sqrt[3]{-8}$ (41) | $\sqrt[3]{-64}$ (40) |

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

- | | |
|----------------------|----------------------|
| -4^2 (43) | $\sqrt{169}$ (42) |
| $(-3)^3$ (45) | $(-4)^2$ (44) |
| $\sqrt[4]{625}$ (47) | $\sqrt[3]{-27}$ (46) |
| $\sqrt[5]{-32}$ (49) | $\sqrt[4]{-16}$ (48) |
| | $-(-5)^2$ (50) |

בסרטון זה הסבר על סדר פעולות חשבון

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

- | | |
|---|---|
| $(-2)^4 : 2 - 10 \cdot (-2)^3$ (52) | $\sqrt{196} + 5 \cdot 2^2 - 20 : 2$ (51) |
| $\sqrt{64} : (-4 + 2) - 4^2 \cdot (-3^2 + 10)$ (54) | $-3^2 - 4[5 + 4 \cdot (7 - 2)] + \sqrt{900}$ (53) |

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$$3+4 \cdot [-3+4 \cdot (-2)] + \sqrt{10+6} \quad (56) \qquad \sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2 \quad (55)$$

$$-\sqrt{9} + 5^2 : (-4-1) - 24 : 12 \cdot 3 \quad (58) \qquad (-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3 \quad (57)$$

$$\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 \quad (60) \qquad -2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5 \quad (59)$$

$$(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243}) \quad (62) \qquad [6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5 \quad (61)$$

$$\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\} \quad (63)$$

בסרטון זה הסבר על שברים

המירו את השברים המדומים לשברים מעורבים :

$$\frac{8}{5} \quad (65) \qquad \frac{3}{2} \quad (64)$$

המירו את השברים המעורבים לשברים מדומים :

$$12\frac{2}{5} \quad (67) \qquad 2\frac{3}{8} \quad (66)$$

איזה שבר גדול יותר?

$$\frac{3}{4} \text{ או } \frac{4}{5} \quad (70) \qquad \frac{3}{5} \text{ או } \frac{3}{7} \quad (69) \qquad \frac{3}{7} \text{ או } \frac{5}{7} \quad (68)$$

המירו את השברים העשרוניים לשברים פשוטים :

$$0.02 \quad (72) \qquad 0.3 \quad (71)$$

$$2.75 \quad (74) \qquad 1.012 \quad (73)$$

המירו את השברים הפשוטים לשברים עשרוניים :

$$\frac{12}{1000} \quad (78) \qquad \frac{3}{1000} \quad (77) \qquad \frac{1}{100} \quad (76) \qquad \frac{1}{10} \quad (75)$$

$$\frac{5}{6} \quad (82) \qquad \frac{7}{20} \quad (81) \qquad \frac{3}{50} \quad (80) \qquad 1\frac{12}{1000} \quad (79)$$

המירו את האחוזים לשברים פשוטים :

$$25\% \quad (84)$$

$$50\% \quad (83)$$

המירו את השברים הפשוטים לאחוזים :

$$\frac{5}{20} \quad (86)$$

$$\frac{4}{10} \quad (85)$$

המירו את השברים המדומים לשברים מעורבים :

$$\frac{19}{4} \quad (88)$$

$$-\frac{20}{3} \quad (87)$$

איזה שבר גדול יותר?

$$\frac{7}{6} \text{ או } \frac{7}{8} \quad (90)$$

$$\frac{4}{10} \text{ או } \frac{3}{10} \quad (89)$$

$$\frac{7}{12} \text{ או } \frac{5}{18} \quad (92)$$

$$\frac{5}{6} \text{ או } \frac{2}{3} \quad (91)$$

בסרטון זה הסבר על חיבור וחסור שברים

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$$\frac{5}{2} + \frac{7}{4} \quad (94)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \quad (93)$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{1}{6} \quad (96)$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{8} \quad (95)$$

$$1\frac{1}{8} - \frac{11}{12} \quad (98)$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{5} \quad (97)$$

$$1\frac{2}{21} - \frac{3}{14} \quad (100)$$

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{6} + \frac{8}{15} - \frac{3}{10} \quad (99)$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$ (102)	$\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ (101)
$2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$ (104)	$\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$ (103)
$3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$ (106)	$\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$ (105)
	$5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$ (107)

בסרטון זה הסבר על כפל וחילוק שברים

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$4 \cdot \frac{2}{5}$ (109)	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ (108)
$3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{5}$ (111)	$2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}$ (110)
$\frac{2}{5} : 4$ (113)	$\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$ (112)
$2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{5}$ (115)	$6 : \frac{3}{4}$ (114)
$\left(\frac{3}{4}\right)^3$ (117)	$\frac{5}{9} : 3\frac{1}{3}$ (116)
$\frac{9}{20} \cdot 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ (119)	$\frac{3^3}{4}$ (118)

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$5\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ (121)	$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$ (120)
$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ (123)	$\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$ (122)
$3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ (125)	$\frac{5}{6} : 3$ (124)
	$8 \cdot \frac{3}{2} : \frac{12}{20}$ (126)

בסרטון זה הסבר על הצבה בתבנית מספר

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$$a^5 - 3a^4 - a^3 + 7, \quad a = -1 \quad (128)$$

$$(x+y)^3, \quad x=5 \quad y=-4 \quad (127)$$

$$16m^2 - 9n^2, \quad m = \frac{1}{2} \quad n = -\frac{1}{3} \quad (129)$$

הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר :

$$\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2 \quad a=2, c=-2 \quad (131)$$

$$\frac{4a^2 - 3b}{c} \quad a=-1, b=2, c=-4 \quad (130)$$

$$(x-3)^2 + 3x^2b \quad x=5, b=-1 \quad (133)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \quad a=3, b=-5 \quad (132)$$

$$-x^3 - 2xy + y^4 \quad x=-2, y=-1 \quad (134)$$

בסרטון זה הסבר על כינוס איברים

כנס איברים דומים :

$$a^5 + a^5 \quad (136)$$

$$5x + 3x - 12x \quad (135)$$

$$1 + b^2 - 2b - 3 - 2b^2 \quad (138)$$

$$7m + 11 - 9m - 2 \quad (137)$$

$$x^2y - xy + 3y^2x + 9xy - 5xy^2 \quad (140)$$

$$4ab - 3a^2b + 3b^2a - 5ab \quad (139)$$

$$10m^2n - \{3mn^2 - [m^2n - 2m]5\} \quad (141)$$

כנס איברים דומים :

$$5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2 \quad (143)$$

$$8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2 \quad (142)$$

בסרטון זה הסבר על פתיחת סוגריים

פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים :

$x(x+5)$ (145)	$2(x+4)$ (144)
$-2(b-2x)$ (147)	$7(a-3)$ (146)
$\frac{2}{3}(6x-3y)$ (149)	$x(x^2+3x-2)$ (148)
$(3x+2y)5$ (151)	$-(5y-7)$ (150)
$x+5(2x-1)$ (153)	$-3x(2x-y)$ (152)
$(x+3)(5-x)$ (155)	$(x+4)(x+5)$ (154)
$(2x-5)(2x+5)$ (157)	$3(x-1)(x-3)$ (156)
$a(a-2b+c)$ (159)	$4(3x-2)-(2x-1)(3x+5)$ (158)

בסרטון זה הסבר על נוסחאות כפל מקוצר

פשט את הביטויים הבאים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר :

$(a+3)^2$ (161)	$(x+2)^2$ (160)
$\left(c+\frac{1}{4}\right)^2$ (163)	$(b+1)^2$ (162)
$(5y+4t)^2$ (165)	$(2m+5)^2$ (164)
	$(x^2y+11)^2$ (166)

פשט את הביטויים הבאים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר :

$(5-x)^2$ (168)	$(x-4)^2$ (167)
$(2m-4c)^2$ (170)	$(4x-2)^2$ (169)
$(9-x)(9+x)$ (172)	$(x-7)(x+7)$ (171)
	$(3x-4)(3x+4)$ (173)

בסרטון זה הסבר על פירוק לגורמים

פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

$3x-6$	(175)	$2x-4$	(174)
$64+8a$	(177)	$80-4x$	(176)
x^3-x	(179)	x^2+3x	(178)
$4x^3+12x^2$	(181)	x^5-2x^2	(180)

בסרטון זה הסבר על פירוק לפי נוסחאות

פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ושימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

$9a^2+12a+4$	(183)	x^2+6x+9	(182)
$x^2-16x+64$	(185)	$12x^2+60x+75$	(184)
$2x^2-36x+162$	(187)	$a^2-10a+25$	(186)
x^2-16	(189)	a^2-9	(188)
$100x^2-49$	(191)	$81-x^2$	(190)
x^3-x	(193)	$49x-x^3$	(192)
m^2-9	(195)	$x^2-10x+25$	(194)

בעיות יסודיות באחוזים

196) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.

א. כמה בנות בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

197) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.

א. כמה תלמידים בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

198) מחיר בגד-ים הוא 300 ש"ח. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.

א. מהו מחירו בסוף העונה?

ב. מה גודל ההנחה?

199) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכך מועלה מחירו ב-8%.

א. מה מחירו הסופי?

ב. מה גודל ההתייקרות?

200) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.

בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

201) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.

מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

202) באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים. מה אחוז הבנים בקהל?

203) בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?

204) מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

205) מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

206) מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

207) מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

פתרונות:

- -3.5 -2.5 -1.5 -1 -0.5 | 0.5 1.5 2 3.5 (1)
- .10 (10) .10 (9) .2 (8) .-10 (7) .-9 (6) .-5 (5) .-7 (4) .5 (3) .7 (2)
 .-3 (18) .-5 (17) .5 (16) .2 (15) .24 (14) .-24 (13) .-10 (12) .-10 (11)
 .64 (27) .16 (26) .0 (25) .0 (24) .4 (23) .-8 (22) .14 (21) .-10 (20) .5 (19)
 .2 (36) .4 (35) .8 (34) .-16 (33) .-8 (32) .-16 (31) .-8 (30) .16 (29) .8 (28)
 .16 (44) .-16 (43) .13 (42) .-83 (41) .-4 (40) בח"מ. (39) .2.8 (38) בח"מ. (37)
 .88 (52) .24 (51) .-25 (50) .-2 (49) בח"מ. (48) .5 (47) .-3 (46) .-27 (45)
 .-21 (60) .5 (59) .-14 (58) .31 (57) .-37 (56) .19 (55) .-20 (54) .-79 (53)
 $\frac{5}{7}$ (68) $\frac{62}{5}$ (67) $\frac{19}{8}$ (66) $1\frac{3}{5}$ (65) $1\frac{1}{2}$ (64) .20 (63) .-44 (62) .-16 (61)
 .0.01 (76) .0.1 (75) $2\frac{3}{4}$ (74) $1\frac{3}{250}$ (73) $\frac{1}{50}$ (72) $\frac{3}{10}$ (71) $\frac{4}{5}$ (70) $\frac{3}{5}$ (69)
 $\frac{1}{2}$ (83) .0.833 (82) .0.35 (81) .0.06 (80) .1.012 (79) .0.012 (78) .0.003 (77)
 $\frac{5}{6}$ (91) $\frac{7}{6}$ (90) $\frac{4}{10}$ (89) $4\frac{3}{4}$ (88) $-6\frac{2}{3}$ (87) .25% (86) .40% (85) $\frac{1}{4}$ (84)
 $\frac{13}{15}$ (99) $\frac{5}{24}$ (98) $\frac{79}{60}$ (97) $1\frac{1}{18}$ (96) $1\frac{1}{8}$ (95) $4\frac{1}{4}$ (94) .1 (93) $\frac{7}{12}$ (92)
 $7\frac{11}{12}$ (106) $-\frac{1}{20}$ (105) $2\frac{13}{18}$ (104) .5 (103) $1\frac{5}{6}$ (102) $1\frac{5}{8}$ (101) $-2\frac{5}{42}$ (100)
 .8 (114) $\frac{1}{10}$ (113) $\frac{4}{5}$ (112) .8 (111) $2\frac{11}{12}$ (110) $1\frac{3}{5}$ (109) $\frac{4}{15}$ (108) $-\frac{5}{8}$ (107)
 .32 (121) $\frac{8}{21}$ (120) $3\frac{1}{10}$ (119) $6\frac{3}{4}$ (118) $\frac{27}{64}$ (117) $\frac{1}{6}$ (116) $2\frac{2}{9}$ (115)
 3 (129) .4 (128) .1 (127) .20 (126) $\frac{2}{3}$ (125) $\frac{5}{18}$ (124) $15\frac{2}{5}$ (123) $1\frac{4}{5}$ (122)
 $2a^5$ (136) $-4x$ (135) .5 (134) .-71 (133) .4 (132) .644 (131) $\frac{1}{2}$ (130)
 $-2y^2x+8xy+x^2y$ (140) $-ab-3a^2b+3b^2a$ (139) $-b^2-2b-2$ (138) $-2m+9$ (137)
 $2x+8$ (144) $25a^2b-22ab^2$ (143) $4a^2-a$ (142) $15m^2n-3mn^2-10m$ (141)
 $4x-2y$ (149) x^3+3x^2-2x (148) $-2b+4x$ (147) $7a-21$ (146) x^2+5x (145)
 $15x+10y$ (151) $-5y+7$ (150)
 $-x^2+2x+15$ (155) $x^2+9x+20$ (154) $11x-5$ (153) $-6x^2+3xy$ (152)

$a^2 - 2ab + ac$ (159) $-6x^2 + 5x - 3$ (158) $4x^2 - 25$ (157) $3x^2 - 12x + 9$ (156)
 $c^2 + \frac{c}{2} + \frac{1}{16}$ (163) $b^2 + 2b + 1$ (162) $a^2 + 6a + 9$ (161) $x^2 + 4x + 4$ (160)
 $x^2 - 8x + 16$ (167) $x^4y^2 + 22x^2y + 121$ (166) $25y^2 + 40yt + 16t^2$ (165) $4m^2 + 20m + 25$ (164)
 $x^2 - 49$ (171) $4m^2 - 16mc + 16c^2$ (170) $16x^2 - 16x + 4$ (169) $25 - 10x + x^2$ (168)
 $4(20 - x)$ (176) $3(x - 2)$ (175) $2(x - 2)$ (174) $9x^2 - 16$ (173) $81 - x^2$ (172)
 $4x^2(x + 3)$ (181) $x^2(x^3 - 2)$ (180) $x(x^2 - 1)$ (179) $x(x + 3)$ (178) $8(8 + a)$ (177)
 $(a - 5)^2$ (186) $(x - 8)^2$ (185) $3(2x + 5)^2$ (184) $(3a + 2)^2$ (183) $(x + 3)^2$ (182)
 $(x - 4)(x + 4)$ (189) $(a - 3)(a + 3)$ (188) $2(x - 9)^2$ (187)
 $x(7 - x)(7 + x)$ (192) $(10x - 7)(10x + 7)$ (191) $(9 - x)(9 + x)$ (190)
 $12 \cdot 18 \cdot 18$ (196) $(m - 3)(m + 3)$ (195) $(x - 5)^2$ (194) $x(x^2 - 1)$ (193)
 400 (201) 4.9755 (200) $40 \cdot 540 \cdot 18$ (199) $60 \cdot 240 \cdot 18$ (918) $12 \cdot 40 \cdot 18$ (197)
 25% (207) 33.33% (206) 33.33% (205) 50% (204) 60% (203) 88% (202)

פרק 2 – טכניקה אלגברית:

פירוק הטרינום:

פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

$$2x^2 + 7x - 15 \quad (2) \qquad 4x^2 + 8x + 3 \quad (1)$$

$$6x^2 + 5x + 1 \quad (4) \qquad 3x^2 - 11x + 6 \quad (3)$$

$$x^2 + 5x + 4 \quad (6) \qquad 2x^2 + x - 6 \quad (5)$$

$$x^2 - 33x + 62 \quad (8) \qquad x^2 - 8x + 15 \quad (7)$$

פרק את הביטויים הבאים:

$$4x^2 + 8x + 3 \quad (9)$$

$$6x^2 + 5x + 1 \quad (10)$$

$$x^2 + 5x + 4 \quad (11)$$

תשובות סופיות:

$$(3x-2)(x-3) \quad (3) \quad (2x-3)(x+5) \quad (2) \quad (2x+1)(2x+3) \quad (1)$$

$$(x+1)(x+4) \quad (6) \quad (x+2)(2x-3) \quad (5) \quad (3x+1)(2x+1) \quad (4)$$

$$(2x+1)(2x+3) \quad (9) \quad (x-2)(x-31) \quad (8) \quad (x-3)(x-5) \quad (7)$$

$$.(x+1)(x+4) \quad (11) \quad (3x+1)(2x+1) \quad (10)$$

משוואות:

משוואה ממעלה ראשונה:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 6x+2=8 \\ \text{ב.} & 7-2x=7 \\ \text{ג.} & 2x+x=24 \\ \text{ד.} & 2x+6=8+x \\ \text{ה.} & -7x+5+2x=4x-13 \\ \text{ו.} & 6x-3+5-7x=x-5x-7 \\ \text{ז.} & 2-5x+7=-3x+8 \end{array}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 3(x-1)-4=2 \\ \text{ב.} & 7x-4(3-4x)=-x \\ \text{ג.} & 6(4-x)-(6-x)=3x \\ \text{ד.} & 5x-(3x-7)4=21 \\ \text{ה.} & x(x-5)=x^2-7x+8 \\ \text{ו.} & (7-x)(1-x)-(x-3)^2=0 \end{array}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4 \\ \text{ב.} & \frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1 \\ \text{ג.} & \frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15} \\ \text{ד.} & \frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1 \\ \text{ה.} & \frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2 \\ \text{ו.} & 5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0 \\ \text{ב.} & \frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0 \\ \text{ג.} & \frac{3}{x}=\frac{1}{x+2} \\ \text{ד.} & \frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2} \\ \text{ה.} & \frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x} \end{array}$$

5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 \quad \text{ג.}$$

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

7) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

8) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

9) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

10) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \text{ ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \text{ ג.}$$

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

11) פתור את המשוואות הבאות:

$$5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \text{ ב.}$$

$$6(x-2) = 2x + 5 + 4x \text{ א.}$$

$$\begin{cases} 2(x-y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x-y) \end{cases} \text{ ד.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \text{ ג.}$$

משוואה ממעלה שנייה:

12) פתור את המשוואות הבאות:

$$-x^2 + 10x - 16 = 0 \text{ ב.}$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \text{ א.}$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ ד.}$$

$$25x^2 - 20x + 4 = 0 \text{ ג.}$$

13) פתור את המשוואות הבאות:

$$-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4 \text{ ב.}$$

$$4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 3 \text{ א.}$$

$$2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21 \text{ ג.}$$

14) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$32x^2 - 18 = 0 \text{ ב.}$$

$$x^2 - 36 = 0 \text{ א.}$$

15) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$5x^2 - x = 0 \text{ ב.}$$

$$-7x^2 - 14x = 0 \text{ א.}$$

16) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18$

א. $\frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x}$

ג. $\frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0$

משוואות ממעלה שלישית ומשוואות דו-ריבועיות:

17) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

א. $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$

ד. $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$

ג. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

משוואות עם פרמטרים:

18) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\frac{1}{3}(a-3x) = \frac{1}{a}(ax-3)$

א. $mx - 3m = 5x + 1$

ד. $\frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$

ג. $(x-2a)(x-2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2)$

ה. $\frac{x}{a^2-a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a} - \frac{2}{a^3-2a^2+a}$

19) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

ב. $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$

א. $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2y = 1 \end{cases}$

ה. $\begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$

20) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

ב. $x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$

א. $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

ד. $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$

ג. $x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x$

ו. $\frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$

ה. $(m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0$

ז. $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$

משוואות עם שורשים:

21) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\sqrt{x+2} = x$

א. $\sqrt{4x-3} = 5$

ד. $\sqrt{2x+7} + 4 = x$

ג. $\sqrt{3x+1} + x = 13$

ו. $\sqrt{10x+6} + 9 = x$

ה. $\sqrt{x-1} + 3 = x$

ח. $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$

ז. $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$

י. $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$

ט. $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$

יב. $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$

יא. $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$

יד. $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$

יג. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$

יז. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$

טו. $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$

יח. $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$

יז. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$

יט. $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$

משוואות עם ערך מוחלט:

22) פתור את המשוואות הבאות:

א. $ 2x-11 =7$	ב. $ 3x-24 =x$
ג. $ 12-x =3x$	ד. $2x- 8-x =10$
ה. $ 4x-5 = 2x+13 $	ו. $ 14-3x =2 x+5 $
ז. $ x +7= 2x $	ח. $ x+2 +6= 2x-4 $
ט. $ x+2 + 2x-6 = 4x+8 $	י. $ 10-3x - x+4 = 2x-6 $

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

23) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$	ב. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases}$
ג. $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases}$	ד. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases}$
ה. $\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases}$	ו. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases}$
ז. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases}$	ח. $\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases}$
ט. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases}$	י. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases}$
יא. $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases}$	יב. $\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases}$
יג. $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases}$	יד. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$ ז. $x=\frac{1}{2}$
- (2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$
- (3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$
- (4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$
- (5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6, x \neq 3$
- (6) א. $\left(4, \frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5}, 9\right)$
- (7) א. $(2, 5)$ ב. $(4, -2)$ ג. $(0, 1)$ ד. $(-2, 3)$ ה. $(-7, -10)$
- (8) א. $(6, 5)$ ב. $(7, 1)$ ג. $(7, 2)$
- (9) א. $(1, 1)$ ב. $(-3, 1)$ ג. $(1, 1)$
- (10) א. $(-1, -3)$ ב. $(2, 10)$ ג. $(-2, 4)$
- (11) א. אין פתרון ב. אינסוף פתרונות ג. אין פתרון למערכת המשוואות.
ד. אינסוף פתרונות.
- (12) א. $x_1=2, x_2=-5$ ב. $x_1=2, x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון למשוואה.
- (13) א. $x_1=0, x_2=1$ ב. $x_1=1, x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1, x_2=-10$
- (14) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm \frac{3}{4}$
- (15) א. $x_1=0, x_2=-2$ ב. $x_1=0, x_2=\frac{1}{5}$
- (16) א. $x_1=2, x_2=-1.2$ ב. $x=5, x \neq -3$ ג. $x_1=0, x_2=-5$
- (17) א. $x=\pm 1$ ב. $x=\pm 1, \pm \sqrt{2}$ ג. $x_1=1, x_2=2, x_3=\frac{1}{2}$ ד. $x_1=1, x_2=-1, x_3=-2\frac{1}{2}$
- (18) א. $m \neq 5, x=\frac{3m+1}{m-5}$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$
- (19) א. $(m+1, -1)$ ב. $m \neq 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1}\right)$ ג. $m \neq 0-1, \left(m^2-m+1, \frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$ ה. $b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$

$$.x = m - 5, -2m \ .\lambda \quad x = a - 1, 3 - a \ .\beth \quad x = m + 1, m - 1 \ .\aleph \quad \mathbf{(20)}$$

$$.a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \ .\aleph \quad x = 1, -\frac{1}{m^2 + 1} \ .\hebrew \quad a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \ .\daleth$$

$$.a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b} \ .\aleph$$

$$.x = 0.25 \ .\aleph \quad x = 25 \ .\aleph \quad x = 5 \ .\hebrew \quad x = 9 \ .\daleth \quad x = 8 \ .\lambda \quad x = 2 \ .\beth \quad x = 7 \ .\aleph \quad \mathbf{(21)}$$

$$.x = 5 \ .\daleth \quad x = 3 \ .\lambda \quad x = 4, -3 \ .\beth \quad x = 6 \ .\aleph \quad x = 5 \ .\daleth \quad x = 4.25 \ .\aleph \quad x = 3.75 \ .\hebrew$$

$$.x = 2 \ .\aleph \quad x = 1 \ .\hebrew \quad x = 6 \ .\daleth \quad x = 2, 2\frac{8}{9} \ .\aleph \quad x = 12 \ .\hebrew$$

$$.x = \pm 7 \ .\aleph \quad x = 24, \frac{4}{5} \ .\aleph \quad x = 9, -1\frac{1}{3} \ .\hebrew \quad x = 6 \ .\daleth \quad x = 3 \ .\lambda \quad x = 6, 12 \ .\beth \quad x = 2, 9 \ .\aleph \quad \mathbf{(22)}$$

$$.x = 0 \ .\daleth \quad x = 0, -12 \ .\aleph \quad x = 12, -1\frac{1}{3} \ .\hebrew$$

$$.(5, -2), (-5, 2) \ .\daleth \quad (\pm 2, \pm 1) \ .\lambda \quad (\pm 4, -2) \ .\beth \quad (2, 4), (4, 2) \ .\aleph \quad \mathbf{(23)}$$

$$.(5, -3) \ .\hebrew \quad (7, 4) \ .\aleph \quad \left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1) \ .\aleph \quad \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right) \ .\hebrew$$

$$.\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \ .\aleph \quad (6, 5), (-5, -6) \ .\daleth \quad (3, 6), (6, 3) \ .\aleph$$

$$.(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3) \ .\beth$$

$$.(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65) \ .\daleth \quad (7, 4), (-4, -7) \ .\lambda$$

$$.(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5) \ .\daleth$$

אי שוויוניים:

- | מה מותר? | מה אסור? |
|---|--|
| 1. לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי. | 1. לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו. |
| 2. לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי <u>חיובי</u> . | 2. להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי. |
| 3. לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון. | |
| 4. להעלות בחזקה אי זוגית. | |
| 5. להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים. | |

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$6x > 2(3x-1)$	(2)	$45x - 26 > 109$	(1)
$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20$	(4)	$2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6)$	(3)
$4(6x-8) < 8(3x-4)$	(6)	$\frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3}$	(5)
$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7$	(8)	$\frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x$	(7)

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$x^2 - 12x > -32$	(10)	$x^2 < 144$	(9)
$(x+2)(x+4) < 35$	(12)	$(x+2)(x+5) < 0$	(11)
$(x-3)(x-7) \geq 8x-56$	(14)	$-x^2 + 13x + 30 < 0$	(13)
$(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$	(16)	$(x-5)^2 + x(x+2) < 89$	(15)
$x^2 - 10x + 25 > 0$	(18)	$-3x^2 + 12x > 0$	(17)
$2x^2 + 2x + 24 \geq 0$	(20)	$(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$	(19)

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x(x^2 + x + 1) > 0 \quad (22)$$

$$x^3 - 25x \geq 0 \quad (24)$$

$$(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0 \quad (26)$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0 \quad (28)$$

$$(x - 2)(x - 4)(x - 1) < 0 \quad (30)$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0 \quad (21)$$

$$(-2x^2 - 3x + 2)(x + 1) \leq 0 \quad (23)$$

$$(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0 \quad (25)$$

$$(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0 \quad (27)$$

$$(x^2 + 6)(x + 3) > 0 \quad (29)$$

אי-שוויונים עם מנה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3 \quad (32)$$

$$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0 \quad (34)$$

$$\frac{1}{-3(x-1)} < 0 \quad (36)$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0 \quad (38)$$

$$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0 \quad (40)$$

$$\frac{x-1}{x^2-9} > 0 \quad (31)$$

$$\frac{1}{x^2-16} > 0 \quad (33)$$

$$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0 \quad (35)$$

$$\frac{x-1}{x+2} \leq 1 \quad (37)$$

$$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0 \quad (39)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (42)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (44)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (46)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (48)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (41)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (43)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (45)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (47)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (50) \quad x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (49)$$

$$\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (52) \quad \frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0 \quad (51)$$

$$x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (54) \quad \frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (53)$$

$$\frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (56) \quad \frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (55)$$

$$\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (58) \quad \frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (57)$$

$$\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (60) \quad \frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (59)$$

$$\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (62) \quad \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (61)$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (64) \quad x^2 > 3x+10 \cap 6 < 5x-x^2 \quad (63)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (65)$$

66) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $x > 3$ (2) כל x (3) אף x (4) $x > -2$ (5) $x < 5$ (6) אף x (7) $x \geq 12$ (8) $x > -13$

9) $-12 < x < 12$ (10) $x > 8, x < 4$ (11) $-5 < x < -2$ (12) $-9 < x < 3$

13) $x < -2, x > 15$ (14) $x \leq 7, x \geq 11$ (15) $-4 < x < 8$ (16) $-4 \leq x \leq 0$

17) $0 < x < 4$ (18) $x > 5, x < 5$ (19) $x < 3, x > 5$ (20) כל x

21) $x > 3$ או $1 < x < 2$ (22) $x > 0$ (23) $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (24) $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$

25) $x > 2$ (26) $x \leq 1\frac{2}{3}$ (27) $x < -2, 1 < x < 3$ (28) $x \leq 0, x = 3$ (29) $x > -3$

30) $x < 1, 2 < x < 4$ (31) $-3 < x < 1, x > 3$ (32) $x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2}$

33) $x < -4, x > 4$ (34) $2 < x < 3, x > 3$ (35) $\frac{1}{2} \leq x < 5$ (36) $x > 1$ (37) $x > -2$

- (38) $2 < x < 3$ (39) $1 \leq x \leq 6$ (40) $x > 6$, $x < 2$ (41) $2 < x < 4$ (42) $x > -3\frac{1}{2}$ (43) $x > 0$.
- (44) $x > 2\frac{2}{3}$, $x < 2\frac{2}{5}$ (45) $-2.5 \leq x \leq 7$ (46) $x \geq 10$ (47) $1 \leq x \leq 13$ (48) אין פתרון.
- (49) $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (50) $x \leq -4$ (51) $1 < x < 4$, $x < -2$ (52) $5 < x$, $-\frac{1}{3} < x < 2$, $x < -7$.
- (53) $-1 < x \leq 1.5$, $4 < x \leq 12$ (54) $0 < x < 2.5$, $x < -3$ (55) $2 < x < 6$, $x < -1$.
- (56) $8 < x$, $2.5 \leq x < 8$ (57) $3 < x$ (58) $0 < x < 1$, $x > 4$.
- (59) $3 < x$, $1 < x < 3$, $-1 < x < 0$ (60) $7 < x$ (61) $2 < x < 4$, $x < -2$.
- (62) $4 < x$, $1 \leq x < 2$, $x \leq 0$ (63) $x \neq 1$ (64) $x \neq 7$ (65) $x \geq 7$.
- (66) $3 < x$, $-3 < x < -\frac{3}{5}$.

תחום הגדרה:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$	ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
ג. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$	ד. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$
ה. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-10}$	ו. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$
ז. $f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$	

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$	ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$	ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

תשובות סופיות:

- 1) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \leq \frac{1}{2}$ ד. $x > -4$ ה. $x \geq 2$, $x \leq -5$
- ו. $-3 < x < 0$, $x > 3$ ז. $1 < x \leq 2$, $-2 < x < 1$, $x < -2$
- 2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \geq 1$, $x \leq -1\frac{1}{2}$ ד. $-2 \leq x \neq 1$, $x \leq -3$

פרק 3 – בעיות מילוליות:

בעיות תנועה:

בעיות בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

- 1) מכונית נוסעת מ-A ל-B במהירות של 90 קמ"ש. בדרך חזרה נסעה המכונית במהירות של 60 קמ"ש. בסה"כ נמשכה הנסיעה הלוך וחזור 20 שעות.
א. כמה שעות נסעה המכונית לכל כיוון?
ב. מהי הדרך שעברה המכונית?
- 2) אוטובוס ומשאית יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B בהתאמה. מהירות האוטובוס היא 60 קמ"ש ומהירות המשאית היא 80 קמ"ש. האוטובוס הגיע ליישוב B שעה ו-40 דקות מאוחר יותר מהזמן שלקח למשאית להגיע ליישוב A.
א. כמה זמן נסע האוטובוס וכמה זמן נסעה המשאית?
ב. מהו המרחק בין שתי הערים?
- 3) הולכת רגל יצאה לטיול במהירות מסוימת. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיה מאותו מקום הולך רגל נוסף במהירות הגדולה ממהירותה ב-4.5 קמ"ש. הולך הרגל השיג את הולכת הרגל שעה לאחר שיצא לדרכו.
א. מהי מהירות ההליכה של הולכת הרגל?
ב. מהו המרחק שעברו עד שנפגשו?
- 4) שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית מעיר א' לעיר ב'. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה ומגיע לעיר ב' לאחר 5 שעות. הרוכב השני נוסע במשך השעתיים הראשונות במהירות הקטנה ב-2 קמ"ש ממהירות הרוכב הראשון. לאחר מכן הוא מגביר את מהירותו ב-14 קמ"ש ומגיע לעיר ב' שעה ו-20 דקות לפני הרוכב הראשון.
א. באיזו מהירות נסע הרוכב הראשון?
ב. איזו דרך עבר הרוכב השני בכל חלק?
- 5) משאית נוסעת מרחק של 245 ק"מ בכל יום במהירות קבועה. יום אחד נסעה המשאית במשך שעתיים וחצי במהירות הרגילה, לאחר מכן עצרה לתדלוק במשך 24 דקות ואז המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב-70 קמ"ש ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה ליעדה שעה לפני השעה שהיא מגיעה בכל יום.
א. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?
ב. כמה זמן לוקח למשאית להגיע ליעדה בכל יום?

6) אוטובוס נוסע מעיר א' לעיר ב' הרחוקה ממנה ב-800 ק"מ. לאחר שעבר האוטובוס 135 ק"מ במהירות קבועה הוא עצר להתרעננות במשך חצי שעה. לאחר מכן המשיך האוטובוס את נסיעתו במהירות הגדולה ב-43 קמ"ש ממהירותו הקודמת עד לעיר ב'. סך כל הזמן שהיה האוטובוס בדרך הוא 7 שעות.
א. מה הייתה המהירות ההתחלתית של האוטובוס?
ב. מה היה המרחק שעבר האוטובוס אחרי ההתרעננות עד לעיר ב'?

7) רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ"ש. בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ"ש. באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?

8) המרחק בין ת"א לנצרת הוא 103 ק"מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת"א במהירות 90 קמ"ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת"א לנצרת במהירות 56 קמ"ש. באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?

9) משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק"מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ"ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית. מצא את מהירות המכונית.

בעיות תנועה עם אחוזים:

10) מכונית נוסעת מעיר א' לעיר ב' מרחק של 480 ק"מ במהירות קבועה. בדרכה חזרה נסעה המכונית במשך שעה במהירות הקבועה. לאחר מכן עצרה להתרעננות של 36 דקות ואז הגבירה את מהירותה ב-25% ממהירותה הקודמת והגיעה בחזרה לעיר א' 24 דקות פחות מהזמן שלקח לה להגיע לעיר ב'. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?

11) רכבת משא ורכבת נוסעים יוצאות מעיר א' לעיר ב' מרחק של 360 ק"מ. מהירות רכבת הנוסעים גדולה ב-20% ממהירות רכבת המשא. רכבת הנוסעים התעכבה 40 דקות בתחנה, ולכן יצאה באיחור מהתחנה של עיר א'. עם זאת היא הגיעה לעיר ב' 20 דקות לפני רכבת המשא.
א. מה הן המהירויות של שתי הרכבות?
ב. כמה זמן נסעה רכבת הנוסעים מעיר א' לעיר ב'?

12) מכונית ומונית נוסעות מנקודה A לנקודה B. המכונית נוסעת במהירות קבועה ומגיעה לנקודה B כעבור 4 שעות. המונית נוסעת במשך 3 שעות המהירות הקטנה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-50% ומגיעה לנקודה B יחד עם המכונית.

א. מהי מהירות המכונית?
ב. מהו המרחק בין נקודה A לנקודה B?

בעיות תנועה עם משפט פיתגורס:

13) שתי מכוניות יצאו מהעיר, האחת לכיוון מזרח והשנייה לכיוון צפון. לאחר שלוש שעות המרחק בין שתי המכוניות היה 300 ק"מ. מהירות מכונית אחת גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית השנייה.

א. מהן המהירויות של שתי המכוניות?

ב. מה היה המרחק של כל מכונית מהעיר לאחר שלוש שעות?

14) שני הולכי רגל יוצאים משני יישובים A ו-B המרוחקים זה מזה 13 ק"מ.

היישוב A ממוקם בצפון מערב ביחס ליישוב B כמתואר באיור ממול.

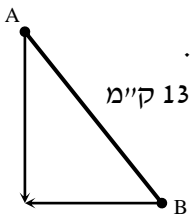
הולך הרגל מיישוב A הולך דרומה והולך הרגל מיישוב B הולך מערבה.

הולך הרגל מיישוב A יוצא שעתיים לפני הולך הרגל השני.

לאחר שלוש שעות מיציאתו נפגשו שני הולכי הרגל.

מהירות הולך הרגל מיישוב B גדולה ב-25% ממהירות הולך

הרגל השני. באיזו מהירות הלך כל אחד משני הולכי הרגל?



15) רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה.

לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת.

לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר)

עד שהגיע חזרה לביתו.

א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר

בסך הכול 150 ק"מ.

ב. מה הייתה מהירותו הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?

בעיות תנועה – מהירות מושפעת מזרמים:

16) סירה שטה בנהר שבו מהירות הזרם היא 3 קמ"ש עם כיוון זרם המים.

לאחר חצי שעה החליטו אנשי הסירה לשנות את כיוונם וחזרו במשך שעתיים

לנקודת המוצא שלהם. מהירות הסירה במים עומדים קבועה במשך כל השייט.

א. מצא את מהירות הסירה.

ב. מהו המרחק הכולל ששטה הסירה?

בעיות תנועה – מהירות ממוצעת:

17) מכונית נוסעת 3 שעות במהירות קבועה של 140 קמ"ש ולאחר מכן

במשך שעתיים נוספות במהירות קבועה של 100 קמ"ש.

א. מה סך הדרך שעברה המכונית?

ב. מהי המהירות הממוצעת של המכונית?

18) מכונית נוסעת 4 שעות במהירות של 130 קמ"ש ולאחר מכן במשך מספר שעות נוספות במהירות של 70 קמ"ש. ידוע כי מהירותה הממוצעת היא 110 קמ"ש. כמה שעות נסעה המכונית במהירות של 70 קמ"ש?

19) אופנוע עובר מרחק של 200 ק"מ במהירות מסוימת. לאחר מכן מאיץ האופנוע ומגדיל את מהירותו ב-40%. הוא נוסע במהירות זו ועובר מרחק של 280 ק"מ. המהירות הממוצעת של האופנוע היא 96 קמ"ש.
א. כמה זמן נסע האופנוע?
ב. באיזו מהירות התחיל האופנוע את נסיעתו?

תשובות סופיות:

- 1) א. 8 שעות הלוך ו-12 שעות חזור. ב. 1440 ק"מ.
- 2) א. אוטובוס – 6 שעות ו-40 דקות. משאית – 5 שעות. ב. 400 ק"מ.
- 3) א. 3 קמ"ש. ב. 7.5 קמ"ש.
- 4) א. 12 קמ"ש. ב. 20 ק"מ ו-40 ק"מ.
- 5) א. 50 קמ"ש. ב. 4 שעות ו-54 דקות.
- 6) א. 90 קמ"ש. ב. 665 ק"מ. (7) 30:8, 60 קמ"ש. (8) 8:50
- 9) 80 קמ"ש. (10) 80 קמ"ש.
- 11) א. 60 קמ"ש. 72 קמ"ש. ב. 5 שעות. (12) א. 90 קמ"ש. ב. 360 ק"מ.
- 13) א. 60 קמ"ש ו-80 קמ"ש. ב. 180 ק"מ ו-240 ק"מ.
- 14) א. 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש.
- 15) א. 50 קמ"ש. ב. 60 קמ"ש.
- 16) א. 5 קמ"ש. ב. 8 ק"מ.
- 17) א. 620 ק"מ. ב. 124 קמ"ש.
- 18) שעתיים.
- 19) א. 5 שעות. ב. 80 קמ"ש.

בעיות קנייה ומכירה:

בעיות קנייה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

- (1) מחיר כניסה למוזיאון המדע למבוגר גדול ב-15 ₪ ממחיר הכניסה לילד. יוסי נסע עם אשתו ושבעת ילדיו ליום כיף במוזיאון המדע ושילם בעבור הכניסה סכום כולל של 210 שקלים. מה המחיר לילד ומה המחיר למבוגר?
- (2) המחיר של 3 ק"ג אגסים גדול ב-3 שקלים מהמחיר של 2 ק"ג תפוחים. שרון קנתה 4 ק"ג אגסים ו-5 ק"ג תפוחים ושילמה סכום כולל של 73 שקלים. מה המחיר של ק"ג מכל סוג?
- (3) דן קנה מחברות בסכום כולל של 224 שקלים. אם ירד סכום המחברות ב-10 שקלים יוכל דן לקנות עוד 40 מחברות יותר מאשר קנה בתחילה באותו הסכום. כמה מחברות קנה ודן ומה המחיר של כל מחברת?
- (4) סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא. 5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪. באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?

בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים:

- (5) משכורתו של אלון גדולה ב-200 ₪ ממשכורתו של רן. אם אלון יקבל תוספת של 16% למשכורתו ורן יקבל תוספת של 30% למשכורתו אז המשכורת של רן תהיה גדולה משל אלון ב-300 ₪. מהי המשכורת של כל אחד מהם?
- (6) עקב ביקוש רב מחירו של מקרר "אמנה" עלה ב-5%. לאחר שנה ירד הביקוש למקרר "אמנה" ולכן הוזל מחירו ב-10%. מחיר המקרר הסופי הוא 1,323 ₪. א. מה היה מחיר המקרר ההתחלתי?
ב. כמה אחוזים ממחיר המקרר המקורי מהווה מחיר המקרר הסופי?
- (7) המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20%, אך מחיר הכריות התייקר ב-20%. כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪. א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?
ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?

- 8) סוחר קנה שולחנות במחיר כולל של 18,000 ₪. 10 שולחנות הוא מכר ברווח של 60% לשולחן, 20 שולחנות הוא מכר ללא רווח ואת שאר השולחנות הוא מכר בהפסד של 15% לשולחן. סה"כ הרוויח הסוחר בעסקאות אלו 450 ₪.
- א. כמה שולחנות קנה הסוחר?
 ב. מה המחיר ששילם הסוחר עבור כל שולחן?

בעיות קנייה ומכירה שונות:

- 9) קבלן רכש x מרצפות רצפה בסכום כולל של 22,000 ₪. 20 מרצפות נשברו בהובלה ולכן לא נמכרו. את שאר המרצפות מכר הקבלן ברווח של 50%. סה"כ הרוויח הקבלן בעסקה 8,360 ₪.
- א. כמה מרצפות קנה הקבלן?
 ב. כמה כסף שילם הקבלן עבור כל מרצפה?
- 10) שמואל קנה מחשב ומדפסת במכרז ושילם עבורם סכום כולל של 3,600 ₪. לאחר חודש ימים, מכר שמואל את המדפסת בהפסד של 10% ואת המחשב ברווח של 40%. ידוע כי שמואל מכר את שני המוצרים במחיר כולל של 4,740 ₪. בכמה כסף קנה שמואל את המחשב ובכמה כסף קנה את המדפסת?
- 11) חוואי קנה 15 סוסי פוני במחיר זהה לסוס. לאחר שנה מכר החוואי 3 סוסים ברווח של 35%, שניים מתו ממחלה נדירה ואת שאר הסוסים הוא מכר ללא רווח. סה"כ הפסיד החוואי 1710 ₪.
- א. כמה שילם החוואי עבור כל סוס פוני?
 ב. אם רק סוס אחד היה מת, האם היה החוואי מרוויח מהעסקה?
 אם לא נמק, אם כן בכמה היה מרוויח?
- 12) מכונת כביסה עולה 4,000 ₪. לאחר שנה עלה מחיר מכונת הכביסה ב-20% ושנה לאחר מכן עלה מחירה בעוד 20%.
- א. מה מחיר מכונת הכביסה לאחר שנתיים?
 ב. בכמה אחוזים מהמחיר המקורי התייקרה מכונת הכביסה?
 ג. בחנות למוצרי חשמל מוכרים מכונות כביסה במחיר מסוים. רפי קנה 3 מכונות כביסה למכבסה שברשותו. ידוע כי לאחר שנה חלה התייקרות ב- p אחוזים וכך גם בשנה שאחריה. בתום השנתיים, החליט רפי לקנות 2 מכונות כביסה נוספות. מבדיקה שערך רפי, גילה כי המחיר הכולל ששילם בקנייה השנייה גדול פי 2 מהמחיר ששילם בקנייה הראשונה. מהו p ?

13 המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20% אך מחיר הכריות התייקר ב-20%. כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.

- א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?
- ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?
- ג. אכסניית נוער מעוניינת לרכוש שמיכות וכריות עבור מיטות יחיד למספר חדרים (מספר זהה של שמיכות וכריות). האם כדאי להנהלת האכסניה לרכוש את השמיכות והכריות במחירים המקוריים או לאחר שנה? נמק.

14 המחיר של 6 שרפרפים גדול ב-20% שקלים מהמחיר של כיסא. לאחר שמחיר השרפרפים התייקר ב-35% ומחיר הכיסא הוזל ב-19%, המחיר של 3 שרפרפים היה זהה למחיר של כיסא אחד.

- א. מה המחיר של כיסא והמחיר של שרפרף לפני ההוזלה וההתייקרות?
- ב. בכמה אחוזים גדול המחיר של הכיסא לאחר ההוזלה מהמחיר של השרפרף לאחר ההתייקרות?
- ג. לרשות בית ספר תקציב מסוים המיועד לרכישת כיסאות ושרפרפים. ידוע כי בית הספר מעוניין לרכוש פי 4 יותר שרפרפים מאשר כיסאות. האם כדאי לבית הספר לבצע את הרכישה במחירים המקוריים או לאחר השינויים אם ברצונו לרכוש יותר פריטים?

15 סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא. 5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40% מהמחיר שקנה אותם. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪.

- א. באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?
- ב. בעסקה אחרת, קנה הסוחר 60 כיסאות אחרים במחיר זהה לכיסא. ידוע כי המחיר של כיסא בודד גדול ב-30% מהמחיר של כיסא בודד שרכש הסוחר בעסקה הראשונה. במהלך ההובלה נגנבו 8 כיסאות. הסוחר רוצה להרוויח ממכירת הכיסאות הנותרים לפחות 2000 ₪ בעסקה זו. נסמן ב- p את אחוז ההתייקרות שבו צריך למכור הסוחר כיסא בודד. מצא את p המינימלי עבורו יעמוד הסוחר ביעדו.

16 סוכן של חברת רהיטים קנה מיטות במחיר כולל של 60,000 ₪. רבע מכמות המיטות שקנה הוא מכר ברווח של 80%. 4 מיטות הוא מכר ללא רווח כלל ואת שאר המיטות הוא מכר בהפסד של 10% למיטה. בסה"כ הרוויח הסוכן 9,500 ₪.

- א. כמה מיטות קנה הסוכן?
- ב. כמה שילם הסוכן עבור כל מיטה?
- ג. בהנחה שהסוכן רוכש עבור החברה פעם נוספת כמות מיטות זהה ממקום אחר, ומוכר באותם התנאים, כמה עליו לשלם עבור מיטה בודדת כדי שהרווח שלו יהיה לפחות 10,000 ₪? (עגל את תשובתך לשקלים שלמים).

- 17** יצרנית מוצרי חשמל מוכרת מקררים במחיר של x ₪ ליחידה. עם השקת מקרר חדש הוחלט להעלות את מחירו ב-5% עקב הביקוש הרב. בשנה הראשונה להשקתו נקנו מספר מקררים. שנה לאחר מכן ירד הביקוש ולכן מחיר המקרר הוזל ב-10% (ביחס למחירו בשנה הראשונה). כעת נמכרו מספר כפול של יחידות ביחס לשנה הקודמת.
- א. מצא את המחיר המקורי של מקרר אם ידוע כי סך כל הרווחים של יצרנית המקרר בשנתיים הנ"ל זהה לסכום שהייתה מרוויחה אם היו קונים את אותו מספר המקררים שנרכשו בשנה הראשונה במחיר של 4116 ₪ ליחידה.
- ב. היצרנית הרוויחה בשנה השנייה 235,200 ₪ יותר מאשר בשנה הראשונה. מצא כמה מקררים נמכרו בשנה הראשונה.

- 18** בחנות מסוימת, מחיר כובע גדול ב-40% מהמחיר של זוג כפפות. לאחר חודש התייקר הכובע ב-50% והכפפות הוזלו ב- p אחוזים.
- א. מצא את p עבורו קנייה של 16 כובעים ו-2 זוגות כפפות לפני השינויים תשתווה לקנייה של 4 כובעים ו-20 זוגות כפפות לאחר השינויים.
- ב. מצא את p עבורו ההפרש בין קניית 5 כובעים ו-4 זוגות כפפות במחירים לאחר השינויים, לבין קניית 3 כובעים ו-2 זוגות כפפות במחירים המקוריים יהיה שווה למחיר של קניית 5 זוגות כפפות במקור.
- ג. מצא את p עבורו המחיר של כובע אחד ו-10 זוגות כפפות לאחר השינויים יהווה 80% מהמחיר של קניית אותם הפריטים במחירים המקוריים.

- 19** סוחר רוכש מנורות בסכום כולל של 4,000 ₪. 26 מהמנורות מכר הסוחר ברווח של 20 ₪ למנורה ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ למנורה. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 400 ₪. בעסקה אחרת רכש הסוחר כמות מנורות מסוימת ומכר אותם לבית עסק ברווח של 30% למנורה.
- הסוחר הרוויח בעסקה זו סה"כ 1020 ₪.
- א. כמה מנורות קנה הסוחר ברכישה הראשונה ובאיזה מחיר למנורה?
- ב. כמה מנורות רכש הסוחר בעסקה השנייה?

- 20** סוחר קנה 450 תיקים. הוא מכר 150 מהם ברווח של 15% ואת השאר בהפסד של 5 שקלים. בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 600 ₪.
- א. בכמה כסף קנה הסוחר כל תיק?
- ב. אם הסוחר היה מוכר את שאר התיקים בהפסד של 2 שקלים במקום 5 שקלים, האם עדיין הוא היה מפסיד מהעסקה?
- ג. התיקים שמכר הסוחר ברווח של 15% נקנו ע"י חנות מרכזית. בחודש הראשון למכירת התיקים, מכרה החנות כל תיק ברווח של 50%. לאחר חודש העלתה החנות את המחיר של תיק ב-20% נוספים ופרסמה מבצע שבמסגרתו כל הקונה שני תיקים יקבל את השני בהנחה של 40%. חן הגיעה לחנות בחודש הראשון וקנתה שני תיקים ואחותה, שרית, הגיעה

לחנות לאחר חודש וקנתה שני תיקים במסגרת המבצע. מי משתי האחיות שילמה מחיר נמוך יותר בממוצע על תיק?

21 בית קפה רכש 120 ק"ג מוצרי שוקולד. 10 ק"ג נהרסו מיד עם הגעתם למקום עקב תנאי תחזוקה רעועים, 40 ק"ג נמכרו ברווח של 3 ₪ לק"ג ואת שאר הכמות מכר בית הקפה בהפסד של 2 ₪ לק"ג. בסה"כ הפסיד בית הקפה בעסקה 60 ₪.

א. מהו המחיר של ק"ג מוצרי שוקולד?

ב. בהזמנה נוספת רכש בית הקפה כמות מסוימת של מוצרי שוקולד ושילם עבור ק"ג אחד את המחיר שמצאת שסעיף הקודם. ידוע כי 10% מהכמות מכר בית הקפה ברווח של 50% לק"ג ו-20% מהכמות מכר בית הקפה בהפסד של 25%. מצא באיזה מחיר צריך למכור בית הקפה את הכמות הנותרת על מנת שירוויח 70% מהסכום שהוציא.

22 בעל מזנון פלאפל קנה 12 ק"ג גרגירי חומוס להכנת כדורי פלאפל ו-8 ק"ג קמח לאפיית פיתות. ידוע כי המחיר של 2 ק"ג גרגירי חומוס גבוה ב-2 ₪ מהמחיר של 1 ק"ג קמח. בעל המזנון קיבל הנחה של 25% על כל 1 ק"ג גרגירי חומוס והנחה של 20% על כל 1 ק"ג קמח. לאחר ההנחה שילם בעל המזנון 74.4 ₪ בעבור קנייתו.

א. מה הם המחירים של 1 ק"ג גרגירי חומוס ו-1 ק"ג קמח?

ב. ידוע כי כל מנת פלאפל נמכרת במחיר זהה ולהכנתה דרושים 300 גרם גרגירי חומוס ו- x גרם קמח. בעל המזנון ניצל בצורה מלאה את כל הרכיבים שברשותו ולאחר מכירת כל המנות שהכין נשאר עם רווח של 245.6 ₪. מצא את x ואת המחיר של מנת פלאפל.

23 בעל גלידריה קנה 30 ליטרים חלב ו-18 ק"ג אבקת שוקולד להכנת גלידות שוקולד. על כל 1 ליטר חלב קיבל 5% הנחה ועל כל 1 ק"ג אבקה קיבל 10% הנחה. ידוע כי המחיר ששילם על כל כמות החלב שרכש גדולה ב-77.7 ₪ מהמחיר ששילם על כל האבקה שרכש.

א. מצא את המחיר של 1 ליטר חלב ו-1 ק"ג אבקת שוקולד אם ידוע כי הוא שילם 207.3 ₪ בעבור כל הקנייה.

ב. כדי לייצר כדור שוקולד אחד דרושים 300 מ"ל חלב ו-180 גרם אבקת שוקולד. בעל הגלידריה ניצל את כל המוצרים שקנה ופרסם כי המחיר של כדור שוקולד אחד הוא 10 ₪ וכי בקניית שני כדורי שוקולד תינתן הנחה של שקל. בעל הגלידריה מכר את כל הכדורים שברשותו והרוויח סה"כ בעסקה 762.7 ₪. מצא כמה לקוחות קנו כדור בודד וכמה קנו שני כדורים.

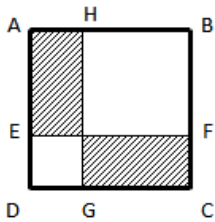
- 24) סוכן כלי כתיבה רכש בקנייה מרוכזת 40 חבילות עטים ו-60 חבילות עפרונות. חבילת עטים מכילה 12 עטים וחבילת עפרונות מכילה 10 עפרונות. הסוכן קיבל הנחה של 10% לעט ו-15% הנחה לעפרון. בסה"כ שילם הסוכן 3102 ₪. ידוע כי אילולא היה מקבל הסוכן את ההנחות, אז המחיר הכולל שהיה נדרש לשלם עבור כל העטים היה גדול פי 4.8 מהמחיר שהיה משלם עבור כל העפרונות.
- א. מצא מה המחירים המקוריים של עט בודד ושל עפרון בודד.
- ב. חנות "כותבים בכיף" קנתה כמות מסוימת של עטים ועפרונות מהסוכן והכינה מארזים לתחילת שנה שכל אחד מכיל 2 עטים ו-3 עפרונות. הסוכן מכר לחנות את העפרונות והעטים במחירים המקוריים שלהם ואילו החנות מכרה את המארזים במחיר הגדול ב-40% מעלות ההכנה שלהם. מצא כמה עפרונות וכמה עטים רכשה החנות מהסוכן אם ידוע כי הרוויחה מעסקה זו (לאחר שמכרה את כל המארזים שהכינה) סה"כ 72 ₪.

תשובות סופיות:

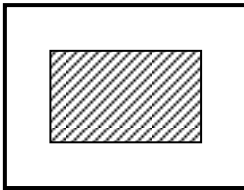
- 1) 20 ₪ ו-35. 2) 7 ₪ ו-9 ₪. 3) 16 ב-14 ₪. 4) 50 ₪.
- 5) 4000 ₪ ו-3800 ₪. 6) א. 1,400 ₪. ב. 94.5%.
- 7) א. 100 ₪. ב. 144 ₪. 8) א. 60 שולחנות. ב. 300 ₪.
- 9) א. 250 מרצפות. ב. 88 ₪. ג. 156,000. 10) מחשב - 3000 ₪, מדפסת - 600 ₪.
- 11) א. 1800 ₪. ב. היה מרוויח 90 ₪. 12) א. 5760 ₪. ב. 44%. ג. 73.2%.
- 13) א. 100 ₪. ב. 144 ₪. ג. כדאי לקנות לאחר שנה. ללא תלות במספר החדרים.
- 14) א. 100 ₪ ו-20 ₪. ב. ב-200% (פי 3). ג. במחירים המקוריים.
- 15) א. 50 ₪. ב. 74.5%.
- 16) א. 12 מיטות. ב. 5,000 ₪.
- ג. המחיר המדויק הוא: 5263.15 ₪ ולכן נעגל ונדרוש: 5264 ₪ למיטה.
- 17) א. 1400 ₪ $x =$. ב. 200 יחידות.
- 18) א. 20%. ב. 82.5%. ג. 29.8%. 19) א. 50 נורות ב-80 ₪. ב. 100 נורות.
- 20) א. 40 ₪. ב. לא. ג. שרית. (66.24 ₪). 21) א. 4 ₪. ב. 8 ₪.
- 22) א. 1 ק"ג גרגירי חמוס - 4 ₪. 1 ק"ג קמח - 6 ₪.
ב. 200 גרם $x =$, מנת פלאפל = 8 ₪.
- 23) א. 1 ליטר חלב - 5 ₪. 1 ק"ג אבקה - 4 ₪.
ב. 30 קנו שני כדורים ו-40 קנו כדור בודד.
- 24) א. עט - 6 ₪. עפרון - 1 ₪. ב. 12 מארזים ולכן 24 עטים ו-36 עפרונות.

בעיות בהנדסת המישור:

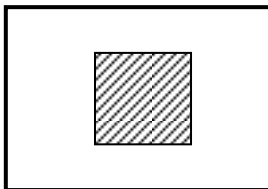
בעיות יסודיות במרובעים:



- 1) המרובע ABCD הוא ריבוע (ראה איור). הקטע EF מקביל לצלעות הריבוע ומחלק את הצלעות AD ו-BC באופן כזה כך ש-DE ו-CF מהוות 30% מצלע הריבוע. הקטע GH מקביל לצלעות AD ו-BC ומרחקו מהצלע AD הוא 2 ס"מ. ידוע שסכום השטחים של המלבנים המקווקים מהווה 50% מסכום שטחי המלבנים הלבנים. מצא את אורך צלע הריבוע.

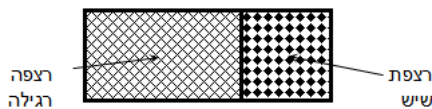


- 2) היקף חלקה מלבנית הוא 30 ק"מ. רוצים לבנות בניין מלבני (המקווקו באיור) במרכז החלקה ששטחו הכולל הוא 10 קמ"ר. ידוע ששטח הבניין מהווה 20% משטח החלקה. מצא את מידות החלקה.



- 3) במרכז חלקה מלבנית שצלע אחת שלה גדולה ב-10 ק"מ מהצלע הסמוכה לה בונים בניין ריבועי (המקווקו באיור). ידוע כי אורך הצלע שלו היא שליש מאורך הצלע הקטנה של החלקה. מחיר קמ"ר אחד משטח הבניין הוא 1000 ₪ ומחיר קמ"ר אחד משטח החלקה הוא 100 ₪. קבלן בניה שילם עבור כל השטח סכום כולל של 60,000 ₪. מצא את מידות החלקה.

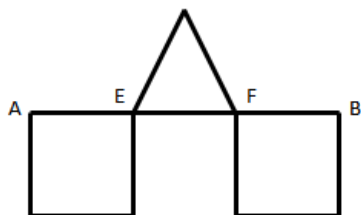
- 4) לרפי מטבח מלבני שמידותיו הם: 12X18 מטרים. רפי מחלק את המטבח לשני מלבנים כך ששטח אחד גדול פי 2 מהשטח של השני. רפי רוצה לרצף את השטח הקטן ברצפת שיש יוקרתית (השטח הימני) לעומת השטח הגדול שאותו ירצף רפי ברצפה רגילה (השטח השמאלי).



- ידוע שהמחיר של מ"ר אחד מהרצפה הרגילה הוא 60% מהמחיר של מ"ר אחד מרצפת השיש היוקרתית. רפי השקיע בריצוף המבטח סכום כולל של 3168 ₪. כמה עולה מ"ר מכל סוג?

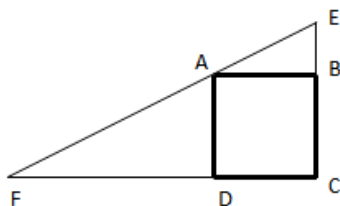
בעיות במרובעים ובמשולשים ללא משפט פיתגורס:

- 5) על הקטע AB מקצים את הנקודות E ו-F כך ששלושת הקטעים AE, EF ו-BF שווים. על הקטעים BF ו-AE בונים ריבועים ועל הקטע EF בונים משולש שווה שוקיים.



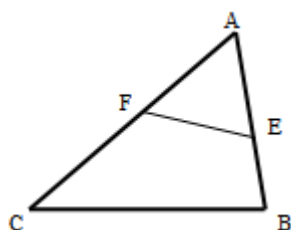
ידוע כי הגובה במשולש שווה לאורך הבסיס EF וכי סכום שטחי שני המרובעים והמשולש הוא 90 סמ"ר. מצא את אורך צלע הריבוע.

- 6) נתון ריבוע ABCD. בונים משולש ישר זווית EFC כך ש-E ו-F הן נקודות על המשכי הצלעות BC ו-DC של הריבוע בהתאמה.



הנקודה A נמצאת על יתר המשולש EF. הקטע BE מהווה 50% מצלע הריבוע והקטע DF גדול פי 2 מצלע הריבוע. ידוע כי שטח המשולש EFC הוא 81 סמ"ר. מצא את אורך צלע הריבוע.

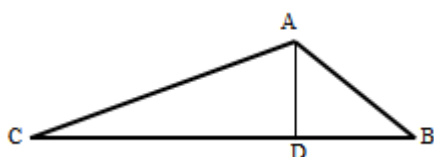
- 7) הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC של המשולש ABC. ידוע כי שטח המשולש AEF הוא 22 סמ"ר.



שטח המרובע BCFE מהווה 60% משטח המשולש ABC.
 א. מצא את שטח המרובע BCFE.
 ב. מצא את שטח המשולש ABC.

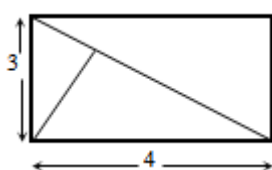
בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס:

- 8) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC המחלק אותו לשני משולשים ADC ו-ABD כך שמתקיים: $S_{ADC} = 2S_{ABD}$. נתון שאורך הקטע CD הוא 24 ס"מ.



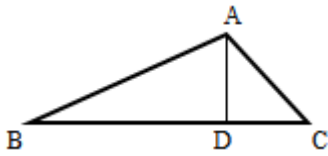
א. מצא את אורך הקטע BD.
 ב. נתון שאורך הצלע AC הוא 25 ס"מ. חשב את S_{ABD} .

- 9) במלבן שצלעותיו הן 3 ו-4 ס"מ מעבירים אלכסון ומעלים לו גובה מהקדקוד התחתון לו.



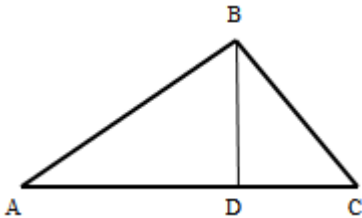
א. מצא את אורך האלכסון.
 ב. מצא את אורך הגובה.
 ג. מצא את אורכי שני הקטעים שהגובה מחלק את האלכסון.

10) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 4.5 מהקטע CD. אורך הצלע AB הוא 13 ס"מ ואורך הצלע AC הוא $5\frac{2}{3}$ ס"מ.



- מצא את האורכים BD ו-CD.
- מצא את אורך הגובה AD.
- חשב את שטח המשולש ABC.

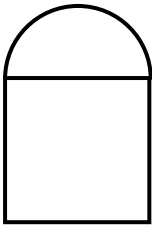
11) BD הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$).



- היתר AC גדול ב-25% מהניצב AB. ידוע כי אורך הניצב BC הוא 18 ס"מ.
- מצא את אורכי הניצב AB והיתר AC.
- מהם האורכים AD ו-DC?

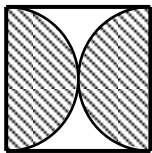
בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא מ.פיתגורס:

12) בבניין של רפי השכן יש חלון מרכזי המורכב ממלבן וחצי עיגול. ידוע כי בסיס החלון קטן פי 2 מגובה המלבן. שטח החלון הכולל הוא $200 + 12.5\pi$.



- מצא את מידות המלבן.
- מצא את היקף החלון.

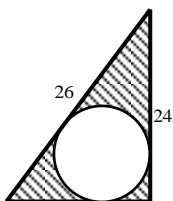
13) בריבוע שלפניו חסומים שני חצאי עיגולים הפוכים זה לזה. ידוע כי סכום ההיקפים של שני החצאים יחדיו הוא 10π .



- מצא את אורך צלע הריבוע.
- מצא את סכום השטחים של שני חצאי העיגולים (השטח המקווקו).
- מצא את השטח הכלוא בין העיגולים והריבוע (השטח הלבן).

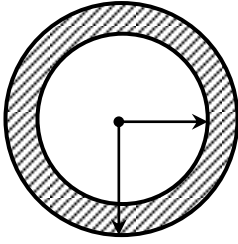
בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל מ.פיתגורס:

14) באיור שלפניו מתואר משולש ישר זווית שבתוכו כלוא עיגול. ידוע כי אורך היתר במשולש הוא 26 ס"מ וכי אורך הניצב האנכי הוא 24 ס"מ.



- מצא את אורך הניצב השני.
- שטח המעגל הוא 25π . מצא את רדיוס המעגל.
- מצא את השטח הכלוא בין המשולש למעגל (השטח המקווקו).

בעיה במעגל – כולל אחוזים:

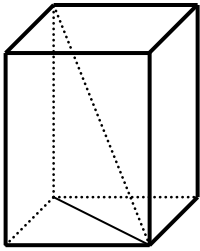


15) באיור שלפניך מתוארת טבעת המורכבת משני מעגלים בעלי אותו מרכז ששטחה הוא 63π . ידוע כי רדיוס המעגל הפנימי קטן ב-25% מרדיוס המעגל החיצוני. מצא את הרדיוסים של שני המעגלים.

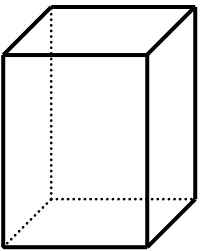
תשובות סופיות:

- (1) 24 ס"מ. (2) 10 ס"מ ו-5 ס"מ.
(3) 15 ק"מ ו-25 ק"מ. (4) 20 נ"מ ו-12 נ"מ.
(5) 6 ס"מ. (6) 6 ס"מ.
(7) א. $S = 33$ ב. $S = 55$.
(8) א. 8 ס"מ. ב. $S_{ADC} = 30$.
(9) א. 5 ס"מ. ב. 2.4 ס"מ. ג. 3.2 ס"מ ו-1.8 ס"מ.
(10) א. 12 ס"מ ו- $2\frac{2}{3}$ ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S = 36\frac{2}{3}$.
(11) א. 24 ס"מ ו-30 ס"מ. ב. 19.2 ס"מ ו-10.8 ס"מ.
(12) א. 10 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. $P = 50 + 5\pi = 65.7$.
(13) א. 10 ס"מ. ב. 1. $S = 25\pi$ 2. $S = 100 - 25\pi = 21.4$.
(14) א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S = 120 - 25\pi = 41.4$.
(15) 12 ו-9.

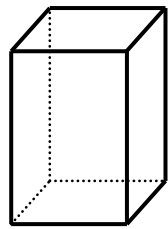
בעיות בהנדסת המרחב:



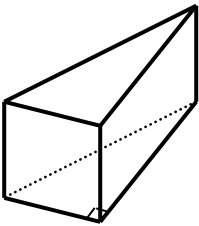
- 1) נתונה תיבה שבסיסה מלבן. ידוע כי אורך צלע אחת של בסיס התיבה קטנה ב- 25% מהצלע הסמוכה לה וכי גובה התיבה גדול פי 3 מהצלע הגדולה. אורך אלכסון הבסיס הוא 10 ס"מ.
- מצא את מידות בסיס התיבה.
 - מצא את נפח התיבה.
 - חשב את אורך אלכסון התיבה.



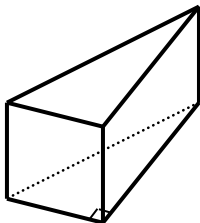
- 2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן וגובהה הוא 10 ס"מ. ידוע כי נפח התיבה הוא 280 סמ"ק וכי שטח הפנים שלה הוא 276 סמ"ר.
- מצא את מידות בסיס התיבה.
 - מה יהיה אורך אלכסון התיבה?



- 3) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן. ידוע כי צלע אחת של המלבן גדולה ב-50% מהצלע הסמוכה לה. כמו כן גובה המלבן גדול ב-50% מצלע המלבן הגדולה. סכום ארבעת הגבהים של המלבן גדול ב-32 ס"מ מהיקף בסיס המלבן.
- מצא את מידות המלבן.
 - חשב את שטח המעטפת של התיבה.
 - חשב את נפח התיבה.

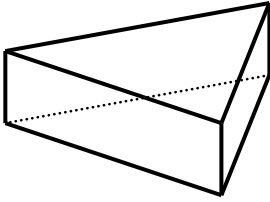


- 4) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית. ידוע כי אורך היתר במשולש הבסיס הוא 17 ס"מ. גובה המנסרה שווה לאורך ניצב המשולש הקטן. ניצב השני של המשולש גדול ב-7 ס"מ מהניצב השני.
- חשב אורכי הניצבים ואת גובה המנסרה.
 - חשב את נפח המנסרה.



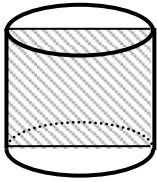
- 5) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית. הניצב הגדול, גדול ב-4 ס"מ מהניצב קטן, וקטן ב-4 ס"מ מאורך היתר. נפח המנסרה הוא 2880 סמ"ק.
- מצא את מידות משולש הבסיס.
 - מצא את גובה המנסרה.
 - מצא את שטח המעטפת של המנסרה.

6) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים. ידוע כי שטח הפאה הבנויה על מקצוע הבסיס של המשולש מהווה 80% משטח הפאה הסמוכה לה. כמו כן ידוע כי אורך השוק במשולש בסיס גדול ב-4 ס"מ מאורך הבסיס במשולש זה. אורך גובה המנסרה הוא 4 ס"מ.



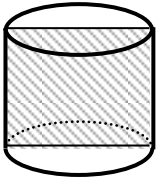
- מצא את מידות משולש הבסיס.
- מה יהיה שטח המעטפת של המנסרה?
- מה יהיה סכום כל מקצועות המנסרה?

7) שטח החתך הצירי של גליל הוא 30 סמ"ר. רדיוס הגליל וגובהו מקיימים: $2h - 3r = 1$.



- מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
- חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.
- חשב את נפח הגליל.

8) נתון גליל שרדיוסו הוא 4 ס"מ. מעבירים חתך צירי בגליל. ידוע כי היקף המלבן של החתך הצירי גדול פי 4 מאורך גובה הגליל.



- מצא את גובה הגליל.
- איזה מרובע הוא המלבן של החתך הצירי?
- חשב את שטח הפנים של הגליל.
- חשב את נפח הגליל.

תשובות סופיות:

- א. 6 ס"מ ו-8 ס"מ. ב. $V = 1152$. ג. 26 ס"מ.
- א. 4 ס"מ ו-7 ס"מ. ב. $\sqrt{165} = 12.84$ ס"מ.
- א. $8 \times 12 \times 18$ ס"מ. ב. $S = 720$. ג. $V = 1728$.
- א. 8 ס"מ, 8 ס"מ ו-15 ס"מ. ב. $V = 480$.
- א. 12 ס"מ, 16 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. 30 ס"מ. ג. $S = 1440$.
- א. 16 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. $S = 224$. ג. 124 ס"מ.
- א. $r = 3, h = 5$. ב. $S = 9\pi$. ג. $V = 45\pi$.
- א. 1. 8 ס"מ. 2. ריבוע. ב. $S = 96\pi$. ג. $V = 128\pi$.

תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

בעיות תנועה:

- 1) רוכב אופניים נוסע מעיר א' לעיר ב' במהירות של 20 קמ"ש. שלוש שעות אחריו יוצא מאותו מקום רוכב אופנוע במהירות של 80 קמ"ש. רוכב האופנוע הגיע לעיר ב' שלוש שעות לפני רוכב האופניים.
 - א. כמה שעות נסע רוכב האופניים?
 - ב. מהו המרחק בין שתי הערים?

- 2) גלעד ורוני יוצאים בו זמנית משני ישובים A ו-B בהתאמה והולכים זה לקראת זה במהירות קבועה. מהירות ההליכה של גלעד היא 4 קמ"ש ומהירותו של רוני היא 6 קמ"ש. ידוע כי רוני הגיעה לישוב A 4 שעות לפני שגלעד הגיע לישוב B.
 - א. מהו המרחק בין שני היישובים?
 - ב. כמה זמן הלך כל אחד מהם?

- 3) שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית משני ישובים A ו-B זה לקראת זה. מהירות רוכב אחד גדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו של הרוכב השני. הרוכב המהיר הגיע ליעדו לאחר 3 שעות בעוד הרוכב השני הגיע רק אחרי 5 שעות.
 - א. מה המהירויות של שני רוכבי האופניים?
 - ב. מהו המרחק שנסעו?

- 4) שתי מכוניות נסעו יחד לטיול מהעיר לכפר. המכונית הראשונה נסעה במהירות קבועה והגיעה לכפר לאחר 8 שעות. המכונית השנייה נסעה במשך שתיים במהירות הקטנה ממהירות המכונית הראשונה ב-10 קמ"ש, לאחר מכן היא עצרה להתרעננות במשך 40 דקות וחזרה לנסיעה במהירות הגדולה ב-54 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה. המכונית השנייה הגיעה לכפר שתיים לפני המכונית הראשונה.
 - א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?
 - ב. מהו המרחק בין העיר לכפר?

- 5) שני רוכבי אופניים המרוחקים זה מזה במרחק של 80 ק"מ יצאו בו זמנית זה לקראת זה. מהירות רוכב אחד גדולה ב-2 קמ"ש ממהירות הרוכב השני. לאחר שתיים של רכיבה המרחק בניהם היה 12 ק"מ.
 - א. באיזו מהירות רכב כל רוכב?
 - ב. האם לאחר עוד 20 דקות הם ייפגשו?

- 6) שתי מכוניות הנמצאות במרחק של 700 ק"מ יצאו בו זמנית זו לקראת זו. מכונית אחת מהירה מהשנייה ב-15 קמ"ש. לאחר שלוש שעות היה מרחק בניהן 325 ק"מ.
 א. באיזו מהירות נסעו שתי המכוניות?
 ב. האם לאחר עוד 20 דקות שתי המכוניות תפגשנה?
- 7) רוכב אופניים והולך רגל יצאו ב-10:00 מנקודה A לנקודה B. מהירות ההליכה של הולך הרגל היא 7 קמ"ש ומהירותו של רוכב האופניים היא 16 קמ"ש. רוכב האופניים הגיע לנקודה B לאחר שלוש וחצי שעות מזמן יציאתם.
 א. באיזה שעה היה המרחק בניהם 27 ק"מ?
 ב. מהו המרחק בין A ל-B.
 ג. לאחר כמה זמן הגיע הולך הרגל לנקודה B?
- 8) אופנוע יוצא מעיר א' לכיוון מערב במהירות של 50 קמ"ש. לאחר שעתיים יוצאת מכונית מעיר ב' הממוקמת מזרחה מעיר א' במרחק של 40 ק"מ אחרי האופנוע. מהירות המכונית היא 120 קמ"ש.
 א. לאחר כמה זמן השיגה המכונית את רוכב האופנוע מזמן יציאתה?
 ב. איזה מרחק נסע רוכב האופנוע עד שהשיגה אותו המכונית?
- 9) מטוס טס מידי שבוע מיעד א' ליעד ב' המרוחק ממנו 5,000 ק"מ במהירות קבועה. שבוע אחד טס המטוס במשך שעתיים במהירות הרגילה. לאחר מכן האט את מהירותו ב-300 קמ"ש ולאחר כשעתיים האיץ בחזרה והגביר את מהירותו ב-700 קמ"ש. המטוס הגיע ליעד ב' 15 דקות מוקדם יותר מאשר הגיע בכל שבוע. באיזו מהירות טס המטוס בכל שבוע?
- 10) שתי מכוניות יוצאות מעיר א' לכיוון עיר ב' הנמצאת במרחק של 560 ק"מ ממנה. מכונית אחת נסעה במהירות קבועה במשך כל הדרך. המכונית השנייה נסעה במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה במשך שעתיים וחצי. לאחר מכן היא עצרה למשך חצי שעה ואז המשיכה בנסיעתה במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירותה הקודמת. בסה"כ הגיעה המכונית השנייה לעיר ב' שעה לפני שהגיעה המכונית הראשונה.
 א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?
 ב. כמה זמן נסעה המכונית השנייה מעיר א' לעיר ב'?

11 מכונית נסעה מעיר א' לעיר ב' המרוחקת ממנה 760 ק"מ במהירות מסוימת. בדרכה חזור היא נסעה במשך שעתיים במהירות זו, לאחר מכן עצרה לתדלוק וארוחת צהריים במשך שעה ואז המשיכה בדרכה במהירות הגדולה ממהירותה הקודמת ב-19 קמ"ש. בסה"כ המכונית הגיעה לעיר א' באותו הזמן שהגיעה לעיר ב'.
א. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?
ב. כמה זמן נסעה המכונית מעיר לעיר?

12 רוכב אופניים יצא לדרך במהירות קבועה. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיו ומאותה הנקודה רוכב אופניים נוסף שמהירותו גדולה ממהירות הרוכב הראשון ב-6 קמ"ש. הרוכב השני השיג את הראשון במרחק של 70 ק"מ מנקודת המוצא שלהם.
א. באיזו מהירות נסעו שני רוכבי האופניים?
ב. כמה זמן היה הרוכב הראשון על הדרך עד שהשיגו הרוכב השני?

13 מכונית יוצאת מעיר א' לעיר ב' המרוחקת ממנה 360 ק"מ. לאחר שעתיים יוצאת מכונית נוספת בעקבותיה. מהירות המכונית השנייה גדולה ב-30 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה. שתי המכוניות הגיעו לעיר ב' יחד.
א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?
ב. כמה זמן נסעה המכונית השנייה?

14 המרחק בין שתי ערים הוא 800 ק"מ. בשעה 8:00 יצאה מכונית מעיר אחת לכיוון השנייה. לאחר כשעה יצאה מהעיר השנייה מכונית נוספת כלפי המכונית הראשונה במהירות הגדולה ב-20 קמ"ש ממהירותה. המכוניות נפגשו באמצע הדרך.
א. באיזה שעה נפגשו המכוניות?
ב. באיזו מהירות נסעה כל מכונית?

15 המרחק בין שתי ערים הוא 920 ק"מ. בשעה 6:00 יוצאת משאית סחורה מעיר א' לכיוון עיר ב'. לאחר 46 דקות יוצא אוטובוס מעיר ב' לכיוון עיר א'. מהירות האוטובוס גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המשאית. שני הרכבים נפגשו באמצע הדרך.
א. באיזו שעה נפגשו האוטובוס והמשאית?
ב. באיזו מהירות נסע האוטובוס?

16 מכונית ומשאית יוצאות בו זמנית משני מקומות שהמרחק בניהם הוא 570 ק"מ. המכונית והמשאית נפגשו לאחר 3 שעות. ידוע כי בזמן שהמכונית עוברת מרחק של 300 ק"מ, המשאית עוברת מרחק של 270 ק"מ.
א. באיזו מהירות נסעה המכונית?
ב. איזה מרחק נסעה המשאית עד לנקודת פגישתן?

17 שתי מכוניות נוסעות זו לקראת זו משני קצוות של כביש מהיר שאורכו הוא 880 ק"מ. ידוע כי בזמן שמכונית אחת עוברת מרחק של 264 ק"מ, המכונית השנייה עוברת 528 ק"מ. המכונית המהירה הגיעה לקצה הכביש 5 שעות לפני שהמכונית האיטית הגיעה לקצה הכביש השני.

א. באילו מהירויות נסעו שתי המכוניות?

ב. כמה זמן נסעה המכונית האיטית עד שהגיעה לקצה הכביש?

18 אופנוע ומשאית יצאו יחד מעיר א' לכיוון עיר ב' הרחוקה ממנה ב-240 ק"מ. מהירות האופנוע גדולה ב-15 קמ"ש ממהירות המשאית. במהלך הדרך האופנוע עצר ל-48 דקות של התרעננות ולכן הגיע יחד עם המשאית לעיר ב'.

א. באיזו מהירות נסע האופנוע?

ב. כמה זמן לקח למשאית להגיע לעיר ב'?

19 מכונית נוסעת מעיר A לעיר C מרחק של 360 ק"מ ועוברת דרך עיר B הנמצאת בין שתי הערים. המכונית נוסעת במהירות קבועה מעיר A עד לעיר B ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-20% וממשיכה עד שמגיעה לעיר C. ידוע כי זמן הנסיעה של המכונית מעיר A ל-B הוא 3 שעות וזמן הנסיעה מעיר B ל-C הוא שעתיים וחצי.

א. מצא את המהירות של המכונית בשני חלקי הדרך.

ב. הראה כי העיר B נמצאת בדיוק באמצע הדרך בין שתי הערים A ו-C.

20 משאית מביאה סחורה מידי יום מיישוב א' ליישוב ב' המרוחק ממנו 630 ק"מ. המשאית נוסעת במהירות קבועה בכל יום. יום אחד נסעה המשאית במהירות הנמוכה ממהירותה הרגילה ב-20%. לאחר 3 שעות ראה נהג המשאית כי הוא עומד לאחר, ולכן הגביר את מהירותו ב-21 קמ"ש ממהירותו הנוכחית. המשאית הגיעה ליעדה בדיוק באותו הזמן שהיא מגיעה בכל יום. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?

21 רוכב אופניים הנמצא במרחק של 140 ק"מ מזרחה מהעיר יוצא בשעה 9:00 לכיוון העיר. לאחר 45 דקות יוצא מהעיר רוכב אופניים נוסף שמהירותו קטנה ממהירות הרוכב הראשון ב-20 קמ"ש ונוסע לכיוון דרום. לאחר שעתיים נוספות היה המרחק בין שני רוכבי האופניים 50 ק"מ.

א. מצא את מהירות הרוכב האופניים הראשון אם ידוע כי היא קטנה מ-40.1 קמ"ש.

ב. באיזה מרחק היה הרוכב האופניים השני מהעיר כאשר הגיע הרוכב הראשון לעיר?

22 אופנוע יוצא מהעיר בשעה 7:00 דרומה. לאחר שעה יוצאת מכונית מהעיר לכיוון מזרח. מהירות האופנוע היא 50 קמ"ש ומהירות המכונית היא 100 קמ"ש. לאחר פרק זמן מסוים המרחק בין המכונית לאופנוע הוא 250 ק"מ.
א. באיזו שעה המרחק בין המכונית והאופנוע הוא 250 ק"מ?
ב. באיזה מרחק הייתה המכונית מהעיר כאשר היא הייתה במרחק של 250 ק"מ מהאופנוע?

23 מהירות סירה במים עומדים גדולה פי 4 ממהירות זרם הנהר. סירה שטה בנהר שאורכו 30 ק"מ מתחילתו ועד סופו. הסירה שטה את כל הנהר הלך וחזור במשך 8 שעות.
א. באיזו מהירות תשוט הסירה במים עומדים?
ב. כמה זמן שטה הסירה בכל כיוון?

24 שתי סירות שמהירותן במים עומדים זהה יוצאות מאותה נקודה בנהר, האחת לכיוון צפון והשנייה לכיוון דרום. מהירות הזרם בנהר היא 20 קמ"ש לכיוון צפון. לאחר 4 שעות היה המרחק בין שתי הסירות 240 ק"מ.
א. באיזו מהירות שטות הסירות במים עומדים?
ב. לאחר 4 שעות, פי כמה היה גדול המרחק של הסירה ששטה צפונה מהמרחק של הסירה השנייה?

25 שלושה נערים יצאו לשייט בסירת מנוע בעלת מהירות קבועה. במשך שעה הם שטו בנהר שקט. לאחר מכן עקב רוחות חזקות נוצר זרם בנהר שמהירותו היא 2 קמ"ש לכיוון המסלול של הנערים. לאחר שעה נוספת השתנו הרוחות ומהירות הזרם נשארה 2 קמ"ש, אך נגד כיוון השייט שלהם. הנערים שטו בתנאים אלו במשך שעה.
בסה"כ עברו הנערים בשלוש שעות אלו מרחק של 18 ק"מ.
א. באיזו מהירות משיט המנוע את הסירה במים עומדים?
ב. מהו המרחק שעברה הסירה בכל שעה?

26 מכונית נוסעת במהירות ממוצעת של 84 קמ"ש. את נסיעתה התחילה במהירות מסוימת ולאחר שלוש שעות האיצה ב-20 קמ"ש והמשיכה כך עוד 7 שעות.
א. באיזו מהירות נסעה המכונית בהתחלה?
ב. איזה מרחק עברה המכונית?

27) מכוננית נוסעת במהירות ממוצעת של 80 קמ"ש מרחק של 480 ק"מ.
את החלק הראשון של הנסיעה היא נסעה במהירות מסוימת ולאחר 4 שעות
האטה את מהירותה ב-30 קמ"ש.

- א. באיזו מהירות נסעה המכוננית בכל חלק של הנסיעה?
ב. פי כמה גדולה הדרך שעברה המכוננית ב-4 השעות הראשונות לעומת
שאר הדרך הנותרת?

28) אופנוע עובר במשך 5 שעות מרחק של 350 ק"מ. לאחר מכן מגביר נהג האופנוע
את מהירותו ונוסע במשך פרק זמן מסוים מרחק של 450 ק"מ.
המהירות הממוצעת של האופנוע בכל זמן נסיעתו היא 80 קמ"ש.

- א. כמה זמן נסע האופנוע לאחר שהגביר את מהירותו?
ב. בכמה קמ"ש הגביר נהג האופנוע את מהירותו?

בעיות קנייה ומכירה:

29) סוחר קנה 80 תמונות. 20 תמונות הוא מכר ברווח של 30 ₪ לתמונה ואת שאר
התמונות הוא מכר ב-30 ₪ לתמונה. בסה"כ הסוחר לא הרוויח ולא הפסיד
בעסקה.

- א. באיזה מחיר קנה הסוחר את התמונות?
ב. כמה שילם הסוחר על כל התמונות?

30) סוחר קנה 120 ק"ג שוקולד. 10 ק"ג נהרסו לסוחר מיד עם קנייתו, 40 ק"ג הוא
מכר ברווח של 3 ₪ לק"ג ואת שאר הכמות הוא מכר בהפסד של 2 ₪ לק"ג.
בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 60 ₪. כמה שילם הסוחר בעבור ק"ג שוקולד?

31) סוחר קנה ספרים במחיר של 60 ₪ לספר. 40 מהספרים הוא מכר במחיר
של 100 ₪ לספר ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ לספר.
בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1300 ₪. כמה ספרים קנה הסוחר?

32) סוחר קנה דבש במחיר של 3 ₪ לק"ג. 30 ק"ג מהדבש הוא מכר ברווח של שקל
אחד לק"ג ואת השאר הוא מכר בהפסד של שקל אחד לק"ג. בסה"כ הסוחר לא
הרוויח ולא הפסיד בעסקה. כמה ק"ג דבש קנה הסוחר?

33) סוחר קנה כיסאות ב-7,200 ₪. הסוחר השקיע 1,000 ₪ בשיפוץ כל הכיסאות
ואז מכר אותם. 20 כיסאות הוא מכר ברווח של 70 ₪ לכיסא. את שאר
הכיסאות הוא מכר בהפסד של 15 ₪ לכיסא. הסוחר הפסיד בעסקה 650 ₪.

- א. כמה כיסאות קנה הסוחר?
ב. כמה שילם הסוחר בעבור כל כיסא?

34 חנווני קנה בקבוקי חלב ב-300 ₪. 4 בקבוקי חלב נשפכו לו. את שאר הבקבוקים מכר החנווני ברווח של שקל אחד לבקבוק. בסה"כ הרוויח החנווני 36 שקלים. כמה בקבוקים קנה החנווני וכמה שילם בעבור כל בקבוק?

35 סוחר קנה עציצים ב-800 ₪. תוך שבוע 8 מהעציצים נבלו והסוחר לא מכר אותם. את שאר העציצים מכר הסוחר ברווח של 10 ₪ לעציץ. סה"כ הפסיד הסוחר 200 ₪ בעסקה. כמה עציצים קנה הסוחר וכמה הוא שילם על כל עציץ?

36 סוחר קנה נורות בסכום כולל של 4,000 ₪. 26 מהנורות מכר הסוחר ברווח של 20 ₪ לנורה ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ לנורה. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 400 ₪. כמה נורות קנה הסוחר ובאיזה מחיר לנורה?

37 מחיר של עט גדול ב-2 שקלים ממחיר של עפרון. ידוע כי המחיר של שני עפרונות ושלושה עטים הוא 26 שקלים. כמה עולה עט וכמה עולה עפרון?

38 מחיר כניסה לפארק המים לילד קטן פי 2 ממחיר הכניסה למבוגר. דור נסע עם שלושת ילדיו לפארק המים ושילם סה"כ 200 שקלים. מצא את מחיר הכניסה לילד.

39 מחיר מחשב גדול פי 5 מהמחיר של מדפסת.

חברת S&S Production קנתה 40 מחשבים ו-8 מדפסות במחיר כולל של 16,640 ₪. מה המחיר של מחשב ומה המחיר של מדפסת?

40 המחיר של 5 ק"ג תפוחים גדול ב-34 שקלים מהמחיר של 3 ק"ג ענבים. רפי קנה 10 ק"ג מכל סוג ושילם בסך הכול 260 שקלים. מה המחיר של ק"ג ענבים ושל ק"ג תפוחים?

41 המחיר של שלושה עטים קטן ב-5 שקלים מהמחיר של 8 עפרונות. שני קנתה 10 עפרונות ו-4 עטים ונכחה לראות כי המחיר של כל העפרונות גדול ב-4 שקלים מהמחיר של כל העטים שקנתה. מה המחיר של עט אחד ועפרון אחד?

42 המחיר של 7 חתיכות פוליגל שווה למחיר של 9 משטחי בריסטול. חנה הגנת קנתה לגן שלה 5 משטחי פוליגל ו-3 משטחי בריסטול ושילמה סכום כולל של 66 שקלים. כמה עולה משטח בריסטול?

43) סוחר קנה טלוויזיות ומכשירי DVD. המחיר ששילם הסוחר בעבור טלוויזיה גדול ב- 500 שקלים מהמחיר ששילם בעבור מכשיר DVD. כמות מכשירי ה-DVD שקנה הסוחר גדולה ב-6 מכמות הטלוויזיות שהוא קנה. הסוחר שילם בעבור כל הטלוויזיות 9,600 שקלים ובעבור כל מכשירי ה-DVD 5,400 שקלים.

א. כמה שילם הסוחר בעבור טלוויזיה ועבור DVD.

ב. כמה טלוויזיות קנה הסוחר?

44) סוחר קנה מחשבים ומדפסות. המחיר ששילם הסוחר בעבור מדפסת קטן ב-2,400 שקלים מהמחיר ששילם בעבור מחשב. הסוחר קנה 7 מדפסות יותר מאשר המחשבים. הסוחר שילם בעבור כל המחשבים סכום כולל של 18,000 ₪ ובעבור כל המדפסות 7,800 ₪.

א. כמה שילם הסוחר בעבור מחשב?

ב. כמה מדפסות קנה הסוחר?

45) סוחר קנה 70 ק"ג עגבניות במחיר של 3 ₪ לק"ג. 15 ק"ג התקלקלו לו ולכן לא יכול היה למכור אותם. את שאר העגבניות הוא מכר במחיר של 5 ₪ לק"ג.

א. האם הסוחר הרוויח או הפסיד בעסקה?

ב. כמה הרוויח הסוחר בעסקה?

46) מחיר כיסא נמוך ב-300 ₪ ממחיר שולחן. אם מחיר הכיסא יוזל ב-20% ומחיר השולחן יתייקר ב-20% אז המחיר של פינת אוכל המכילה שולחן ו-6 כיסאות יהיה 1,560 ₪. מה המחיר של כיסא ומה המחיר של שולחן?

47) א. מחירו של מוצר עלה ב-20% ולאחר שנתיים עלה שוב בעוד 20%.

האם ניתן לומר שמחיר המוצר עלה בשנתיים ב-40%?

ב. מכונת כביסה עולה 4,000 ₪. לאחר שנה עלה מחיר מכונת הכביסה ב-20% ועוד שנה לאחר מכן שוב עלה מחירה בעוד 20%.

1. מה מחיר מכונת הכביסה לאחר שנתיים?

2. בכמה אחוזים מהמחיר המקורי התייקרה מכונת הכביסה?

48) משכורתה של סיוון נמוכה ב-5% ממשכורתה של גלית. אם שתיהן תקבלנה

העלאה של 20% למשכורתן אז גלית תשתכר ב-330 ₪ יותר מסיוון.

בכמה שקלים משתכרות גלית וסיוון?

49) מחירו של מוצר א' גדול ב-20 שקלים ממחירו של מוצר ב'.

מוצר א' התייקר ב-5% ומוצר ב' התייקר ב-50%. המחיר הכולל של שני

המוצרים לאחר ההתייקרות גדול ב-25% מהמחיר המקורי של שני המוצרים.

מה המחיר של כל מוצר?

- 50) א. מחיר מוצר א' גדול ב-40% מהמחיר של מוצר ב'. מוצר א' התייקר ב-30%. בכמה אחוזים מוצר ב' צריך להתייקר כדי שמחיריהם יהיו זהים?
ב. מחיר כובע גדול ב-40% מהמחיר של זוג כפפות.
מחיר הכובע התייקר ב-30% וכעת מחירו הוא 91 ₪.
1. בכמה אחוזים יש לייקר את עלות הכפפות כדי שהם יהיו זהים למחיר הכובע החדש?
2. מה היה מחיר הכובע המקורי?

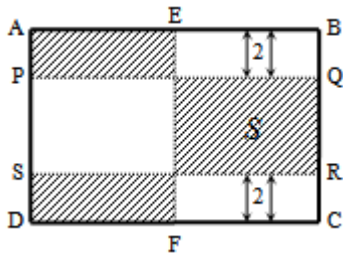
51) המחיר של ק"ג בננות ו-2 ק"ג אפרסקים הוא 28 ₪. עקב בצורת קשה התייקרו המחירים של כל הפירות ב-40% וכעת מחיר של ק"ג אפרסקים גדול ב-2.8 שקלים מהמחיר של ק"ג בננות. מה המחיר של ק"ג בננות ושל ק"ג אפרסקים?

- 52) ירקן רכש 70 ק"ג עגבניות במחיר של 3 ₪ לק"ג.
15 ק"ג התקלקלו ולכן לא מכר אותם.
את שאר העגבניות הוא מכר במחיר של 5 ₪ לק"ג.
א. האם הירקן הרוויח או הפסיד בעסקה?
ב. כמה הרוויח הירקן בעסקה?
ג. בקנייה נוספת רוצה הירקן להכניס 60% יותר מהסכום שיוציא.
ידוע כי גם בקנייה זו ק"ג עגבניות עולה 3 ₪, 15 ק"ג התקלקלו ולא נמכרו ואת השאר מכר הירקן ב-5 ₪ לק"ג.
מצא כמה ק"ג עגבניות צריך הירקן לרכוש על מנת לעמוד ביעדו.

53) המחיר של 3 מקלדת ו-5 עכברים הוא 490 ₪. לאחר חצי שנה חנות המחשבים יצאה למבצע והכריזה כי כל המקלדות בהנחה מיוחדת של 50% וכל העכברים בהנחה של 10%. כעת ניתן לקנות 4 עכברים ו-8 מקלדות במחיר של 500 ₪.
א. מה היו המחירים של מקלדת ושל עכבר לפני ההנחה?
ב. מה הם המחירים של מקלדת ושל עכבר לאחר ההנחה?
ג. בכמה אחוזים גדול המחיר הראשוני של מקלדת מהמחיר הראשוני של עכבר?

54) המחיר של 6 שרפרפים גדול ב-20 שקלים מהמחיר של כיסא. לאחר שמחיר השרפרפים התייקר ב-35% ומחיר הכיסא הוזל ב-19%, המחיר של 3 שרפרפים היה זהה למחיר של כיסא אחד.
א. מה המחיר של כיסא והמחיר של שרפרף לפני ההוזלה וההתייקרות?
ב. פי כמה גדול המחיר המקורי של הכיסא מהמחיר המקורי של השרפרף?

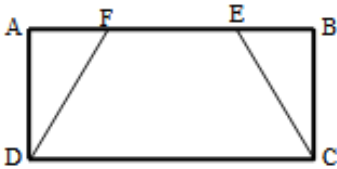
בעיות בהנדסת המישור:



55) הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו-CD של המלבן ABCD. הנקודות P, Q, R, S יוצרות קטעים המקבילים לצלעות המלבן AB ו-CD ומרחקן מהם הוא 2 ס"מ (ראה איור). ידוע כי הצלע AB גדולה ב-10 ס"מ מהצלע AD של המלבן ABCD.

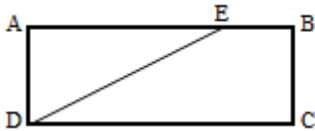
- מצא את מידות המלבן ABCD אם ידוע כי שטח המלבן המסומן הוא: $S = 240$.
- כמה אחוזים משטח המלבן ABCD הם השטחים המקווקוים שבאיור?

56) הנקודות E ו-F נמצאות על הצלע AB של המלבן ABCD כך שהמרחק של כל נקודה מהקדקוד הסמוך לה הוא 2 ס"מ. ידוע כי הצלע AB גדולה ב-2 ס"מ מהצלע AD וכי השטח של שני המשולשים AFD ו-CBE יחד הוא 16 סמ"ר.

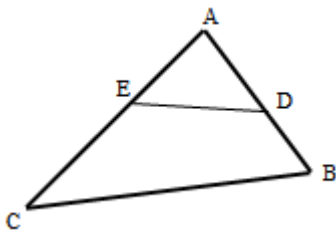


- מצא את מידות המלבן.
1. חשב את שטח המלבן ABCD.
2. חשב את שטח הטרפז DFEC.
3. כמה אחוזים משטח המלבן ABCD מהווה שטח הטרפז?

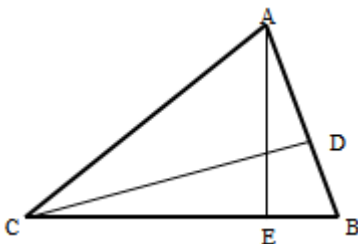
57) הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ABCD כך שנוצרים משולש ADE וטרפז BCDE. ידוע כי הצלע AB גדולה ב-5.5 ס"מ מהצלע AD במלבן. מרחק הנקודה E מהקדקוד A הוא 7 ס"מ וידוע כי שטח המשולש ADE קטן ב-65% משטח הטרפז BCDE. מצא את מידות המלבן ABCD.



58) הנקודה E נמצאת על הצלע AB והנקודה D נמצאת על הצלע AC של המשולש ABC. שטח המרובע BDCE הוא 15 סמ"ר והשטח ADE הוא 40% משטח המשולש ABC. מצא את השטחים: S_{ABC} , S_{ADE} .

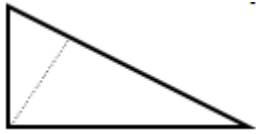


59) מורידים גבהים לצלעות AB ו-BC במשולש ABC שחותכים אותן בנקודות D ו-E בהתאמה. נתון: $BD = 5$, $BC = 13$. שטח משולש זה הוא 52 סמ"ר.



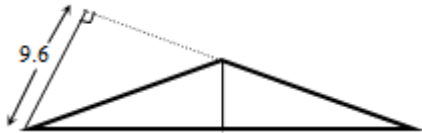
- מצא את אורך הגובה AE.
- מצא את אורך הגובה CD.
- מצא את אורך הצלע AB.

60) אחד מהניצבים במשולש ישר זווית קטן מהשני ב-25%. שטח המשולש הוא 96 סמ"ר.



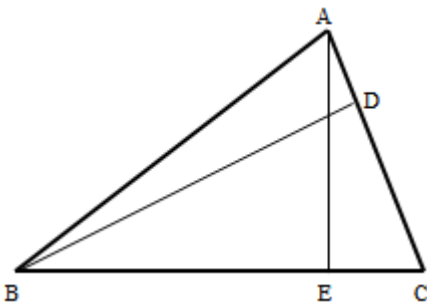
- א. מצא את אורכי הניצבים.
- ב. מצא את אורך היתר.
- ג. מצא את אורך הגובה ליתר.

61) במשולש שווה שוקיים שבו זווית הראש היא זווית קהה (ראה איור) אורך חוצה זווית הראש הוא 6 ס"מ ואורך הגובה לשוק הוא 9.6 ס"מ.



- א. מצא את אורך הבסיס.
- ב. מצא את אורך השוק.
- ג. מצא את שטח המשולש.

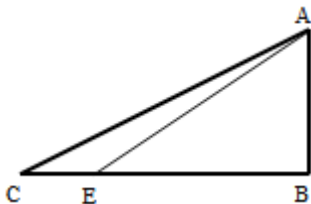
62) BD ו-AE הם גבהים לצלעות AC ו-BC בהתאמה



במשולש ABC. ידוע כי אורך הגובה AE הוא 8 ס"מ. E מקצה על הצלע BC שני קטעים CE ו-BE כך ש-BE גדול פי 1.5 מ-CE. שטח המשולש ABC הוא 60 סמ"ר.

- א. חשב את אורכי הקטעים BE ו-CE.
- ב. חשב את אורך הצלע AC.
- ג. חשב את הגובה BD.

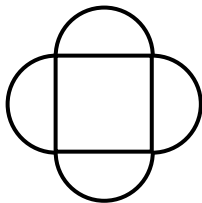
63) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על הניצב BC כך



שאורך הקטע BE גדול פי 2 מהניצב AB. ידוע כי אורך היתר AC הוא 15.6 ס"מ וכי הוא גדול פי 6.5 מהקטע CE.

- א. מצא את אורכי הניצבים AB ו-BC.
- ב. העזר בשטחי המשולשים ABC ו-ABE וחשב את שטח המשולש ACE.

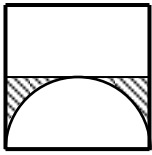
64) באיור שלפניך נתון ריבוע. בונים על כל צלע של הריבוע חצי עיגול.



ידוע כי היקף הצורה הכולל הוא 12π .

- א. מצא את אורך צלע הריבוע.
- ב. 1. מצא את שטח הריבוע.
2. מצא את סכום השטחים של כל ארבעת העיגולים.
3. מה השטח הכולל של כל הצורה.

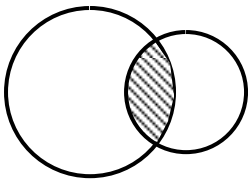
65) חצי עיגול כלוא בתוך ריבוע כמתואר באיור. מקדקוד העיגול מעבירים קטע המקביל לצלעות הריבוע כך שנוצר השטח המקווקו.



ידוע כי השטח המקווקו הוא $98 - \frac{49}{2}\pi$.

- א. מצא את רדיוס העיגול.
- ב. חשב את שטח הריבוע.

66) באיור שלפניך נתונים שני עיגולים החותכים זה את זה כך שנוצר שטח המשותף להם. ידוע כי גודל השטח הנ"ל הוא 17π (השטח המקווקו) ושטח כל הצורה הוא 100π .

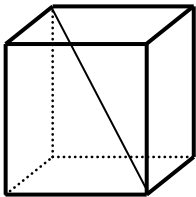


כמו כן, ידוע כי רדיוס העיגול השמאלי (הגדול) גדול ב-50% מרדיוס העיגול הימני (הקטן).
א. מצא את הרדיוסים של שני העיגולים.

- ב. פי כמה יהיה גדול שטח העיגול הגדול משטח העיגול הקטן?

בעיות בהנדסת המרחב:

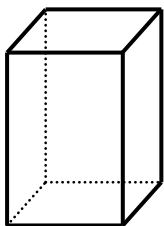
67) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה ב-3 ס"מ מהצלע השנייה. ידוע כי גובה התיבה שווה באורכו לצלע הבסיס הגדולה. אורך אלכסון התיבה הוא 9 ס"מ.



- א. מצא את מידות התיבה.
- ב. חשב את נפח התיבה.
- ג. חשב את שטח הפנים של התיבה.

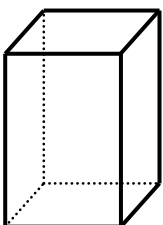
68) נתונה תיבה שבסיסה הוא ריבוע.

גובה התיבה גדול פי 3 מאורך צלע הריבוע של הבסיס. ידוע כי שטח המעטפת של התיבה הוא 192 סמ"ר.

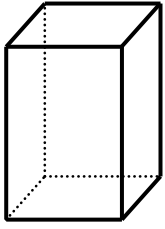


- א. מצא את אורך צלע הריבוע של בסיס התיבה.
- ב. חשב את נפח התיבה.

69) גזרו 6 חתיכות קרטון והרכיבו מהם תיבה שבסיסה הוא ריבוע. ידוע כי השטח של כל אחת מארבעת החתיכות המשמשות כפאות התיבה גדול ב-20% מהשטח של כל אחת משתי החתיכות המשמשות כבסיסי התיבה. גובה התיבה הנ"ל גדול בס"מ אחד מאורכי צלעות ריבוע הבסיס.

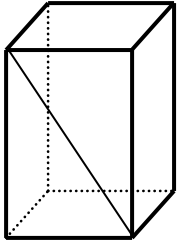


- א. מצא את המידות התיבה.
- ב. חשב את נפח התיבה.



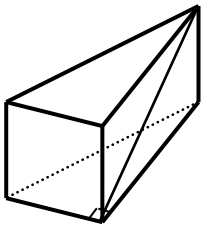
70) בתיבה שבסיסה ריבוע נתון כי אורך הצלע של הריבוע קטנה ב-40% מגובה התיבה. כמו כן ידוע כי שטח פאה צדדית גדול ב-24 ס"מ² משטח בסיס התיבה.

- א. מצא את מידות התיבה.
- ב. הראה כי אלכסון התיבה גדול מ-13 ס"מ.
- ג. חשב את נפח התיבה.



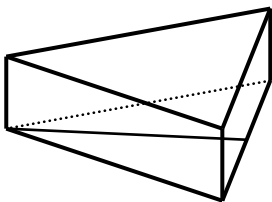
71) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן. מעבירים אלכסון באחת מהפאות צדדיות של התיבה כמתואר באיור. ידוע כי אורך אלכסון זה הוא 17 ס"מ וכי גובה התיבה גדול ב-7 ס"מ מבסיס התיבה של פאה זו. נפח התיבה הוא 720 ס"מ³.

- א. מצא את גובה התיבה.
- ב. מצא את מידות בסיס התיבה.
- ג. האם ישר שאורכו 18 ס"מ יכול להיכנס בתוך תיבה זו? (העזר באלכסון התיבה).



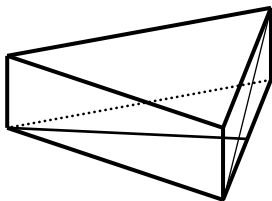
72) נתונה מנסרה ישרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית. מעבירים אלכסון שאורכו 13 ס"מ בפאה שבנויה על הניצב הגדול. אורך היתר במשולש הבסיס גדול ב-6 ס"מ מהניצב הקטן שלו. גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.

- א. מצא את אורך הניצב הגדול של משולש הבסיס.
- ב. מצא את הניצב השני ואת היתר במשולש הבסיס.
- ג. חשב את נפח המנסרה.



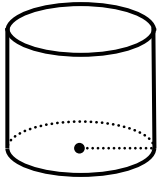
73) נתונה מנסרה ישרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים בעל אורך שוק של 26 ס"מ. הגובה לבסיס בתוך משולש זה הוא 24 ס"מ. שטח הפנים של המנסרה הוא 912 ס"מ².

- א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המשולש השווה שוקיים.
- ב. מצא את גובה המנסרה.
- ג. מה יהיה נפח המנסרה?



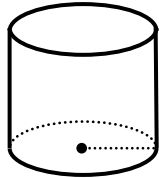
74) סכום כל המקצועות של מנסרה משולשת ישרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים הוא 41 ס"מ. גובה המנסרה הוא 3 ס"מ. ידוע כי אורך מקצוע הבסיס במשולש הבסיס קטן ב-2 ס"מ מאורך שוק המשולש.

- א. מצא את אורכי הצלעות של משולש הבסיס של המנסרה.
- ב. חשב את אורך האלכסון העובר בפאה הבנויה על מקצוע הבסיס של המשולש השווה שוקיים.
- ג. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.



75) רדיוס גליל מסוים גדול ב-25% מגובהו. נפח הגליל הוא 800π .

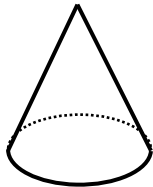
- א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
- ב. חשב את שטח המעטפת של הגליל.
- ג. 1. חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.
2. חשב את שטח הפנים של הגליל.



76) נתון גליל שרדיוסו r וגובהו h . שטח עיגול הבסיס קטן ב-60% משטח המעטפת.

ידוע גם כי רדיוס הגליל קטן ב-4 ס"מ מגובהו.

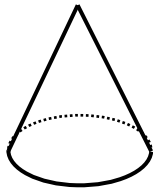
- א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
- ב. חשב את שטח הפנים של הגליל.
- ג. חשב את נפח הגליל.



77) נתון חרוט שרדיוס בסיסו הוא 6 ס"מ וגובהו הוא h .

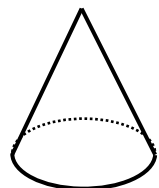
ידוע כי נפח החרוט הוא 96π סמ"ק.

- א. מצא את גובה החרוט.
- ב. חשב את שטח הפנים של החרוט.



78) נתון חרוט שנפחו הוא 400π סמ"ק וגובהו גדול ב-20% מרדיוסו.

- א. מצא את גובה החרוט ורדיוסו.
- ב. חשב את שטח הפנים של החרוט.
- ג. פי כמה גדול שטח הפנים של החרוט משטח המעטפת שלו?



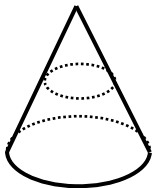
79) נתון חרוט ששטח הפנים שלו הוא 90π סמ"ר ושטח הבסיס שלו הוא 25π סמ"ר.

- א. 1. מהו רדיוס החרוט?
2. מהו שטח המעטפת של החרוט?
3. מהו גובה החרוט?
- ב. חשב את נפח החרוט.

80) נתון חרוט בעל רדיוס r_1 . חותכים ממנו חתיכה בחלקו העליון כך שנוצר חרוט נוסף

שרדיוס בסיסו הוא r_2 קטן מ- r_1 פי 3. ידוע כי גובה החרוט המקורי הוא 24 ס"מ

וכי יחס הנפחים בין החרוט שרדיוס r_1 לחרוט שרדיוסו r_2 הוא 27.



- א. מצא את גובה החרוט העליון.
- ב. סכום שטחי הבסיס של שני החרוטים הוא 250π סמ"ר.
מצא את הרדיוסים של שני החרוטים.
- ג. חשב את נפח הצורה הנוצרת לאחר קטימת החרוט העליון.
- ד. חשב את שטח הפנים של הצורה הנוצרת לאחר קטימת החרוט העליון.

תשובות סופיות:

- 1 א. 8 שעות. ב. 160 ק"מ. 2 א. 48 ק"מ. ב. גלעד- 12 שעות ורוני-8 שעות.
- 3 א. 15 קמ"ש ו-25 קמ"ש. ב. 75 ק"מ 4 א. 60 קמ"ש. ב. 480 ק"מ.
- 5 א. 16 קמ"ש, 18 קמ"ש. ב. לא. 6 א. 55 קמ"ש ו-70 קמ"ש. ב. לא.
- 7 א. 13:00. ב. 56 ק"מ ג. 8 שעות. 8 א. שעתיים. ב. 200 ק"מ. 9 א. 800 קמ"ש.
- 10 א. 70 קמ"ש. ב. 7 שעות. 11 א. 95 קמ"ש. ב. 8 שעות.
- 12 א. 14 קמ"ש ו-20 קמ"ש. ב. 5 שעות. 13 א. 60 קמ"ש. ב. 4 שעות.
- 14 א. 13:00. ב. 80 קמ"ש ו-100 קמ"ש. 15 א. 10:36. ב. 120 קמ"ש.
- 16 א. 100 קמ"ש. ב. 270 ק"מ. 17 א. 88 קמ"ש ו-176 קמ"ש. ב. 10 שעות.
- 18 א. 75 קמ"ש. ב. 4 שעות. 19 א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש. 20 א. 70 קמ"ש.
- 21 א. 40 קמ"ש. ב. 55 ק"מ. 22 א. 10:00. ב. 200 ק"מ.
- 23 א. 8 קמ"ש. ב. 3 שעות ו-5 שעות. 24 א. 30 קמ"ש. ב. פי 5.
- 25 א. 6 קמ"ש. ב. 6 ק"מ, 8 ק"מ ו-4 ק"מ 26 א. 70 קמ"ש. ב. 840 ק"מ.
- 27 א. 90 קמ"ש ו-60 קמ"ש. ב. פי 3. 28 א. 5 שעות. ב. 20 קמ"ש.
- 29 א. 40 נה. ב. 3200 נה. 30 א. 4 נה. 31 א. 100. 32 א. 60 ק"ג. 33 א. 90. ב. 80 נה.
- 34 א. 60 ב-5 נה. 35 א. 20 עציצים. 40 נה לעציץ. 36 א. 50 נורות ב-80 נה לנורה.
- 37 א. 4 נה ו-6 נה. 38 א. 40 נה. 39 א. 400 נה ו-80 נה.
- 40 א. 12 נה ו-14 נה. 41 א. 4 נה ו-9 נה. 42 א. 7 נה.
- 43 א. 800 נה ו-300 נה. ב. 12. 44 א. 3,000 נה. ב. 13. 45 א. הרוויח. ב. 65 נה.
- 46 א. 200 נה ו-500 נה.
- 47 א. לא. ב. 1. 5,760 נה. 2. ב-44% 48 א. 5500 נה ו-5225 נה.
- 49 א. 100 נה ו-80 נה. 50 א. 82% ב. 1. 82% 2. 70 נה. 51 א. 8 נה ו-10 נה.
- 52 א. הרוויח. ב. 65 נה. ג. 375 ק"ג.
- 53 א. 80 נה ו-50 נה. ב. 40 נה ו-45 נה. ג. 60%.
- 54 א. 100 נה ו-20 נה. ב. פי 5. 55 א. 30 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. 50%.
- 56 א. 10 ס"מ ו-8 ס"מ. ב. 1. $S = 80$ 2. $S = 64$ 3. 80%.
- 57 א. 8 ס"מ ו-13.5 ס"מ. 58 $S_{ABC} = 25$, $S_{ADE} = 10$
- 59 א. 8 ס"מ. ב. 12 ס"מ. ג. $8\frac{2}{3}$ ס"מ.
- 60 א. 16 ס"מ ו-12 ס"מ. ב. 20 ס"מ. ג. 9.6 ס"מ.
- 61 א. 16 ס"מ. ב. 10 ס"מ. ג. $S = 48$.
- 62 א. 6 ס"מ ו-9 ס"מ. ב. 10 ס"מ. ג. 12 ס"מ.
- 63 א. 6 ס"מ ו-14.4 ס"מ. ב. $S = 7.2$.

- (64) א. 6 ס"מ. ב. 1. $S = 36$.2 $S = 18\pi$.3 $S = 36 + 18\pi$.
- (65) א. 7 ס"מ. ב. $S = 196$.
- (66) 9 ס"מ ו-6 ס"מ. ב. פי 2.25 .
- (67) א. $3 \times 6 \times 6$ ס"מ. ב. $V = 108$. ג. $S = 144$. (68) א. 4 ס"מ. ב. $V = 192$.
- (69) א. $6 \times 5 \times 5$ ס"מ. ב. $V = 150$.
- (70) א. $10 \times 6 \times 6$ ס"מ. ג. $V = 360$. (71) א. 15 ס"מ. ב. 8 ס"מ ו-6 ס"מ. ג. כן .
- (72) א. 12 ס"מ. ב. 9 ס"מ ו-15 ס"מ. ג. $V = 270$.
- (73) א. 20 ס"מ. ב. 6 ס"מ. ג. $V = 1440$.
- (74) א. 4 ס"מ ו-6 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S = 48$.
- (75) א. 10 ס"מ ו-8 ס"מ. ב. $S = 160\pi$. ג. 1. $S = 100\pi$.2 $S = 360\pi$.
- (76) א. $r = 16$, $h = 20$. ב. $S = 1152\pi$. ג. $V = 5120\pi$.
- (77) א. 8 ס"מ. ב. 96π סמ"ר .
- (78) א. 12 ס"מ = h , 10 ס"מ = r . ב. 256.2π סמ"ר . ג. 1.64 .
- (79) א. 1. 5 ס"מ .2. 65π סמ"ר .3. 12 ס"מ . ב. 100π סמ"ר .
- (80) א. 8 ס"מ . ב. 5 ס"מ = r_2 , 15 ס"מ = r_1 . ג. $346\frac{2}{3}\pi$ סמ"ק . ד. 627.36π סמ"ר .

תרגול מבגרויות:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

בעיות קנייה ומכירה:

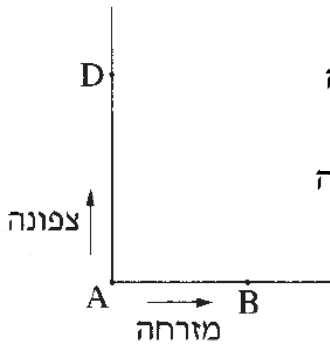
- (1) בחנות יש שני סוגי בדים: בד מסוג א' ובד מסוג ב'. המחיר של 4 מטרים בד מסוג א' גדול ב-135 שקלים מהמחיר של 3 מטרים בד מסוג ב'. לקוח קנה 3 מטרים בד מסוג א' ו-4 מטרים בד מסוג ב', ושילם סך הכול 382.5 שקלים. לפני הקנייה מספר המטרים של הבד מסוג א' שיש בחנות שווה למספר המטרים של הבד מסוג ב'. המחיר של כל הבד מסוג א' שיש בחנות, גדול ב-396 מהמחיר של כל הבד מסוג ב'.
- א. מצא את המחיר של מטר אחד של מסוג א' ואת המחיר של מטר אחד של בד מסוג ב'.
- ב. מצא את מספר המטרים של הבד מכל סוג שיש בחנות (לפני הקנייה).
- (2) סוחר קנה גופיות. לכל גופייה היה אותו מחיר. 5 גופיות היו פגומות, והסוחר מכר את חמש הגופיות האלה בסכום כולל של 80 שקל ובהפסד של 20% (לעומת מחיר הקנייה). את שאר הגופיות מכר הסוחר ברווח של 30%. הרווח הכולל של הסוחר ממכירת כל הגופיות (פגומות ולא פגומות) היה 190 שקלים.
- א. כמה שילם הסוחר עבור גופייה אחת?
- ב. כמה גופיות קנה הסוחר?
- (3) המחיר של טלפון נייד בחנות א' היה 600 שקל. מחיר זה הועלה באחוז מסוים. המחיר של אותו טלפון נייד בחנות ב' היה 900 שקל. מחיר זה הוזל באותו אחוז שהועלה המחיר של הטלפון הנייד בחנות א' ואז המחיר של הטלפון הנייד בשתי החנויות היה זהה. מצא את המחיר הסופי של הטלפון הנייד.
- (4) בחברת טלפונים המחיר לדקת שיחה בשעות הערב נמוך ב-40% מן המחיר לדקת שיחה בשעות היום. כדי לעודד שיחות בשעות הערב הורידה החברה ב-18% את המחיר לדקת שיחה בשעות הערב. (המחיר לדקת שיחה בשעות היום לא השתנה). אחרי ההוזלה אלעד שוחח 150 דקות בשעות היום ו-300 דקות בשעות הערב, ושילם 44.64 שקלים. מצא את המחיר באגורות לדקת שיחה ביום, ולדקת שיחה בערב לפני ההוזלה.
- (5) ראובן רוצה לרכוש מינוי למכון כושר. המחיר המלא של המינוי הוא 200 שקלים. אם ראובן יביא שני חברים שירכשו מינוי במחיר מלא, הוא יקבל על המינוי שלו הנחה של $x\%$ עבור החבר הראשון, ועבור החבר השני יקבל הנחה של $x\%$ על המחיר שאחרי ההנחה הראשונה. ראובן הביא שני חברים ושילם עבור המינוי שלו רק 144.5 שקלים.
- א. מצא את אחוז ההנחה שקיבל ראובן על המינוי עבור החבר הראשון.
- ב. מצא את אחוז ההנחה הכולל שקיבל ראובן על המינוי שלו לאחר שהביא את שני החברים.

בעיות תנועה:

6) מכונית נסעה מעיר A לעיר B על כביש ראשי במהירות קבועה. בדרך חזרה מעיר B לעיר A נסעה המכונית בדרך עפר, הקצרה ב-40% מהדרך בכביש הראשי, ונאלצה להקטין את מהירותה ב-10%. אורך הדרך בכביש הראשי מ-A ל-B הוא 240 ק"מ. נתון כי בכביש הראשי עברה המכונית $\frac{2}{3}$ מהדרך שבין A ל-B בשעתיים. מצא את זמן הנסיעה של המכונית בדרך חזרה מ-B ל-A.

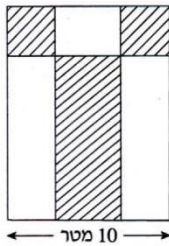
7) ממקום A יצאה מכונית א' וכעבור $\frac{1}{2}$ שעה יצאה מאותו מקום ובאותו כיוון מכונית ב'. המהירות של מכונית ב' גדולה ב-25% מהמהירות של מכונית א'. כעבור כמה שעות מרגע היציאה של מכונית א' ייפגשו שתי המכוניות? (המהירויות של המכוניות אינן משתנות).

8) שני הולכי רגל יוצאים בשעה 7:00 מנקודה A : אחד הולך צפונה ואחד הולך מזרחה (ראה ציור). בשעה 9:00 הגיע ההולך מזרחה לנקודה B, וההולך צפונה הגיע לנקודה D כך שהמרחק בניהם היה 10 ק"מ. ההולך צפונה הלך מיד מנקודה D לנקודה B בדרך הקצרה ביותר, והגיע לנקודה B בשעה 11:30. המהירויות של הולכי הרגל אינן משתנות. מצא את המהירות של כל אחד מהולכי הרגל.

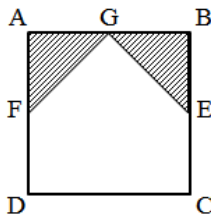


9) רוכב אופניים יצא מיישוב A ליישוב B ובדיוק באותה שעה יצא הולך רגל מיישוב B ליישוב A. הולך הרגל הלך במהירות קבועה שקטנה ב-10 קמ"ש מהמהירות של רוכב האופניים. כעבור 24 דקות המרחק בין רוכב האופניים להולך הרגל היה 12 ק"מ. כעבור 36 דקות נוספות הם נפגשו.
א. מצא את המהירות של רוכב האופניים.
ב. מצא באיזה מרחק מיישוב A נפגשו רוכב האופניים והולך הרגל.

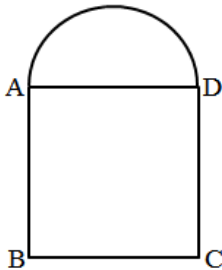
בעיות הנדסת המישור:



10) בגינה בצורה מלבנית רוצים לשתול דשא בשטחים המקווקווים שבציור שני השטחים בפינות הגינה הם בצורת ריבועים, והשטח האמצעי הוא בצורת מלבן (ראה ציור). רוחב הגינה הוא 10 מטר, ואורכה גדול ב-20% מרוחבה. מחיר מ"ר של הדשא הוא 60 ש"ח, והמחיר הכולל של הדשא ששותלים הוא 3,240 ש"ח. מצא את סכום השטחים של הדשא שבפינות הגינה.

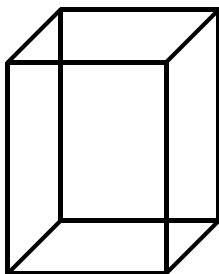


11) בנו חלון זכוכית בצורת ריבוע ABCD שאורך צלעו 2 מטרים. שתיים מפינות הריבוע עוצבו בצורת משולשים חופפים AGE ו-BGF כך ש- $AF = BE = x$ (ראה ציור). המשולשים עשויים מזכוכית צבעונית, ושאר החלון עשוי מזכוכית רגילה. מטר מרובע של זכוכית צבעונית עולה 20 שקלים ושל זכוכית רגילה – 10 שקלים. המוכר נתן הנחה של 22% לזכוכית צבעונית ו-10% לזכוכית רגילה. סך כל ההנחה על שני סוגי הזכוכית הדרושים לבניית החלון היה 14%. מצא את האורך של AE.

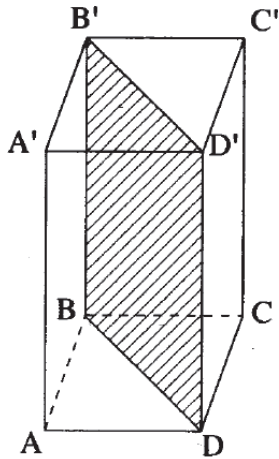


12) חלון מורכב מחצי עיגול ומריבוע ABCD. צלע הריבוע AD היא קוטר של חצי העיגול, כמתואר בציור. שטח הריבוע גדול ב-0.2187 מ"ר משטח חצי העיגול. מצא את ההיקף של המסגרת החיצונית של החלון. בחישובך השתמש ב- $\pi = 3.14$.

בעיות בהנדסת המרחב:



13) בנו קופסה סגורה בצורת תיבה שבסיסה ריבוע (ראה ציור). גובה התיבה גדול פי 1.4 מצלע הבסיס. שטח הפנים של התיבה (השטח של שש פאות התיבה) הוא 1710 סמ"ר.
 א. מצא את צלע הבסיס וגובה התיבה.
 ב. רוצים למלא את התיבה בקוביות, שאורך הצלע של כל אחת מהן הוא $1/5$ מאורך צלע הבסיס של התיבה. בכמה קוביות כאלה אפשר למלא את התיבה?



- 14) בונים מיכל פתוח מלמעלה. המכל הוא בצורת תיבה שבסיסה ABCD הוא ריבוע. בתוך התיבה בנו מחיצה דקה מאוד BDD'B' המקווקוות בציר. אורך צלע הבסיס ABCD הוא a . גובה התיבה גדול פי 2 מאורך האלכסון של בסיס התיבה.
- א. הבע באמצעות a את גובה התיבה.
- ב. מחיר החומר שממנו עשויים בסיס התיבה והמחיצה הוא 15 שקלים למ"ר. מחיר החומר שממנו עשויות פאות התיבה הוא $8\sqrt{2}$ שקלים למ"ר. עלות החומרים לבניית התיבה (כולל המחיצה) הייתה בסך הכול 812 שקלים. מצא את הערך של a .

תשובות סופיות:

- 1) א. מחיר בד א': 67.5 שקלים למטר, מחיר בד ב' 45 שקלים למטר
 ב. סוג א': 17.6 מטרים, סוג ב': 17.6 מטרים.
- 2) א. 20 שקלים. ב. 40 גופיות.
- 3) 720 שקלים.
- 4) מחיר לדקת שיחה ביום הוא 15 אגורות.
 המחיר לדקת שיחה בערב הוא 9 אגורות.
- 5) א. 15% ב. 27.75% 6) שעתיים. 7) שעתיים וחצי.
- 8) מ-A ל-D: 4 קמ"ש. מ-A ל-B: 3 קמ"ש.
- 9) א. 15 קמ"ש. ב. 15 ק"מ.
- 10) 18 מ"ר. 11) 0.8 מטרים. 12) 2.742 מטרים.
- 13) א. 21X15X15 ס"מ ב. 175 קוביות. 14) א. $2a\sqrt{2}$. ב. 2.

פרק 4 – גאומטריה אנליטית:

הישר:

נוסחאות כלליות:

1. המרחק בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ יחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$.d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא:

$$.x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3. שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

משוואת הישר:

4. משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y = mx + n$.

כאשר: m הוא שיפוע הישר ו- n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .

5. נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

מצב הדדי בין שני ישרים:

6. ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$.

7. ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.

8. ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2, n_1 = n_2$.

שיפועים של ישרים:

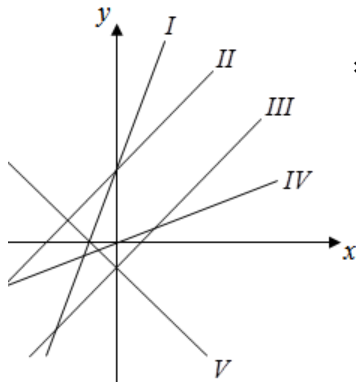
9. שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

10. הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$.

שאלות:

1 הנקודות $A(2,-7), B(-10,4), C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי.

2 נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.



3 התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

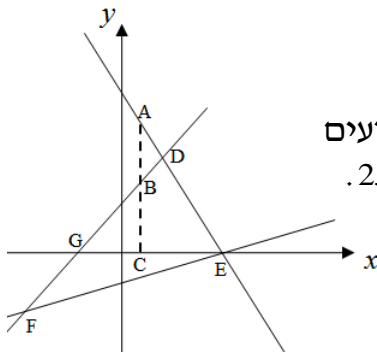
- א. $y = x + 3$
- ב. $y = -x - 1$
- ג. $y = 2x + 3$
- ד. $y = x - 1$
- ה. $y = \frac{1}{2}x$

4 במשולש ABC נתונים שיעורי הקדקודים: $A(5,-1), B(3,7), C(-5,5)$. הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

5 נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקדקודים $A(-9,1)$ ו- $B(5,-7)$.

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x + 3y + 6 = 0$.

- א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
- ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



6 שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים

בשרטוט: $2x + y - 8 = 0$, $x - y + 2 = 0$, $x - 4y - 4 = 0$.

הקטע AC מקביל לציר ה- y .

- א. חשב את שטח המשולש DEF.
- ב. נתון: $BC = 3$. חשב את אורך הקטע AB.

7 BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקדקוד $A(-6,1)$.

משוואת התיכון BD היא $x - y = 1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x + 5y = 67$.

מצא את שיעורי הקדקוד C.

תשובות סופיות:

(1) $D(18,0)$ (2) $B(-1,-3)$ (3) א. II ב. V ג. I ד. III ה. IV

(5) א. $l_{BD} : y = 3x - 22$ ב. $l_{BC} : y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$

(6) א. 18 יח"ש S_{DEF} ב. $AB = 3$ יחידות אורך (7) $C(14,5)$

המעגל:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a,b)$ ורדיוסו R היא: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

משוואת מעגל קנוני:

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0,0)$)

ורדיוסו R היא: $x^2 + y^2 = R^2$.

שאלות:

(1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג. $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

(2) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

(3) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא

על הישר $y = 2x - 1$.

4 מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו- $B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

5 מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- x מיתר שאורכו 12.

6 מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

7 מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

8 נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- x . מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

9 נתון ישר שמשוואתו $y=2x-10$. הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטר. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

תשובות סופיות:

1 א. $M(3,-5)$, $R=7$ ב. $M(-0.5,0)$, $R=\sqrt{10}$ ג. $M(m,-n)$, $R=\sqrt{m^2+n^2}$.

2 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 72$

3 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 169$ או $(x-7.8)^2 + (y-14.6)^2 = 169$ 4 $(x-1)^2 + y^2 = 18$

5 $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 100$ או $(x-4)^2 + (y+8)^2 = 100$ 6 $(x\pm 4)^2 + (y\pm 4)^2 = 16$

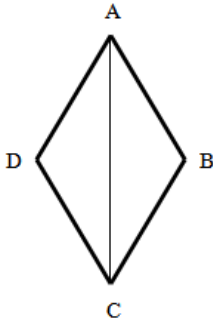
7 $4x-3y+35=0$ או: $y=\frac{4}{3}x+11\frac{2}{3}$ ו- $4x+3y=27$ או $y=-\frac{4}{3}x+9$

8 א. $(0,-8)$, $(6,0)$, $(0,0)$ ב. 27 יח"ש.

9 12.5 יחידות אורך.

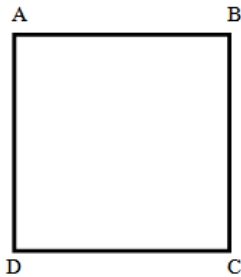
תרגול נוסף – הישר (שאלות מסכמות):

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.



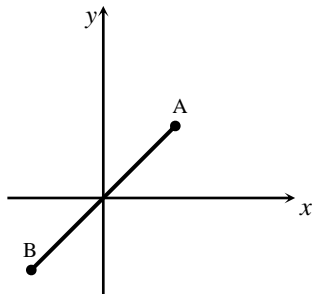
- 1) במעוין ABCD שיעור אחת הנקודות הוא $(0, 6)$.
 ידוע כי משוואת האלכסון AC היא: $y = -1.5x + 6$
 ואחת ממשוואות הצלעות היא: $5y + x = 4$.
 א. מצא את משוואת האלכסון השני.
 ב. מצא את שאר קודקודי המעוין.

- 2) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם $(1, 4)$.



- א. איזה מרובע הוא? הראה חישוב מתאים.
 ב. נתון גם: $D(4, 13)$, $m_{CD} = -\frac{1}{3}$, $BC = \sqrt{90}$.
 איזה מרובע הוא כעת? הראה חישוב מתאים.
 ג. נתון גם: $B(-8, 7)$.
 איזה מרובע הוא כעת? הראה חישוב מתאים.
 ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

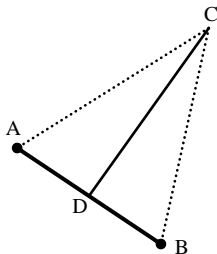
- 3) אמצע הקטע AB נמצא בראשית הצירים. ידוע כי $A(6, 8)$.



- א. מצא את שיעור הנקודה B.
 ב. מוסיפים את הנקודה C כך שמרחק מראשית הצירים הוא 10. היעזר במרחק AB וקבע איזה משולש הוא המשולש ABC.
 ג. נתון כי שיעורי הנקודה C הם: $(6, -8)$.
 חשב את שטח המשולש ABC.

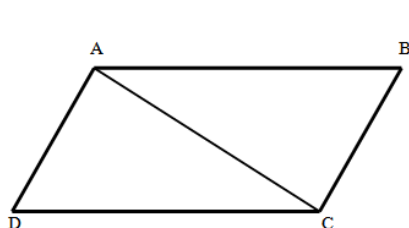
- 4) הנקודה D היא אמצע הקטע AB שמשוואתו היא: $3y + 2x + 4 = 0$.

שיעורי הנקודה A הם $(-8, 4)$ ו-B היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-x.



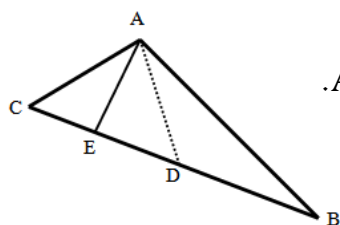
- א. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.
 ב. מהנקודה D מעלים אנך שחותך את ציר ה-y בנקודה C.
 איזה משולש הוא המשולש ABC? נמק את תשובתך.
 ג. חשב את שיעורי הנקודה C.
 ד. חשב את שטח המשולש ABC.

- 5) במקבילית ABCD האלכסון AC מאונך לצלע AD. שיעורי הנקודה C הם (-7, -3) ושיפוע הקטע BC



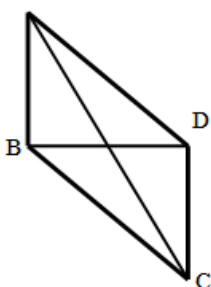
- הוא: $m = \frac{1}{3}$. הנקודה A נמצאת על ציר ה- y והנקודה B נמצאת על ציר ה- x .
 א. מצא את משוואות הישרים AC ו-BC.
 ב. חשב את שיעורי הנקודות A, B ו-D.
 ג. חשב את שטח המקבילית.

- 6) במשולש ABC הצלע AC מונחת של הישר: $y = 5$. הנקודה A נמצאת על ציר ה- y . הנקודה B נמצאת ברביע הראשון ומרחקה מכל ציר הוא 11.



- הנקודה D היא אמצע הצלע BC במשולש ABC ושיעור ה- x שלה הוא 5.
 א. מצא את שיעורי הנקודה D ואת אורך הקטע AC.
 ב. הנקודה E נמצאת על הצלע BC כן שמתקיים: $AE \perp BC$.
 ג. מצא את שיעורי הנקודה E.

- 7) במקבילית ABCD האלכסונים AC ו-BD מונחים על הישרים: $y = -x + 8$ ו- $y = 4 - x$. בהתאמה. הצלע CD מונחת על הישר: $x = 8$.

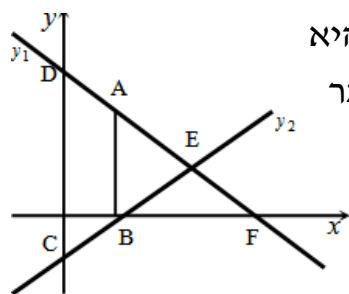


- א. מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המקבילית.
 ב. מצא את משוואת הצלע AB.
 ג. חשב את שטח המקבילית.

- 8) נתונים שני ישרים: $y_1 = -\frac{x}{2} + 8$, $y_2 = \frac{x}{2} - 2$.

מעלים מהישר y_2 אנך מנקודת החיתוך שלו B עם ציר ה- x שחותך את הישר y_1 בנקודה A. הנקודות C ו-D הן נקודות החיתוך של הישרים עם ציר ה- y כך שנוצר טרפז ABCD.

- א. מצא את שיעורי הנקודות של קדקודי הטרפז ABCD.
 ב. הישרים y_1 ו- y_2 נחתכים בנקודה E. הנקודה F היא נקודת החיתוך של הישר y_1 עם ציר ה- x כך שנוצר המשולש BEF. חשב את שיעורי הנקודות E ו-F.



- ג. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{BEF}}{S_{ABCD}}$.

9 במרובע ABCD ידוע כי: $m_{AB} = m_{CD} = 2$.

שיעורי הקדקוד B הם: $(-1, -5)$ ונקודת פגישת האלכסונים K הם: $\left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$.

- מצא את משוואת הצלע AB ואת משוואת האלכסון BD.
- נתון גם כי: $C(-4, -3)$ ו- $d_{AB} = \sqrt{80}$.
- מצא את משוואת הצלע CD.
- איזה מרובע הוא המרובע ABCD? נמק והראה חישוב מתאים.

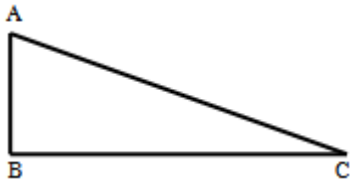
10 במרובע ABCD שקדקודיו הם: $A(-5, 12)$, $B(7, 8)$, $C(11, 4)$, $D(1, 2)$

בנו משולש DEF כך ש-E ו-F הם בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו-BC.

- מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
- חשב את אורכי הקטעים EF ו-DF.
- איזה משולש הוא המשולש DEF?
- חשב את שטח המשולש DEF.

11 במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$) שיעורי הנקודה A הם: $(-4, 12)$

ושיעורי הנקודה B הם: $(-2, 6)$.

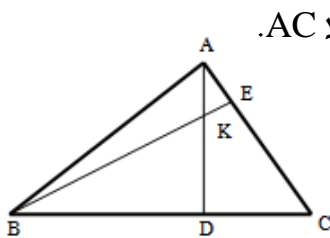


- מצא את משוואת הניצב BC.
- הנקודה D נמצאת על היתר AC ושיעוריה הם: $(-2, 11)$.
- מצא את שיפוע היתר AC.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.

12 AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.

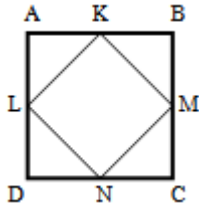
ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1, 3)$.

שיעורי הנקודות D ו-E הם: $D(-2, 4)$, $E(3, 5)$.



א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

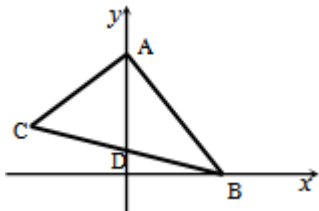
- מצא את שיעורי הקדקוד A.
- מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.
- מצא את שיעורי הקדקוד B.



13) המרובע ABCD הוא ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים. הצלע AB מונחת על הישר: $y = 8$, הצלע BC מונחת על הישר: $x = 5$, הצלע CD מונחת על הישר: $y = -2$ והצלע AD מונחת על הישר: $x = -5$.

מקצים על אמצעי הצלעות את הנקודות L, M, N, K כך שנוצר המרובע LMNK. איזה מרובע הוא המרובע LMNK? נמק והראה חישוב מתאים.

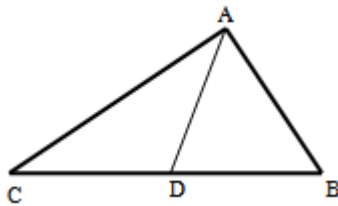
14) במשולש ABC הקדקודים A ו-B הם נקודות החיתוך של הישר AB עם הצירים והנקודה C היא נקודת החיתוך של שני הישרים BC ו-AC כפי שמתואר באיור. הקטעים AB ו-BC מונחים בהתאמה על הישרים: $y = -3x + 12$ ו- $4y + x = 4$. הנקודה D היא נקודת החיתוך של הישר BC עם ציר ה-y. ידוע כי הקטע AD מחלק את המשולש ABC לשני משולשים ABD ו-ACD שווי שטח.



- מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-D.
- חשב את שטח המשולש ABD ומצא את שיעורי הנקודה C.
- איזה קטע במשולש ABC הוא הקטע AD? נמק.
- חשב את שטח המשולש ABC.

15) הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD. הצלע BC מונחת על הישר: $y = 4$ וידוע ששיעור ה-x של הנקודה C הוא: $x_C = -1$.

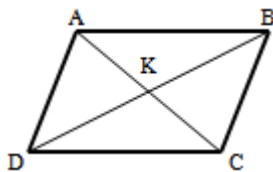
כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB} = -2$.



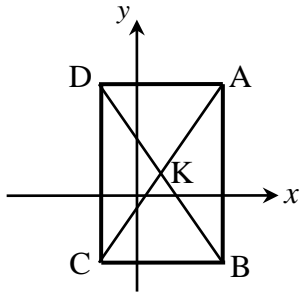
- מצא את משוואת הצלע AB.
- מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.
- חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.
1. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?
2. איזה משולש הוא המשולש ABC?

16) במקבילית ABCD נקודת פגישת האלכסונים K נמצאת על ציר ה-y בנקודה

שבה: $y = 4$. הנקודה C נמצאת על ציר ה-x ושיפוע הצלע BC הוא: $m_{BC} = -\frac{1}{3}$.



- שיעורי הנקודה D הם: $(5,7)$.
- מצא את שיעורי הנקודה B.
- כתוב את משוואת הישר BC.
- מצא את שיעורי הנקודות C ו-A.



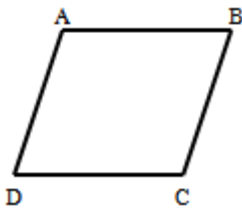
17) הצלע AB של המלבן ABCD מונחת על הישר: $x = 8$.
אורך האלכסון במלבן הוא 26 ונקודת פגישת האלכסונים K היא (3,3).

- מצא את שיעורי הקדקודים A ו-B אם ידוע ש-A נמצאת ברביע הראשון.
- מצא את שיעורי הקדקודים C ו-D.
- מצא את שטח המלבן.

18) משוואות הצלעות AB, BC ו-AC של המשולש ABC הם בהתאמה:
 $y = x + 5$, $y = 3x - 1$, $y = 5x - 3$

- שרטט את המשולש במחברת הבחינה שלך וענה על השאלות הבאות:
- מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המשולש.
 - מצא את שלושת המשוואות של הגבהים במשולש ABC.
 - הראה שהגבהים חותכים זה את זה באותה נקודה.

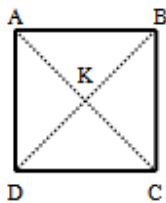
19) במעוין ABCD הנקודה D נמצאת על ציר ה-x ונתון: $A(3,2)$, $B(5,6)$



- מצא את שיעורי הנקודה D אם ידוע שהיא נמצאת מימין לציר ה-y.
- מצא את שיעורי הנקודה C.
1. חשב את השיפועים: m_{AD} , m_{AB} .
2. מה ניתן לומר על המעוין ABCD?

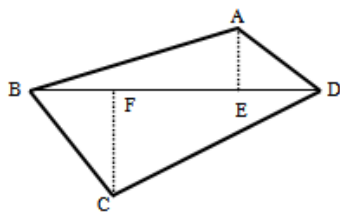
20) בריבוע ABCD שיעורי נקודת פגישת האלכסונים K הם: (6,8).

הקדקוד B נמצא על ציר ה-y והקדקוד D נמצא על ציר ה-x (הקדקודים לא על ראשית הצירים).

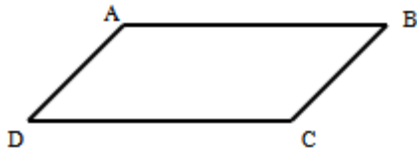


- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-D.
- מצא את משוואת הישר AC.
- חשב את שטח הריבוע.

21) נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$



- מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.
- מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
 - מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
 - מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
 - חשב את שטח המרובע ABCD.



22 נתון מרובע ABCD ששיעורי קדקודיו הם :

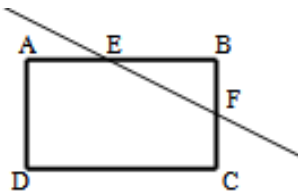
$A(5,32)$, $B(7,36)$, $C(5,26)$, $D(3,22)$

- הוכח שהמרובע הוא מקבילית.
- כתוב את משוואת האלכסון AC.
- מצא את נקודת פגישת האלכסונים של המקבילית.
- מצא את משוואת הישר המקביל לצלעות AB ו-CD של המקבילית ועובר דרך נקודת פגישת האלכסונים.

23 המרובע ABCD הוא מלבן. שיעורי הקדקוד B הם : (1,6) ושיפוע הצלע AB

הוא : $m = 3$. דרך אמצעי הצלעות AB ו-BC מעבירים ישר שמשוואתו

היא : $y = \frac{1}{2}x + 3$ החותך בנקודות E ו-F בהתאמה.

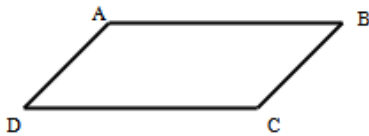


- מצא את משוואות הצלעות AB ו-BC.
- מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
- מצא את שיעורי הקדקודים A ו-C.

24 המרובע ABCD הוא מקבילית שבו אורך הצלע AB גדול פי 2 מאורך

הצלע BC. נתון : $A(2,5)$, $B(7,17)$, הנקודה D נמצאת ברביע הרביעי.

א. מצא את שיעור ה-y של הנקודה D ($y_D = ?$).



- מצא את שיעורי נקודת פגישת האלכסונים של המקבילית.
- מצא את שיעורי הנקודה C.

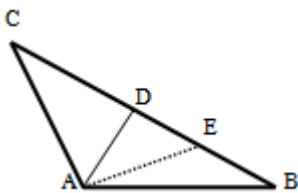
25 המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

מעבירים במשולש את הגובה לבסיס AD ומסמנים נקודה E

על הבסיס BC כך שמתקיים : $BE = DE$.

קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים

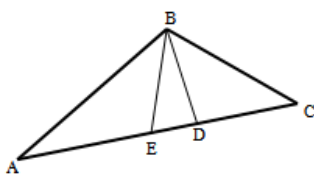
ונתון כי : $D(5,7)$, $E(8.5,2.5)$.



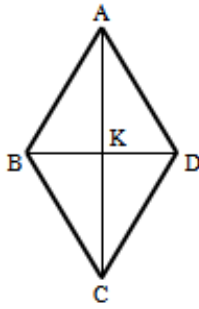
- מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.
- כתוב את משוואת השוק AC.

26 הקדקוד A של המשולש ABC נמצא בראשית הצירים. מורידים גובה BD

ותיכון BE לצלע AC כמתואר באיור. ידוע כי : $m_{BD} = -4$, $B(4,18)$, $x_E = 6$.



- מצא את משוואת הגובה BD.
- מצא את משוואת הצלע AC.
- חשב את שיעורי הנקודות D , E ו-C.



27) המרובע ABCD הוא מעוין. הנקודה $K(5,7)$ היא נקודת פגישת

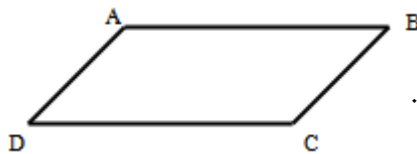
אלכסוני המעוין. ידוע כי: $m_{AB} = 2$, $B(1,4)$.

- א. מצא את משוואת הצלע AB.
- ב. מצא את שיפוע האלכסון BD.
- ג. מצא את משוואת האלכסון AC.
- ד. מצא את שיעורי הקדקוד A.

28) המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדול פי 2 מאורך הצלע

הסמוכה לה. שיעורי שניים מקודקודי המקבילית הם: $A(9,8)$, $B(1,2)$.

שיעורי הנקודה C, אשר נמצאת ברביע הראשון, מקיימים: $x_C = y_C$.

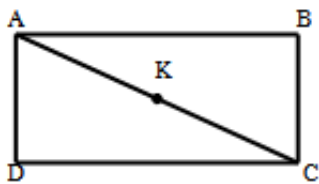


- א. מצא את אורך הצלע AB.
- ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.
- ג. מצא את שיעורי נקודת פגישת האלכסונים.
- ד. מצא את שיעורי הקדקוד D.

29) במלבן ABCD שיעורי הנקודה D הם $(-1,7)$.

שיעורי נקודת פגישת האלכסונים K הם $(1.5, 4.5)$ ושיפוע האלכסון AC

הוא: $m_{AC} = 7$. שיפוע הצלע CD הוא: $m_{CD} = \frac{1}{3}$.



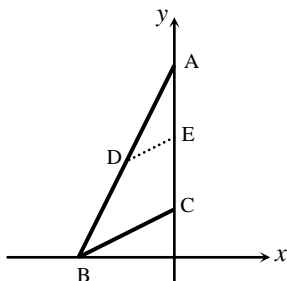
- א. מצא את שיעורי הקדקוד B.
- ב. מצא את משוואת הצלע AB.
- ג. מצא את משוואת האלכסון AC ואת שיעורי הקדקוד A.

30) הצלע AC של המשולש ABC נמצאת על ציר ה-y. שיעורי הנקודה C הם $(0,2)$

ושיעורי הנקודה A הם $(0,12)$. הנקודה E היא אמצע הצלע AC.

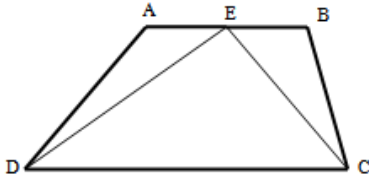
הנקודה B נמצאת על ציר ה-x ושיעור ה-x שלה הוא: $x_B = -4$.

מעבירים דרך הנקודה E ישר DE המקביל לצלע BC.



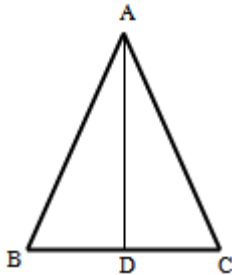
- א. מצא את שיעורי הנקודה E.
- ב. כתוב את משוואת הצלע BC.
- ג. כתוב את משוואת הישר DE.
- ד. מצא את שיעורי הנקודה D.

31 המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x. שיעורי הנקודה B הם (3,2) והצלע AD מונחת על הישר: $x = -5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$ כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\angle DEC = 90^\circ$.



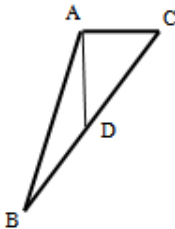
- מצא את שיעורי הנקודות A, D, E (ברביע השלישי).
- מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.
- מצא את שיעורי הנקודה C.
- חשב את שטח המשולש DEC.

32 המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). הבסיס BC נמצא על הישר: $y = -2$. מקצים נקודה D על הבסיס BC כך שלקדקוד A ולנקודה D מתקיים: $x_A = x_D = 1$. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B נמצאת ברביע השלישי. נתון כי: $d_{BD} = 5$.



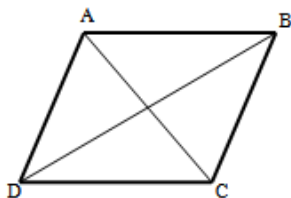
- איזה קטע הוא AD במשולש ABC? נמק את תשובתך.
- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
- שטח המשולש הוא 20. מצא את שיעורי הקדקוד A.

33 הצלע AC של המשולש ABC מונחת על הישר: $y = 8$. הקטע AD הוא תיכון לצלע BC ומשוואתו היא: $x = 3$. נתון: $B(-1, -2)$.



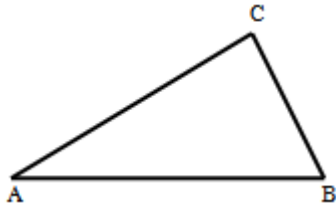
- מצא את שיעורי הקדקוד C וכתוב את משוואת הצלע BC.
- איזה משולש הוא המשולש ACD? נמק וחשב את שטחו.
- חשב את שטח המשולש ABC.

34 המרובע ABCD הוא מעוין שאלכסונו נפגשים בראשית הצירים. שיעורי אחד מקודקודי המעוין הם $(-2, 2)$.



- מצא את משוואות האלכסונים של המעוין.
- ידוע כי שיעור ה-x של אחד מקודקודי המעוין הוא 5. מצא את שאר קודקודי המעוין.
- חשב את שטח המעוין.

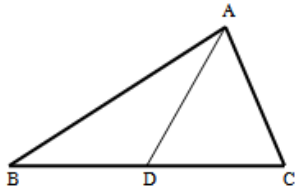
35) נתון משולש ABC. הצלע AB מונחת על הישר: $y = x + 2$



והצלע BC מונחת על הישר: $y = 2x - 5$.

- מצא את שיעורי הנקודה B.
- ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 1. מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.
- כתוב את משוואת הישר AC אם ידוע כי שיפועו הוא: $m = \frac{1}{2}$.
- מצא את שיעורי הנקודה C.

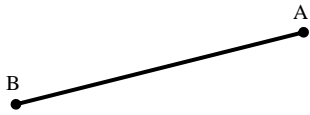
36) הקטע AD הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC.



ידוע כי: $B(1,1)$, $D(2,3)$.

- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- מצא את משוואת הצלע BC.
- הצלעות AC ו-AB מונחות בהתאמה על הישרים: $y = x$, $y = 8 - x$.
- מצא את שיעורי הקדקוד A.
- חשב את אורך התיכון AD.

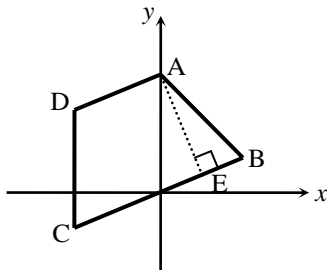
37) באיור שלפניך מתואר הקטע שקצותיו הם: $A(-5,-2)$ ו- $B(0,10)$.



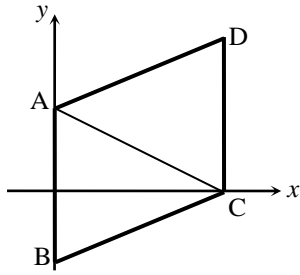
- מצא את אורך הקטע AB.
- הנקודה C היא אמצע הקטע AB. מצא את שיעורי הנקודה C.
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה C והנקודה $(2.5, 9)$.
- קבע אלו מהנקודות הבאות נמצאות על הישר שמצאת בסעיף הקודם. נמק את בחירתך.
I. $(4.5, 11)$ II. $(6.5, 0)$ III. $(0.5, 6)$

38) באיור שלפניך נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם:

$A(0,10)$, $B(6,3)$, $C(-6,-3)$, $D(-6,7)$



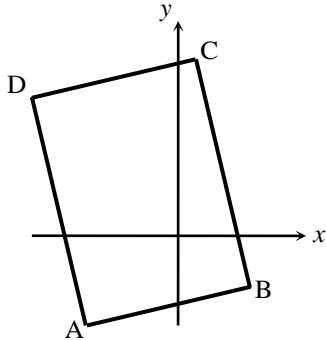
- כתוב את משוואות הישרים AD ו-BC.
- הסבר מדוע המרובע הוא טרפז.
- נתון כי AE הוא גובה הטרפז.
1. מצא את משוואת הישר AE.
2. מצא את שיעורי הנקודה E.



39) באיור שלפניך נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם :

$$(8,0), (0,-4), (0,5), (8,9)$$

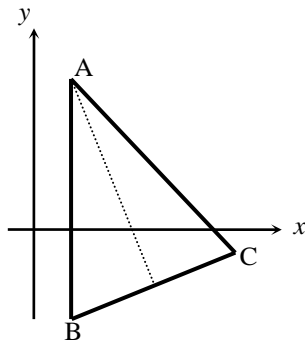
- א. התאם את הנקודות לקדקודים שבאיור.
- ב. האם המרובע הוא מעוין? נמק ע"י חישוב מתאים.
- ג. מעבירים את הקטע AC.
 1. מצא את משוואת הישר AC.
 2. חשב את שטח המשולש ABC.



40) באיור שלפניך נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם :

$$(2,13), (5,-5), (-7,-7), (-10,11)$$

- א. התאם את הנקודות לקדקודים שבאיור.
- ב. הוכח כי המרובע הוא מלבן. נמק ע"י חישוב.
- ג.
 1. חשב את אורכי צלעות המלבן.
 2. חשב את שטח המלבן.



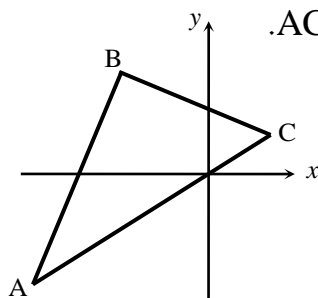
41) באיור שלפניך נתון משולש ABC שקדקודיו הם :

$$A(2,6), B(2,-4), C(8,-2)$$

- א. מצא את משוואת הגובה לצלע BC.
- ב. מצא את משוואת התיכון לצלע BC.
- ג. הוכח כי המשולש הוא שווה שוקיים. (אפשר להסתמך על סעיפים קודמים).
- ד. חשב את שטח המשולש.

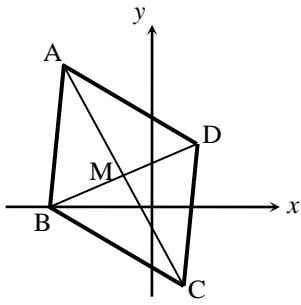
42) באיור שלפניך נתון משולש ABC שקדקודיו הם :

$$A(-16,-12), B(-6,8), C(4,3)$$



א. העתק את האיור למחברתך ומצא את אורך הצלע AC.

- ב.
 1. סמן נקודה D על הצלע AC ומצא את משוואת התיכון BD לצלע AC.
 2. חשב את אורך התיכון BD.
 - ג. הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית. (אפשר להסתמך על סעיפים קודמים).
 - ד. חשב את היקף המשולש ABD.

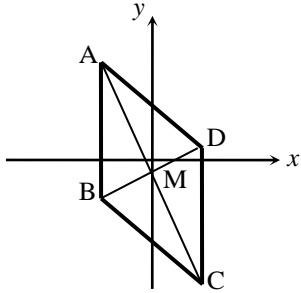


43 נתון מעוין ABCD.

אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M.

ידוע כי: $A(-7,9)$, $C(1,-3)$.

- מצא את שיעורי הנקודה M.
- מצא את משוואת האלכסון BD.
- מצא את הקדקודים B ו-D אם ידוע כי B נמצאת על ציר ה-x.
- חשב את שטח המעוין.



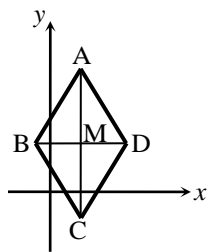
44 נתון מעוין ABCD. אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M.

ידוע כי שיעורי הקדקוד C הם: $(6,-19)$.

משוואת אחד מאלכסוני המעוין היא: $y = \frac{1}{3}x - 1$.

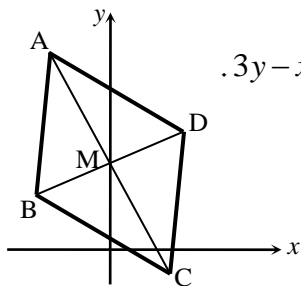
- קבע לאיזה מבין האלכסונים AC, BD מתאימה המשוואה. נמק.
- ידוע כי הנקודה M נמצאת על ציר ה-y.
- מצא את שיעורי הקדקוד A.
- מצא את משוואת הצלע AB אם ידוע כי שיעור ה-y של הקדקוד D הוא 1.
- חשב את היקף המעוין.

45 נתון מעוין ABCD. ידוע כי האלכסון AC גדול ב-4 יחידות מהאלכסון BD.



אלכסוני המעוין מאונכים לצירים ונפגשים בנקודה: $M(3,4)$.

- מהו שיעור ה-x של הקדקוד A?
- ידוע כי שיעור ה-y של הקדקוד A הוא 10.
- מצא את שיעורי הנקודה D.
- חשב את שטח המשולש AMD.



46 נתון מעוין ABCD.

משוואות האלכסונים של המעוין הם: $y = -3x + 5$ ו- $3y - x = 15$.

א. מצא את שיעורי נקודת מפגש האלכסונים M.

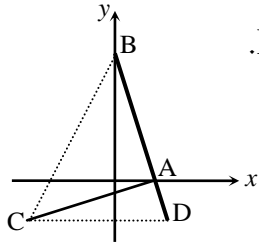
ב. מצא את שיעורי הקדקודים A ו-C אם ידוע כי אורך

האלכסון AC הוא: $\sqrt{160}$ ס"מ.

ג. נתון כי: $y_D = y_M + 1$.

- שיעור ה-y של הקדקוד D גדול ב-1 משיעור ה-y של נקודת מפגש האלכסונים M. חשב את שטח המעוין.

47) נתון ישר שמשוואתו היא: $y = 10 - 5x$.



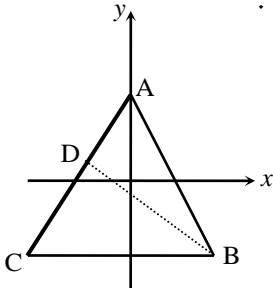
הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B.
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואת האנך AC.
ג. נתון כי השיפוע של הישר BC הוא 1.5. מצא את שיעורי הנקודה C.
ד. מסמנים נקודה D על הישר הנתון כך שהקטע DC מקביל לציר ה- x .

1. מצא את שיעורי הנקודה D.

2. חשב את שטח המשולש BCD.

48) נתון ישר שמשוואתו: $y = 1.5x + 7$ ונתונה הנקודה $B(5, -5)$.



מסמנים את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y ב-A.

א. 1. מצא את משוואת הישר AB.

2. חשב את אורך הקטע AB.

ב. מצא נקודה C על הישר הנתון כך ש- $AB = BC$.

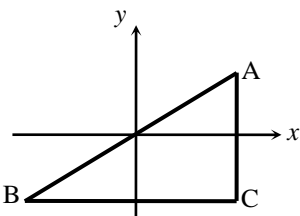
ג. מהנקודה B מעבירים אנך לישר הנתון.

ידוע כי האנך והישר נחתכים בנקודה D.

חשב את שיעורי הנקודה D.

ד. מצא את שטח המשולש ABC.

49) נתון ישר שמשוואתו: $y = \frac{3}{4}x$. מסמנים על הישר את הנקודות A ברביע הראשון ו-B ברביע השלישי. ידוע כי הנקודות A ו-B נמצאות באותו המרחק מראשית הצירים. מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- y ומהנקודה B מעבירים ישר המקביל לציר ה- x . הישרים נחתכים בנקודה C.



א. סמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

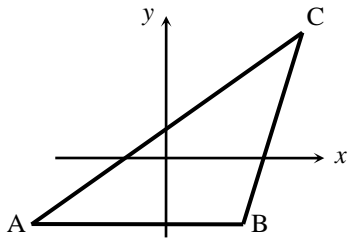
הבע באמצעות t את שיעורי הנקודה C.

ב. הבע באמצעות t את אורכי הצלעות AB ו-AC.

ג. מצא את t אם ידוע כי הצלע AB גדולה

ב-4 מהצלע AC.

ד. חשב את שטח המשולש ABC.



50) על הישר $y = -5$ מסמנים את הנקודות:

$$A(-7, -5); B(2, -5)$$

הנקודה C נמצאת על הישר: $y = x - 5$ ברביע הראשון.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.

א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי מרחק הנקודה C מ-A גדול ב-7 ממרחק מ-B.

1. הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

2. מצא את t.

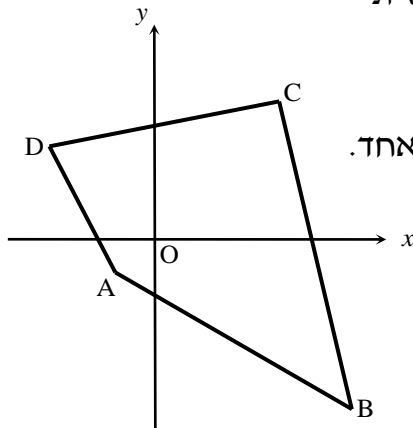
ג. חשב את היקף המשולש ABC.

51) באיור שלפניך נתון מרובע ABCD שלושה מקדקודיו הם:

$$A(-2, -2), B(12, -12), D(-6, 6)$$

ידוע כי סכום המרחקים של כל הקדקודים מהראשית

הוא: $28\sqrt{2}$ יחידות.



א. מצא את המרחק של הקדקוד C מהראשית.

ב. ידוע כי הנקודות A, C, ו-O נמצאות על ישר אחד.

מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את שטח המרובע ABCD.

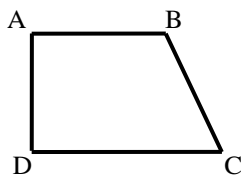
ד. מעבירים דרך הנקודה D ישר המקביל

לצלע AB וחותך את הצלע BC בנקודה E.

1. מצא את משוואת הישר.

2. מצא את שיעורי הנקודה E.

52) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle A = 90^\circ, AB \parallel CD$).



השוק AD יושבת על הישר $y = x$ וידוע כי: $x_A = x_D + 5$.

שיעורי הקדקוד B הם: $(10, -2)$.

א. מצא את שיעורי הקדקודים A ו-D.

ב. שטח הטרפז הוא: 110 יחידות שטח.

מצא את שיעורי הקדקוד C (הבחן בין שני מקרים).

ג. מצא את המקרה המתאים לנתון: $BC = \sqrt{250}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$. ב. $(5,5)$, $(-1,1)$, $(4,0)$.
- (2) א. מרובע כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
 ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות
 וזווית ישרה. ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות.
 ד. $S = 90$.
- (3) א. $B(-6, -8)$. ב. משולש ישר זווית. אם במשולש יש תיכון ששווה למחצית
 הצלע אותה הוא חוצה אז המשולש הוא ישר זווית. ג. $S = 96$.
- (4) א. $D(-5, 2)$, $B(-2, 0)$. ב. משולש שווה שוקיים. הקטע CD הוא אנך אמצעי
 ולכן הוא תיכון וגובה ולבסיס במשולש ABC. ג. $C(0, 9.5)$. ד. $S = 32.5$.
- (5) א. $AC: y = -3x - 24$, $BC: y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. ב. $A(0, -24)$, $B(2, 0)$, $D(-9, -27)$.
- (6) א. $D(5, 8)$, $AC = 1$. ב. $E(-0.2, 5.4)$. ג. $S = 210$.
- (7) א. $D(8, 4)$, $C(8, 0)$, $B(0, 4)$, $A(0, 8)$. ב. $x = 0$. ג. $S = 32$.
- (8) א. $D(0, 8)$, $C(0, -2)$, $B(4, 0)$, $A(4, 6)$. ב. $E(10, 3)$, $F(16, 0)$. ג. $\frac{S_{BEF}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{16}$.
- (9) א. $AB: y = 2x - 3$, $BD: y = 6x + 1$. ב. $CD: y = 2x + 5$. ג. טרפז. ניתן להראות שיש
 זוג צלעות נגדיות מקבילות (AB ו-CD) ואינן שוות.
- (10) א. $E(1, 10)$, $F(9, 6)$. ב. $d_{EF} = d_{DF} = \sqrt{80}$. ג. משולש שווה שוקיים. ד. 32 יח"ש.
- (11) א. $y = \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$. ב. $m = -\frac{1}{2}$. ג. $C(4, 8)$.
- (12) א. $AC: y = -x + 8$, $AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$. ב. $A(7, 1)$.
- ג. $BC: y = 3x + 10$, $BE: y = x + 2$. ד. $B(-4, -2)$.
- (13) ריבוע. (14) א. $D(0, 1)$, $B(4, 0)$, $A(0, 12)$. ב. $S_{ABD} = 22$, $C(-4, 2)$. ג. תיכון.
 קטע במשולש המחלק אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון. ד. $S_{ABC} = 44$.
- (15) א. $y = -2x + 22$. ב. $D(4, 4)$, $B(9, 4)$. ג. $BC = 10$, $AD = 5$.
- ד. 1. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.
 2. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז
 המשולש הוא ישר זווית.
- (16) א. $B(-5, 1)$. ב. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. ג. $C(-2, 0)$, $A(2, 8)$.
- (17) א. $B(8, -9)$, $A(8, 15)$. ב. $D(-2, 15)$, $C(-2, -9)$. ג. $S_{ABCD} = 240$.
- (18) א. $C(3, 8)$, $B(1, 2)$, $A(2, 7)$. ב. $5y + x = 43$, $3y + x = 23$, $y + x = 3$.

- (19) א. $D(7,0)$. ב. $C(9,4)$. ג. $m_{AB} = 2$, $m_{AD} = -\frac{1}{2}$. ד. המעוין ABCD הוא ריבוע. מעוין עם זווית ישרה הוא ריבוע.
- (20) א. $D(12,0)$, $B(0,16)$. ב. $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2}$. ג. $S_{ABCD} = 200$.
- (21) א. $y = x + 6$, $d_{BD} = \sqrt{200}$. ב. $E(5,11)$, $F(3,9)$. ג. $d_{AE} = \sqrt{8}$, $d_{CF} = \sqrt{72}$. ד. $S_{ABCD} = 80$. (22) א. $x = 5$. ב. $(5,29)$. ד. $y = 2x + 19$.
- (23) א. $AB: y = 3x + 3$, $BC: y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$. ב. $F(4,5)$, $E(0,3)$. ג. $A(-1,0)$, $C(7,4)$.
- (24) א. $y_D = -1$. (הפתרון השני נפסל מאחר שהנקודה D נמצאת ברביע הרביעי שבו ערך שיעור ה- y הוא שלילי). ב. $(5.75, 8)$. ג. $C(9.5, 11)$.
- (25) א. $C(-2, 16)$, $B(12, -2)$. ב. $y = -8x$.
- (26) א. $y = -4x + 34$. ב. $y = \frac{1}{4}x$. ג. $E(6, 1.5)$, $D(8, 2)$, $C(12, 3)$.
- (27) א. $y = 2x + 2$. ב. $m_{BD} = \frac{3}{4}$. ג. $3y + 4x = 41$. ד. $A(3.5, 9)$.
- (28) א. $d_{AB} = 10$. ב. $C(5, 5)$. ג. $(7, 6.5)$. ד. $D(13, 11)$.
- (29) א. $B(4, 2)$. ב. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. ג. $y = 7x - 6$, $A(1, 1)$.
- (30) א. $E(0, 7)$. ב. $y = \frac{1}{2}x + 2$. ג. $y = \frac{1}{2}x + 7$. ד. $D(-2, 6)$.
- (31) א. $E(-1, 0)$, $A(-5, -2)$, $D(-5, -8)$. ב. $CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$, $CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. ג. $C(5, -3)$. ד. $S_{DEC} = 30$.
- (32) א. תיכון/גובה/חוצה זווית הראש – הקטע AD מאונך לבסיס BC ולכן מקיים את שלושתם. ב. $C(6, -2)$, $B(-4, -2)$. ג. $A(1, 2)$.
- (33) א. $C(7, 8)$, $y = 1.25x - 0.75$. ב. משולש ישר זווית. הקטעים AC ו-AD מאונכים. ג. $S_{ACD} = 10$. ג. $S_{ABC} = 20$.
- (34) א. $y = x$, $y = -x$. ב. $(2, -2)$, $(-5, -5)$, $(5, 5)$. ג. $S_{ABCD} = 40$.
- (35) א. $B(7, 9)$. ב. $y = 3$. ג. $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$. ד. $C(5, 5)$.
- (36) א. $C(3, 5)$. ב. $y = 2x - 1$. ג. $A(4, 4)$. ד. $AD = \sqrt{5}$.
- (37) א. $AB = 13$. ב. $C(-2.5, 4)$. ג. $y = x + 6.5$.
- ד. שאר הנקודות לא מקיימות את משוואת הישר.
- (38) א. $BC: y = 0.5x$; $AD: y = 0.5x + 10$. ב. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ולא שוות הוא טרפז. ג. $y = -2x + 10$. 1. $(4, 2)$. 2.

39 א. $A(0,5)$, $B(0,-4)$, $C(8,0)$, $D(8,9)$. ב. לא. מכיוון שאורכי שתי צלעות

סמוכות לא שוות. ג. $8y + 5x = 40$. ד. $S_{ABC} = 36$ יחידות

40 א. $A(-7,-7)$, $B(5,-5)$, $C(2,13)$, $D(-10,11)$.

ב. מוכיחים לפי מקבילות ואנכים.

ג. i. 12.16 ס"מ $\approx \sqrt{148}$, 18.24 ס"מ $\approx \sqrt{333}$. ii. 222 סמ"ר S_{ABCD} .

41 א. $y = -3x + 12$. ב. $y = -3x + 12$. ג. אם במשולש תיכון וגובה מתלכדים אז

הוא ש"ש. ד. 30 סמ"ר S_{ABC} .

42 א. 25 ס"מ AC . ב. $x = -6$. ג. אם במשולש תיכון לצלע

שווה למחציתה אז הוא ישר זווית. ד. 47.36 ס"מ $\approx 25 + \sqrt{500}$ P_{ABD} .

43 א. $M(-3,3)$. ב. $3y - 2x = 15$. ג. $B(-7.5,0)$, $D(1.5,6)$.

ד. 78 סמ"ר S_{ABCD} .

44 א. לאלכסון BD . ב. $A(-6,17)$. ג. $x = -6$. ד. 80 ס"מ P_{ABCD} .

45 א. $x_A = 3$. ב. $D(7,4)$. ג. 12 סמ"ר S_{AMD} .

46 א. $M(0,5)$. ב. $A(-2,11)$, $C(2,-1)$. ג. 40 סמ"ר S_{ABCD} .

47 א. $A(2,0)$, $B(0,10)$. ב. $5y - x = -2$. ג. $C(-8,-2)$.

ד. 1 . 2 . 62.4 סמ"ר S_{BCD} .

48 א. 1 . $y = -2.4x + 7$. 2 . 13 ס"מ. ב. $C(-8,-5)$. ג. $D(-4,1)$.

ד. 78 סמ"ר S_{ABC} .

49 א. $C(t, -0.75t)$. ב. $AB = 2.5t$; $AC = 1.5t$. ג. $t = 4$. ד. 24 סמ"ר S_{ABC} .

50 א. $C(t, t-5)$. ב. 1 . $BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$; $AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}$. 2 . $t = 8$.

ג. 36 ס"מ P_{ABC} .

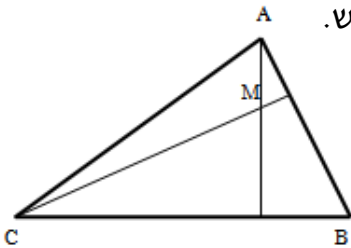
51 א. $d_{CO} = 8\sqrt{2}$. ב. $C(8,8)$. ג. 180 יחידות S_{ABCD} .

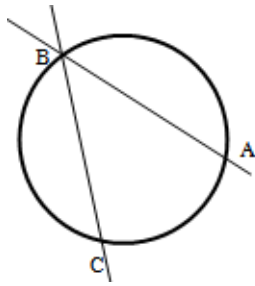
ד. 1 . $y = -\frac{5}{7}x + \frac{12}{7}$. 2 . $E(10.8, -6)$.

52 א. $D(-1,-1)$, $A(4,4)$. ב. $C(15,-17)$, $C(-17,15)$. ג. $C(15,-17)$.

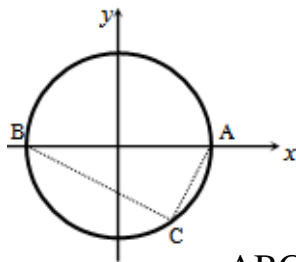
תרגול נוסף - המעגל (שאלות מסכמות ללא משיק):

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

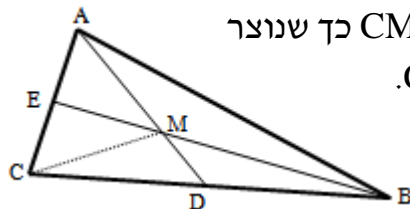
- 1) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של הישרים: $y = 2x - 1$ ו- $y = -3x + 14$ ורדיוסו הוא: $R = \sqrt{34}$.
- א. מצא את נקודות החיתוך של מעגל זה עם הצירים.
 ב. חשב את שטח המשולש שקדקודיו הם נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים (שמצאת שסעיף הקודם).
- 2) נתון המעגל: $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 50$. ישר שמשוואתו: $6y = 8x + 12$ חותך את המעגל בשתי נקודות כך שנוצר מיתר בניהן.
- א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך בין הישר למעגל.
 ב. חשב את אורך המיתר הנ"ל.
- 3) הנקודה $(12,5)$ נמצאת על היקף המעגל שמשוואתו היא: $(x-a)^2 + (y-8)^2 = 25$ כאשר: $a < 10$ פרמטר ממשי.
- א. מצא את a .
 ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונח הקוטר המחבר בין הנקודה $(12,5)$ למרכז המעגל.
 ג. חשב את המרחק של הנקודה $(12,5)$ מראשית הצירים.
- 4) משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן בהתאמה:
 $2y - x = 56$ ו- $8y + x = 104$. מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה $M(0, -2)$ שבתוך המשולש.
- 
- א. מצא את משוואות הגבהים.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה B.
 ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.
- 5) קדקודי המרובע ABCD הם: $A(3,8)$, $B(6,5)$, $C(3,2)$, $D(0,5)$. חוסמים את מרובע זה בתוך מעגל.
- א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
 (מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע או טרפז כלשהו)
 (היעזר בחישובי שיפועי ומרחקי צלעות).
 ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את המרובע ABCD.



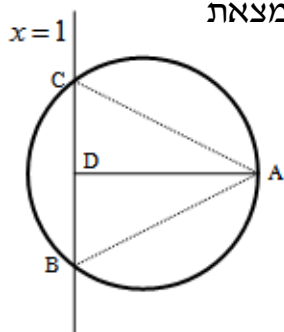
- 6) הישרים $9y + 11x = 94$ ו- $y = -3x + 14$ נחתכים בנקודה B. בנקודה זו עובר מעגל שמרכזו בנקודה $M(-9, 1)$. ידוע שמעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי הנקודות A ו-C (ראה איור).
- מצא את שיעורי הנקודה B.
 - מצא את משוואת המעגל.
 - מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y = -3x + 14$ עם המעגל.



- 7) בשרטוט שלפניך מתואר המעגל הקנוני: $x^2 + y^2 = 289$. המעגל חותך את ציר ה-x בנקודות A ו-B. הנקודה C נמצאת על היקף המעגל ברביע הרביעי כך שנוצר המשולש ABC. ידוע ששיעור ה-x בנקודה C הוא 15.
- מצא את שיעור ה-y של הנקודה C.
 - חשב את שיעורי הנקודות A ו-B ואת שטח המשולש ABC.
 - מצא נקודה D ברביע השלישי כך ששטח המשולש ABD יהיה זהה לשטח המשולש ABC.



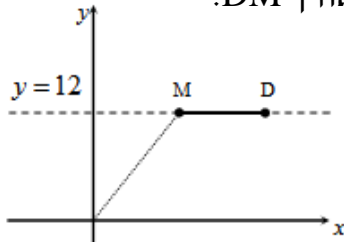
- 8) קדקודי המשולש ABC הם: $A(2, 5)$, $B(7, -3)$, $C(0, 1)$. מעבירים תיכונים AD ו-BE לצלעות AC ו-BC בהתאמה. מנקודת פגישת התיכונים M מותחים את הקטע CM שנוצר מעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע CM.
- מצא את משוואות התיכונים AD ו-BE.
 - מצא את שיעורי הנקודה M ואת אורך הקטע CM.
 - כתוב את משוואת המעגל.



- 9) הנקודה $A(17, 4)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו: $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$. הישר $x = 1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.
- מצא את רדיוס המעגל.
 - מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
 1. חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x = 1$.
2. חשב את שטח המשולש ABC.

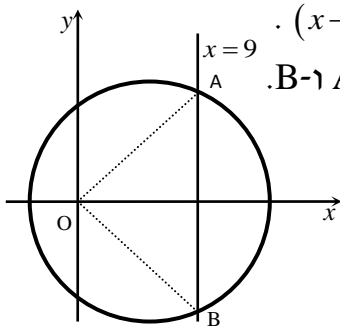
10 הנקודות M ו-D נמצאות על הישר: $y = 12$.

ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק בין הנקודות M ו-D (ראה איור).
 בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.



- מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
- מצא את שיעור ה- x של הנקודה D.
- כתוב את משוואת המעגל.
- האם המעגל הזה חותך את ציר ה- x ואת ציר ה- y ? הראה חישוב מתאים לטענתך.

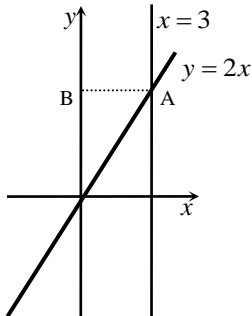
11 באיור שלפניך מתואר המעגל שמשוואתו: $(x-6)^2 + y^2 = 45$.



מעבירים את הישר: $x = 9$ החותך את המעגל בנקודות A ו-B.

- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
- כתוב את משוואת הישר AO (O – ראשית הצירים).
- חשב את שטח המשולש AOB.

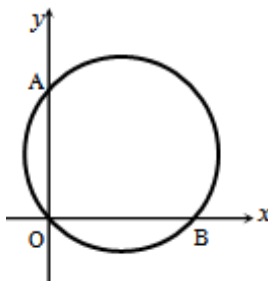
12 באיור שלפניך מתואר הישר: $y = 2x$.



מעבירים את הישר $x = 3$ החותך את הישר הנייל בנקודה A.

- מצא את שיעורי הנקודה A.
- מעבירים מהנקודה A אנך AB לציר y . כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה B ורדיוסו הוא הקטע AB.
- מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y .

13 באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

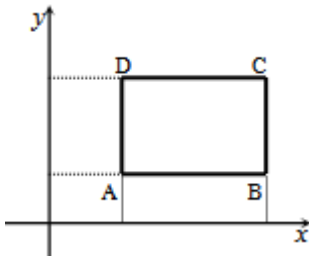


המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

- מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע AOBC יהיה מלבן.
- חשב את היקף המלבן.

14) באיור שלפניך מתואר מלבן ABCD שצלעותיו מונחות על הישרים

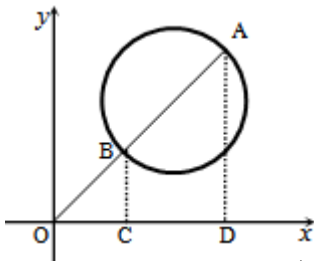
הבאים: $y = 2, y = 8, x = 3, x = 11$.



- א. מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המלבן.
- ב. חשב את אורך האלכסון במלבן.
- ג. כתוב את משוואת המעגל החוסם את המלבן.
- ד. האם מעגל זה חותך את הציר ה- x ? הראה חישוב מתאים.

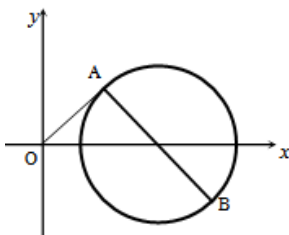
15) א. מצא את נקודת החיתוך של הישרים: $y = 3x + 7$ ו- $3y = x + 5$.

- ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של הישרים ועובר דרך נקודת החיתוך של הישר: $3y = x + 5$ עם ציר ה- x .
- ג. מסמנים על הישר: $y = 3x + 7$ שלוש נקודות A, B ו-C. ידוע כי שיעור ה- x של כל נקודה הוא: $x_A = 1, x_B = 0$ ו- $x_C = -1.5$. קבע איזו נקודה נמצאת בתוך המעגל.



16) באיור שלפניך נתון המעגל: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 32$.

- א. הוכח כי מעגל זה אינו חותך את הצירים.
- ב. מעבירים ישר AO המחבר את ראשית הצירים עם מרכז המעגל וחותך את המעגל בנקודות A ו-B. כתוב את משוואת ישר זה.
- ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר עם המעגל.
- ד. מנקודות החיתוך מורידים אנכים AD ו-BC לציר ה- x . חשב את שטח הטרפז ABCD.



17) באיור שלפניך נתון המעגל: $(x-6)^2 + y^2 = 5$.

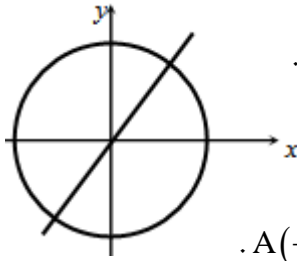
הישר: $y = -0.5x + 3$ חותך את המעגל בשתי נקודות A ו-B.

- א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
- ב. מעבירים את הישר AO (ראשית הצירים) - ראשית הצירים. חשב את אורך הקטע AO.
- ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין הקטע AO, ציר ה- x והישר AB.

18) המעגל: $x^2 + (y-4)^2 = R^2$ חותך את הישר: $y = x + 7$ בנקודה (2,9).

- א. מצא את רדיוס המעגל R.
- ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והמעגל.
- ג. חשב את אורך המיתר שנוצר בין שתי נקודות החיתוך.

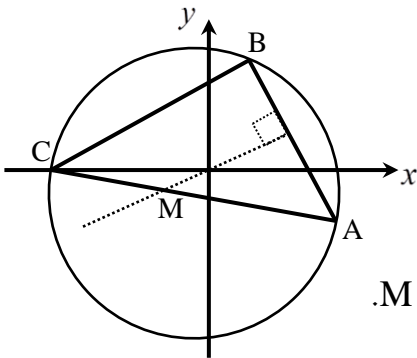
19) הישר שמשוואתו היא $y = mx$ חותך את המעגל: $x^2 + y^2 = 45$ בנקודה $(3, 6)$.



- א. מצא את m .
- ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר עם המעגל.
- ג. הראה כי המיתר שנוצר בין שתי נקודות החיתוך של הישר והמעגל הוא קוטר במעגל.

20) נתון משולש ABC שקדקודיו הם: $A(-2, 3)$, $B(4, 4)$, $C(4, 9)$.

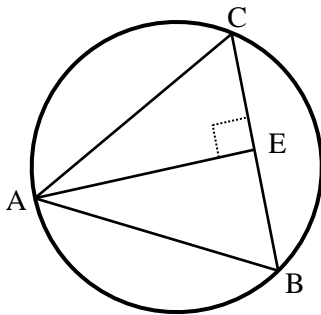
- א. מצא את משוואות האנכים האמצעיים לכל צלע במשולש.
- ב. מצא את נקודת מפגש האנכים האמצעיים.
- ג. כתוב את משוואת המעגל החוסם את המשולש.



21) נתון משולש ABC שקדקודיו הם: $A(3, -1)$, $B(1, 3)$.

- הקדקוד C נמצא על ציר ה- x .
מעבירים אנך אמצעי לצלע AB במשולש.
- א. מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע AB.
 - ב. M היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. מסמנים ב- t את שיעור ה- y של M. בטא באמצעות t את רדיוס המעגל.
 - ג. משוואת הצלע AC היא: $y = -\frac{x}{8} - \frac{5}{8}$.
1. מצא את שיעורי הקדקוד C.
 2. מצא את t אם ידוע כי מרכז המעגל נמצא ברביע השלישי.

22) נתון מעגל שמשוואתו: $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 15\frac{5}{8}$.



- המשולש ABC הוא ש"ש ($AC = AB$) אשר חסום במעגל.
הקטע AE הוא גובה לבסיס BC. נתון: $E(2.5, 0.5)$.
- א.
 1. כתוב את משוואת האנך AE.
 2. מצא את שיפוע הצלע BC.
 3. כתוב את משוואת הצלע BC.
 - ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C (B ברביע הרביעי).

תרגול נוסף – המעגל (שאלות מסכמות כולל משיק):

(23) ישר שמשוואתו: $y = 2x - 7$ חותך את המעגל: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 5$

בשתי נקודות P ו-Q. ידוע שמרחק הנקודה P מראשית הצירים גדול

יותר מאשר המרחק של הנקודה Q מראשית הצירים.

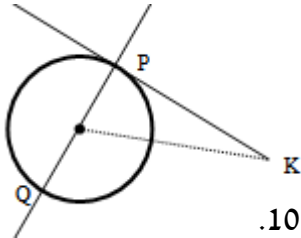
דרך הנקודה P מעבירים משיק למעגל.

א. מצא את שיעורי הנקודה P.

ב. מצא את משוואת המשיק.

ג. הנקודה K נמצאת על המשיק ושיעור ה-x של הוא 10.

חשב את מרחק הנקודה K ממרכז המעגל.



(24) מעגל שמרכזו M משיק לצירים בנקודות: A(10,0) ו-B(0,10) כמתואר באיור.

מעבירים משיק למעגל שמשוואתו היא: $y = -\frac{3}{4}x + 30$ אשר משיק

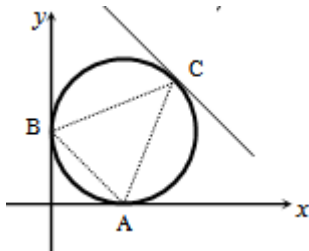
למעגל בנקודה C.

א. מצא את משוואת המעגל.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את אורכי הצלעות של המשולש ABC

ואת ערך המכפלה: $AB \cdot AC \cdot BC$.



(25) הנקודות A, B ו-M נמצאות על הישר: $y = 3x - 12$ כך ש-M היא אמצע AB.

בונים מעגל שמרכזו בנקודה M והוא עובר בנקודות A ו-B.

ידוע כי: $x_B = -1$, $y_A = 3$.

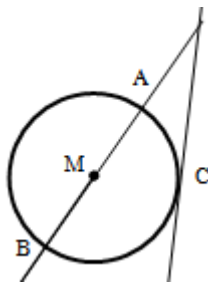
מהנקודה C(11,-3) שעל היקף המעגל מעבירים משיק למעגל.

א. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-M.

ב. כתוב את משוואת המעגל.

ג. 1. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה C.

2. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק לישר: $y = 3x - 12$.



(26) הנקודה A(6,24) נמצאת על היקף המעגל שמשוואתו: $(x+4)^2 + y^2 = R^2$.

מנקודה זו מעבירים משיק למעגל. על המשיק מסמנים נקודה B ועל היקף

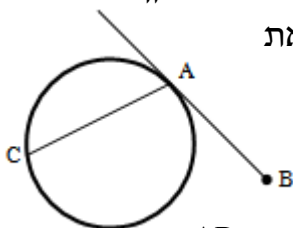
המעגל מסמנים נקודה נוספת C (ראה איור). הנקודה C נמצאת

ברביע השלישי, כמו כן ידוע כי: $x_B = 18$ וכי: $x_C = -14$.

א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את המשוואה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

ג. היעזר בחישוב אורכי הקטעים AB ו-AC וחשב את היחס: $\frac{AB}{AC}$.

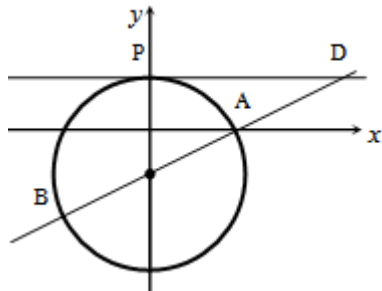


27) המעגל שמשוואתו: $(x-4)^2 + (y-b)^2 = 41$ עובר בראשית הצירים ומרכזו נמצא ברביע הרביעי.

- מצא את משוואת המעגל.
- מצא את נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- x .
- מצא את משוואת המשיק בנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

28) הנקודה P נמצאת על היקף המעגל שמשוואתו היא: $x^2 + (y+3)^2 = 25$.

מנקודה זו מעבירים משיק אשר מקביל לציר ה- x כמתואר באיור. בנוסף, מעבירים ישר חותך העובר דרך נקודת מרכז המעגל



החותך את המעגל בנקודות A ו-B

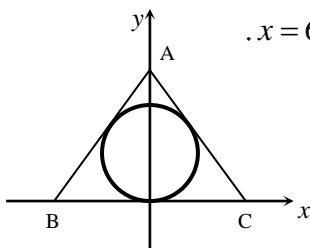
(B ברביע השלישי). ידוע כי הישר החותך נחתך

עם המשיק בנקודה $D(6\frac{2}{3}, 2)$.

- כתוב את משוואת המשיק.
- כתוב את משוואת הישר החותך.
- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

29) המעגל שמשוואתו: $x^2 + (y-10)^2 = 100$ חסום במשולש הישר זווית ושווה

שוקיים ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$) (ראה איור). הנקודות B ו-C נמצאות על ציר ה- x ושיעוריהן הם: $B(-24,0)$, $C(24,0)$.

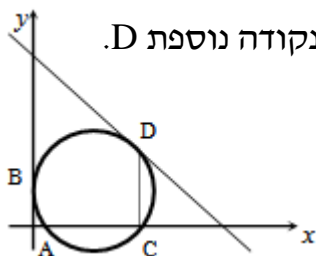


ידוע כי המעגל משיק לשוק AC של המשולש בנקודה שבה $x = 6$.

- מצא את השיפוע של השוקיים AC ו-AB.
- כתוב את משוואות השוקיים AC ו-AB.
- מצא את נקודת ההשקה של השוק AB עם המעגל.
- הראה כי הקודקוד A נמצא על ציר ה- y .

30) מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה- y בנקודה B וחותך את ציר

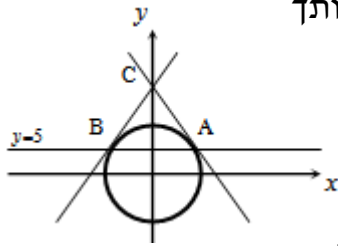
ה- x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור ($x_C > x_A$).



מהנקודה C מעלים אנך לציר ה- x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.

דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.

- כתוב את משוואת המעגל.
- מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
- מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.



31 נתון המעגל הקנוני הבא: $x^2 + y^2 = 169$. הישר $y = 5$ חותך

את המעגל בשתי נקודות A ו-B. (A ברביע הראשון).
מנקודות אלו מעבירים משיקים למעגל אשר נחתכים
בנקודה C (ראה איור).

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואות המשיקים למעגל בנקודות אלו.

ג. מצא את נקודת החיתוך של המשיקים הראה כי היא על ציר ה-y.

32 הטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) חסום במעגל שמשוואתו היא:

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = R^2$$

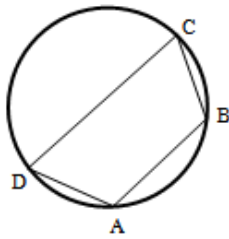
הישר: $y = 2x - 11$ וכי: $x_B = 10$.

א. מצא את רדיוס המעגל.

ב. כתוב את משוואת הישר DC אם ידוע כי
הוא עובר דרך מרכז המעגל.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D אם ידוע

כי D היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.



33 נתון מעגל שמרכזו בנקודה M. מעגל זה משיק לציר ה-x בנקודה A.

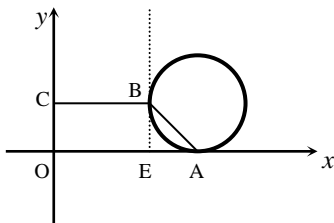
מהנקודה E שעל ציר ה-x מעלים אנך אשר משיק למעגל בנקודה B (ראה
איור). הקטע BC מקביל לציר ה-x ו-O היא נקודת ראשית הצירים, כך שנוצר
טרפז ישר זווית ABCO ששטחו הוא 170 סמ"ר.

ידוע כי: $C(0,10)$ ו- $AE = 10$ סמ"מ.

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

ג. כתוב את משוואת המעגל.



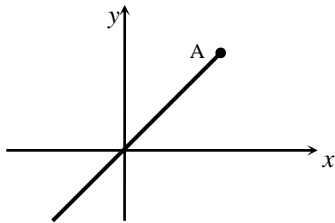
34 הנקודה A(6,6) נמצאת על הישר: $y = x$ כמתואר באיור.

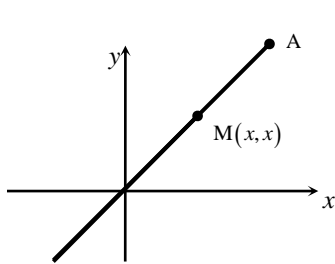
א. מצא את מרחק הנקודה A מראשית הצירים.

ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה A
והוא עובר דרך ראשית הצירים.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודת החיתוך

השנייה שלו עם ציר ה-x.





35) הנקודות A ו-M נמצאות על הישר: $y = x$ כמתואר באיור.

ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 8.

א. מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.

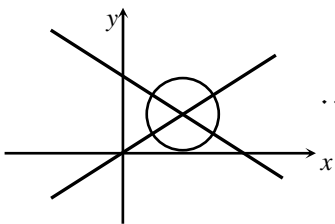
ב. המרחק בין הנקודות A ו-M הוא $\sqrt{32}$.

מצא את שיעורי הנקודה M אם ידוע כי: $x_M < x_A$.

ג. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ומשיק לצירים.

ד. קבע על ידי חישוב האם הנקודה A נמצאת על המעגל או לא.

36) א. מצא את נקודת החיתוך של הישרים הבאים: $y = \frac{1}{2}x$ ו- $y = -\frac{1}{2}x + 4$.



ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת החיתוך

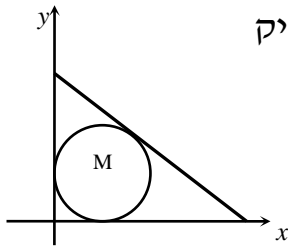
שמצאת אשר משיק לציר ה- x .

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל המקביל לציר ה- x .

ד. הראה כי המשיק שמצאת בסעיף ג' חותך את

הישר: $y = -\frac{1}{2}x + 4$ על ציר ה- y .

ה. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני הישרים מסעיף א' לציר ה- y .



37) א. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M והוא משיק

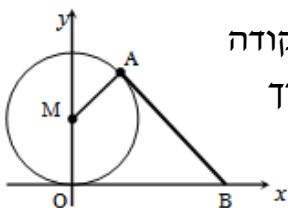
לצירים ברביע הראשון אם ידוע כי שיעור ה- x של

הנקודה M הוא 5.

ב. כתוב את משוואת המשיק למעגל המתואר באיור

בנקודה שבה: $x = 8$.

ג. חשב את שטח המשולש שיוצר משיק זה עם הצירים.



38) באיור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M נמצא על ציר ה- y בנקודה

שבה: $y = 5$ והוא משיק לציר ה- x . מעבירים משיק למעגל דרך

הנקודה A הנמצאת ברביע הראשון.

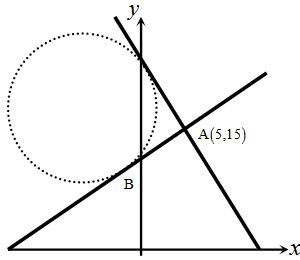
א. כתוב את משוואת המעגל.

ב. כתוב את משוואת המשיק אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

ג. המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B. מעבירים את הרדיוס MA.

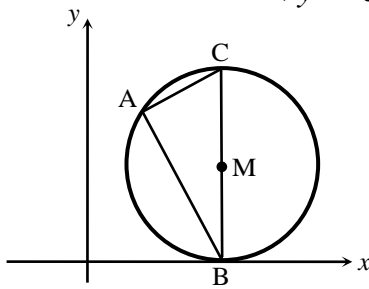
חשב את היקף הדלתון OMAB (O – ראשית הצירים).

- 39 א. 1. כתוב את משוואת הישר ששיפועו 2- ועובר דרך הנקודה $A(5,15)$.
 2. כתוב את משוואת הישר המאונך לישר הקודם ועובר דרך אותה הנקודה.
 ב. מצא נקודה B על הישר השני, הנמצאת ברביע השני ומרחקה



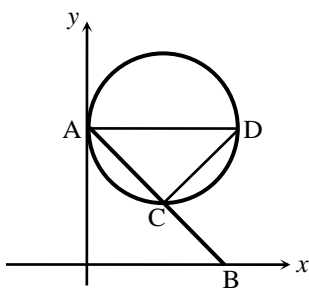
- מהנקודה A הוא $\sqrt{80}$ יחידות אורך.
 ג. מעבירים מעגל שמרכזו M המשיק לשני הישרים שמצאת בסעיף א'.
 היעזר באיור ומצא את משוואת המעגל אם ידוע כי מרכזו נמצא ברביע השני ו הוא משיק לישר השני בנקודה B.
 ד. מהנקודה M מורידים אנך לציר ה-x ומחברים אותה עם נקודת ההשקה של הישר מסעיף א 1.
 חשב את שטח המרובע הנוצר בין האנך, ציר ה-x, הישר שמצאת בסעיף א 1 והרדיוס ממרכז המעגל אל נקודת ההשקה של ישר זה.

- 40 לפניך מעגל המשיק לציר ה-x בנקודה B שמרכזו מנקודה M.
 AB ו-AC הם מיתרים במעגל המאונכים זה לזה. BC הוא קוטר במעגל.
 א. נתון כי הישר שעליו מונח המיתר AB הוא: $y = -3x + 30$.



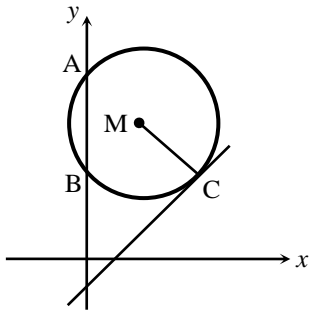
- כמו כן, נתון גם כי: $BC = 16$.
 1. מצא את שיעורי הנקודה B.
 2. מצא את שיעורי הנקודה C.
 3. כתוב את משוואת המעגל.
 ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונח המיתר AC.
 ג. מצא את שיעורי הנקודה A.

- 41 המעגל שבאיור משיק לציר ה-y בנקודה: $A(0,8)$. דרך הנקודה A



- מעבירים ישר החותך את ציר ה-x בנקודה: $B(8,0)$.
 א. מצא את משוואת הישר AB.
 המעגל חותך את הישר AB בנקודה C.
 ידוע כי C היא אמצע הקטע AB.
 ב. 1. מצא את שיעורי הנקודה C.
 2. כתוב את משוואת המעגל.
 ג. מסמנים נקודה D על היקף המעגל כך שהמיתרים AC ו-CD מאונכים זה לזה.
 1. מצא את משוואת המיתר CD.
 2. מצא את שיעורי הנקודה D.

42) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת ברביע הראשון.



המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות: A ו-B.

הישר: $5y - 4x = -12$ משיק למעגל בנקודה: C(8,4).

א. מצא את משוואת הרדיוס MC.

ב. ידוע כי רדיוס המעגל הוא: $\sqrt{41}$ ס"מ.

1. סמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה M והבע באמצעותו את שיעור ה- y שלה.

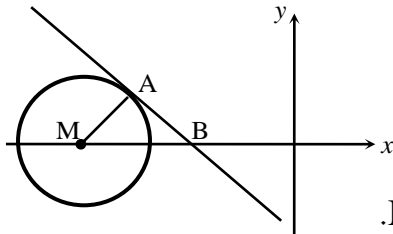
2. מצא את t .

3. כתוב את משוואת המעגל.

ג. חשב את אורך הקטע AB.

43) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו M מונח על ציר ה- x בחלקו השלילי. ידוע כי

מרחק מרכז המעגל מראשית הצירים הוא 8 וכי רדיוס המעגל הוא: $\sqrt{8}$ ס"מ.



א. כתוב את משוואת המעגל.

מעבירים משיק למעגל דרך הנקודה A(-6,2).

ב. מצא את משוואת המשיק.

ג. מסמנים את נקודת החיתוך של המשיק

וציר ה- x ב-B. חשב את שטח המשולש MAB.

44) נתונים הישרים הבאים: $y = 3x - 23$ ו- $2y + x = 24$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הישרים.

נקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם היא מרכז מעגל המשיק לציר ה- x .

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. היעזר באיור שבצד וענה על השאלות הבאות:

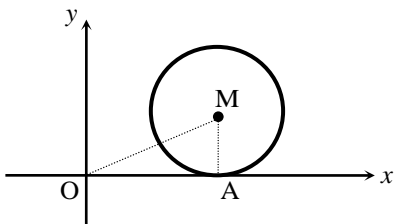
מסמנים את נקודת מרכז המעגל ב-M.

מורידים אנך ציר ה- x החותך אותו בנקודה A.

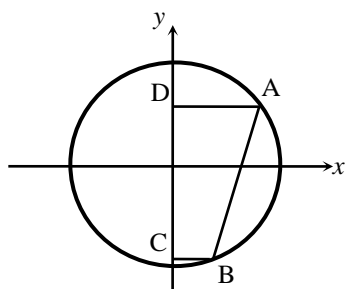
ראשית הצירים תסומן ב-O.

1. מצא את שיעורי הנקודה A.

2. חשב את שטח המשולש MOA.



45) באיור שלפניך נתון מעגל: $x^2 + y^2 = 52$. מסמנים נקודה A ברביע



הראשון ונקודה B ברביע הרביעי. ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 6 ושיעור ה- x של הנקודה B הוא 4.

א. מצא את שיעור ה- y של הנקודות A ו-B.

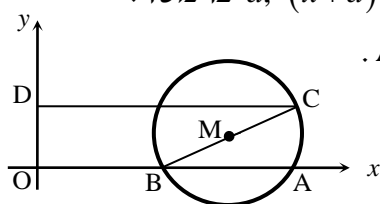
ב. חשב את אורך המיתר AB.

מהנקודות A ו-B מעבירים אנכים לציר ה- y החותכים אותו בנקודות C ו-D.

ג. 1. איזה מורבע הוא המרובע ABCD? נמק.

2. חשב את היקף המרובע ABCD.

46) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = 5$, פרמטר a .



ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה: $A(10,0)$.

א. מצא את a אם ידוע כי: $a > -10$.

ב. מצא את הנקודה B - נקודת

החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- x .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- y כך

שנוצר טרפז BCDO. חשב את שטחו.

47) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = R^2$, רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.

א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו-B - החיתוך של המעגל

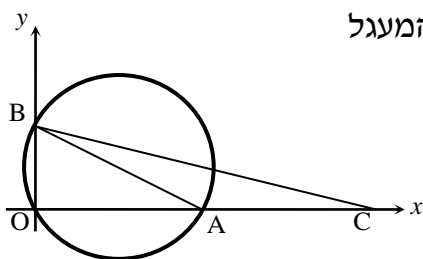
עם הצירים (ראה איור).

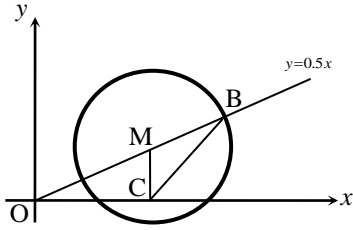
ג. מסמנים נקודה C על ציר ה- x כך ש-A

היא אמצע הקטע CO.

1. מצא את שיעורי הנקודה C.

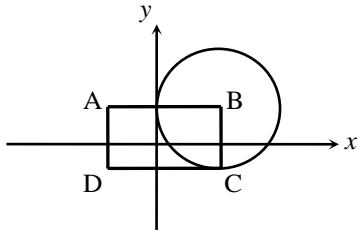
2. חשב את שטח המשולש ABC.





48 נתון הישר: $y = 0.5x$.

- א. מצא נקודה M על הישר ברביע הראשון שמרחקה מהראשית הוא $\sqrt{45}$ ס"מ.
- ב. הנקודה M שמצאת בסעיף הקודם היא נקודת המרכז של מעגל בעל רדיוס של $\sqrt{20}$ ס"מ. כתוב את משוואת המעגל.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של הישר הנתון והמעגל המסומנת באיור ב-B.
- ד. מורידים אנך לציר ה-x מהנקודה M החותך אותו בנקודה C. חשב את שטח המשולש BMC.



49 נתון מלבן ABCD כמתואר באיור שלפניך.

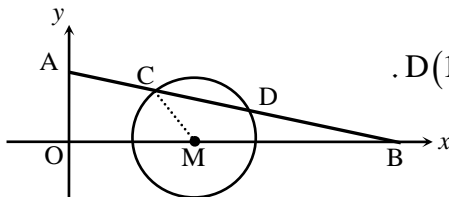
נתונים הקדקודים: $A(-3, 3)$, $C(5, -2)$.

- א. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-D של המלבן.
- ב. הנקודה B היא נקודת המרכז של מעגל בעל רדיוס BC. כתוב את משוואת המעגל.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של המעגל עם ציר ה-x אשר בתוך המלבן.
- ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-Q. חשב את שטח המשולש AQB.

50 נתון מעגל שמשוואתו היא: $(x-10)^2 + y^2 = R^2$ ומרכזו בנקודה M.

מעבירים ישר החותך את הצירים בנקודות: $A(0, 5)$, $B(35, 0)$

וחותך את המעגל בנקודות C ו-D.

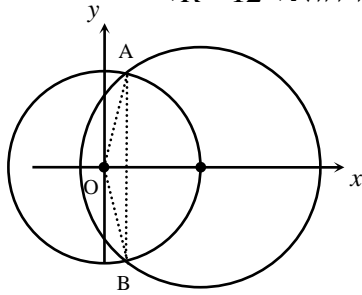


- א. מצא את משוואת הישר החותך.
- ב. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי: $D(14, 3)$.
- ג. מצא את שיעורי הנקודה C.
- ד. חשב את שטח המרובע ACMO.

תרגול נוסף – המעגל (שאלות מסכמות עם שני מעגלים):

51 נתון המעגל הקנוני: $x^2 + y^2 = 81$. נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם

ציר ה- x היא נקודת מרכזו של מעגל נוסף אשר רדיוסו הוא: $R=12$.



א. כתוב את משוואת המעגל הנוסף.

ב. המעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.

מצא את שיעוריהן.

ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין

הנקודות A, B לראשית הצירים O.

52 המעגל: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = a+4$, $a > 0$ חותך את ציר ה- x כאשר: $x=1$.

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם

המעגל: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.

ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

53 נתונים שני המעגלים הבאים: $(x-6)^2 + (y-16)^2 = 36$ ו- $(x+6)^2 + (y-16)^2 = 36$.

א. הראה כי המעגלים משיקים זה לזה בנקודה הנמצאת על ציר ה- y .

ב. הראה כי המעגלים אינם חותכים את ציר ה- x .

ג. לפניך שתי נקודות: $(-12, 16)$, $(0, 4)$.

ד. קבע לגבי כל אחת מהנקודות האם היא נמצאת מחוץ, בתוך

או על המעגל: $(x+6)^2 + (y-16)^2 = 36$.

ה. הראה כי המרחק מהנקודות שלעיל לנקודת ההשקה של המעגלים זהה.

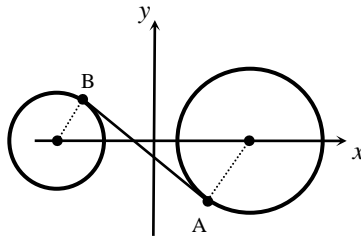
54) באיור שלפניך מתוארים המעגלים: $(x-10)^2 + y^2 = 40$ ו- $(x+a)^2 + y^2 = 10$, a

פרמטר חיובי. מעבירים ישר בעל שיפוע שלילי המשיק למעגלים בנקודות A ו-B. כמתואר באיור. ידוע כי הישר הנ"ל משיק למעגל הראשון בנקודה שבה $x=8$.

א. כתוב את משוואת הישר.

ב. הישר חותך את המעגל השני בנקודה שבה $y=3$.

מצא את a וכתוב את משוואת המעגל השני.



תשובות סופיות:

- 1 א. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 34$ ב. $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,10)$ ג. $S = 30$
- 2 א. $(-3,-2)$, $(3,6)$ ב. $d = 10$ א. $a = 8$ ב. $4y + 3x = 56$ ג. $d = 13$
- 4 א. $y = 8x - 2$, $y = -2x - 2$ ב. $(-24,16)$ ג. $x^2 + (y+2)^2 = 900$
- 5 א. ריבוע. ב. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 9$
- 6 א. $(2,8)$ ב. $(x+9)^2 + (y-1)^2 = 170$ ג. $(4,2)$
- 7 א. $y = -8$ ב. $A(17,0)$, $B(-17,0)$ ג. $S = 136$, $D(-15,-8)$
- 8 א. $y = -x + 4$, $y = -4x + 13$ ב. $M(3,1)$, $CM = 3$ ג. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$
- 9 א. $R = 10$ ב. $C(1,12)$, $B(1,-4)$ ג. $d = 16$.2 $S = 128$
- 10 א. $d = 15$ ב. $x = 18$ ג. $(x-9)^2 + (y-12)^2 = 81$ ד. המעגל אינו חותך את ציר ה- x . כאשר מציבים ב- y אפס מתקבלת משוואה ריבועית בלי פתרון. המעגל חותך את ציר ה- y בנקודה אחת - $(0,12)$.
- 11 א. $A(9,6)$, $B(9,-6)$ ב. $y = \frac{2}{3}x$ ג. $S = 54$
- 12 א. $A(3,6)$ ב. $x^2 + (y-6)^2 = 9$ ג. $(0,3)$, $(0,9)$
- 13 א. $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(8,0)$ ב. $C(8,6)$ ג. $P = 28$
- 14 א. $A(3,2)$, $B(11,2)$, $C(11,8)$, $D(3,8)$ ב. $d = 10$ ג. $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$ ד. כן - $(7,0)$
- 15 א. $(-2,1)$ ב. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ ג. הנקודה C
- 16 א. $y = x$ ב. $A(10,10)$, $B(2,2)$ ג. $S = 48$ ד.
- 17 א. $A(4,1)$, $B(8,-1)$ ב. $d = \sqrt{17}$ ג. $S = 3$
- 18 א. $R = \sqrt{29}$ ב. $(-5,2)$ ג. $d = \sqrt{98}$ א. $m = 2$ ב. $(-3,-6)$ ג. המרחק בין שתי הנקודות הוא: $d = \sqrt{180}$ והוא פעמיים רדיוס המעגל: $\sqrt{45}$
- 20 א. $y = 6.5$, $y = -x + 7$, $y = -6x + 9.5$ ב. $(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$ ג. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 6\frac{1}{2})^2 = 18\frac{1}{2}$
- 21 א. $y = \frac{1}{2}x$ ב. $R = \sqrt{5(t^2 - 2t + 2)}$ ג. $C(-5,0)$.1 $t = -\frac{1}{2}$.2
- 22 א. $y = \frac{x}{7} + \frac{1}{7}$.1 $m_{BC} = -7$.2 $y = -7x + 18$ ב. $B(3,-3)$, $C(2,4)$
- 23 א. $P(6,5)$ ב. $y = -0.5x + 8$ ג. $d = 5$ א. $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$.24
- ב. $C(16,18)$ ג. $AB \cdot AC \cdot BC = 4800$, $AB = \sqrt{200}$, $AC = \sqrt{360}$, $BC = \sqrt{320}$
- 25 א. $A(5,3)$, $B(-1,-15)$, $M(2,-6)$ ב. $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 90$ ג. $y = -3x + 30$.1 $(7,9)$.2

$$\frac{AB}{AC} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad \text{ג} \quad C(-14, -24) \quad , \quad B(18, 19) \quad \text{ב} \quad \cdot (x+4)^2 + y^2 = 676 \quad , \quad R = 26 \quad \text{א} \quad (26)$$

$$\cdot 5y + 4x = 32 \quad \text{ג} \quad \cdot (8, 0) \quad \text{ב} \quad \cdot (x-4)^2 + (y+5)^2 = 41 \quad \text{א} \quad (27)$$

$$\cdot A(4, 0) \quad , \quad B(-4, -6) \quad \text{ג} \quad \cdot y = \frac{3}{4}x - 3 \quad \text{ב} \quad \cdot y = 2 \quad \text{א} \quad (28)$$

$$\cdot (-6, 18) \quad \text{ג} \quad \cdot y = x + 24 \quad , \quad y = -x + 24 \quad \text{ב} \quad \cdot m_{AC} = -1 \quad , \quad m_{AB} = 1 \quad \text{א} \quad (29)$$

$$\cdot y = -\frac{3}{4}x + 42 \quad \text{ג} \quad \cdot C(24, 0) \quad , \quad D(24, 24) \quad \text{ב} \quad \cdot (x-15)^2 + (y-12)^2 = 225 \quad \text{א} \quad (30)$$

$$\cdot C(0, 33.8) \quad \cdot 5y = 12x + 169 \quad , \quad 5y + 12x = 169 \quad \text{ב} \quad \cdot A(12, 5) \quad , \quad B(-12, 5) \quad \text{א} \quad (31)$$

$$\cdot y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{ג} \quad \cdot y = 2x - 2 \quad \text{ב} \quad \cdot R = \sqrt{45} \quad \text{א} \quad (32)$$

$$\cdot (x-22)^2 + (y-10)^2 = 100 \quad \text{ג} \quad \cdot A(22, 0) \quad \text{ב} \quad \cdot B(12, 10) \quad \text{א} \quad (33)$$

$$\cdot y = x - 12 \quad \text{ג} \quad \cdot (x-6)^2 + (y-6)^2 = 72 \quad \text{ב} \quad \cdot \sqrt{72} \quad \text{א} \quad (34)$$

$$\cdot \text{א} \quad \cdot \text{ב} \quad \cdot (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \quad \text{ג} \quad \cdot M(4, 4) \quad \text{ב} \quad \cdot y = 8 \quad \text{א} \quad (35)$$

$$\cdot S = 8 \quad \cdot \text{ה} \quad (0, 4) \quad \cdot \text{ד} \quad y = 4 \quad \text{ג} \quad \cdot (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{ב} \quad \cdot (4, 2) \quad \text{א} \quad (36)$$

$$\cdot S = 150 \quad \text{ג} \quad \cdot y = -0.75x + 15 \quad \text{ב} \quad \cdot (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad \text{א} \quad (37)$$

$$\cdot P = 30 \quad \text{ג} \quad \cdot 3y + 4x = 40 \quad \text{ב} \quad \cdot x^2 + (y-5)^2 = 25 \quad \text{א} \quad (38)$$

$$(x+7)^2 + (y-19)^2 = 80 \quad \text{ג} \quad \cdot B(-3, 11) \quad \text{ב} \quad \cdot 2y = x + 25 \quad \cdot 2 \quad \cdot y = -2x + 25 \quad \cdot 1 \quad \text{א} \quad (39)$$

$$\cdot S = 300.25 \quad \cdot \text{ד}$$

$$3y - x = 38 \quad \text{ב} \quad \cdot (x-10)^2 + (y-8)^2 = 64 \quad \cdot 3 \quad \cdot C(10, 16) \quad \cdot 2 \quad \cdot B(10, 0) \quad \cdot 1 \quad \text{א} \quad (40)$$

$$\cdot (x-4)^2 + (y-8)^2 = 16 \quad \cdot 2 \quad \cdot C(4, 4) \quad \cdot 1 \quad \text{ב} \quad \cdot y = -x + 8 \quad \text{א} \quad (41) \quad \cdot A(5.2, 14.4) \quad \text{ג}$$

$$\cdot D(8, 8) \quad \cdot 2 \quad \cdot y = x \quad \cdot 1 \quad \text{ג}$$

$$\cdot (x-4)^2 + (y-9)^2 = 41 \quad \cdot 3 \quad \cdot t = 4 \quad \cdot 2 \quad \cdot M(t, -1.25t + 14) \quad \cdot 1 \quad \text{ב} \quad \cdot y = -1.25x + 14 \quad \text{א} \quad (42)$$

$$\cdot AB = 10 \quad \text{ס"מ} \quad \text{ג}$$

$$\cdot S_{MAB} = 4 \quad \text{סמ"ר} \quad \text{ג} \quad \cdot y = -x - 4 \quad \text{ב} \quad \cdot (x+8)^2 + y^2 = 8 \quad \text{א} \quad (43)$$

$$\cdot S_{MOA} = 35 \quad \text{סמ"ר} \quad \cdot 2 \quad \cdot A(10, 0) \quad \cdot 1 \quad \text{ג} \quad \cdot (x-10)^2 + (y-7)^2 = 49 \quad \text{ב} \quad \cdot (10, 7) \quad \text{א} \quad (44)$$

$$\cdot AB = \sqrt{104} = 10.198 \quad \text{ס"מ} \quad \text{ב} \quad \cdot y_A = 4 \quad ; \quad y_B = -6 \quad \text{א} \quad (45)$$

$$\cdot P_{ABCD} = 30.198 \quad \text{ס"מ} \quad \cdot 2 \quad \cdot \text{טרפז ישר זווית} \quad \cdot 1 \quad \text{ג}$$

$$\cdot S_{BCDO} = 16 \quad \text{סמ"ר} \quad \cdot \text{ה} \quad \cdot (10, 2) \quad \cdot \text{ד} \quad \cdot y = 0.5x - 3 \quad \text{ג} \quad \cdot B(6, 0) \quad \text{ב} \quad \cdot a = -8 \quad \text{א} \quad (46)$$

$$\cdot A(10, 0) \quad ; \quad B(0, 6) \quad \text{ב} \quad \cdot (x-5)^2 + (y-3)^2 = 34 \quad , \quad R = \sqrt{34} \quad \text{ס"מ} \quad \text{א} \quad (47)$$

$$\cdot S_{ABC} = 30 \quad \text{סמ"ר} \quad \cdot 2 \quad \cdot C(20, 0) \quad \cdot 1 \quad \text{ג}$$

$$\cdot S_{BMC} = 6 \quad \text{סמ"ר} \quad \cdot \text{ד} \quad \cdot B(10, 5) \quad \text{ג} \quad \cdot (x-6)^2 + (y-3)^2 = 20 \quad \text{ב} \quad \cdot M(6, 3) \quad \text{א} \quad (48)$$

49 א. $B(5,3) ; D(-3,-2)$. ב. $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$. ג. $Q(1,0)$. ד. $S_{AQB} = 12$ סמ"ר

50 א. $y = -\frac{1}{7}x + 5$. ב. $R = 5$. ג. $C(7,4)$. ד. 37.5 יח"ש.

51 א. $(x-9)^2 + y^2 = 144$. ב. $(1, \sqrt{80}) , (1, -\sqrt{80})$. ג. $S = \sqrt{80}$

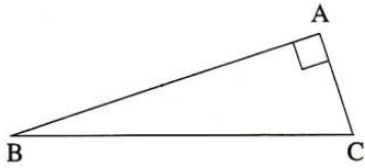
52 א. $a = 1$. ב. $(0, -1) , (-2, 3)$. ג. $y = -2x - 1$. ד. $S = \frac{1}{4}$

53 א. $(0, 16)$. ג. $(-12, 16)$ - על המעגל. $(0, 4)$ מחוץ למעגל. ד. $d = 12$

54 א. $y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$. ב. $a = 20$

תרגול מבגרויות:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.



(1) נתון משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$),

שבו הצלע BC מקבילה לציר ה-x (ראה ציור).

משוואת הצלע AB היא $y = \frac{1}{3}x$.

שיעור ה-x של קדקוד B הוא 3.

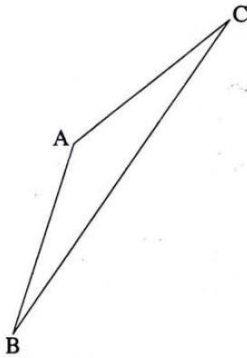
שיעור ה-x של קדקוד C גדול ב-1 משיעור ה-x של קדקוד A.

א. מצא את שיעורי הקדקודים של המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC.

ג. העבירו מעגל החוסם את המשולש ABC.

מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.



(2) נתון משולש שווה-שוקיים ABC שבו $AB = AC$ (ראה ציור).

שיעורי הקדקוד B הם $(1, 0)$. שיפוע הישר BC הוא 1.

משוואת הישר AC היא $x - 3y + 9 = 0$.

א. מצא את השיעורים:

1. של הקדקוד C.

2. של הקדקוד A.

ב. הישר AC חותך את ציר ה-y בנקודה D.

הצלע BC היא קוטר במעגל. קבע אם הנקודה D נמצאת על מעגל זה. נמק.

(3) נתון מעוין ABCD (ראה ציור). שיעור קדקוד A הם $(1, 2)$.

משוואת האלכסון BD היא $x - 2y - 2 = 0$.

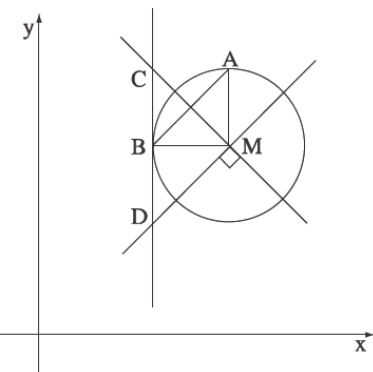
א. מצא את משוואת האלכסון AC.

2. מצא את השיעורים של קדקוד C.

ב. אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{5}$.

מצא את האורך של צלע המעוין.

ג. מצא את משוואת הישר AB, אם נתון כי קדקוד B נמצא ברביע הראשון.



(4) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו M.

MA מקביל לציר ה-y ו-MB מקביל לציר ה-x.

דרך M העבירו שני ישרים: ישר אחד מאונך ל-AB

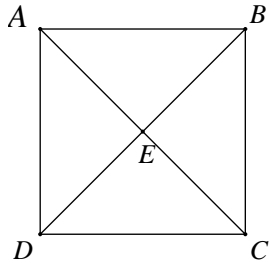
וישר אחד מקביל ל-AB. דרך B העבירו משיק למעגל.

האנך חותך את המשיק בנקודה C, והמקביל חותך את

המשיק בנקודה D (ראה ציור).

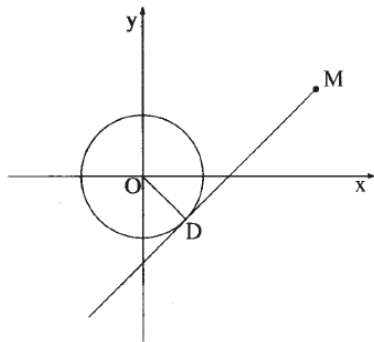
נתון: $A(5, 7)$, $B(3, 5)$.

- א. מצא את משוואת האנג CM .
 ב. 1. מצא את משוואת המעגל.
 2. הוכח באמצעות חישוב כי המעגל אינו חותך את ציר ה- x .
 ג. מצא את שטח המשולש CMD .

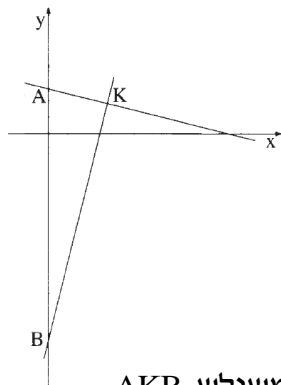


- 5) אלכסוני הריבוע $ABCD$ נפגשים בנקודה E (ראה ציור). שיעור הקדקוד A הם $(1, -7)$. משוואת האלכסון BD היא $x + 3y = 0$.
 א. 1. מצא את השיפוע של האלכסון AC .
 2. מצא את שיעורי הנקודה E .
 ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את הריבוע.
 ג. חשב את האורך של צלע הריבוע.
 ד. מצא את משוואת המעגל החסום בריבוע כך שצלעות הריבוע משיקות למעגל.

- 6) נתון מעגל שמרכזו $O(0,0)$. דרך הנקודה M , הנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר המשיק למעגל בנקודה $D(1, -1)$ (ראה ציור).

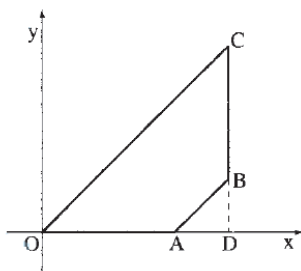


- א. מצא את משוואת המעגל.
 ב. מצא:
 1. את משוואת הישר OD .
 2. את משוואת המשיק DM .
 ג. נתון כי $DM = \sqrt{18}$.
 מצא את השיעורים של הנקודה M .
 ד. העבירו מעגל דרך הנקודות O, D, M .
 מצא את המשוואה של מעגל זה.



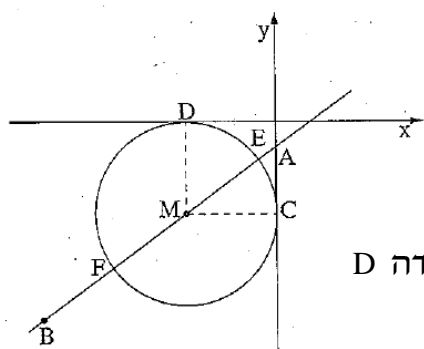
- 7) דרך נקודה K עוברים שני ישרים החותכים את ציר ה- y בנקודות A ו- B , כמתואר בציור. אורך הקטע AB הוא 17. משוואת הישר BK היא $y = 4x - 14$.
 א. מצא את שיעורי הנקודה A .
 ב. נתון גם כי שטח המשולש AKB הוא 34. מצא את שיעורי הנקודה K .
 ג. הראה כי הקטע AB הוא קוטר במעגל החוסם את המשולש AKB .
 2. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש AKB .

8 הצלעות של המרובע ABCO מונחות על ציר ה- x , על הישר $y=x$, על הישר $y=x-5$ ועל הישר $x=a$ (ראה ציור). a הוא פרמטר גדול מ-5.



- א. איזה מרובע הוא ABCO? נמק.
- ב. מצא את השיעורים של קדקודי המרובע ABCO (הבע באמצעות a במידת הצורך).
- ג. הישר $x=a$ חותך את ציר ה- x בנקודה D .
 1. הבע באמצעות a את שטח המשולש ABD.
 2. הבע באמצעות a את שטח המרובע ABCO.
 3. נתון כי שטח המרובע ABCO הוא 22.5. מצא את הערך של a .

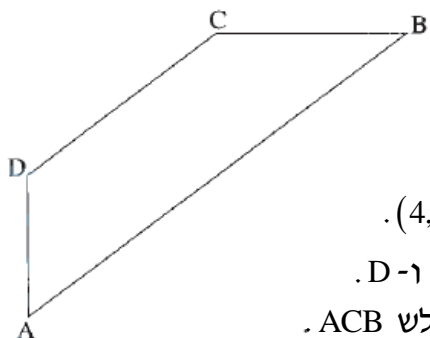
9 נקודה A נמצאת על ציר ה- y בחלקו השלילי, ומרחקה מראשית הצירים הוא 1.25.



שיעורי נקודה B הם $(-13, -11)$ (ראה ציור).

- א. מצא את משוואת הישר AB.
- ב. נקודה M נמצאת ברביע השלישי על הישר AB. M היא מרכז של מעגל, המשיק לציר ה- x בנקודה D ולציר ה- y בנקודה C (ראה ציור). מצא את שיעורי הנקודה M.
- ג. הישר AB חותך את המעגל שמרכזו M בנקודות E ו-F. שטח המשולש EMC הוא S. הבע באמצעות S את שטח המשולש FMC. נמק. אין צורך למצוא את השיעורים של E ו-F.

10 נתון טרפז ABCD $(AB \parallel DC)$, ראה ציור.



משוואת הצלע AB היא $y = \frac{3}{4}x - 6$.

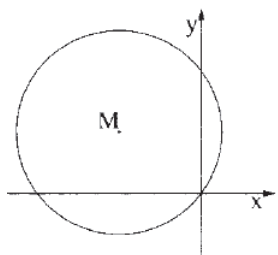
משוואת הצלע AD היא $x = -8$.

שיפוע הצלע CB הוא 0. שיעור הקדקוד C $(4, 6)$.

- א. מצא את השיעורים של הקדקודים A, B ו-D.
- ב.
 1. מצא את אורך הגובה לצלע BC במשולש ACB.
 2. מצא את שטח המשולש ACB.

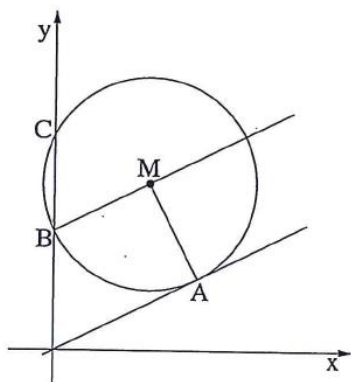
11) נתון מעגל שמשוואתו $(x-a)^2 + (y-3)^2 = 25$. הוא פרמטר.

המעגל עובר דרך ראשית הצירים, ומרכזו M נמצא ברביע השני.



- מצא את הערך של a .
- מצא את השיעורים של הנקודות על המעגל, ששיעורי ה- y שלהן גדול ב-2 משיעור ה- x שלהן.
- בכל אחת מהנקודות שמצאת בסעיף ב מעבירים משיק למעגל. מצא את המשוואות של משיקים אלה.

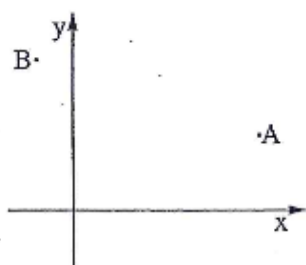
12) נתון מעגל, שמרכזו M נמצא על הישר $y=7$.



הישר $y = \frac{1}{2}x$ משיק למעגל בנקודה $A(6,3)$ (ראה ציור).

- מצא את השיעורים של המרכז M .
- מצא את משוואת המעגל.
- המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות B ו- C . נקודה C נמצאת מעל נקודה B (ראה ציור).
 - הראה כי הישר BM מקביל לישר המקביל למעגל בנקודה A .
 - מצא את שטח המשולש BMA .

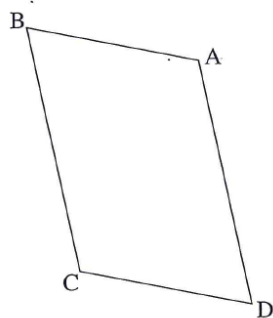
13) נתונות הנקודות $A(10,4)$ ו- $B(-2,8)$ (ראה ציור).



נקודה P נמצאת על ציר ה- x כך שמרחקה מנקודה A שווה למרחקה מנקודה B .

- מצא את השיעורים של הנקודה P .
- הנקודות A, B, P הן קדקודיו של המרובע $ADBP$. נתון $BD \parallel PA, BP \parallel AD$.
- מצא את השיעורים של הקדקוד D .
- מצא את אורך הרדיוס של המעגל החוסם את המשולש BDA . נמק.

14) נתונה מקבילית $ABCD$ (ראה ציור).



הצלע AB מונחת על הישר $y = -\frac{1}{3}x + 6$.

הצלע AD מונחת על הישר $y = -5x + 20$.

אלכסוני המקבילית נפגשים בנקודה $(2,3)$.

- מצא את השיעורים של קדקוד C .
- מצא את השיעורים של קדקוד B ואת השיעורים של קדקוד D .

ג. האם הצלע BC משיקה בנקודה C למעגל שמרכזו A והרדיוס שלו הוא AC ?

תשובות סופיות:

- (1) א. $A(12,4), B(3,1), C(13,1)$ ב. 15 יחידות שטח ג. $y = -\frac{4}{3}x + 20$
- (2) א. 1. $C(6,5)$ 2. $A(2.25, 3.75)$ ב. כן.
- (3) א. 1. $y = -2x + 4$ 2. $C(3, -2)$ ב. 5 יחידות אורך ג. $y = 2$
- (4) א. $y = -x + 10$ ב. 1. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 4$ ג. 4 יחידות שטח.
- (5) א. 1. $m_{AC} = 3$ 2. $E(3, -1)$ ב. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$ ג. $\sqrt{80}$ יחידת שטח.
ד. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$
- (6) א. $x^2 + y^2 = 2$ ב. 1. $y = -x$ 2. $y = x - 2$ ג. $(4, 2)$ ד. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$
- (7) א. $A(0, 3)$ ב. $K(4, 2)$ ג. 2. $x^2 + (y+5.5)^2 = 72.25$
- (8) א. טרפז שווה שוקיים. ב. $O(0, 0), C(a, a), B(a, a-5), A(5, 0)$
ג. 1. $\frac{a^2 - 10a + 25}{2}$ 2. $\frac{10a - 25}{2}$ 3. $a = 7$
- (9) א. $y = 0.75x - 1.25$ ב. $m(-5, -5)$ ג. S
- (10) א. $A(-8, -12), B(16, 6), D(-8, -3)$ ב. 1. 18 יח"א 2. 108 יח"ש.
- (11) א. $a = -4$ ב. $(-4, -2), (1, 3)$ ג. $y = -2, x = 1$
- (12) א. 1. $M(4, 7)$ 2. $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$ ב. 10 יח"ש.
- (13) א. $(2, 0)$ ב. $(6, 12)$ ג. $\sqrt{40}$ יח"א.
- (14) א. $C(1, 1)$ ב. $B(0, 6), D(4, 0)$ ג. לא.

פרק 5 - הסתברות קלאסית:

הגדרות כלליות:

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A : $P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$
2. המאורע המשלים למאורע A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו-B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.
5. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.
6. עבור מאורעות בלתי תלויים A ו-B מתקיים : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
7. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
8. צורה כללית של טבלת הסתברויות עבור מאורעות A ו-B :

	\bar{A}	A	
$P(B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	B
$P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	\bar{B}
1	$P(\bar{A})$	$P(A)$	

קשרים מידיים מהטבלה:

- א. $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
 - ב. $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$
 - ג. $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
 - ד. $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$
9. התפלגות בינומית: חישוב k הצלחות מתוך n ניסיונות בלתי תלויים כאשר ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא p נתונה ע"י: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

שאלות יסודיות:

- (1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
- (2) בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
- (3) מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
- (4) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.
- (5) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.95$. מצא את $P(A \cap B)$.
- (6) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.65$.
א. קבע האם המאורעות זרים
ב. קבע האם המאורעות תלויים.
- (7) נתון כי שני מאורעות, A ו-B בלתי תלויים. בנוסף נתון: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.
- (8) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (10) בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

11 נתונים שני כדים : בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

12 ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי.
אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי.
מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

13 בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

14 בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

15 בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה).
ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים. מה ההסתברות שכולם גברים?

16 נתונים שני כדים : בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
ב. ידוע שללואיזה לא ייצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?

17) במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2. ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

18) בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים. הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא $\frac{5}{14}$. כמה כדורים בכד?

19) ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא p והיא גדולה מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38.

א. מצא את p .

ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?

20) 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.

א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?

ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?

ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?

ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?

21) 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.

א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?

ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?

ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?

ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?

22) 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?

ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?

ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?

23 בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים. 60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

24 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

25 בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הכהה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

26 בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה ו- $\frac{1}{3}$ מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

- א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?
- ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

27 אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?

28 מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?

29 הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?

30 בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:

- א. בדיוק ארבע יהיו כחולים?
- ב. חמישה יהיו כחולים?
- ג. לפחות ארבעה יהיו כחולים?
- ד. הרוב יהיו כחולים?

ה. לפחות אחד יהיה כחול?
ו. הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

31 בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?

32 יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?

33 בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?

34 בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?

35 בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.

36 בחדר x גברים ו- $3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6. מצא את גודלו של x . חוזרים על התהליך 4 פעמים. מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?

37 במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% ששי יידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש. ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי $4/3$ מההסתברות שיקבל 80. מצא את ערכו של n .

38 כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. $\frac{5}{17}$ מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. 3 חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

תשובות סופיות:

- (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $P(A \cup B) = 0.9$ (5) $P(A \cap B) = 0.35$
- (6) א. לא זרים. ב. תלויים. (7) $P(A \cup B) = 0.85$ (8) א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{7}{15}$
- (9) א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$ ג. $\frac{31}{50}$ (10) $\frac{17}{42}$ (11) $\frac{8}{15}$ (12) $\frac{77}{144}$
- (13) א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$ (14) א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{38}{100}$ ג. $\frac{9}{38}$ (15) $\frac{2}{17}$
- (16) א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$ (17) $\frac{1}{4}$ (18) 8 כדורים.
- (19) א. $p = 0.6$ ב. $\frac{21}{40}$ (20) א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן.
- (21) א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים. (22) א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$
- (23) $\frac{1}{225}$ (24) 93.5% (25) $\frac{1}{3}$ (26) א. בלתי תלויים. ב. 12.5% (27) 0.264
- (28) 0.023 (29) 0.2001
- (30) א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023
- (31) 0.114 (32) 0.214 (33) 0.216 (34) 0.008 (35) 4 לבנים, 6 שחורים.
- (36) א. $x = 4$ ב. 0.299 (37) $n = 5$ (38) $\frac{5}{90}$

תרגול נוסף - שאלות שונות לפי נושאים:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות בלתי תלויים:

- (1) בבניין העירייה יש שני מתקני אבטחה נגד פורצים. ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל בזמן אמת היא 0.92 וההסתברות שהמתקן השני יפעל בזמן אמת היא 0.86.
- מה ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל והשני לא?
 - מה ההסתברות ששני המתקנים יפעלו?
 - מה ההסתברות שאף מתקן לא יפעל?
- (2) צובעים את הפאות של קובייה בת 8 פאות כך: 3 פאות כחולות, 2 פאות אדומות, 2 פאות צהובות ופאה אחת ירוקה. זורקים את הקובייה פעמיים. חשב:
- שתי הפאות הן בצבע ירוק.
 - שתי הפאות הן בצבע כחול.
 - שתי הפאות באותו הצבע.
- (3) בכד יש 6 כדורים שחורים ו-4 לבנים. מוציאים כדור מהכד ולאהר הסתכלות בצבעו מחזירים אותו לכד ומוציאים כדור נוסף. חשב את ההסתברויות הבאות:
- ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים.
 - ששני הכדורים הם מאותו הצבע.
 - שהכדור השני הוא לבן.
- (4) בכד יש 4 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים כחולים. מוציאים שני כדורים מהכד עם החזרה, דהיינו, לאחר הוצאת הכדור הראשון, מחזירים אותו בחזרה לכד ורק אז מוציאים את הכדור השני. חשב את ההסתברויות הבאות:
- ששני הכדורים שהוצאו הם לבנים.
 - ששני הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע.
 - ששני הכדורים שהוצאו לא כחולים.
 - שהכדור השני הוא כחול.
- (5) כדי לקבל תואר במכללת חולון יש לעבור לפחות שניים מתוך שלושה מבחנים. ההסתברות שדורון יעבור את המבחן הראשון היא 0.9. ההסתברות שיעבור את המבחן השני היא 0.6 וההסתברות שיעבור את המבחן השלישי היא 0.8.
- מה ההסתברות שדורון יעבור רק מבחן אחד?
 - מה ההסתברות שדורון יעבור את שלושת המבחנים?
 - מה ההסתברות שדורון יעבור לכל היותר שני מבחנים?
 - מה ההסתברות שדורון יקבל תואר?

6) בתוך שקית ישנם 4 קלפים אדומים, 3 קלפים צהובים וקלף אחד ירוק. מוציאים עם החזרה שלושה קלפים מהשקית.

- א. מה ההסתברות שבכל שלושת הפעמים יצא הקלף הירוק?
- ב. מה ההסתברות שיצאו שני קלפים צהובים?
- ג. מה ההסתברות שכל הקלפים יהיו בעלי אותו הצבע?

כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות תלויים:

7) תלמיד הרוצה להוציא רישיון לרכב צריך לעבור בחינה עיונית ולאחר מכן בחינה מעשית. ההסתברות שיעבור את הבחינה העיונית היא 0.7. אם הוא עבר את הבחינה העיונית אז ההסתברות שיעבור את הבחינה המעשית היא 0.9 ואם הוא נכשל בבחינה העיונית אז ההסתברות שיעבור את הבחינה המעשית היא 0.5.

- א. מה ההסתברות שיעבור התלמיד רק את הבחינה המעשית?
- ב. מה ההסתברות שהתלמיד ייכשל בשתי הבחינות?
- ג. מה ההסתברות שתלמיד יעבור את שתי הבחינות?
- ד. מה ההסתברות שתלמיד יעבור את הבחינה הראשונה או השנייה או את שתיהן?

8) בכד 5 כדורים אדומים ו-3 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי כדור מהכד, אם הוא אדום אז מחזירים אותו חזרה לכד ומוציאים כדור נוסף. אם הוא ירוק אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כדור נוסף.

- א. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם ירוקים?
- ב. מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא אדום?
- ג. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו בעלי אותו הצבע?

9) בתוך ארגז ישנם 7 ספלים הממוספרים מ-1 עד 7.

מוציאים ספל אחד, משאירים אותו בחוץ ומוציאים ספל נוסף.

- א. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים זוגיים?
- ב. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים המתחלקים ב-3?
- ג. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים שסכומם גדול מ-10?
- ד. האם המאורעות שתוארו בסעיפים א' ו-ב' תלויים? נמק ע"י חישוב.

10) במעטפה יש 30 בולים, מתוכם 6 בולים פגומים.

מוציאים שני בולים בזה אחר זה מהמעטפה.

- א. מה ההסתברות ששני הבולים שהוצאו הם פגומים?
- ב. מה ההסתברות שהבול הראשון שהוצא אינו פגום אך הבול השני פגום?
- ג. מה ההסתברות שהבול השני פגום?
- ד. מה ההסתברות ששני הבולים או פגומים או אינם פגומים?

11 בכיתה ישנם 24 בנים ו-18 בנות. מוציאים באקראי 3 ילדים מהכיתה בזה אחר זה. חשב את ההסתברויות הבאות :

- א. שכל שלושת הילדים יהיו בנים.
- ב. שכל שלושת הילדים יהיו מאותו המין.
- ג. שתהיה בקבוצה לפחות בת אחת.
- ד. שיהיה בקבוצה לכל היותר בן אחד.
- ה. האם המאורעות שתוארו בסעיפים ג' ו-ד' תלויים? נמק ע"י חישוב מתאים.
- ו. הראה כי המאורעות הבאים אינם תלויים זה בזה :
(1) שתהיה לפחות בת אחת ולכל היותר בן אחד בקבוצה.
(2) שיהיה בקבוצה לכל היותר בן אחד.

12 בתוך שקית יש 6 חטיפי "מקופלת" ו-4 חטיפי "במבה" מוציאים באקראי 3 חטיפים מהשקית בזה אחר זה. חשב את :

- א. ההסתברות שיצאו 3 חטיפי במבה.
- ב. ההסתברות שיצאו לכל היותר שני חטיפי במבה.
- ג. ההסתברות שיצאו לפחות שני חטיפי מקופלת.
- ד. מגדירים את המאורעות הבאים, קבע האם הם תלויים זה בזה.
A - יצאו שני חטיפי במבה.
B - יצא חטיף מקופלת אחד.

13 צלף יורה למטרה שלוש פעמים. ההסתברות שיקלע בפעם הראשונה היא 0.7. ההסתברות שיקלע לאחר מכן תלויה בקליעה הקודמת. אם קלע הצלף בירייה הקודמת אז ההסתברות שלו לקלוע שנית היא 0.8 אך אם הוא החטיא אז ההסתברות שלו לקלוע כעת היא 0.6.

- א. מה ההסתברות שיקלע בכל שלושת הפעמים?
- ב. מה ההסתברות שיקלע בירייה השלישית בלבד?
- ג. מה ההסתברות שיקלע הקלע בירייה אחת בלבד?
- ד. מה ההסתברות שיקלע לכל היותר פעם אחת?

14 שחקן כדורגל בועט לשער שלוש פעמים. ההסתברות שיבקיע בפעם הראשונה היא 0.6. ההסתברות שיבקיע לאחר מכן תלויה בבקיעה הקודמת. אם השחקן הבקיע אז ההסתברות שיבקיע שנית היא 0.8 אך אם הוא החמיץ אז ההסתברות שיחמיץ שנית היא 0.3. חשב את :

- א. ההסתברות שיבקיע השחקן בכל שלושת הפעמים.
- ב. ההסתברות שיבקיע השחקן בפעם השנייה בלבד.
- ג. ההסתברות שיבקיע השחקן פעם אחת בלבד.
- ד. ההסתברות שיבקיע השחקן לפחות פעם אחת.

15) בעיר מסוימת 40% מהתושבים הם גברים והשאר נשים. ידוע כי 40% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-60% מהנשים לא מרכיבות משקפיים. בוחרים באקראי תושב מהעיר. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שנבחר גבר שלא מרכיב משקפיים.
- ב. שנבחרה אישה שמרכיבה משקפיים.
- ג. שהתושב שנבחר מרכיב משקפיים.

16) צלף יורה למטרה שלוש פעמים. אם בירייה הקודמת הוא פגע אז ההסתברות שיפגע שוב בירייה הבאה היא 0.8 אך אם הוא החטיא בירייה הקודמת אז ההסתברות שיפגע בירייה שאחריה היא 0.6. הצלף החטיא בירייה הראשונה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. הצלף יחטיא גם בשתי היריות הבאות.
- ב. הצלף יפגע בירייה השלישית.
- ג. הצלף יפגע בירייה אחת בלבד.
- ד. הצלף יחטיא בירייה השלישית.

17) אם ביום מסוים יורד גשם אז ההסתברות שביום שאחריו לא ירד גשם היא 0.4 אך אם ביום מסוים לא יורד גשם ההסתברות שירד גשם ביום שאחריו היא 0.9. ביום שלישי ירד גשם. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. ביום חמישי לא ירד גשם.
- ב. בימים: שלישי, רביעי וחמישי ירד גשם.
- ג. בימים רביעי וחמישי לא ירד גשם.

18) במפעל שמיכות שלושה פסי ייצור. פס הייצור הראשון מייצר 40% מהמוצרים, פס הייצור השני מייצר 30% מהמוצרים ופס הייצור השלישי מייצר את ה-30% הנותרים. 50% מהמוצרים של פס הייצור הראשון, 10% מהמוצרים של פס הייצור השני ו-80% ממוצרי הפס השלישי מיועדים לייצוא. בוחרים באקראי מוצר. חשב את:

- א. ההסתברות שהמוצר מיוצר על ידי פס הייצור השני ומיועד לייצוא.
- ב. ההסתברות שהמוצר מיועד לייצוא.
- ג. ההסתברות שהמוצר לא יוצר על ידי פס הייצור הראשון ואינו מיועד לייצוא.

19 במשחק "חיש-חש" אפשר לזכות ב-100 ₪, 50 ₪ או לא לזכות כלל. ההסתברות לזכות במשחק בודד ב-100 ₪ היא 0.2, ההסתברות לזכות ב-50 ₪ היא 0.35 וההסתברות לא לזכות כלל היא 0.45. רועי משחק פעמיים. חשב את:

- א. ההסתברות שרועי יזכה ב-50 ₪ בסה"כ.
- ב. ההסתברות שרועי יזכה לפחות ב-100 ₪.
- ג. ההסתברות שרועי לא יזכה במשחק השני.

20 בכד א' יש 5 כדורים אדומים ו-2 כדורים לבנים. בכד ב' יש 4 כדורים אדומים ו-6 כדורים לבנים. בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו בזה אחר זה שני כדורים בלי החזרה.

- א. מה ההסתברות שיצאו שני כדורים בעלי אותו הצבע?
- ב. מה ההסתברות שהכדור השני הוא אדום?
- ג. מבין כל האפשרויות בהן הכדור השני הוא אדום, מה ההסתברות שגם הכדור הראשון שיצא יהיה אדום?

21 זורקים קוביית משחק פעם אחת. אם היא מראה מספר המתחלק ב-3 בלי שארית רושמים אותו אך אם היא מראה מספר אחר זורקים אותה שנית. חוזרים על התהליך פעם שנייה ושלישית כאשר בפעם השלישית רושמים את המספר שהתקבל. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. המספר שנרשם הוא זוגי.
- ב. המספר שנרשם גדול מ-4.
- ג. המספר שנרשם מתחלק ב-3 בלי שארית.
- ד. המספר שנרשם לא מתחלק ב-3.

22 ישנם שני כדים. בכד א' יש 4 כדורים כחולים ו-2 כדורים צהובים ובכד ב' יש 3 כדורים כחולים ו-6 כדורים צהובים. זורקים קובייה. אם מתקבל מספר המתחלק ב-3 בלי שארית אז מוציאים כדור מכד א' ואם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3 אז מוציאים כדור מכד ב'. לאחר מכן זורקים את הקובייה שנית וחוזרים על התהליך ומוציאים כדור שני. (ההוצאות הן בלי החזרה).

- א. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים כחולים?
- ב. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים צהובים?
- ג. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים מאותו הצבע?

(23) בכד יש 4 כדורים ירוקים ו-2 כדורים לבנים. מוציאים כדור מהכד, אם הוא ירוק אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כדור נוסף ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף. חוזרים על התהליך פעם שנייה ולאחר מכן מוציאים כדור שלישי. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. מה ההסתברויות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו ירוקים?
- ב. מה ההסתברות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו בעלי אותו הצבע?
- ג. מה ההסתברות שיצאו לפחות שני כדורים ירוקים?
- ד. מה ההסתברות שיצא בדיוק כדור לבן אחד?

(24) בכד יש 8 כדורים שחורים ו-5 כדורים סגולים. מוציאים בלי החזרה 3 כדורים. מה ההסתברות שיצא לפחות כדור אחד סגול?

שאלות עם נעלמים:

מציאת ההסתברות P:

(25) קלע יורה למטרה פעמיים. ההסתברות שיקלע בירייה בודדת היא $P > 0.5$. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שיקלע פעם אחת בדיוק היא 0.48.

(26) 44% מעובדי מפעל הם מנהלים והשאר הם פועלים. ההסתברות שפועל מעשן היא 0.7 וההסתברות שמנהל מעשן היא P. בוחרים באקראי עובד מהמפעל. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שהעובד שנבחר מעשן היא 0.48.

(27) במפעל מסוים המונה 5000 עובדים, 1500 הם מנהלים והשאר הם פועלים פשוטים. ההסתברות שמנהל מעשן היא P וההסתברות שפועל מעשן היא $2P+0.1$. בוחרים באקראי עובד. מצא את ההסתברות P אם ידוע כי ההסתברות שהעובד שנבחר אינו מעשן היא 0.59.

(28) ההסתברות שקלע יפגע במטרה בירייה בודדת היא P. הקלע יורה שתי יריות. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שיפגע בשתי הפעמים קטנה פי 16 מההסתברות שיחטיא בשתייהן.

(29) שני צלפים יורים למטרה ירייה אחת. ידוע כי ההסתברות שהצלף הראשון יפגע גדולה פי 3 מההסתברות שהצלף השני יפגע. מצא את ההסתברות של כל צלף לפגוע בירייה בודדת אם ידוע כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם יפגע היא 0.66.

30 במשחק "חיש חש" אפשר לזכות ב-200 ₪, 100 ₪ או בכלום. ידוע כי ההסתברות לזכות ב-200 ₪ היא 0.1 וההסתברות לזכות ב-100 ₪ היא P . שחקן משחק שני משחקים. ההסתברות שלא יזכה כלל גדולה פי 36 מההסתברות שיזכה ב-400 ₪.

א. מצא את P .

ב. חשב את ההסתברות של השחקן לזכות לפחות ב-200 ₪.

31 אלי ורפי משחקים שני משחקי שחמט. כל משחק יכול להסתיים בניצחון לאחד השחקנים או בתיקו. ידוע כי ההסתברות של אלי לנצח במשחק בודד היא 0.36 וההסתברות שינצח בשני המשחקים יחדיו היא 0.2304.

א. מצא את ההסתברות שרפי ינצח במשחק בודד.

ב. חשב את ההסתברות שהתחרות כולה (שני המשחקים) תסתיים בתיקו.

32 שני שחקני שחמט משחקים שני משחקים. כל משחק יכול להסתיים בניצחון לאחד הצדדים או בתיקו. ההסתברות של כל שחקן לנצח במשחק בודד היא זהה. ההסתברות שהשחקן הראשון ינצח לפחות במשחק אחד היא 0.64.

מצא את ההסתברות של כל שחקן לנצח במשחק בודד.

33 צלף יורה שלוש יריות למטרה. אם הצלף פוגע בירייה מסוימת אז ההסתברות שיפגע גם בירייה הבאה היא Q . אם הצלף מחטיא בירייה מסוימת אז ההסתברות שיפגע בירייה הבאה היא P . הצלף מחטיא בירייה הראשונה. ידוע כי ההסתברות שהצלף יפגע בירייה השנייה והשלישית היא 0.12 וההסתברות שהצלף יפגע בירייה השנייה ויחטיא בשלישית היא 0.18.

א. מצא את P ו- Q .

ב. חשב את ההסתברות שהצלף יפגע בירייה השלישית.

ג. חשב את ההסתברות שהצלף יפגע בירייה אחת לפחות.

34 שני שחקני כדורסל זורקים זריקה אחת לסל. ההסתברות שהשחקן הראשון יקלע היא P וההסתברות שהשחקן השני יחטיא היא Q ($Q > 0.5$).

ידוע כי ההסתברות ששני השחקנים יקלעו היא 0.28 וההסתברות ששני השחקנים יחטיאו היא 0.18. מצא את P ו- Q .

מציאת מספר x :

35 בכד יש x כדורים. 8 מהם ירוקים והשאר כחולים. מוציאים באקראי עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא את x אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים ירוקים היא 0.64.

(36) בכד יש 12 כדורים חלקם אדומים וחלקם שחורים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא $\frac{4}{9}$.

(37) במעטפה יש 8 מכתבים. רובם מיועדים להישלח בתוך הארץ והשאר לחו"ל. מוציאים באופן אקראי מהמעטפה שני מכתבים בלי החזרה בזה אחר זה. מצא את מספר המכתבים המיועדים להישלח לחו"ל אם ידוע כי ההסתברות שהמכתב הראשון שהוצא מיועד לארץ והשני לחו"ל היא $\frac{3}{14}$.

(38) בכד יש 8 כדורים ירוקים והשאר כחולים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא כמה כדורים יש בכד אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$ ויש יותר כדורים ירוקים מכחולים.

(39) בתוך קלמר יש 5 עפרונות ועוד x עטים. מוציאים כלי כתיבה מהקלמר, אם הוא עפרון אז מחזירים אותו לקלמר ומוציאים כלי כתיבה נוסף. אם הוא עט אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כלי כתיבה נוסף. מצא כמה עטים יש בקלמר אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני עטים היא $\frac{1}{6}$.

(40) בקופסא א' ישנם 5 זוגות נעליים ו-3 זוגות מגפיים. בקופסא ב' יש 8 פריטים - x זוגות נעליים והשאר הם זוגות מגפיים. מוציאים באקראי מקופסא א' זוג כלשהו ומעבירים אותו לקופסא ב'. לאחר מכן מוציאים מקופסא ב' זוג. כמה זוגות נעליים יש בקופסא ב' אם ידוע כי ההסתברות להוציא בפעם השנייה זוג מגפיים היא $\frac{17}{24}$.

(41) בקלמר יש 6 עפרונות ו-3 עטים. בתיק יש 9 כלי כתיבה - x עפרונות והשאר עטים. מוציאים באקראי מהקלמר כלי כתיבה ומכניסים אותו לתיק. לאחר מכן מוציאים מהתיק כלי כתיבה נוסף. מצא כמה עפרונות יש בתיק אם ידוע כי ההסתברות שכלי הכתיבה שהוצא מהקלמר שונה מכלי הכתיבה שהוצא מהתיק היא $\frac{13}{30}$.

(42) בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים. מוציאים באקראי כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים יש מכל צבע אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא לבן היא $\frac{3}{8}$.

43) בתוך כד ישנם 10 כדורים, חלקם צהובים וחלקם כחולים. מוציאים באקראי כדור, מתבוננים בו ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים יש מכל צבע בכד אם ידוע כי ההסתברות שיצא לפחות כדור אחד כחול היא $\frac{44}{45}$.

44) בתוך שק ישנם 9 כדורים, חלקם סגולים וחלקם ירוקים. מוציאים באקראי כדור, אם הוא סגול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא ירוק אז מחזירים אותו חזרה לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים מכל צבע יש בשק אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שיבחר יהיה סגול היא $\frac{11}{36}$.

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי:

תרגילים יסודיים:

45) צלף יורה למטרה. ידוע כי מתוך 2000 יריות הוא פוגע ב-1200 מהן. הצלף יורה 4 יריות למטרה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- שהצלף יפגע בדיוק פעמיים במטרה.
- שהצלף יפגע במטרה בכל ארבעת הפעמים.
- שהצלף יפגע לפחות פעמיים במטרה.
- שהצלף לא יפגע במטרה כלל.
- מגדירים את המאורעות הבאים. קבע אלו מהם תלויים זה בזה. נמק.
 - A – הצלף יפגע במטרה בדיוק פעמיים.
 - B – הצלף יפגע במטרה בפעם הראשונה.
 - C – הצלף יפגע במטרה בפעם הרביעית.

46) ב-70% מהמכונות יש רדיו. בוחרים באקראי 5 מכונות. חשב את ההסתברויות הבאות:

- בדיוק ב-3 מתוך 5 המכונות יהיה רדיו.
- בכל 5 המכונות יהיה רדיו.
- ב-4 מתוך 5 המכונות יהיה רדיו.
- לפחות ב-3 מכונות יהיה רדיו.

47) במכללה המונה 20,000 סטודנטים ישנם 6000 בנים והשאר בנות. בוחרים באקראי 5 סטודנטים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- מתוך 5 הסטודנטים תהיה לכל היותר בת אחת.
- מתוך 5 הסטודנטים יהיה לכל היותר בן אחד.
- יבחרו 3 סטודנטים בנים מתוך החמישה.
- יבחרו לכל היותר 3 סטודנטים בנים.

48) בבה"ס הספר 40% מהתלמידים הם בנים והשאר בנות.
בוחרים באופן אקראי 4 תלמידים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות.
- ב. שתבחר בת אחת.
- ג. שיבחרו יותר בנים מבנות.
- ד. שמספר הבנים שנבחרו יהיה שונה ממספר הבנות שנבחרו.

49) רפי וגיל משחקים 4 משחקי שש-בש. מתוך 60 משחקים בודדים ששיחקו השניים, ניצח רפי ב-48 פעמים. חשב את:

- א. ההסתברות שרפי ינצח במשחק אחד.
- ב. שגיל ינצח בתחרות.
- ג. שרפי ינצח בתחרות.
- ד. שהתחרות תסתיים בתיקו.

50) טנק יורה טיל על חומה. ההסתברות שהטיל יפגע בחומה היא 0.6.
כדי להפיל את החומה יש לפגוע בה לפחות עם 3 טילים. הטנק יורה 4 טילים.
מה ההסתברות שהטנק יפיל את החומה?

הוצאה עם החזרה:

51) בתוך סל קניות יש 6 תפוחים ו-4 תפוזים. מוציאים עם החזרה 4 פירות מהסל.
חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. להוציא שני תפוחים ושני תפוזים.
- ב. להוציא 3 תפוחים ותפוז אחד.
- ג. רוב הפירות שמוציאים יהיו תפוחים.
- ד. לא להוציא תפוחים כלל.

52) בתוך קופסה יש 4 כדורים אדומים ו-2 כדורים ירוקים.
מוציאים עם החזרה 4 כדורים מהקופסה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שכל הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע.
- ב. שהוצאו לפחות שני כדורים ירוקים ולכל היותר 3 כדורים ירוקים.
- ג. שהוצא לפחות כדור אחד אדום ולכל היותר 3 כדורים אדומים.

53) בתוך קלמר יש 8 עפרונות ו-2 עטים. מוציאים עם החזרה 5 כלי כתיבה מהקלמר.

- א. הראה כי ההסתברות להוציא 3 עפרונות ו-2 עטים גדולה פי 4 מההסתברות להוציא 2 עפרונות ו-3 עטים.
- ב. חשב את ההסתברות להוציא 5 כלי כתיבה מאותו הסוג.
- ג. חשב את ההסתברות להוציא כלי כתיבה שונים.

בעיות שונות – התפלגות בינומית אחת:

(54) זורקים קובייה 4 פעמים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שיתקבל בכל פעם המספר 4.
- ב. שיתקבל בדיוק פעמיים המספר 3.
- ג. שיתקבל פעמיים מספר הקטן מ-4.
- ד. שיתקבל בכל ארבעת הפעמים מספר המתחלק ב-3 בלי שארית.

(55) במבחן יש 5 שאלות ולכל שאלה 3 תשובות שרק אחת מהן נכונה.

- א. מה ההסתברות לענות נכון בניחוש על כל השאלות?
- ב. מה ההסתברות לקבל ציון של 60 במבחן?
- ג. נניח שתלמיד יודע את התשובות הנכונות ל-2 מתוך 5 השאלות. מה ההסתברות שתלמיד זה יקבל 100 במבחן?
- ד. מה ההסתברות שהתלמיד בסעיף הקודם יקבל ציון של 60 לפחות?

(56) ההסתברות ששחקן כדורסל יקלע לסל בזריקה בודדת היא 0.7.

- השחקן זורק כדורים עד שהוא קולע 4 פעמים.
- מה ההסתברות שהשחקן יזרוק בדיוק 6 כדורים?

(57) זורקים קובייה עד שהמספר 5 מתקבל בדיוק 4 פעמים.

- א. מה ההסתברות לזרוק את הקובייה בדיוק 5 פעמים?
- ב. קבע האם המאורעות הבאים תלויים או בלתי תלויים. נמק.
- A – זורקים את הקובייה לכל היותר 6 פעמים.
- B – המספר 5 מתקבל בזריקה השנייה.

תרגילים הכוללים שתי התפלגויות בינומיות:

(58) בעיר מסוימת 40% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-30% מהבנות מרכיבות

משקפיים.

- א. בוחרים באקראי 4 גברים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם מרכיבים משקפיים?
- ב. בוחרים באקראי 5 נשים. מה ההסתברות שלכל היותר אישה אחת תרכיב משקפיים?
- ג. מה ההסתברות שמבין 4 הגברים ו-5 הנשים שנבחרו יהיו בדיוק 3 גברים שמרכיבים משקפיים ואישה אחת לכל היותר שמרכיבה משקפיים?

59 2 קלעים יורים למטרה. ההסתברות שהקלע הראשון יפגע היא 0.9 וההסתברות שהקלע השני יפגע היא 0.6. הקלע הראשון יורה 5 יריות והקלע השני יורה 3 יריות. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שהקלע הראשון יפגע בדיוק ב-2 יריות והקלע השני יפגע רק בירייה אחת במטרה.
- ב. שני הקלעים יפגעו כל אחד 3 פעמים במטרה.
- ג. שני הקלעים לא יפגעו כלל במטרה.
- ד. שני הקלעים יפגעו אותו מספר פגיעות כל אחד במטרה.

60 בכד א' יש 4 כדורים לבנים ו-6 כדורים שחורים. בכד ב' יש 8 כדורים לבנים ו-2 כדורים שחורים. מוציאים באקראי 4 כדורים עם החזרה מכד א' ו-5 כדורים עם החזרה מכד ב'.

- א. הראה כי ההסתברות להוציא שני כדורים לבנים ושני כדורים שחורים מכד א' גדולה פי 54 מההסתברות להוציא כדור לבן אחד ו-4 כדורים שחורים מכד ב'.
- ב. חשב את ההסתברות להוציא 4 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'.
- ג. חשב את ההסתברות להוציא 3 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'.
- ד. מה היא ההסתברות להוציא לפחות 3 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'?

61 במשפחה מרובת ילדים 40% מהבנים ו-30% מהבנות היו בחופשה בחו"ל. בוחרים באקראי 5 בנים ו-5 בנות.

- א. חשב את ההסתברות שבדיוק בן אחד ובת אחת היו בחו"ל.
- ב. חשב את ההסתברות שבדיוק שני בנים היו בחו"ל ואף אחת מהבנות שנבחרו לא הייתה בחו"ל.
- ג. חשב את ההסתברות שכל הבנים שנבחרו לא היו בחו"ל ו-2 בנות היו בחו"ל.
- ד. חשב את ההסתברות שבדיוק 2 מתוך 10 הילדים שנבחרו היו בחו"ל.

62 זורקים שתי קוביות משחק – אחת ירוקה והשנייה כחולה, 4 פעמים כל אחת. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שיתקבל מספר הגדול מ-4 פעם אחת בקובייה הירוקה ו-3 פעמים בקובייה הכחולה.
- ב. שיתקבל המספר 5 בשתי הקוביות בכל הזריקות שלהן.
- ג. שיתקבל מספר זוגי בקובייה הירוקה ב-3 מתוך 4 הזריקות שלה ומספר אי-זוגי בקובייה הכחולה ב-3 מתוך 4 הזריקות שלה.
- ד. שיתקבל מספר הגדול מ-3 לפחות 3 פעמים בקובייה הירוקה ולכל היותר 3 פעמים בקובייה הכחולה.

תרגילים מורכבים – מציאת ההסתברות להצלחה בניסיון בודד:

63) כדי להתקבל למגמת הנדסה במכללת חולון סטודנט צריך לעבור לפחות אחד משני מבחנים. ההסתברות להצליח במבחן הראשון היא 0.2 וההסתברות להצליח במבחן השני היא 0.5. בוחרים 5 סטודנטים שרוצים להתקבל למגמה הנ"ל.

- א. מה ההסתברות שסטודנט בודד יתקבל למגמה?
- ב. מה ההסתברות ששניים מתוך 5 הסטודנטים יתקבלו למגמה?
- ג. מה ההסתברות שלפחות 2 מתוך 5 הסטודנטים יתקבל למגמה?

64) בעיר מסוימת המונה 500,000 תושבים, ישנם 300,000 גברים והשאר נשים. ידוע כי 40% מהגברים מעשנים ו-90% מהנשים מעשנות.

- א. בוחרים תושב באופן אקראי. מה ההסתברות שהוא תושב מעשן?
- ב. בוחרים 5 מהתושבים הנ"ל.
 1. מה ההסתברות שלכל היותר תושב אחד הוא מעשן?
 2. מה ההסתברות שכל התושבים שנבחרו הם מעשנים?

65) א. מצא את ההסתברות שבמשפחה שבה 5 ילדים יהיו בדיוק 3 בנות אם ידוע כי ההסתברויות להולדת בן ובת זהים.

ב. מבין כל המשפחות בעיר מסוימת בעלות 5 ילדים ומתוכן 3 בנות, בוחרים באקראי 4 משפחות.

1. מה ההסתברות שבדיוק ל-3 מהמשפחות הנ"ל יהיו 3 בנות?
2. מה ההסתברות שלפחות ל-3 משפחות מהמשפחות הנ"ל יהיו 3 בנות?

66) בכיתה שבה 45 תלמידים ישנם 18 בנים. בוחרים באקראי 3 תלמידים מהכיתה.

- א. מה ההסתברות שתבחרנה בדיוק שתי בנות?
- ב. חוזרים על התהליך הנ"ל כל חצי שנה.

מה ההסתברות שבמשך שנתיים יבחרו רק פעם אחת שתי בנות ובן?

תרגילים המכילים התפלגות שבה יותר משתי אפשרויות בניסיון בודד:

67) 3 פאות של קובייה הן אדומות. פאה אחת היא כחולה ועוד שתי פאות הן צהובות. זורקים את הקובייה 4 פעמים.

- א. מה ההסתברות לקבל ב-3 מתוך 4 הזריקות צבע אדום?
- ב. מה ההסתברות לקבל לכל היותר פעם אחת צבע כחול?
- ג. מה ההסתברות לקבל בכל 4 הזריקות את הצבע הצהוב?
- ד. מה ההסתברות לקבל צבע זהה בכל 4 הזריקות?
- ה. האם המאורעות שתוארו בסעיפים א' וב' תלויים זה בזה?

- 68** שחקן שחמט מנוסה מנצח ב-70% מהמשחקים, ב-20% מהם הוא נשאר בתיקו ובשאר הוא מפסיד. השחקן משחק בטורניר 4 משחקים ברצף.
- מה ההסתברות שהשחקן ינצח ב-3 מתוך 4 המשחקים?
 - מה ההסתברות שהשחקן יסיים בתיקו בכל 4 המשחקים?
 - מה ההסתברות שהשחקן יפסיד לכל היותר במשחק אחד?
 - מה ההסתברות שהשחקן ינצח לפחות ב-3 משחקים?

69 בכד יש 4 כדורים שחורים, 3 כדורים לבנים ו-3 כדורים כחולים. מוציאים עם החזרה 5 כדורים מהכד.

- הראה כי ההסתברות שבדיוק 2 כדורים יהיו לבנים זהה להסתברות שבדיוק 2 כדורים יהיו כחולים.
- מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים הם לבנים?
- מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים הם שחורים?
- מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים יהיו מאותו הצבע?

70 אדם מתקשר לחברו. ההסתברות שהחבר יענה לטלפון היא 0.6, ההסתברות שהקו יהיה תפוס היא 0.3 וההסתברות שלא יענה כלל היא 0.1. מתקשרים 4 פעמים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- פעמיים בדיוק הקו יהיה תפוס.
- לכל היותר פעם אחת לא יענו.
- החבר יענה לטלפון בכל 4 הפעמים.
- החבר יענה לשיחה לכל היותר 3 פעמים.

71 צובעים את הפאות של סביבון בעל 8 פאות כך: 3 פאות באדום, 2 פאות בכחול, 2 פאות בירוק ופאה אחת בצהוב.

- מה ההסתברות שמתוך 4 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא לא ייפול אף פעם על פאה אדומה?
 - מה ההסתברות שמתוך 5 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול 4 פעמים על פאה כחולה?
 - מה ההסתברות שמתוך 3 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול לפחות פעמיים על פאה צהובה?
 - מה ההסתברות שמתוך 4 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול פעם אחת לכל היותר על פאה ירוקה?
 - האם המאורעות הבאים תלויים זה בזה? נמק.
- A – מתוך 3 סיבובי הסביבון, הוא ייפול פעם אחת על פאה אדומה.
 B – מתוך 3 סיבובי הסביבון, הוא ייפול פעם אחת על פאה כחולה.

תרגילים הכוללים נעלמים – התפלגות בינומית:

72) אם מוציאים מתוך פס ייצור לקיסמי שיניים 4 קיסמי שיניים ההסתברות שכולם פגומים היא 0.0001.

- א. מה ההסתברות להוציא קיסם שיניים פגום מפס הייצור?
- ב. מה ההסתברות שמתוך 4 הקיסמים כולם יהיו תקינים?
- ג. מה ההסתברות שמתוך 4 הקיסמים שניים בדיוק יהיו פגומים?

73) מבדיקה של משרד הרישוי נמצא כי מתוך 2000 נבחנים שעשו טסט ראשון, 1400 עברו בהצלחה.

- א. חשב את ההסתברות להצליח לעבור את בחינת הנהיגה.
- ב. חשב את ההסתברות לבחור 5 תלמידים שמתוכם 3 עברו את בחינת הנהיגה.
- ג. חשב את ההסתברות לבחור 4 תלמידים שמתוכם אף אחד לא עבר את בחינת הנהיגה.

74) אם בוחרים 4 תושבים מעיר מסוימת אז ההסתברות שלפחות אחד מהם ירכיב משקפיים היא 0.8704.

- א. חשב את ההסתברות שתושב אחד ירכיב משקפיים.
- ב. בוחרים 5 תושבים. מה ההסתברות שלפחות 4 מהם ירכיבו משקפיים?

75) ההסתברות להוציא עפרון מקלמר היא P והיא יותר גדולה מההסתברות להוציא כלי כתיבה אחר. ידוע שמבין שני כלי כתיבה שמוציאים מהקלמר עם החזרה ההסתברות שאחד מהם בדיוק יהיה עפרון היא 0.32.

- א. מצא את P.
- ב. חשב את ההסתברות שמתוך 5 כלי כתיבה שמוציאים מהקלמר אף אחד לא יהיה עפרון.

76) קלע יורה למטרה 4 פעמים. ההסתברות שלו לפגוע בירייה בודדת היא P.

- א. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות של הקלע לפגוע פעמיים שווה להסתברות שלו לפגוע 3 פעמים.
- ב. מצא את ההסתברות של הקלע לפגוע פעם אחת במטרה.

77) בעיר מסוימת ההסתברות שלמשפחה יהיה מחשב בבית היא P. בוחרים באקראי 5 משפחות מעיר זו.

- א. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שלשתי משפחות בדיוק יהיה מחשב קטנה פי 4 מההסתברות של-3 משפחות יהיה מחשב.
- ב. הראה כי ההסתברות של-4 משפחות בדיוק יהיה מחשב גדולה פי 2 מההסתברות של-3 משפחות בדיוק יהיה מחשב.

- 78) ההסתברות להצליח במבחן מסוים היא P. ידוע שאם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות שלושתם יעברו את המבחן קטנה פי 16 מ-P.
- א. מצא את P.
- ב. חשב את ההסתברות ששלושתם יכשלו במבחן.

תרגילים עם הסתברות מותנה:

- 79) בעיר מסוימת 70% מהתושבים תומכים בקיום פעילויות אחה"צ לילדים.
 ל-60% מהתושבים יש ילדים בבית ול-40% אין ילדים כלל.
 ל-36% מהתושבים יש ילדים והם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ.
- א. מה הוא אחוז התושבים שאינם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ ויש להם ילדים?
- ב. מה הוא אחוז התומכים בקיום הפעילויות מבין התושבים שיש להם ילדים?
- ג. מה הוא אחוז התושבים שאינם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ לילדים מבין התושבים שאין להם ילדים?
- ד. ידוע כי יש בעיר 36,000 תושבים ללא ילדים שאינם תומכים בפעילויות אחה"צ לילדים. כמה תושבים יש בעיר בסה"כ?

- 80) במכללה המונה 16,000 סטודנטים, נערכו שני מבחני סוף סמסטר.
 9600 סטודנטים עברו את המבחן הראשון ו-20% מהם עברו את השני.
 1920 סטודנטים עברו את שני המבחנים.
- א. מה הוא אחוז הסטודנטים שלא עברו אף מבחן?
- ב. מה הוא אחוז הסטודנטים שעברו את המבחן הראשון מבין אלו שעברו את המבחן השני?
- ג. מה הוא אחוז הסטודנטים שעברו את המבחן השני מבין אלו שעברו את המבחן הראשון?
- ד. מה הוא אחוז הסטודנטים שלא עברו אף מבחן מבין אלו שלא עברו את המבחן הראשון?

- 81) בחברה מסוימת מספר הנשים גדול פי 3 ממספר הגברים. ידוע כי ההסתברות לבחור עובד שהוא מרכיב משקפיים היא 0.4. 30% מבין העובדים שמרכיבים משקפיים הם גברים.
- א. מה ההסתברות לבחור עובד שהוא אישה שאינה מרכיבה משקפיים?
- ב. בוחרים עובד באקראי, ידוע שנבחר גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?
- ג. בוחרים עובד באקראי, ידוע שהעובד שנבחר מרכיב משקפיים. מה ההסתברות שזו אישה?

- 82** במדינה מסוימת 60% מהאזרחים בעד הממשלה ו-40% הם נגד.
48% מהאזרחים הם גמלאים ו-25% מהגמלאים בעד הממשלה.
- מה הוא אחוז האזרחים שאינם גמלאים מבין אלה שנגד הממשלה?
 - בוחרים אזרח באקראי. ידוע כי הוא בעד הממשלה. מה ההסתברות שהוא לא גמלאי?
 - בוחרים אזרח באקראי. ידוע כי הוא נגד פעולות הממשלה. מה ההסתברות שהוא גמלאי?

- 83** מחצית מתלמידי התיכון נעזרים במורים פרטיים.
בסוף השנה נערך מבחן מסכם והתברר כי 60% מבין התלמידים שנעזרו במורים פרטיים עברו את המבחן בהצלחה. 20% מהתלמידים שלא נעזרו במורים פרטיים נכשלו במבחן.
- איזה אחוז מתלמידי התיכון עברו את המבחן בהצלחה?
 - איזה אחוז מבין התלמידים שלא נעזרים במורים פרטיים עברו את המבחן?
 - בוחרים באופן אקראי תלמיד. ידוע כי הוא נכשל במבחן. מה ההסתברות שהוא לא נעזר במורים פרטיים?

- 84** מספר הבנות במכללה גדול פי 1.5 ממספר הבנים. 20% מהבנים לומדים מקצוע הומאני, ו-36% מכלל הסטודנטים לומדים מקצוע ריאלי.
- מה הוא אחוז הבנות שלומדות מקצוע ריאלי?
 - בוחרים באופן אקראי סטודנט. ידוע כי נבחרה בת. מה ההסתברות שהיא לומדת מקצוע הומאני?
 - מה הוא אחוז הבנים מבין כל אלו שלומדים מקצוע הומאני?

- 85** במפעל מסוים $\frac{3}{7}$ מהעובדים הם נשים ו- $\frac{4}{7}$ הם גברים. 70% מהנשים הן מעשנות ו- $\frac{7}{8}$ מהגברים מעשנים.
- מה הוא אחוז העובדים שלא מעשנים במפעל?
 - בוחרים עובד וידוע כי נבחר עובד מעשן. מה ההסתברות שזו אישה?
 - מבין העובדים שלא מעשנים, מה ההסתברות לבחור גבר?
 - במפעל סה"כ 560 עובדים שאינם מעשנים. כמה עובדים יש בכל המפעל?

- 86** בכפר מסוים $\frac{2}{3}$ מהתושבים הם גברים ו- $\frac{1}{3}$ הם נשים.
ידוע כי 60% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-25% מהנשים לא מרכיבות משקפיים.
- מה ההסתברות להיתקל בגבר שלא מרכיב משקפיים בכפר?
 - בוחרים באקראי תושב. ידוע כי נבחרה אישה. מה ההסתברות שהיא מרכיבה משקפיים?

ג. בוחרים באקראי תושב.

1. מה ההסתברות שהוא מהרכיב משקפיים?
2. פי כמה גדול אחוז הגברים שמרכיבים משקפיים מאחוז הנשים שמרכיבות משקפיים?

(87) בכד יש 8 כדורים כחולים ו-4 כדורים ירוקים.

מוציאים באקראי בלי החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים כחולים?
- ב. מה ההסתברות שהכדור השני שיצא הוא כחול?
- ג. אם ידוע שהכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון גם יהיה כחול?

(88) בכד יש 10 כדורים צהובים ו-4 כדורים שחורים.

מוציאים באקראי בלי החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים צהובים?
- ב. מה ההסתברות שהכדור השני שיצא הוא צהוב?
- ג. אם ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא צהוב, מה ההסתברות שגם הראשון הוא צהוב?

(89) בכד א' יש 5 כדורים לבנים ו-3 כדורים שחורים. בכד ב' יש 4 כדורים לבנים וכדור

אחד שחור. מוציאים כדור מכד א'. אם הוא שחור אז מוציאים כדורים נוסף מכד א' ואם הוא לבן אז מוציאים כדור מכד ב'. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא שחור. חשב את ההסתברות שהכדור הוצא מכד ב'.

(90) בכד א' יש 3 כדורים ירוקים ו-2 כדורים אדומים. בכד ב' יש 4 כדורים ירוקים

וכדור אחד אדום. מוציאים כדור מכד א'. אם הוא ירוק אז מוציאים כדור נוסף מכד א' ואם הוא אדום אז מוציאים כדור מכד ב'. ידוע שהכדור השני שהוצא הוא אדום. מה ההסתברות שהוא הוצא מכד א'?

(91) בכד יש 5 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים ו-2 כדורים צהובים.

מוציאים בלי החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים?
- ב. מה ההסתברות להוציא שני כדורים מאותו הצבע?
- ג. ידוע כי שני הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע, מה ההסתברות שהם אדומים?

92 בכד יש 6 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים סגולים. מוציאים בלי החזרה שני כדורים מהכד. ידוע כי שני הכדורים שהוצאו הם בעלי אותו הצבע, מה ההסתברות ששניהם סגולים?

- 93** קלע יורה שתי יריות למטרה. ההסתברות שיפגע בירייה הראשונה היא 0.6. אם הוא פגע בירייה הראשונה אז ההסתברות שיפגע גם בשנייה היא 0.8. אם הוא החטיא בירייה הראשונה אז ההסתברות שיפגע בשנייה היא 0.5.
- מה ההסתברות שהקלע יפגע בירייה אחת בדיוק?
 - מה ההסתברות שהקלע יפגע בירייה השנייה?
 - ידוע כי הקלע פגע בירייה השנייה, מה ההסתברות שהוא פגע גם בירייה הראשונה?
 - ידוע כי הקלע פגע בירייה השנייה, מה ההסתברות שהוא פגע במטרה פעם אחת בדיוק?

- 94** בארץ מסוימת כל יום הוא יום שמש או יום גשום. ההסתברות ליום שמש לאחר יום שמש היא 0.4 וההסתברות ליום גשום לאחר יום גשום היא 0.7. ביום ראשון היה גשום.
- מה ההסתברות שהיום השלישי יהיה גם גשום?
 - ידוע כי היום השלישי הוא גשום, מה ההסתברות שהיום השני יהיה יום שמש?

תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס:

- 95** בעיר מסוימת המונה 200,000 תושבים ידוע כי 120,000 מהם מרכיבים משקפיים. מחצית מהתושבים שמעשנים הם מרכיבים משקפים ו-20% מהתושבים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים.
- מהו אחוז התושבים שמעשנים?
 - מהו אחוז התושבים שמעשנים ומרכיבים משקפיים?
 - מהו אחוז התושבים שלא מעשנים ולא מרכיבים משקפיים?

- 96** 45% מהסטודנטים באוניברסיטה משתמשים במחשב נייד והשאר משתמשים במחברות. 4/9 מבין הסטודנטים שמשתמשים במחשב נייד אינם מרכיבים משקפיים והסטודנטים שמשתמשים במחברות ולא מרכיבים משקפיים מהווים 60% מכלל הסטודנטים שלא מרכיבים משקפיים.
- מהו אחוז הסטודנטים שמשתמשים במחשב נייד ולא מרכיבים משקפיים?
 - מהו אחוז הסטודנטים שמשתמשים במחברות מבין אלו שמרכיבים משקפיים?
 - מה ההסתברות לבחור סטודנט שלא מרכיב משקפיים?
 - נרשמו לאוניברסיטה 10,000 סטודנטים. כמה מהם מרכיבים משקפיים?

97 בחברה מסוימת עובדים פי 4 גברים מנשים. ל-75% מהגברים אין תואר שני ו-6/7 מבין העובדים בלי תואר שני הם גברים.

- א. מהו אחוז הגברים בחברה בלי תואר שני?
- ב. בוחרים באקראי עובד. ידוע כי יש לו תואר שני. מה ההסתברות שזו אישה?
- ג. הראה כי ההסתברות להיתקל באקראי באישה העובדת בחברה זהה להסתברות להיתקל בגבר עם תואר שני.

98 במפעל מסוים יש פי 3 עובדים גברים מנשים. ל-2/7 מהנשים יש רישיון נהיגה ומספר הגברים בעלי הרישיון במפעל מהווים 6/7 מכלל העובדים עם רישיון.

- א. הראה כי למחצית מהעובדים יש רישיון נהיגה.
- ב. מה ההסתברות לבחור גבר מבין העובדים בלי רישיון נהיגה?
- ג. מה ההסתברות לבחור אישה בלי רישיון מבין כל הנשים העובדות במפעל?

99 בעיר מסוימת 45% מהתושבים הם גברים ו-55% הם נשים. 3/8 מבין מרכיבי המשקפים בעיר הם גברים ו-50% מהתושבים שאינם מרכיבים משקפיים הם נשים.

- א. מהו אחוז מרכיבי המשקפיים בעיר?
- ב. בוחרים באקראי תושב. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?
- ג. פי כמה גדולה ההסתברות לפגוש אישה שלא מרכיבה משקפיים מגבר שמרכיב משקפיים?

100 במשחק כדורגל 27% מהצופים הם ילדים והשאר מבוגרים. 40% מבין האוהדים של קבוצה א' הם ילדים ו-80% מבין האוהדים של קבוצה ב' הם מבוגרים. לאיזו קבוצה יש יותר אוהדים?

101 בארץ מסוימת יש 3 מפלגות – מפלגה א', ב' ו-ג'. בבחירות מצביעים גברים ונשים. ידוע כי 55% מהאזרחים הם גברים. 60% מהאזרחים הצביעו למפלגה א'. 15% הצביעו למפלגה ב' ו-25% הצביעו למפלגה ג'. 75% מבין המצביעים למפלגה א' הם גברים ו-80% מבין המצביעים למפלגה ג' הם נשים.

- א. מצא איזה חלק מהגברים הצביע למפלגה א'.
- ב. מצא איזה חלק מהנשים הצביע למפלגה ב'.
- ג. אם בארץ ישנם 540,000 גברים שהצביעו למפלגה א', כמה נשים הצביעו לכל מפלגה?

102 במפעל מסוים מייצרים שוקולד ווניל על ידי 3 מכונות. מכונה א' מייצרת 80% מהמוצרים. מכונה ב' מייצרת 6% מהמוצרים ומכונה ג' מייצרת 14%. ידוע כי מכונה א' מייצרת 80% ממוצרי הווייל ומכונה ב' מייצרת פי 5 יותר ממוצרי הווייל מאשר מוצרי השוקולד. סך כל מוצרי הווייל שהמפעל מייצר הם 76% מכלל המוצרים.

- א. מהו אחוז מוצרי השוקולד המיוצרים על ידי מכונה ב' ?
- ב. איזה חלק מבין מוצרי השוקולד מיוצרים על ידי מכונה א' ?
- ג. איזה חלק מבין המוצרים של מכונה ג' מהווים מוצרי הווייל ?

103 במשק יש תרנגולים, אפרוחים ואווזים מפותמים. עקב בצורת קשה 47% מהעופות איבדו משקל רב. אחוז האווזים במשק הוא 20%. ידוע כי 75% מהאפרוחים ומהאווזים ירדו במשקל ו-1/6 מהתרנגולות ירדו גם כן במשקל.

- א. מה הוא אחוז התרנגולים במשק?
- ב. מה ההסתברות לבחור תרנגול שלא איבד משקל כלל?
- ג. בוחרים עוף מהמשק. ידוע כי הוא לא איבד משקל כלל. מה ההסתברות שהוא אפרוח?
- ד. כמה אווזים יש במשק אם ידוע כי 96 תרנגולים איבדו משקל רב?

תרגילי חישוב הכוללים שימוש בנוסחאות בהסתברות:

104 A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.

$$\text{נתון: } P(A) = 0.9, P(B) = 0.4.$$

חשב את: א. $P(A \cap B)$ ב. $P(A \cup B)$.

105 A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.

$$\text{נתון: } P(A \cap B) = 0.3, P(B) = 0.5. \text{ חשב את:}$$

- א. $P(A)$
- ב. $P(A \cup B)$
- ג. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
- ד. $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (רמז: אם A ו-B בלתי תלויים אז גם \bar{A} ו- \bar{B} בלתי תלויים).

106 A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.

$$\text{נתון: } P(A \cup B) = 0.92, P(A) = 0.8. \text{ חשב את:}$$

- א. $P(B)$
- ב. $P(A \cap B)$
- ג. הראה כי מתקיים התנאי: $P(A/B) = P(A)$.

(107) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A \cap B) = 0.1$, $P(A) = 0.4$, $P(\bar{B}) = 0.75$.

א. הוכח כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

ב. חשב את: $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. (הסתמך על הטענה כי אם A ו-B בלתי תלויים

אז גם \bar{A} ו- \bar{B} בלתי תלויים).

(108) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A/B) = \frac{3}{4}$, $P(B/A) = \frac{3}{8}$. חשב את:

א. $P(A)$.

ב. $P(A \cap B)$.

ג. $P(A \cup B)$.

(109) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$, $P(A \cup B) = \frac{14}{15}$, $\frac{P(A/B)}{P(B/A)} = \frac{1}{2}$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$.

(110) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A \cap B) = 0.15$, $P(A \cup B) = 0.55$, $\frac{P(A/B)}{P(B/A)} = \frac{2}{5}$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$.

(111) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A) > P(B)$, $P(A \cap B) = 0.18$, $P(A \cup B) = 0.72$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$ אם ידוע כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

(112) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A) > P(B)$, $P(A \cap B) = 0.24$, $P(A \cup B) = 0.86$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$ אם ידוע כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

תרגילי הוכחה בעזרת נוסחאות ההסתברות:

(113) A ו-B הם מאורעות הניסוי מקרי. נתון: $A \subseteq B$.

א. הוכח: $P(A) = P\left(\frac{A}{B}\right) \cdot P(B)$.

ב. A ו-B הם מאורעות תלויים.

(114) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח:

א. $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$.

ב. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \left(1 - P\left(\frac{B}{A}\right)\right)$.

(115) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח: $P\left(\frac{A}{B}\right) + P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = 1$.

(116) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. נתון: $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.9$. הוכח:

א. $0.9 \leq P(A \cup B) \leq 1$.

ב. $0.6 \leq P(A \cap B) \leq 0.7$.

(117) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. נתון: $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.7$. הוכח:

א. $0.1 \leq P(A \cap B) \leq 0.4$.

ב. $0.7 \leq P(A \cup B) \leq 1$.

(118) בניסוי מקרי ההסתברות למאורע A היא: $P(A) = 0.4$ וההסתברות

למאורע B היא: $P(B) = 0.2$. הוכח:

א. $0.4 \leq P(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq 0.6$.

ב. $0.8 \leq P(\bar{A} \cup \bar{B}) \leq 1$.

(119) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. נתון: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.8$. הוכח:

א. $0.1 \leq P(A \cap B) \leq 0.3$.

ב. $\frac{1}{3} \leq P\left(\frac{B}{A}\right) \leq 1$.

ג. $\frac{1}{8} \leq P\left(\frac{A}{B}\right) \leq \frac{3}{8}$.

(120) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי שמרחב המדגם שלו הוא Ω . הוכח:

א. $\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - A \cup B$

ב. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

ג. אם A ו-B הם מאורעות בלתי תלויים אז גם \bar{A} ו- \bar{B} יהיו בלתי תלויים.

(121) א. הוכח בעזרת דיאגרמת וון כי את הנוסחה:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ב. הוכח בעזרת דיאגרמת וון כי כאשר A ו-B הם קבוצות זרות

אז מתקיים: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(122) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח כי הנתונים הבאים הם בלתי

אפשריים לקיום: $P(\bar{A}) = 0.6$, $P(B) = 0.8$, $P(\bar{A} \cap B) = 0.7$

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.1288 ב. 0.7912 ג. 0.0112 (2) א. $\frac{1}{64}$ ב. $\frac{9}{64}$ ג. $\frac{9}{32}$ (3) א. $\frac{9}{25}$ ב. $\frac{13}{25}$ ג. $\frac{2}{5}$
- (4) א. $\frac{1}{9}$ ב. $\frac{29}{81}$ ג. $\frac{49}{81}$ ד. $\frac{2}{9}$ (5) א. 0.116 ב. 0.432 ג. 0.568 ד. 0.876
- (6) א. $\frac{1}{512}$ ב. $\frac{135}{512}$ ג. $\frac{23}{128}$ (7) א. 0.15 ב. 0.15 ג. 0.63 ד. 0.85 (8) א. $\frac{3}{28}$ ב. $\frac{295}{448}$ ג. $\frac{223}{448}$
- (9) א. $\frac{1}{7}$ ב. $\frac{1}{21}$ ג. $\frac{4}{21}$ ד. כן. (10) א. $\frac{1}{29}$ ב. $\frac{24}{145}$ ג. 0.2 ד. $\frac{97}{145}$ (11) א. $\frac{253}{1435}$ ב. $\frac{71}{287}$ ג. $\frac{1182}{1435}$
- ד. $\frac{561}{1435}$ ה. כן. (12) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{29}{30}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. כן. (13) א. 0.448 ב. 0.072 ג. 0.164 ד. 0.212
- (14) א. 0.384 ב. 0.056 ג. 0.176 ד. 0.964 (15) א. 0.24 ב. 0.24 ג. 0.4 ד. 0.4
- (16) א. 0.16 ב. 0.72 ג. 0.36 ד. 0.28 (17) א. 0.28 ב. 0.36 ג. 0.04
- (18) א. 0.03 ב. 0.47 ג. 0.33 (19) א. 0.315 ב. 0.4825 ג. 0.45 (20) א. $\frac{52}{105}$ ב. $\frac{39}{70}$ ג. $\frac{64}{117}$
- (21) א. $\frac{1}{2}$ ב. $\frac{23}{54}$ ג. $\frac{19}{27}$ ד. $\frac{8}{27}$ (22) א. $\frac{73}{405}$ ב. $\frac{118}{405}$ ג. $\frac{191}{405}$ (23) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{32}{135}$ ג. $\frac{52}{75}$
- ד. $\frac{37}{75}$ (24) א. $\frac{115}{143}$ (25) א. 0.6 (26) א. 0.2 (27) א. 0.2 (28) א. 0.2
- (29) $P_1 = 0.9, P_2 = 0.3$ (30) א. 0.3 (31) א. 0.28 (32) א. 0.3796 (33) א. $P = 0.3, Q = 0.4$ ב. 0.33 ג. 0.51 (34) א. $P = 0.7, Q = 0.6$ (35) $x = 10$
- (36) א. 4 (37) א. 2 (38) א. 12 (39) א. 4 (40) א. 2 (41) א. 5 (42) א. 5 אדומים ו-3 לבנים.
- (43) א. 8 כחולים ו-2 צהובים. (44) א. 3 סגולים ו-6 ירוקים.
- (45) א. 0.3456 ב. 0.1296 ג. 0.8208 ד. 0.0256
- ה. תלויים: A, B ו-A, C. בלתי תלויים: B, C.
- (46) א. 0.3087 ב. 0.16807 ג. 0.36015 ד. 0.83692
- (47) א. 0.03078 ב. 0.52822 ג. 0.1323 ד. 0.96922
- (48) א. 0.3456 ב. 0.1536 ג. 0.1792 ד. 0.6544
- (49) א. 0.0256 ב. 0.0272 ג. 0.8192 ד. 0.1536 (50) א. 0.4752
- (51) א. 0.3456 ב. 0.3456 ג. 0.4752 ד. 0.0256
- (52) א. $\frac{17}{81}$ ב. $\frac{32}{81}$ ג. $\frac{64}{81}$ (53) א. 0.328 ג. 0.672 (54) א. $\frac{1}{1296}$ ב. $\frac{25}{216}$ ג. $\frac{3}{8}$ ד. $\frac{1}{81}$
- (55) א. $\frac{1}{243}$ ב. $\frac{40}{243}$ ג. $\frac{1}{27}$ ד. $\frac{19}{27}$ (56) א. 0.21609 (57) א. $\frac{5}{1944}$ ב. תלויים.
- (58) א. 0.1536 ב. 0.52822 ג. 0.08113
- (59) א. 0.0023 ב. 0.0157 ג. $6.4 \cdot 10^{-7}$ ד. 0.0193
- (60) א. 0.00082 ב. 0.0176 ג. 0.02752 ד. 0.02752
- (61) א. 0.09335 ב. 0.05808 ג. 0.024 ד. 0.17543
- (62) א. $\frac{256}{6561}$ ב. $5.95 \cdot 10^{-7}$ ג. 0.0625 ד. 0.2929 (63) א. 0.6 (64) א. 0.07776 ב. 0.08704 ג. 0.1 ד. 0.2

- (65) א. $P = \frac{5}{16}$ ב. 0.08392 ג. 0.09346 ד. $\frac{1053}{2365}$ ה. 0.304
- (66) א. $\frac{1}{4}$ ב. 0.86805 ג. $\frac{1}{81}$ ד. 0.0756 ה. תלויים.
- (67) א. 0.4116 ב. 0.0016 ג. 0.9477 ד. 0.6517
- (68) א. 0.02835 ב. 0.0768 ג. 0.1335 ד. 0.8074
- (69) א. 0.2646 ב. 0.9477 ג. 0.1296 ד. 0.8074
- (70) א. $\frac{625}{4096}$ ב. $\frac{15}{1024}$ ג. $\frac{11}{256}$ ד. $\frac{189}{256}$ ה. כן.
- (71) א. $P = 0.1$ ב. 0.6561 ג. 0.0486 ד. $P = 0.7$ ה. 0.3087 ו. 0.0081
- (72) א. $P = 0.4$ ב. 0.08704 ג. 0.00032 ד. $P = 0.8$ ה. 0.1536 ו. 0.76
- (73) א. $P = 0.8$ ב. $P = \frac{1}{4}$ ג. $\frac{27}{64}$ ד. 79
- (74) א. 32% ב. 60% ג. 20% ד. 80% ה. 0.47 ו. 0.48 ז. 0.7
- (75) א. 10% ב. 0.8 ג. 0.9 ד. 83
- (76) א. 4% ב. $P = \frac{14}{15}$ ג. 12.5% ד. 20% ה. $P = 0.375$ ו. 2800 עובדים.
- (77) א. $P = \frac{4}{15}$ ב. $P = 0.75$ ג. 1.6 ד. 2
- (78) א. $P = \frac{14}{33}$ ב. $P = \frac{2}{3}$ ג. $P = \frac{7}{11}$ ד. 88
- (79) א. $P = \frac{15}{19}$ ב. $P = \frac{2}{9}$ ג. $P = \frac{14}{45}$ ד. 92
- (80) א. $P = 0.32$ ב. $P = 0.68$ ג. $P = \frac{12}{17}$ ד. $P = \frac{5}{17}$ ה. 94
- (81) א. 24% ב. 12% ג. 28% ד. 96
- (82) א. 60% ב. $P = \frac{1}{3}$ ג. 98
- (83) א. $P = \frac{9}{11}$ ב. $P = \frac{2}{9}$ ג. מפלגה א' – 180,000 ד. מפלגה ב' – 120,000
- (84) א. 240,000 ב. 1% ג. 0.8 ד. $\frac{51}{70}$
- (85) א. 48% ב. $P = 0.4$ ג. $\frac{8}{53}$ ד. 240 אווזים
- (86) א. 0.6 ב. 0.8 ג. 0.2 ד. 0.7 ה. 0.6 ו. 0.48
- (87) א. 0.9 ב. 0.8 ג. 0.32 ד. 0.88 ה. $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.8$
- (88) א. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ ב. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ ג. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ ד. $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.3$

תרגול נוסף - שאלות משולבות:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

- (1) בבתי הספר בעיר נערכו שני מבחנים. 80% מתלמידי העיר עברו את המבחן הראשון. $\frac{1}{4}$ מבין התלמידים שעברו את המבחן הראשון עברו גם את השני ו- $\frac{1}{2}$ מהתלמידים שנכשלו במבחן הראשון נכשלו גם בשני.
- א. בוחרים באקראי תלמיד. מה הסתברות שהוא עבר את אחד המבחנים?
ב. בוחרים באקראי 4 תלמידים.
מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם עבר את אחד המבחנים?
ג. איזה חלק מבין התלמידים שנכשלו במבחן השני מהווה קבוצת התלמידים שנכשלו גם במבחן הראשון?
ד. בוחרים 5 תלמידים. ידוע כי כולם עברו את המבחן הראשון. מה ההסתברות ש-4 מהם נכשלו במבחן השני?
- (2) במדינה מסוימת $\frac{19}{60}$ מהאזרחים הם גברים ו- $\frac{41}{60}$ הן נשים. 30% מבין מרכיבי המשקפיים במדינה זו הם גברים ו-40% מבין אלו שלא מרכיבים משקפיים הם גברים.
- א. מה ההסתברות למצוא אישה במדינה זו שאינה מרכיבה משקפיים?
ב. בוחרים 4 אנשים. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם הם נשים שאינן מרכיבות משקפיים?
ג. בוחרים אזרח. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?
ד. מה ההסתברות לבחור 5 גברים שוודאי לא כולם מרכיבים משקפיים?
- (3) בבית ספר מסוים ישנם תלמידים המרכיבים משקפיים. ידוע כי אם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות ששלושתם מרכיבים משקפיים היא 0.027.
- א. מצא את אחוז מרכיבי המשקפיים בבית הספר.
בית הספר ההסתברות להיתקל בתלמיד גדולה ב-0.1 מההסתברות להיתקל בתלמידה ומספר הבנים שמרכיבים משקפיים זהה למספר הבנות שמרכיבות משקפיים.
- ב. מה ההסתברות להיתקל בחצר בית הספר בתלמיד שאינו מרכיב משקפיים?
ג. איזה חלק מכלל הבנות בבית הספר מהוות הבנות שאינן מרכיבות משקפיים?
ד. בוחרים 4 תלמידים. ידוע כי כולן בנות.
מה ההסתברות כי אחת מהן תרכיב משקפיים?

4) בכד ישנם 12 כדורים, חלקם לבנים וחלקם שחורים. אם מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד ההסתברות ששניהם יהיו בעלי אותו הצבע היא $\frac{13}{18}$.

א. מה ההסתברות להוציא כדור שחור מהכד אם ידוע כי יש יותר כדורים שחורים?

על 40% מהכדורים השחורים רשום מספר ועל מחצית הכדורים הלבנים לא רשום כלום.

ב. מה ההסתברות להוציא מהכד כדור שחור שרשום עליו מספר?

ג. איזה חלק מבין הכדורים שרשום עליהם מספר מהווים הכדורים הלבנים?

ד. מוציאים עם החזרה 4 כדורים. ידוע כי על כל הכדורים הללו היה רשום מספר. מה ההסתברות שבדיוק כדור אחד יהיה לבן?

5) מפעל מייצר שולחנות וכיסאות. בוחרים 4 רהיטים. ידוע כי ההסתברות שכולם יהיו כיסאות זהה להסתברות שיהיה שולחן אחד בדיוק בניהם.

א. מצא את ההסתברות לבחור כיסא.

במפעל צובעים את הרהיטים בשחור או לבן. רבע מהשולחנות נצבעים בשחור ורבע מהכיסאות נצבעים בלבן.

ב. מה ההסתברות לבחור כיסא שחור?

ג. איזה חלק מבין הרהיטים הלבנים מהווים השולחנות?

ד. בוחרים 3 רהיטים לבנים. מה ההסתברות כי לפחות אחד מהם יהיה שולחן?

6) במפעל לייצור ברגים פועלים שני פסי ייצור – פס ייצור א' ופס ייצור ב'.

ידוע כי אם בוחרים 5 ברגים אז ההסתברות ששלושה מהם מיוצרים על ידי פס הייצור השני גדולה פי 4.5 מההסתברות שאחד מהם מיוצר על ידי פס הייצור הנ"ל.

א. מצא את ההסתברות לבחור בורג המיוצר על ידי פס הייצור הראשון.

מתוך כל 100 ברגים שהמפעל מייצר 7 פגומים. ומתוך כל 10 ברגים היוצאים מפס הייצור הראשון אחד הוא פגום.

ב. מהו אחוז הברגים התקינים שמיוצרים על ידי פס הייצור השני?

ג. איזה חלק מבין הברגים הפגומים מהווים אלו שיוצאים מפס הייצור הראשון?

ד. מה ההסתברות שמתוך הוצאת 3 ברגים פגומים שניים יהיו מפס הייצור הראשון?

7) בעיר מסוימת נערכו בחירות מקומיות. ידוע כי אם בוחרים באקראי 4 אזרחים מההסתברות שתמצא אישה אחת בניהם קטנה פי 16 מההסתברות להיתקל באישה באופן אקראי.

א. מה הוא אחוז הגברים בעיר?

בעיר שלושה מועמדים. $\frac{1}{11}$ מהמצביעים למועמד א' הם גברים, 60% מהמצביעים למועמד ב' הם גברים ו-25% מהמצביעים למועמד ג' הם גברים. אחוז המצביעים למועמד ג' הוא 20%.

ב. איזה מועמד קיבל את רוב הקולות?

ג. איזה חלק מבין כל הנשים מהווה קבוצת הנשים שהצביעו למועמד המנצח?

ד. בוחרים באקראי 4 נשים. מה ההסתברות ששלושה מהן הצביעו למועמד המנצח?

8) חלק מהסטודנטים באוניברסיטה נעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

ידוע כי ההסתברות לבחור 2 סטודנטים הנעזרים בספרי לימוד חיצוניים קטנה ב-0.1 מההסתברות לבחור שני סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

א. מהו אחוז הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

האוניברסיטה מוכרת ספרי לימוד ב-3 מקצועות לכלל הסטודנטים. כל אחד מהסטודנטים קנה ספר אחד בדיוק. ידוע כי כמות הסטודנטים שקנו את ספר א' וכמות הסטודנטים שקנו את ספר ג' זהות.

כמו כן, $\frac{6}{7}$ מאלו שקנו את ספר ג' נעזרים גם בספרים חיצוניים. $\frac{1}{3}$ מהסטודנטים שקנו את ספר ב' נעזרים בספרי לימוד חיצוניים וכמות הסטודנטים שקנו את ספר א' ונעזרים בספרי לימוד חיצוניים מהווים $\frac{1}{9}$ מכלל הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

ב. מהו אחוז הסטודנטים שקנו את ספר ב' ואינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

ג. איזה חלק מהווים הסטודנטים שקנו את ספר ג' מכלל הסטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

ד. בוחרים 4 סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. מה ההסתברות שאחד מהם קנה את ספר ג'?

9) במפעל גדול ההסתברות שמתוך 4 עובדים לפחות אחד ירכיב משקפיים היא 0.5904.

- א. מה ההסתברות לבחור עובד שלא מרכיב משקפיים?
ידוע כי 40% מהפועלים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים ו-20% מבין העובדים המעשנים הם מרכיבים משקפיים.
מה ההסתברות לבחור עובד שמרכיב משקפיים בלבד או מעשן בלבד?
ב. בוחרים באקראי 4 עובדים. מה ההסתברות ששניים מהם או מרכיבים משקפיים או מעשנים?
ג. בוחרים באקראי 5 עובדים. מה ההסתברות שרוב העובדים שנבחרו הם מעשנים?

10) בעיר מסוימת נערכות בחירות. ידוע כי אם בוחרים 4 תושבים אז ההסתברות

שלפחות אחד מהם יצביע למועמד ב' היא $\frac{65}{81}$.

- א. איזה חלק מהתושבים הצביעו למועמד א'?
בעיר זו יש תושבים מבוגרים וצעירים. ידוע כי $\frac{2}{3}$ מהצעירים הצביעו למועמד א' וכי ההסתברות לבחור מבוגר שהצביע למועמד ב' היא $\frac{2}{15}$.
ב. מהו אחוז התושבים הצעירים שהצביעו למועמד ב'?
ג. איזה אחוז מהווים התושבים הצעירים מבין אלו שהצביעו למועמד א'?
ד. בוחרים באקראי 5 תושבים שהצביעו למועמד א'. מה ההסתברות שרובם יהיו צעירים?

11) כדי להתקבל לחברת היי-טק יש לעבור ראיונות משלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: מהנדס ראשי, אחראי משמרת ומנכ"ל החברה. כל אחד מבעלי התפקידים נותן חוות דעת חיובית או שלילית על המועמד לעבודה. מועמד שמתקבל לחברה חייב לקבל חוות דעת חיובית משלושת בעלי התפקידים.

ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{3}{5}$ מהמועמדים. אחראי

המשמרת קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וב- $\frac{1}{6}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של המהנדס הראשי. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{7}{10}$ נותן חוות דעת זהה לשלו.

- א. 1. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית מאחראי המשמרת?
2. ידוע כי אחראי המשמרת נתן חוות חיובית. מה ההסתברות שהמהנדס הראשי ייתן חוות דעת שלילית?
ב. מה ההסתברות שמועמד יקבל עבודה בחברה?
ג. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת שלילית מהמנכ"ל?

- ד. לאחר היעדר עובדים שינתה החברה את מדיניותה וקבעה כי כדי להתקבל לעבודה יש לעבור לפחות שני ראיונות בהצלחה, אך חוות הדעת של המנכ"ל חייבת להיות חיובית.
- ה. מה ההסתברות כעת לקבל עבודה בחברה?

12 כדי להתקבל לעבודה בחברת משקאות יש לעבור שלושה ראיונות על ידי שלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: אחראי משמרת, מנהל ראשי ומנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. כדי שמועמד יקבל עבודה בחברה עליו לעבור בהצלחה לפחות את אחד מהראיונות עם אחראי המשמרת והמנהל הראשי, אך הראיון עם המנכ"ל חייב לעבור בהצלחה (כדי שמועמד יקבל עבודה המנכ"ל צריך לתת לו חוות דעת חיובית). ידוע כי אחראי המשמרת נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{6}$ מהמועמדים. המנהל הראשי קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{2}{3}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של אחראי המשמרת. מנכ"ל החברה נותן חוות דעת חיובית ל-80% מהמועמדים בלי קשר לחוות הדעת הקודמות.

- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנהל הראשי?
- ב. ידוע כי המנהל הראשי נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם אחראי המשמרת נתן חוות דעת חיובית?
- ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?
- ד. במהלך שעות הקבלה ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים, מה ההסתברות שלפחות אחד מהם קיבל עבודה?

13 כדי להתקבל לעבוד בחברת ההיי-טק Techno יש לעבור שני ראיונות משני בעלי מקצוע, תחילה על ידי המהנדס הראשי ואחריו על ידי מנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית, שלילית או שנמנע מלקבוע. כדי שמועמד יתקבל לחברה עליו לעבור לפחות ראיון אחד עם חוות דעת חיובית. ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{5}$ מהמועמדים ו- $\frac{2}{7}$ מהם הוא משאיר בלי קביעה. המנכ"ל קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וקובע את חוות הדעת שלו בצורה הבאה:

אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית, אז המנכ"ל ייתן גם חוות דעת חיובית ב-60% מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית, אז המנכ"ל נמנע מלקבוע ב-60% מהמקרים ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת חיובית. אם המהנדס נמנע מלקבוע אז המנכ"ל ייתן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. הסיכוי שהמנכ"ל ייתן במקרה זה חוות דעת חיובית גדול פי 3 מהסיכוי שייתן חוות דעת שלילית.

א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנכ"ל?

ב. ידוע כי המנכ"ל נתן חוות דעת חיובית. מה ההסתברות שגם המהנדס נתן חוות דעת חיובית?

- ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?
 ד. ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם קיבלו עבודה באותו היום?

- 14** לכבוד חנוכה קנתה סבתא תקווה לשתי נכדותיה, שני ושרון, סביבונים עם סוכריות בתוכם. בכל סביבון יש 7 סוכריות שוקולד ו-4 סוכריות מנטה. שרון לקחה את סביבון אחד והוציאה ממנו באקראי (בלי החזרה) 4 סוכריות.
- א. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציאה שרון הן סוכריות מנטה?
 ב. שני לקחה 4 סביבונים והוציאה באקראי מכל סביבון סוכרייה אחת. האם ההסתברות ששני תוציא 4 סוכריות מנטה גבוהה יותר או נמוכה יותר מההסתברות שחשבת בסעיף א'? נמק.
 ג. שני הוציאה באקראי סוכרייה אחת מכל סביבון מתוך ארבעת הסביבונים שברשותה. ידוע שבין הסוכריות שבידה יש יותר סוכריות מנטה. מה ההסתברות שכל הסוכריות שיש לשני ביד יהיו בטעם מנטה?

- 15** רפי וציון קנו במכולת חבילות של מסטיק מנטוס צבעוני. ציון קנה 3 חבילות ורפי קנה רק חבילה אחת. בכל חבילה יש 10 סוכריות, חלקן ורודות וחלקן צהובות. רפי מוציא באקראי (בלי החזרה) שתי סוכריות מהחבילה שקנה. ידוע כי ההסתברות ששתיהן תהיינה ורודות קטנה פי 4 מההסתברות להוציא סוכרייה ורודה וסוכרייה צהובה.
- א. כמה סוכריות מכל צבע יש בכל חבילה?
 ב. רפי מחזיר את הסוכריות בחזרה לחבילה ולאחר מכן מוציא באקראי 3 סוכריות נוספות (בלי החזרה).
 ג. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציא רפי הן צהובות?
 ד. ציון מוציא באקראי סוכרייה מכל חבילה. האם ההסתברות של ציון להוציא 3 סוכריות צהובות גבוהה או נמוכה מזו של רפי?
 ה. ציון מוציא מכל חבילה שתי סוכריות. מה ההסתברות שלו להוציא מכל חבילה סוכרייה אחת ורודה ואחת צהובה?

- 16** בחדר יש x גברים ו- $3x$ נשים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי שני אנשים מהחדר בזה אחר זה (בלי החזרה). ידוע כי ההסתברות לבחור שני אנשים

$$\frac{13}{22}.$$

- א. מצא כמה נשים יש בחדר.
 ב. ידוע כי האדם השני שנבחר הוא גבר. מה ההסתברות שגם הראשון שנבחר הוא גבר?
 ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שבדיוק ב-3 פעמים יבחר גבר גם בפעם הראשונה?

ד. ידוע כי מתוך 4 הפעמים שמשחקים את המשחק (ונבחר גבר בפעם השנייה) נבחר גבר גם בפעם הראשונה ברוב המקרים. מה ההסתברות שיבחר גבר בפעם הראשונה ב-3 פעמים בדיוק.

17 בכד יש פי 5 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים מהכד כדור. אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא אדום אז מחזירים אותו לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף מהכד. ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא: $175/612$.

א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד?
ב. ידוע כי הכדור השני שנבחר הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר היה אדום?
ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים. ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

18 בסיטונאות מזון ידוע כי 40% מבין הסכו"ם החד-פעמי הוא תוצרת חו"ל והשאר תוצרת הארץ. 40% מבין הסכו"ם המיובא מחו"ל הם צבעוניים והשאר שקופים.

א. מה ההסתברות לבחור בסיטונאות המזון סכו"ם שקוף המיובא מחו"ל?
ב. 1. בוחרים 5 כלים בחנות באופן אקראי. מה ההסתברות שלכל היותר כלי אחד הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל?
2. מה ההסתברות שבדיוק אחד מחמשת הכלים הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל אם ידוע כי לכל היותר כלי אחד הוא שקוף תוצרת חו"ל?
ג. בוחרים שני כלים באופן אקראי וידוע כי ההסתברות ששניהם שקופים היא 0.4096. איזה חלק מהווים כלי הסכו"ם השקופים מבין כלי הסכו"ם תוצרת הארץ?

19 בכד יש 9 כדורים, חלקם כחולים והשאר לבנים. מוציאים כדור מהכד. אם הוא כחול אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים לבנים ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים כחולים. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. נתון שההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא כחול אם ידוע כי הכדור השני כחול היא $6/11$.

א. מצא כמה כדורים כחולים יש בכד.
ב. חוזרים על התהליך 6 פעמים. מצא את ההסתברות שלפחות פעם אחת יבחרו שני כדורים כחולים בזה אחר זה.
ג. מה ההסתברות שמתוך 6 פעמים שחוזרים על התהליך יבחר בדיוק 3 פעמים כדור כחול בשתי ההוצאות אם ידוע כי לפחות פעם אחת (מתוך ה-6) נבחרו שני כדורים בזה אחר זה?

- 20** בחדר x גברים ו- $x+2$ נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת. אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר x גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר x נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.
- מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא $\frac{21}{33}$.
 - מה ההסתברות שתצא אישה מהחדר לאחר שנוספו לחדר נשים אם ידוע כי וודאי יצאה אישה מהחדר?
 - אנשי החדר לובשים חולצות אדומות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות אדומות. כמו כן ההסתברות של הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות אדומות היא 0.25.
 - מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה אדומה בחדר.
 - בוחרים 5 אנשים מהחדר (בלי הוצאה) וידוע כי כולם לובשים חולצות אדומות. מה ההסתברות שרובם נשים? מה ההסתברות שכל הנשים לובשות חולצות אדומות אם ידוע כי רוב הנשים לובשות חולצות אדומות?

- 21** בקלמר יש 6 עפרונות ו-3 עטים. בתיק יש 9 כלי כתיבה - x עפרונות והשאר עטים. מוציאים באקראי כלי כתיבה מהקלמר ומכניסים אותו לתיק. לאחר מכן מוציאים מהתיק כלי כתיבה נוסף.
- מצא כמה עפרונות יש בתיק אם ידוע כי ההסתברות שכלי הכתיבה שהוצא מהקלמר שונה מכלי הכתיבה שהוצא מהתיק היא $\frac{13}{30}$.
 - מחזירים את המצב לקדמותו ומבצעים את הפעולה הבאה: מוציאים באקראי כלי כתיבה מהקלמר, מתבוננים בו ומחזירים אותו חזרה. אם יצא עט אז לוקחים y עטים מהתיק ושמים בקלמר, ואם יצא עפרון אז לוקחים 3 עפרונות מהקלמר ושמים אותם בתיק. לאחר מכן מוציאים שני כלי כתיבה מהתיק בזה אחר זה. מצא את y אם ידוע כי ההסתברות לקבל שני עפרונות היא: $\frac{50}{99}$.

- 22** נתון שק עם 16 כדורים בתוכו המחולקים לשני צבעים: אדום וכחול. מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. ידוע כי ההסתברות לקבל שני כדורים בצבעים שונים גדולה ב- $\frac{1}{32}$ מההסתברות לקבל שני כדורים בצבעים שונים אילו ההוצאה הייתה עם החזרה.
- מצא כמה כדורים מכל צבע יש בשק אם ידוע כי יש יותר כדורים כחולים.
 - שני ושרון משחקות את המשחק הבא: תחילה הן מחזירות את כל הכדורים לשק. שני מוציאה 3 כדורים בזה אחר זה ללא החזרה מהשק, מתבוננת בהם ומחזירה חזרה. שרון מוציאה 3 כדורים עם החזרה בזה אחר זה ומתבוננת בהם. כל אחת מהבנות טוענת כי שיטתה היא זו שתיתן הסתברות גבוהה יותר להוציא 3 כדורים מאותו הצבע. מי מהבנות צודקת?

- ג. שי, אחיהן הגדול של הבנות, הכניס מספר כדורים אדומים לשק. מוציאים 4 כדורים עם החזרה מהשק.
 ידוע כי ההסתברות לקבל 3 כדורים כחולים וכדור אדום אחד, זהה להסתברות לקבל 3 כדורים אדומים וכדור אחד כחול.
 כמה כדורים אדומים הכניס שי לשק?

(23) בבית ספר מסוים 52% מהתלמידים הם בנים והשאר בנות. ידוע כי ההסתברות להיתקל בתלמיד (או תלמידה) המרכיב משקפיים גדולה ב-0.14 מההסתברות להיתקל בשתי בנות שאינן מרכיבות משקפיים ברחבי בית הספר (מניחים כי מספר התלמידים בבית הספר הוא גדול).

- א. מצא את אחוז התלמידים שמרכיבים משקפיים אם ידוע כי החלק היחסי של הבנים שמרכיבים משקפיים בבית הספר מכלל מרכיבי המשקפיים הוא $\frac{11}{15}$.
- ב. איזה חלק מבין כלל התלמידים שאינם מרכיבים משקפיים מהווים קבוצת הבנים?
- ג. בוחרים בבית הספר 4 תלמידים. ידוע כי כולם לא מריבים משקפים. מה ההסתברות שרובם בנים?

(24) בכד כדורים בשלושה צבעים שונים: כחול, צהוב וירוק. ידוע כי מספר הכדורים הירוקים גדול ב-2 ממספר הכדורים הצהובים וכי מספר הכחולים גדול ב-2 ממספר הכדורים הירוקים.
 מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. ההסתברות להוציא שני

$$\text{כדורים באותו הצבע היא: } \frac{49}{153}.$$

- א. מצא כמה כדורים מכל צבע יש בכד.
- ב. על 5 הכדורים רשום מספר ועל שאר הכדורים רשומה אות. ידוע כי ההסתברות לבחור כדור צהוב עם מספר זהה להסתברות לבחור כדור כחול עם מספר וכי הסתברויות אלו קטנות פי 3 (כל אחת) מההסתברות לבחור כדור ירוק שרשומה עליו אות. חשב את ההסתברות לבחור כדור כחול שרשומה עליו אות.
- ג. מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. ידוע כי שני הכדורים כחולים. מה ההסתברות שלפחות על אחד מהם רשומה אות?

(25) אבי קנה תפוחים ותפוזים. ידוע כי כמות התפוחים שקנה גדולה פי 3 מכמות התפוזים. במקביל קנתה אודט, בת זוגתו של אבי, תפוחים ותפוזים. אודט קנתה פי 3 יותר תפוזים מתפוחים. כשהגיעו השניים הביתה, הם שמו את כל הפירות שקנו במגירה במקרר, מעורבבים יחדיו. ידוע כי בסה"כ קנו שני בני הזוג 32 פירות וכי כמות התפוחים שקנתה אודט מהווה $\frac{5}{14}$ מבין כל התפוחים שבמגירה.

- א. מצא כמה פירות קנה כל אחד מבני הזוג.
- ב. 1. אודט רוצה להכין סלט פירות המורכב משני תפוחים ותפוז.
מה ההסתברות של אודט להוציא את כל הפירות שצריכה בזה אחר זה ללא החזרה?
2. ידוע כי אודט הוציאה את כל הפירות שצריכה, מה ההסתברות שהפרי הראשון שהוציאה הוא תפוח?
- ג. 1. שרון, בתה של אודט, ניגשת למגירה ורוצה לקחת תפוז.
היא מוציאה 4 פירות עם החזרה מהמגירה, מה ההסתברות ששרון תוציא בדיוק תפוז אחד? הנח כי כמות הפירות שבמגירה היא לאחר הכנת הסלט.
2. ידוע כי מתוך 4 הבחירות, הוציאה שרון בדיוק תפוז אחד, מה ההסתברות שהוא הפרי האחרון שהוציאה?

26 על קובייה בת 5 פאות רושמים המספרים 1, 2 ו-3 כך שהמספר 2 רשום על שלוש פאות ואילו המספרים 1 ו-3 רשומים כל אחד על פאה אחת בלבד. זורקים את הקובייה 5 פעמים.

- א. ענה על השאלות הבאות:
1. מה ההסתברות לקבל לפחות 4 פעמים את המספר 2?
2. ידוע כי התקבל המספר 2 לפחות 4 פעמים, מה ההסתברות לקבל בדיוק 4 פעמים את המספר 2?
3. מה ההסתברות לא לקבל את אותו המספר בכל הזריקות?
- ב. לוקחים 5 קוביות זהות וזורקים כל אחת פעם אחת בדיוק. מסתכלים על המספרים שהתקבלו בכל קובייה ומחשבים את ההסתברויות שבסעיף הקודם. האם התוצאות תשתנה? אם כן חשב אותן והסבר. אם לא – הסבר.
- ג. מה ההסתברות לקבל בזריקות הראשונה והחמישית את המספר 2?

27 מפעל מייצר שבבי תקשורת אלחוטית. 3% מהשבבים במפעל אינם תקינים. 90% מהשבבים התקינים ו-2% מהשבבים הפגומים מזוהים במהלך בדיקה שגריתית (טסט) במעבדה כתקינים.

- א. מה ההסתברות ששבב יזוהה כתקין?
- במסגרת הבדיקות במעבדה מבצעים 4 טסטים לכל שבב באופן בלתי תלוי אחד בשני. אם שבב זוהה בכל הפעמים כתקין, אז הוא נמכר במחיר מלא. אם הוא זוהה ב-3 טסטים כתקין אז הוא נמכר בחצי מחיר. בכל מקרה אחר השבב נשלח חזרה למחלקת הייצור במפעל ואינו נמכר.
- ב. מה ההסתברות ששבב יימכר במחיר מלא?
- ג. מה ההסתברות ששבב יחזור חזרה למפעל?

28 בכד יש פי 4 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים כדור מהכד. אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוץ, אחרת מחזירים אותו לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף.

ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא: $\frac{58}{175}$.

- א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד?
 ב. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר הוא אדום?
 ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים באופן בלתי תלוי. ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

(29) בחדר x גברים ו- $x+5$ נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת. אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר x גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר x נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

- א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא $\frac{5}{7}$.
 ב. מה ההסתברות שתצא אישה מהחדר לאחר שנוספו לחדר נשים אם ידוע כי וודאי יצאה אישה מהחדר?

אנשי החדר לובשים חולצות שחורות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות שחורות. כמו כן ההסתברות של הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות שחורות היא 0.25.

- ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה שחורה בחדר.
 ד. בוחרים 5 אנשים מהחדר (ללא הוצאה) וידוע כי כולם לובשים חולצות שחורות. מה ההסתברות שרובם נשים?

(30) ללינוי שתי חבילות דפים, האחת בצבע כחול והשנייה בצבע כתום. בסה"כ יש ללינוי פי 3 דפים כחולים מכתומים. ביום חורפי אחד הלכה לחברתה, ספיר, כששתי החבילות בידה ובדרך נרטבו חלק מהדפים עקב הגשמים העזים. כשהגיעה לביתה של ספיר, מיינו השתיים את החבילות וגילו את הדברים הבאים:

- (1) $\frac{1}{5}$ מבין הדפים הכתומים התרטבו.
 (2) כמות הדפים הכתומים היבשים שווה לכמות הדפים הרטובים הכוללת.
 א. מה ההסתברות לבחור דף כחול רטוב מבין כל הדפים?
 ב. איזה אחוז מהדפים הכחולים הם יבשים?
 ג. ספיר הוציאה באופן אקראי 6 דפים מהתיק של לינוי ללא הסתכלות. הנח כי כמות הדפים גדולה מאוד.
 1. מה הסיכוי שספיר תוציא לפחות דף אחד יבש?
 2. מה הסיכוי שספיר תוציא לפחות דף אחד כחול יבש?

- 31** כדי לקבל עבודה בחברת מחשבים יש לעבור שני ראיונות באופן הבא :
 ראיון ראשון עם המהנדס הראשי של החברה. אם המועמד עבר את הראיון הראשון בהצלחה אז עליו לעבור ראיון נוסף עם מנכ"ל החברה.
 ידוע כי ההסתברות לעבור את הראיון הראשון היא P וכי ההסתברות לעבור את הראיון השני קטנה ב-0.1 מההסתברות לעבור את הראיון הראשון. הסיכוי להתקבל לחברה הוא 0.12 (לעבור בהצלחה את שני הראיונות).
 א. מצא את P .
 ב. 6 אנשים מגישים מועמדות ביום מסוים.
 מה הסיכוי שרובם יתקבלו לעבודה בחברה ?
 ג. ידוע כי רוב המועמדים התקבלו. מה הסיכוי כי בדיוק 4 מועמדים התקבלו?

- 32** מפעל מייצר נורות בשלושה פסי ייצור : A , B ו- C .
 ידוע כי 25% מהנורות מיוצרות בפס ייצור A . כמו כן נתון כי :
 3% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור A הן פגומות.
 2% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור B הן פגומות.
 5% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור C הן פגומות.
 סה"כ המפעל מייצא בממוצע 900 נורות תקינות מתוך כל 1000 נורות שהוא מייצר.
 א. מצא את אחוז הנורות המיוצרות בפסי הייצור B ו- C .
 ב. בוחרים באקראי נורה, ידוע כי היא תקינה, מה ההסתברות שהיא מפס ייצור C ?
 ג. כמה נורות מייצר המפעל ביום עבודה אם ידוע כי כמות הנורות התקינות שהתקבלו בפס ייצור B הוא 5600 יחידות?

- 33** בכד יש 4 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים ו-2 כדורים לבנים. מוצאים באקראי כדור מהכד. אם הוא אדום אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים מכד כדור נוסף, אך אם הוא לא אדום מחזירים אותו לכד ומוציאים כדור נוסף.
 א. חשב את ההסתברות להוציא שני כדורים בעלי אותו הצבע.
 ב. מוציאים שני כדורים מהכד, ידוע כי שניהם מאותו הצבע, מה ההסתברות ששניהם כחולים?
 ג. כעת משנים את כללי במשחק בצורה הבאה :
 מוציאים כדור מהכד, מתבוננים בו ומחזירים אותו בחזרה לכד. חוזרים על התהליך 6 פעמים. מה ההסתברות שבמחצית המקרים יצא כדור לבן?

- 34** מפעל מייצר כפיות ומזלגות פלסטיק (חד-פעמיים). ההסתברות לבחור מזלג במפעל היא P . בוחרים באקראי 4 כלים.
 א. מצא את P אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו 3 מזלגות קטנה פי 4 מההסתברות שייבחר מזלג אחד מתוך הארבעה.
 המפעל מייצר כפיות ומזלגות בשני צבעים – שחור או לבן.
 ידוע כי רבע מהמזלגות הם בצבע לבן ו- $\frac{2}{3}$ מהכפיות הם בצבע שחור.

- ב. מה היא ההסתברות לבחור כלי שחור?
 ג. ידוע כי נבחר כלי שחור, מה ההסתברות שהוא מזלג?

35 תלמיד הלומד נהיגה ניגש לטסט ראשון. ידוע כי ההסתברות שיעבור את הטסט היא P . אם התלמיד נכשל בטסט הראשון הוא ניגש שנית וכעת ההסתברות שלו לעבור גדולה ב-0.1. אם הוא נכשל פעם נוספת אז הוא ניגש בפעם האחרונה כאשר גם כעת ההסתברות שלו לעבור גדולה ב-0.1 מהפעם הקודמת. ידוע כי הסיכוי של התלמיד לעבור את הטסט השני הוא 0.28.

- א. מצא את P .
 ב. מה הסיכוי של התלמיד לעבור טסט כלשהו?
 ג. ידוע כי התלמיד עבר טסט, מה הסיכוי שהוא עבר את הטסט השלישי?

36 לשני קוביית משחק הגונה בעלת 6 פאות הממוספרות מ-1 עד 6 ולשרון סביבון חנוכה הגון בעל 4 פאות הממוספרות מ-1 עד 4. הבנות משחקות את המשחק הבא: שני מטילה את הקובייה ושרון מסובבת את הסביבון.

- אם הקובייה מראה מספר הגדול מ-3 והסביבון מראה מספר הגדול מ-2 אז כל אחד מהבנות מקבלת נקודה.
 - אם הקובייה מראה מספר הקטן או שווה ל-3 והסביבון מראה מספר הגדול מ-2 אז שרון מקבלת נקודה.
 - אם הקובייה מראה מספר הגדול מ-3 אך הסביבון מראה מספר הקטן או שווה ל-2 אז שני מקבלת נקודה.
 - אם הקובייה מראה מספר הקטן או שווה ל-3 והסביבון מראה מספר הקטן או שווה ל-2 אז אף אחת מהבנות לא מקבלת נקודה. הבנות מטילות את הקובייה והסביבון פעמיים.
- א. מה ההסתברות שלשני יהיו יותר נקודות?
 ב. ידוע כי שני צברה יותר נקודות, מה ההסתברות שבהטלה הראשונה לא קיבלה שני נקודה?
 ג. האם התוצאות של הסעיפים הקודמים ישתנו אם שני תשחק עם הסביבון במקום הקובייה ושרון תשחק עם הקובייה במקום הסביבון? נמק.

37 חנות מוכרת חרוזים בשלושה צבעים בלבד: כסף, זהב ולבן. נטלי קנתה חרוזים מכל צבע. ידוע כי כמות החרוזים הכסופים קטנה פי 3 מכמות החרוזים הזהובים וכי כמות החרוזים הזהובים קטנה פי 3 מכמות החרוזים הלבנים. המוכרת ריכזה עבור נטלי את כל החרוזים בשקית אחת.

- א. מצא כמה חרוזים קנתה נטלי מכל סוג אם ידוע כי ההסתברות להוציא מהשקית שני חרוזים בצבעים שונים בזה אחר זה ללא החזרה היא: $\frac{360}{779}$.
- ב. החרוזים מיוצרים ע"י שתי חברות: ניצוץ וקריסטל. ידוע כי כמות החרוזים הכסופים תוצרת ניצוץ וכמות החרוזים הזהובים תוצרת ניצוץ זהות. כמו כן כמות החרוזים הזהובים תוצרת קריסטל גדולה פי 5 מכמות החרוזים הזהובים תוצרת ניצוץ. מצא את ההסתברות לבחור חרוז בצבע כסף מתוצרת קריסטל.

ג. בוחרים 4 חרוזים, ידוע כי כולם תוצרת ניצוץ. ההסתברות שבדיוק 2 מהם יהיו כסופים היא: $\frac{27}{128}$. מצא את ההסתברות לבחור חרוז תוצרת קריסטל אם ידוע כי חרוזי הכסף תוצרת ניצוץ אינם מהווים רוב מכמות כל חרוזי ניצוץ שברשותה של נטלי.

(38) בבחירות מקומיות בעיר מסוימת ישנם שלושה מתמודדים - מתמודד א',

מתמודד ב' ומתמודד ג'. ידוע כי $\frac{43}{90}$ מתושבי העיר הם מבוגרים ו- $\frac{47}{90}$

הם צעירים.

60% מבין המצביעים למועמד א' הם מבוגרים, 60% מבין המצביעים למועמד ב' הם צעירים וידוע כי ההסתברות למצוא בעיר תושב צעיר שהצביע למועמד ג'

היא $\frac{1}{9} \cdot \frac{24}{43}$. מהמבוגרים הצביעו למועמד א'.

א. מי מהמתמודדים קיבל את רוב הקולות?

ב. בוחרים באקראי תושב מהעיר.

חשב את ההסתברויות שנבחר צעיר המצביע למתמודד ב'.

ג. בוחרים באקראי תושב. ידוע כי הוא הצביע למתמודד ג'.

מה ההסתברות כי הוא צעיר?

ד. בוחרים באקראי 4 תושבים וידוע כי כולם הצביעו למתמודד ג'.

מה ההסתברות כי לפחות אחד מהם מבוגר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $P=0.7$ ב. $P=\frac{189}{2500}$ ג. $\frac{1}{7}$ ד. $P=\frac{405}{1024}$
- (2) א. $P=0.1$ ב. $P=0.0486$ ג. $\frac{15}{19}$ ד. $P=0.69331$
- (3) א. 30% ב. $P=0.4$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $P=\frac{32}{81}$
- (4) א. $P=\frac{5}{6}$ ב. $P=\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $P=0.4096$
- (5) א. $P=0.8$ ב. $P=0.6$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $P=\frac{279}{343}$
- (6) א. $P=0.4$ ב. 57% ג. $\frac{4}{7}$ ד. $\frac{144}{343}$
- (7) א. 25% ב. מועמד א' ג. $\frac{10}{11}$ ד. $P=0.2732$
- (8) א. 45% ב. 20% ג. $\frac{1}{11}$ ד. $P=0.2732$
- (9) א. $P=0.8$ ב. $P=0.44$ ג. $P=0.36427$ ד. $P=0.31744$
- (10) א. $\frac{2}{3}$ ב. 20% ג. 60% ד. $P=0.68256$
- (11) א. 1. $\frac{17}{30}$ 2. $\frac{2}{17}$ ב. $\frac{7}{20}$ ג. $\frac{71}{150}$ ד. $\frac{32}{75}$
- (12) א. $\frac{11}{18}$ ב. $\frac{1}{11}$ ג. $\frac{26}{45}$ ד. $P=0.98658$
- (13) א. $\frac{27}{50}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{31}{50}$ ד. $P=0.34414$
- (14) א. $\frac{1}{330}$ ב. גבוהה יותר $\left(\frac{256}{14641} > \frac{1}{330}\right)$ ג. $\frac{1}{8}$
- (15) א. 4 ורודות ו-6 צהובות. ב. $\frac{1}{6}$ ג. גבוהה $\left(\frac{27}{125} > \frac{1}{6}\right)$ ד. $P=0.0189$
- (16) א. 9 נשים. ב. $\frac{2}{11}$ ג. 0.0196 ד. $\frac{18}{19}$
- (17) א. 15 כחולים ו-3 אדומים. ב. $\frac{17}{101}$ ג. 0.03645
- (18) א. 0.24 ב. 1. 0.65389 2. $\frac{30}{49} \sim 0.61224$ ג. $\frac{2}{3}$
- (19) א. 6 כדורים כחולים. ב. 0.88989 ג. 0.21723
- (20) א. 5 נשים. ב. $\frac{16}{21}$ ג. 0.05 ד. 1. $\frac{459}{512}$ 2. $\frac{9}{34}$
- (21) א. 5 עפרונות. ב. $y=3$
- (22) א. 10 כדורים כחולים ו-6 אדומים. ב. שרון צודקת. ג. 4 כדורים.
- (23) א. 30% ב. $\frac{3}{7}$ ג. $\frac{513}{2401} = 0.21366$

- (24) א. 4 כדורים צהובים, 6 כדורים ירוקים ו-8 כדורים כחולים. ב. $\frac{7}{18}$ ג. $\frac{28}{153}$
- (25) א. אבי קנה 12 פירות ואודט קנתה 20 פירות. ב. 1. $\frac{819}{2480}$ 2. $\frac{2}{3}$ ג. 0.16613 2. $\frac{1}{4}$
- (26) א. 1. 0.33696 2. $\frac{10}{13}$ 3. $\frac{576}{625}$ ב. לא. ג. 0.15552
- (27) א. 0.8736 ב. 0.58244 ג. 0.08047
- (28) א. 3 כדורים אדומים ו-12 כחולים. ב. $\frac{14}{69}$ ג. 0.05982
- (29) א. 8 נשים. ב. $\frac{11}{15}$ ג. 0.05 ד. $\frac{675}{1024}$
- (30) א. 0.15 ב. 75% ג. 1. 0.999936 2. 0.995904
- (31) א. $P=0.4$ ב. 0.00254 ג. $\frac{55}{58}$
- (32) א. פס ייצור B – 30% פס ייצור C – 45% ב. $\frac{4}{9}$ ג. 20,000 יחידות ליום.
- (33) א. $\frac{53}{162}$ ב. $\frac{18}{53}$ ג. 0.103266
- (34) א. $P=\frac{1}{3}$ ב. $\frac{25}{36}$ ג. 0.36
- (35) א. $P=0.6$ ב. 0.976 ג. $\frac{6}{61}$
- (36) א. $\frac{5}{16}$ ב. 0.2 ג. לא. מכיוון שיש סימטריה בהסתברויות ההטלות.
- (37) א. 60 בצבע כסף, 180 בצבע זהב ו-540 בצבע לבן. ב. $\frac{1}{26}$ ג. $\frac{11}{13}$
- (38) א. מתמודד אי. ב. 0.2 ג. 0.5 ד. $\frac{15}{16}$

תרגול מבגרויות:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

- (1) $\frac{3}{4}$ מהתלמידים בכיתה אוהבים שוקולד או גלידה (כולל תלמידים האוהבים שוקולד וגם גלידה). 9 תלמידים לא אוהבים שוקולד וגם לא אוהבים גלידה.
1. בוחרים באקראי תלמיד אחד מהכיתה.
א. מהי ההסתברות שהוא לא אוהב שוקולד וגם לא אוהב גלידה?
2. מצא כמה תלמידים יש בכיתה.
 - ב. כל תלמיד בכיתה שאוהב שוקולד כתב על פתק: אוהב, וכל תלמיד שלא אוהב שוקולד כתב על פתק: לא אוהב. ערבבו את כל הפתקים ובחרו מביניהם באקראי 5 פתקים עם החזרה. נתון כי ההסתברות שעל 3 מהם כתוב "אוהב" שווה להסתברות שעל 2 מהם כתוב "אוהב".
מצא כמה תלמידים בכיתה אוהבים שוקולד.
- (2) בבית ספר מסוים 60% מכלל המורים (גברים ונשים) מתנגדים ללעיסת מסטיק בשיעור. מספר המורים (גברים) בבית הספר גדול פי 4 ממספר המורות (נשים). 0.57 מכלל המורים (גברים ונשים) הם גברים המתנגדים ללעיסת מסטיק. בוחרים באקראי מורה (גבר או אישה).
- א. חשב את ההסתברות שהמורה שנבחר הוא אישה המתנגדת ללעיסת מסטיק.
 - ב. ידוע שהמורה שנבחר הוא אישה.
 1. חשב את ההסתברות שהיא מתנגדת ללעיסת מסטיק.
 2. מבין 5 מורות בבית הספר, מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מורות מתנגדות ללעיסת מסטיק?
(בתשובתך דייק עד 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
- (3) בתוך שק נמצאים 3 קלפים. לאחד הקלפים יש שני צדדים לבנים, לאחד הקלפים יש שני צדדים שחורים, ולאחד הקלפים יש צד אחד לבן וצד אחד שחור. מערבבים את הקלפים, ובעיניים עצומות מוציאים קלף מהשק ומניחים אותו על השולחן.
- א. מהי ההסתברות ששני צדי הקלף יהיו זהים?
 - ב. מהי ההסתברות שהצד הגלוי לעין של הקלף יהיה לבן? נמק.
 - ג. ידוע שהצד הגלוי לעין של הקלף הוא לבן.
מהי ההסתברות ששני צדי הקלף הם לבנים?

4) במכללה מסוימת הסטודנטים למחשבים נבחנו בסוף השנה במבחן בהסתברות וסטטיסטיקה. במבחן יש שני תרגילים בהסתברות ותרגיל אחד בסטטיסטיקה. נבחן מקבל ציון עובר או ציון נכשל בכל תרגיל במבחן. כדי לקבל ציון עובר במבחן כולו על הנבחן לקבל ציון עובר בשני תרגילים לפחות מבין שלושה. הסיכוי שסטודנט יקבל ציון עובר בתרגיל בהסתברות הוא 60%, והסיכוי שסטודנט יקבל ציון עובר בסטטיסטיקה הוא 80%. ההסתברויות לקבל ציון עובר או נכשל בתרגילים השונים אינן תלויות זו בזו.

- א. 1. מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר בשלושת התרגילים במבחן?
2. מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר בשני תרגילים במבחן וציון נכשל בתרגיל אחד?
3. מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר במבחן כולו?
- ב. נבחן קיבל ציון עובר במבחן כולו. מהי ההסתברות שהוא קיבל ציון עובר בשני התרגילים בהסתברות?

5) יוסי משחק שלושה משחקי שש-בש בזה אחר זה. בכל משחק הוא יכול לנצח או להפסיד (אין תיקו). אם יוסי ניצח באחד המשחקים, ההסתברות שהוא ינצח במשחק שאחריו היא p , ואם הוא הפסיד באחד המשחקים, ההסתברות שהוא יפסיד במשחק שאחריו גם היא p , נתון כי: $p > 0.5$.

- א. אם ידוע כי יוסי ניצח במשחק הראשון:
 1. הבע באמצעות p , את ההסתברות שיוסי יפסיד במשחק השני וינצח במשחק השלישי.
 2. חשב את p אם נתון כי ההסתברות שיוסי ינצח במשחק השלישי היא $\frac{13}{25}$.
- ב. השתמש שחישבת, וחשב את ההסתברות שיוסי ינצח במשחק הראשון, אם נתון כי ההסתברות שיוסי ינצח בשלושת המשחקים היא 0.144.

6) במלאי של סוחר יש כובעים המיוצרים בשלושה מפעלים: מפעל A, מפעל B, מפעל C. מלאי הכובעים הוא גדול מאוד.

$\frac{1}{2}$ מהכובעים במלאי מיוצרים במפעל A.

$\frac{1}{3}$ מהכובעים במלאי מיוצרים במפעל B.

שאר הכובעים במלאי מיוצרים במפעל C.

5% מהכובעים המיוצרים במפעל A הם פגומים.

1.5% מהכובעים המיוצרים במפעל B הם פגומים.

3.5% מהכובעים במלאי הם פגומים.

- א. בוחרים באקראי כובע אחד מבין הכובעים המיוצרים במפעל C. מהי ההסתברות שהכובע פגום?
- ב. מהי ההסתברות שבמדגם מקרי של 6 כובעים המיוצרים במפעל C יש לכל היותר כובע אחד פגום?

- (7) מטילים שתי קוביות משחק מאוזנות: קובייה A וקובייה B.
- א. מהי ההסתברות שבקובייה A יתקבל מספר 4 או מספר 6 וגם בקובייה B יתקבל מספר 4 או מספר 6?
- ב. מהי ההסתברות שלפחות באחת מהקוביות יתקבל מספר 4 או מספר 6?
- ג. מטילים שש פעמים את שתי הקוביות A ו-B. מהי ההסתברות שבדיוק בשלוש הטלות יתקבל מספר 4 או מספר 6 לפחות באחת מהקוביות?

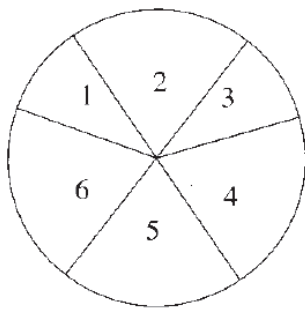
- (8) מטילים פעם אחת קוביית משחק מאוזנת.
- א. 1. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ-3?
2. האם המאורע "יתקבל מספר זוגי" והמאורע "יתקבל מספר גדול מ-3" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

- מטילים קוביית משחק מאוזנת 3 פעמים.
- ב. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ-3 בדיוק בשתי הטלות?
- ג. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ-3 רק בהטלה הראשונה ובהטלה השלישית?
- ד. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ-3 בהטלה הראשונה ובהטלה השלישית?

- (9) מפעל מייצר מחשבים. 6% מהמחשבים המיוצרים במפעל הם לא תקינים. 95% מהמחשבים התקינים ו-2% מהמחשבים הלא-תקינים מזוהים על ידי היחידה לבקרת איכות כתקינים.
- א. מהי ההסתברות שמחשב יזוהה כתקין?
- ב. היחידה לבקרת איכות בודקת כל מחשב 4 פעמים. (הבדיקות אינן תלויות זו בזו). אם המחשב זוהה 4 פעמים כתקין, הוא נמכר עם התווית של המפעל. אם המחשב זוהה 3 פעמים כתקין, הוא נמכר במחיר נמוך בלי התווית של המפעל. אם המחשב זוהה לפחות 2 פעמים כלא-תקין, הוא נשלח למחזור. מהי ההסתברות שמחשב יימכר עם התווית של המפעל?
- ג. מהי ההסתברות שמחשב יישלח למחזור? בתשובתך דייק עד ארבע ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

10 במפעל לייצור נורות ניאון יש שלוש מכונות: A, B, C.
 מכונה A מייצרת 60% מהנורות. מכונה B מייצרת 30% מהנורות. מכונה C מייצרת 10% מהנורות. 2% מהנורות שמייצרת מכונה A הן פגומות. 3% מהנורות שמייצרת מכונה B הן פגומות. 4% מהנורות שמייצרת מכונה C הן פגומות.

- א. 1. מצא את אחוז הנורות הפגומות במפעל.
 2. בוחרים באקראי נורה אחת מבין הנורות הפגומות.
 מהי ההסתברות שהנורה שנבחרה יוצרה על ידי מכונה C?
 ב. בוחרים באקראי 5 נורות מבין הנורות המיוצרות במפעל.
 מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מהן יהיו תקינות?



11 גלגל משחק מאוזן מחולק לשש גזרות. על 2 גזרות שכל אחת היא $\frac{1}{10}$ מהעיגול, רשומים המספרים 1 ו-3, ועל 4 גזרות שכל אחת היא $\frac{1}{5}$ מהעיגול, רשומים המספרים 2, 4, 5, 6 כמתואר בציור. כאשר מסובבים את הגלגל הוא נעצר על אחד המספרים (לא על הקו שבין הגזרות).

- א. מסובבים את הגלגל פעם אחת.
 מהי ההסתברות שהגלגל ייעצר על מספר זוגי?

מסובבים את הגלגל 5 פעמים.

- ב. 1. מהי ההסתברות שהגלגל ייעצר על מספר זוגי 2 פעמים לכל היותר?
 2. ידוע שהגלגל נעצר על מספר זוגי 2 פעמים לכל היותר.
 מהי ההסתברות שהגלגל נעצר על מספר זוגי בדיוק 2 פעמים?
 ג. מהי ההסתברות שרק בפעם הראשונה ובפעם האחרונה ייעצר הגלגל על מספר זוגי?

12 בשלוש קופסאות A, B, ו-C יש כדורים שחורים ולבנים.

- בקופסה A יש 2 כדורים שחורים ו-3 כדורים לבנים.
 בקופסה B יש 3 כדורים שחורים ו-2 כדורים לבנים.
 בקופסה C יש 4 כדורים שחורים ו-1 כדור לבן.
 א. בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה באקראי כדור אחד.
 1. מהי ההסתברות להוציא כדור לבן?
 2. ידוע שהוצא כדור לבן. מהי ההסתברות שהכדור הוצא מקופסה B?
 ב. מקופסה C מוציאים באקראי 2 כדורים זה אחר זה בלי החזרה.
 מהי ההסתברות שאחרי הוצאת הכדורים לא נותר בקופסה C כדור לבן?

- 13** חקלאי מייצא פרחים לבנים ופרחים אדומים. במחסן של החקלאי:
- $\frac{1}{12}$ מהפרחים הלבנים הם ורדים. $\frac{2}{3}$ מהפרחים האדומים הם ורדים.
 25% מכלל הפרחים הם ורדים, והשאר הם חבצלות.
- א. בוחרים באקראי פרח מבין הפרחים שבמחסן.
 1. מהי ההסתברות שהפרח הוא אדום?
 2. מהי ההסתברות שהפרח הוא אדום אם ידוע שהוא ורד?
 ב. נתון שמספר הוורדים האדומים במחסן הוא 300.
 מהו מספר הפרחים במחסן?

- 14** ידוע שההסתברות להצליח במבחן נהיגה (טסט) גדולה ב-0.2 מההסתברות להיכשל בו.
- א. מהי ההסתברות להצליח במבחן הנהיגה?
 ב. ראובן, שמעון לוי ויהודה הם 4 אנשים שנבחרו באקראי מבין הנבחנים במבחן הנהיגה.
 1. מהי ההסתברות שבדיוק 2 מהם יצליחו במבחן הנהיגה?
 2. ידוע שרק 2 מהם הצליחו במבחן הנהיגה.
 מהי ההסתברות שהיו אלה ראובן ושמעון?
 3. האם ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה יצליח במבחן הנהיגה גדולה מההסתברות שלפחות אחד מהארבעה ייכשל במבחן הנהיגה? נמק.

תשובות סופיות:

- (1) א. 1. 0.25 2. 36 ב. 18.
- (2) א. 0.03 ב. 1. 0.15 2. 0.9999 3. א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{3}$.
- (4) א. 1. 0.288 2. 0.456 3. 0.744 ב. $\frac{15}{31}$.
- (5) א. 1. $(1-p)^2$ 2. $p=0.6$ ב. 0.4.
- (6) א. 0.03 ב. 0.9875 7. א. $\frac{1}{9}$ ב. $\frac{5}{9}$ ג. 0.301.
- (8) א. 1. $\frac{1}{3}$ 2. לא, המאורעות תלויים. ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{2}{27}$ ד. $\frac{1}{9}$.
- (9) א. 0.8942 ב. 0.6393 ג. 0.0581.
- (10) א. 1. 2.5% 2. 0.16 ב. 0.0059.
- (11) א. 0.6 ב. 1. 0.31744 2. 0.7248 ג. 0.02304.
- (12) א. 1. $\frac{2}{5}$ 2. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{2}{5}$ 13. א. 1. $\frac{2}{7}$ 2. $\frac{16}{21}$ ב. 1575 פרחים.
- (14) א. 0.6 ב. 1. $\frac{216}{625}$ 2. $\frac{1}{6}$ 3. כן. $(0.9744 > 0.8704)$.

תוכן העניינים – גיאומטריה:

167	פרק 6 - גיאומטריה אוקלידית – ישרים, זוויות ומשולשים:
167	ישרים וזוויות:
167	שאלות – חיבור וחיסור קטעים:
167	שאלות – חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:
168	שאלות – זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:
169	שאלות - זוויות בין ישרים מקבילים:
171	משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות:
172	שאלות – זוויות במשולשים:
175	שאלות – משולש שווה שוקיים:
176	חפיפת משולשים:
176	שאלות – חפיפת משולשים:
181	זווית חיצונית במשולש:
181	שאלות – זווית חיצונית במשולש:
181	משולש ישר זווית:
182	שאלות – משולש ישר זווית:
183	קטעים מיוחדים במשולש:
183	שאלות – קטע אמצעים במשולש:
185	שאלות – מפגש תיכונים במשולש:
186	תשובות סופיות – משולשים:
188	פרק 7 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים:
188	מרובע כללי:
188	שאלות יסודיות:
189	מקבילית:
189	שאלות – תכונות המקבילית:
191	שאלות – הוכחת מקבילית:
193	מלבן:
193	שאלות – תכונות המלבן:
194	שאלות – הוכחת מלבן:
195	מעוין:
195	שאלות – תכונות המעוין:
196	שאלות – הוכחת מעוין:
197	ריבוע:
198	שאלות – תכונות הריבוע:
198	שאלות – הוכחת ריבוע:

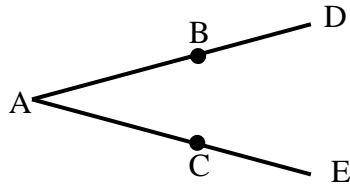
199	טרפז כללי:
200	שאלות – תכונות הטרפז הכללי:
200	שאלות – הוכחת טרפז כללי:
201	שאלות – תכונות טרפז שווה שוקיים וישר זווית:
202	שאלות – הוכחת טרפז שווה-שוקיים וישר זווית:
202	שאלות – קטע אמצעים בטרפז:
204	דלתון:
204	שאלות – דלתון:
205	סיכום משפחת המרובעים:
206	תשובות סופיות:
207	פרק 8 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים:
207	משולשים:
207	שאלות – שטחים והיקפים של משולשים:
208	מרובעים:
209	שאלות עם מקבילית:
210	שאלות עם מלבן:
211	שאלות עם מעוין:
212	שאלות עם ריבוע:
213	שאלות עם טרפז:
215	תשובות סופיות:
217	פרק 9 – גיאומטריה אוקלידית - המעגל:
217	הגדרות:
217	משפטים העוסקים במיתרים במעגל:
218	שאלות יסודיות – קשתות ומיתרים במעגל:
219	משפט אנך אמצעי למיתר:
220	שאלות – אנך אמצעי למיתר:
220	משפטים העוסקים בזוויות במעגל:
221	שאלות – זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:
223	שאלות – זווית היקפית הנשענת על קוטר:
223	שאלות – זווית פנימית וזווית חיצונית במעגל:
224	משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:
225	שאלות – משיקים למעגל:
226	שאלות – משיק ומיתר:
227	משפטים העוסקים בשני מעגלים:
227	שאלות – שני מעגלים:

228.....	משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:
229	שאלות – משולשים ומעגל:
229	שאלות – מרובעים ומעגל:
230.....	שטחים והיקפים עם מעגלים:
230	שאלות – שטחים והיקפים במעגל:
233.....	תשובות סופיות:
234.....	שאלות מסכמות ללא פרופורציה:
237.....	תשובות סופיות:
238.....	פרק 10 – גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון:
238.....	משפט תאלס:
238	שאלות יסודיות – משפט תלס:
240	שאלות יסודיות – הרחבות של משפט תלס:
242.....	משפט חוצה הזווית:
242	שאלות יסודיות – משפט חוצה זווית:
244	שאלות המשלבות את משפט תלס ומשפט חוצה זווית:
244.....	דמיון משולשים:
245	שאלות העוסקות במשפט דמיון ז.ז:
247	שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.ז.צ:
247	שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.צ:
248	שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.ז שמול הצלע הגדולה:
249.....	תשובות סופיות:
250.....	שאלות שונות – פרופורציה ודמיון:
260.....	תשובות סופיות:

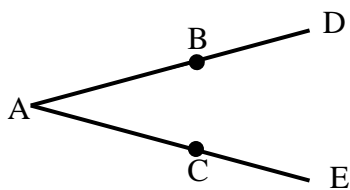
פרק 6 - גיאומטריה אוקלידית – ישרים, זוויות ומשולשים:

ישרים וזוויות:

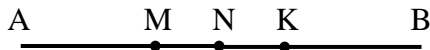
שאלות – חיבור וחסור קטעים:



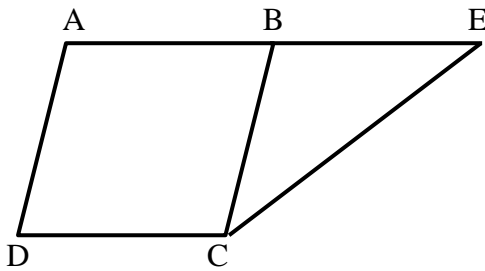
- (1) באיור שלפניך נתון: $AB = AC$, $BD = CE$.
הוכח: $AD = AE$.



- (2) באיור שלפניך נתון: $AD = AE$, $AB = AC$.
הוכח: $BD = CE$.

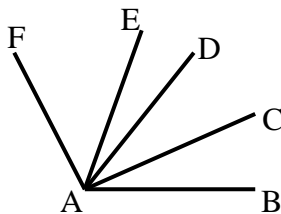


- (3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.
נתון כי: $AM = KB$, $MN = NK$.
הוכח: $AN = BN$.

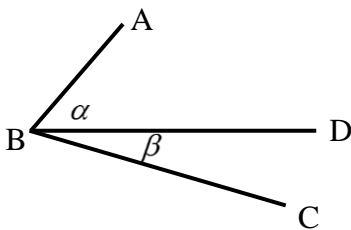


- (4) בסרטוט שלפניך נתון
כי: $BC = AB$, $BE + BC = 2AB$.
הוכח: $AB = BE$.

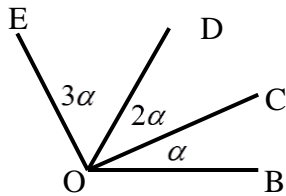
שאלות – חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות:



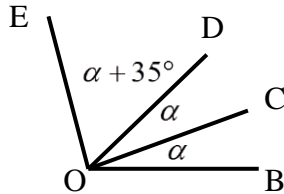
- (5) נתון: $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$, $\angle CAB = \angle DAC$.
וכן: $\angle EAB = 80^\circ$, $\angle FAD = 60^\circ$.
חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle FAB$, $\angle EAC$, $\angle CAB$.



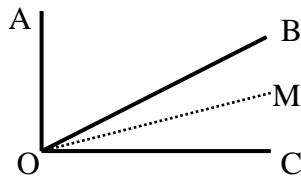
- (6) באיור שלפניך נתון: $\angle ABC = 69^\circ$.
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את α ואת β .



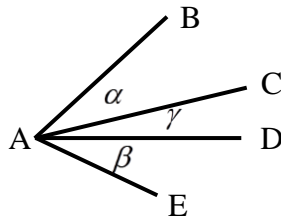
- 7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
 הנתונים הם: $\angle EOB = 138^\circ$.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle EOD$, $\angle DOC$, $\angle COB$



- 8) באיור שלפניך נתון: $\angle EOB = 110^\circ$.
 שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle EOC$, $\angle DOC$

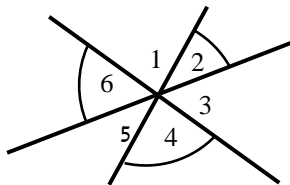


- 9) נתון האיור הבא ובו: $\angle AOC = 90^\circ$.
 OM חוצה את זווית BOC.
 מתקיים: $\angle AOB = 3\angle MOC$.
 חשב את: $\angle AOM$, $\angle BOM$

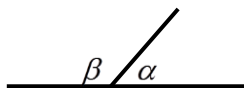


- 10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
 הוכח כי: $\angle BAD = \angle EAC$

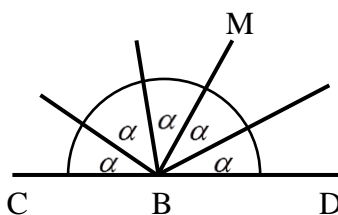
שאלות – זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:



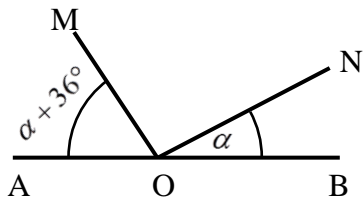
- 11) חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):
 $\angle 2 + \angle 4 + \angle 6$



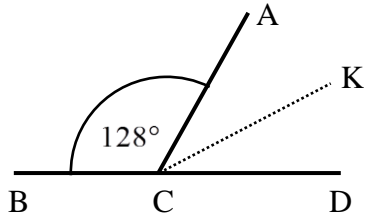
- 12) באיור שלפניך הזוויות α ו- β הן זוויות צמודות.
 ידוע כי: $\alpha = 63^\circ$. מצא את זווית β .



- 13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.
 כל הזוויות שוות ל- α .
 א. חשב את α .
 ב. חשב את זווית CBM.



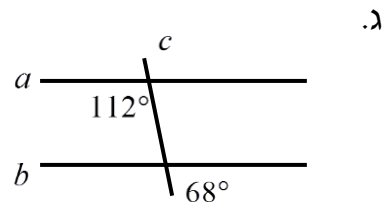
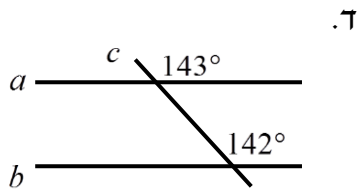
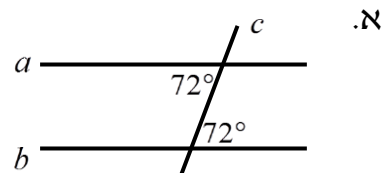
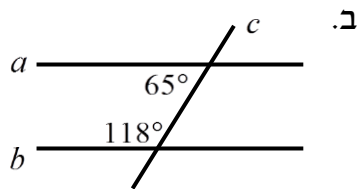
14) בסרטוט שלפניך ידוע:
 הזווית AOB היא שטוחה.
 נתון: $\alpha = 27^\circ$.
 הוכח כי: $MO \perp NO$.



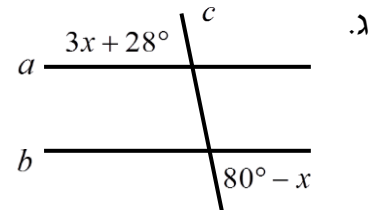
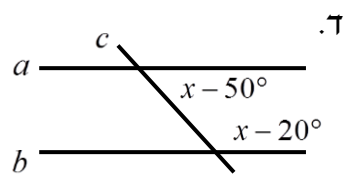
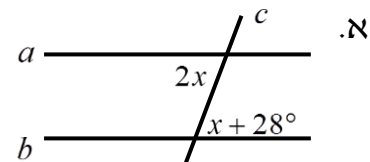
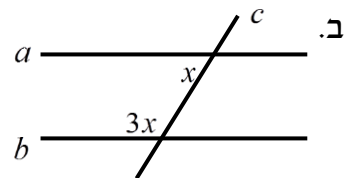
15) הזוויות $\sphericalangle ACB$ ו- $\sphericalangle ACD$ הן צמודות.
 ידוע כי CK חוצה זווית ACD.
 כמו כן: $\sphericalangle ACB = 128^\circ$.
 חשב את זווית BCK.

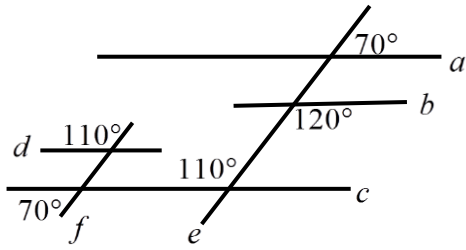
שאלות - זוויות בין ישרים מקבילים:

16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו-b מקבילים או שלא. נמק.



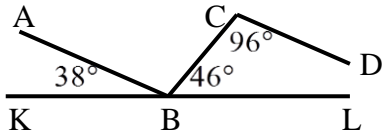
17) הישרים a ו-b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:





18) מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא. נמק.

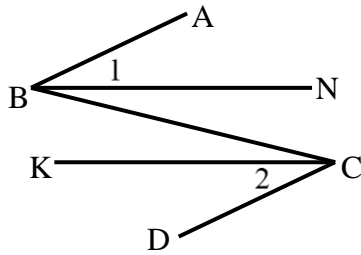
19) בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר. שאר הזוויות מופיעות בתרשים. הוכח כי: $AB \parallel CD$.



20) באיור שלפניך נתון כי:

$$\angle B_1 = \angle C_2, \angle ABC = \angle BCD$$

הוכח כי: $BN \parallel CK$.



21) באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.

מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

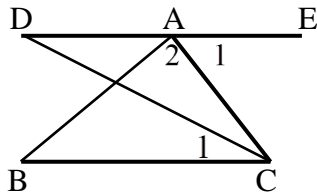
מחברים את BC וידוע כי: $BC \parallel DE$.

מעבירים את CD - חוצה זווית C.

$$\text{נתון: } \angle A_1 = 68^\circ, \angle A_2 = 85^\circ.$$

א. חשב את הזווית $\angle C_1$.

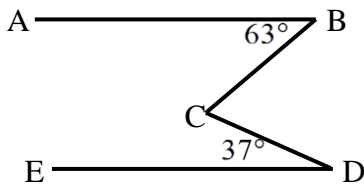
ב. חשב את הזווית $\angle B$.



22) בסרטוט שלפניך נתון:

$$\angle D = 37^\circ, \angle B = 63^\circ, AB \parallel DE$$

חשב את גודל הזווית BCD.



משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

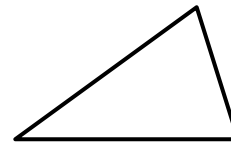
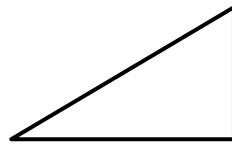
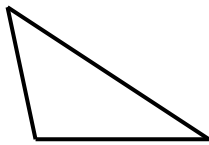
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

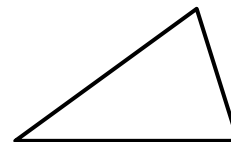
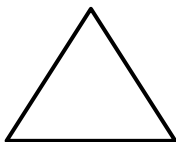
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

1. משולש חד זווית: 2. משולש ישר זווית: 3. משולש קהה זווית:



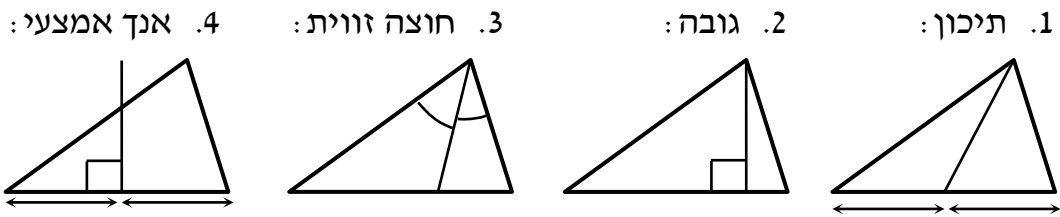
4. משולש שונה צלעות: 5. משולש שווה שוקיים: 6. משולש שווה צלעות:



קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים :

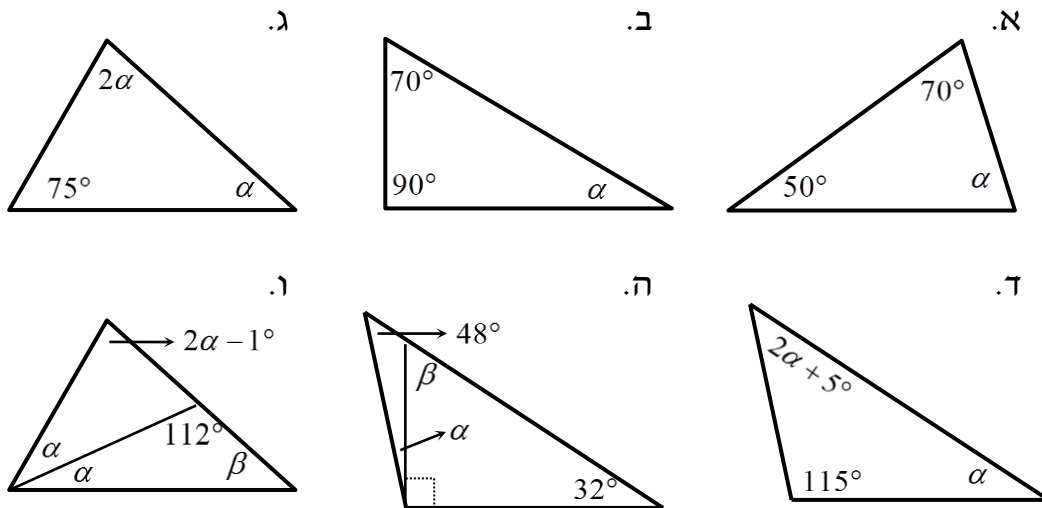


משפטים כלליים במשולשים :

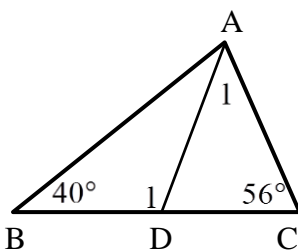
1. סכום הזוויות במשולש הוא 180° .
2. סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
3. במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך. במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך. במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

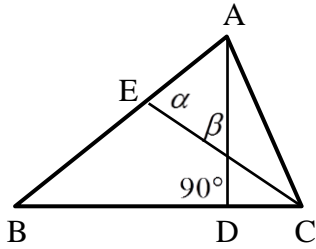
שאלות – זוויות במשולשים :

23) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך :

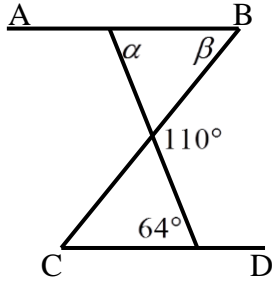


24) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.
נתון : $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 56^\circ$.
חשב את הזוויות $\angle A_1$, $\angle D_1$.





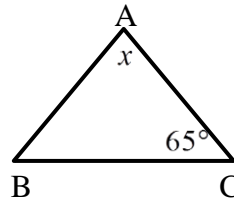
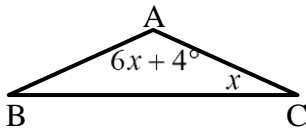
25) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC $\angle D = 90^\circ$.
 הקטע CE חוצה זווית C.
 כמו כן: $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 63^\circ$.
 חשב את זוויות המשולש ABC.



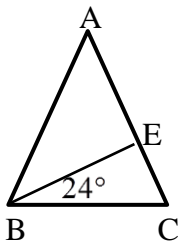
26) בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.
 מצא את הזוויות α ו- β .

27) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 1: 2: 6.
 חשב את זוויות המשולש.

28) בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים ($AB = AC$) שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.
 א.
 ב.

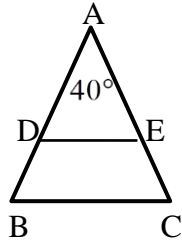


29) הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC, ($AB = AC$), יוצר זווית בת 24° עם הבסיס BC.
 מצא את זוויות המשולש ABC.

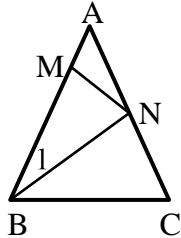


30) חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:

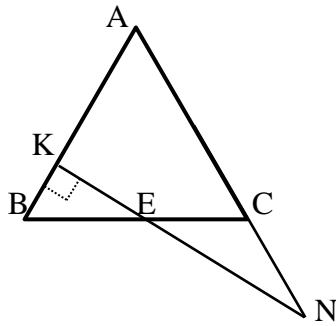
- במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.
- במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב- 12° מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.



- 31** באיור שלפניך נתון :
 $\angle A = 40^\circ$, $AD = AE$, $AB = AC$
 א. חשב את הזוויות : $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$
 ב. הוכח : $DE \parallel BC$.



- 32** באיור שלפניך נתון : $AB = AC$
 מעבירים את הקטעים MN ו- BN כך
 שמתקיים : $BM = BN = BC$
 נתון בנוסף : $\angle A = 32^\circ$
 חשב את זוויות : $\angle B_1$, $\angle ANM$



- 33** משולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
 בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך
 ל- AB ($\angle K = 90^\circ$). אנך זה חותך את BC
 בנקודה E ואת המשך AC בנקודה N .
 מתקיים : $CE = CN$
 חשב את זוויות המשולש ABC .

משפטים במשולש שווה שוקיים:

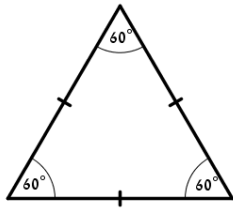
1. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
 (משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
2. במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.
 (משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

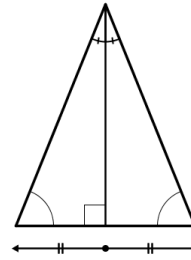
1. במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות 60° .
2. (משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

איורים :

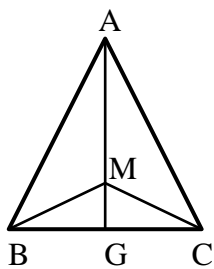
משפט במשולש שווה צלעות



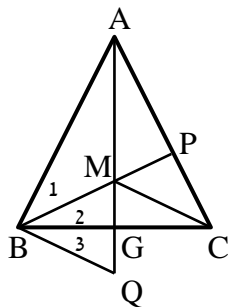
משפט במשולש שווה שוקיים



שאלות – משולש שווה שוקיים:



- 34) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).
AG חוצה את זווית $\sphericalangle A$.
M היא נקודה כלשהי על AG.
הוכח כי: $BM = CM$.



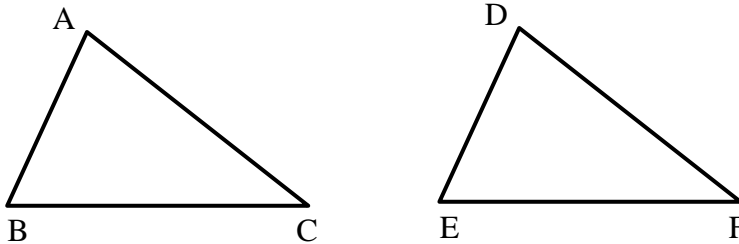
- 35) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).
AG ו-BP חוצים את הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle ABC$ בהתאמה.
הנקודה Q נמצאת על המשך AG.
נתון: $GM = GQ$.
הוכח: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$.

חפיפת משולשים:

הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

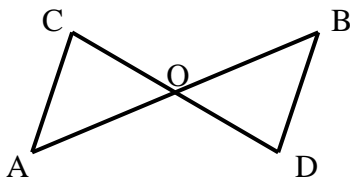
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE, AC = DF, BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases} \text{ סימון מתמטי:}$$



משפטי החפיפה:

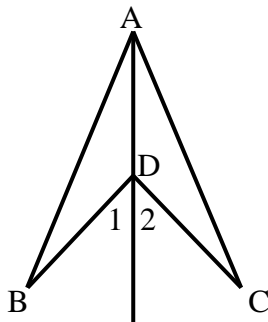
- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

שאלות – חפיפת משולשים:

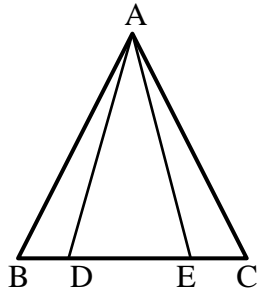


שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:

36) באיור שלפניך הקטעים AB ו-CD חוצים זה את זה בנקודה O.
הוכח: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$.

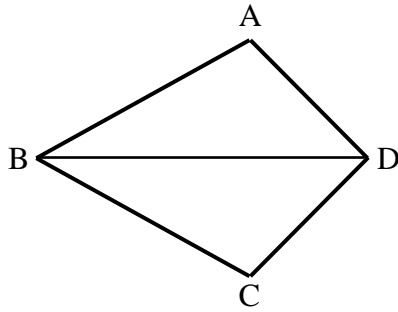


37) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.
כמו כן: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

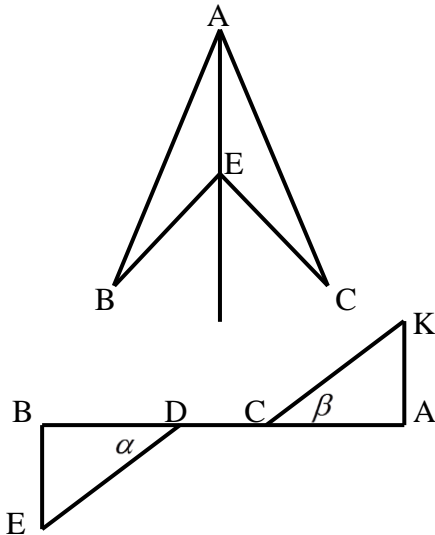


- 38) בסרטוט שלפניך נתון:
 $AB = AC$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $BE = CD$
 הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:



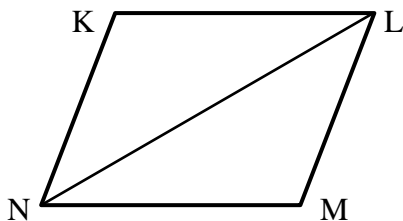
- 39) במרובע ABCD נתון:
 BD חוצה את זוויות B ו-D.
 הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



- 40) בסרטוט שלפניך נתון:
 AE חוצה את הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו- $\sphericalangle BEC$.
 הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle ACE$

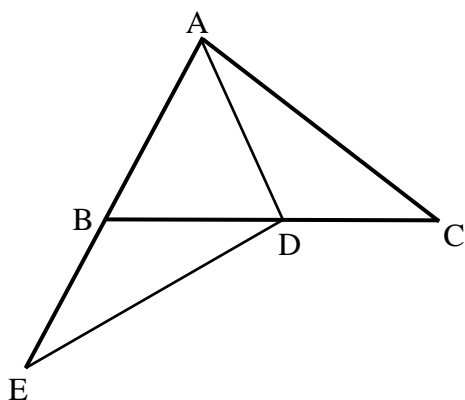
- 41) בציור שלפניך נתון:
 $AC = BD$, $\alpha = \beta$
 $AB \perp BE$, $AB \perp AK$
 הוכח: $\triangle AKC \cong \triangle BED$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:



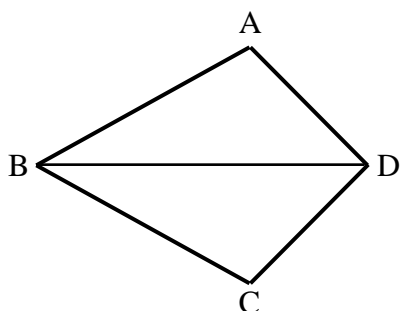
- 42) באיור שלפניך נתון:
 $KL = MN$, $KN = LM$
 הוכח: $\triangle KLN \cong \triangle MLN$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה: צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

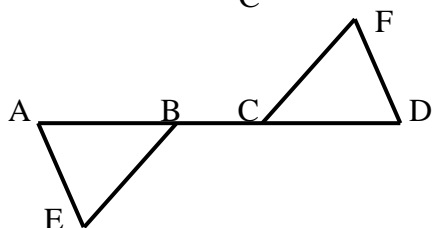


43) בציור שלפניך נתון:
 $AC = DE$, $AB = BE = AD$
 הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

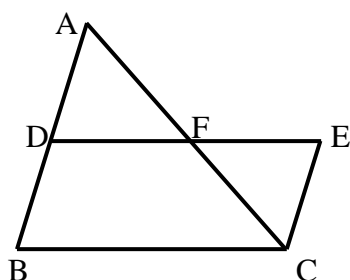
שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:



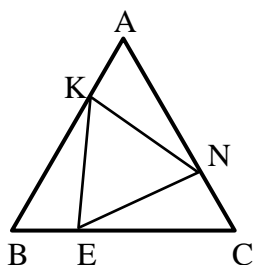
44) במרובע ABCD נתון:
 $AB = BC$, $AD = CD$
 הוכח: $\angle A = \angle C$



45) הקטע AD הוא קו ישר.
 נתון: $AE = DF$, $AC = BD$
 כמו כן מתקיים: $\angle A = \angle D$
 הוכח כי הקטעים BE ו-FC שווים.

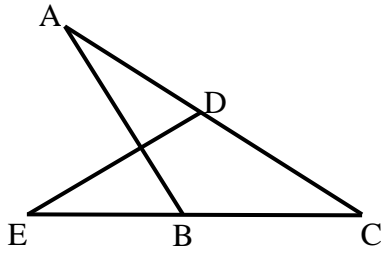


46) באיור שלפניך נתון:
 הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
 מתקיים: $\angle BAC = \angle ACE$
 הקטעים BD ו-CE שווים.
 הוכח את הטענות הבאות:
 א. F היא אמצע הקטע DE.
 ב. D היא אמצע הקטע AB.



47) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
 נתון: $AK = BE = CN$
 הוכח כי $\triangle KEN$ הוא גם משולש שווה צלעות.

שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:



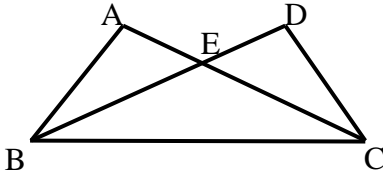
(48) בצויר שלפניך נתון:

. $AC = CE$, $DC = BC$

הוכח:

.א. $\triangle CDE \cong \triangle CBA$

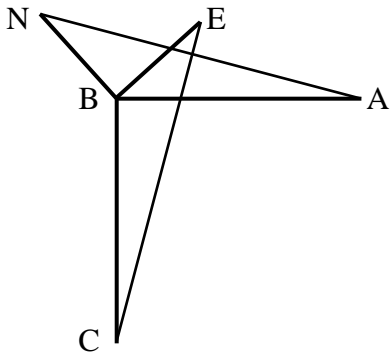
.ב. $\angle ADE = \angle ABE$



(49) באיור שלפניך נתון:

. $\angle DBC = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle DCB$

הוכח: $AB = CD$



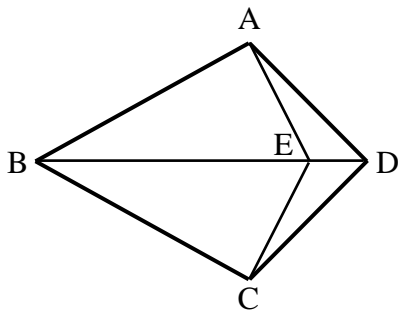
(50) בצויר שלפניך נתון:

$AB = BC$, $BE = BN$

$AB \perp BC$, $BE \perp BN$

הוכח: $AN = CE$

שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

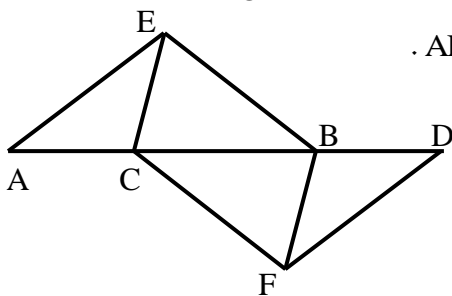


(51) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.

מתקיים: $AD = CD$, $AB = BC$

הנקודה E נמצאת על BD.

הוכח כי: $AE = CE$



(52) בצויר שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר.

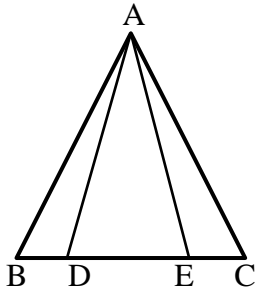
מתקיים: $AE = DF$, $\angle AEC = \angle DFB$, $\angle A = \angle D$

הוכח:

.א. $CE = BF$

.ב. $BE = CF$

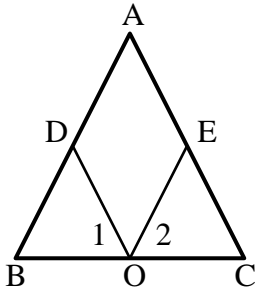
שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:



53) נתון משולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.

מתקיים: $BD = CE$.

הוכח: $AD = AE$.



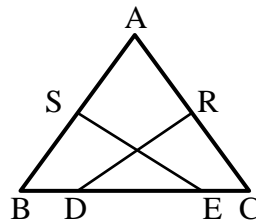
54) בסרטוט שלפניך נתון משולש שווה

שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.

הנקודה O היא אמצע BC.

מתקיים: $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$.

הוכח: $AD = AE$.

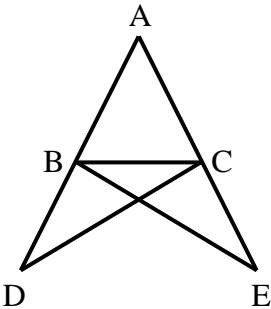


55) במשולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.

הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.

ידוע כי $BD = CE$.

הוכח כי: $SE = RD$.



56) נתון משולש ABC.

הקטעים AD ו-AE ישרים ונתון

בנוסף כי: $DC = BE$, $BD = CE$.

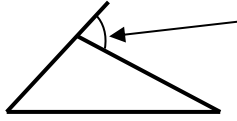
הוכח: $AB = AC$.

זווית חיצונית במשולש:

זווית חיצונית למשולש:

הגדרה:

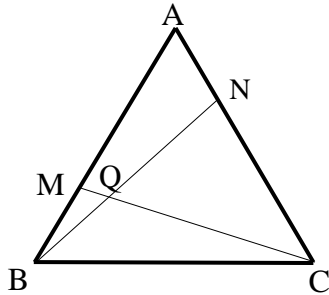
זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.



משפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

שאלות – זווית חיצונית במשולש:

57) הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה."



58) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.

נתון: $AN = BM$.

הוכח: $\angle NQC = 60^\circ$.

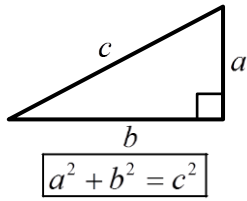
משולש ישר זווית:

משפטים במשולש ישר זווית:

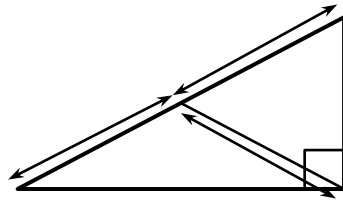
1. סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90° .
2. במשולש שזוויותיו 90° , 60° , 30° , הניצב שמול הזווית של ה- 30° שווה למחצית היתר.
3. (משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת 30° .
4. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
5. (משפט הפוך ל-4): אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
6. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר. כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
7. (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

איורים :

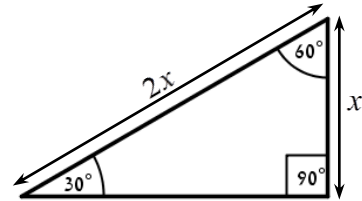
משפט פיתגורס



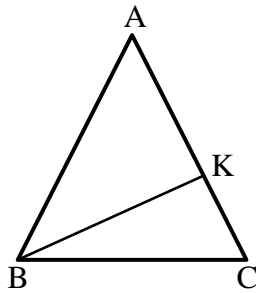
תיכון ליתר



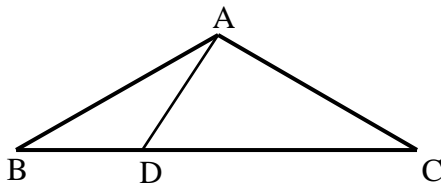
משולש $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$



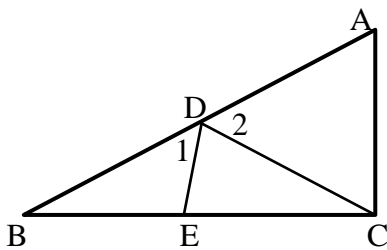
שאלות – משולש ישר זווית:



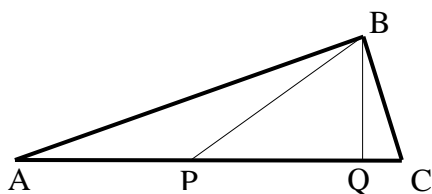
- (59) באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$).
 זווית הבסיס: $\sphericalangle C = 75^\circ$ וכן: $AC = 16$ ס"מ.
 מעבירים גובה לשוק BK.
 מצא את אורך השוק BK.



- (60) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).
 נתון: $\sphericalangle DAC = 90^\circ$, $\sphericalangle ABD = 30^\circ$, $BC = 18$ ס"מ.
 חשב את אורכו של הקטע BD.

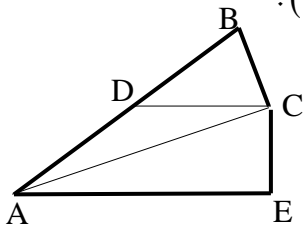


- (61) המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר זווית ($\sphericalangle C = 90^\circ$).
 מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.
 הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD = CE$.
 ידוע כי: $\sphericalangle CED = 80^\circ$.
 מצא את הזוויות: $\sphericalangle D_1$, $\sphericalangle D_2$.



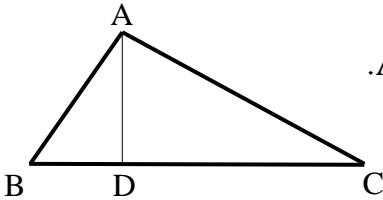
- (62) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).
 BQ הוא הגובה ליתר AC ו-BP הוא התיכון ליתר AC.
 נתון: $BQ = \frac{1}{2} BP$.
 חשב את גודלה של הזווית C.

63) המשולש BDC שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($BD = DC$).
 AC חוצה את הזווית $\angle BAE$. נתון: $DC \parallel AE$.
 חשב את גודלה של הזווית $\angle ACB$.



64) AD הוא גובה במשולש ABC.

נתון: $AB = 15$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ, $BC = 25$ ס"מ.
 א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש ABC.
 ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.

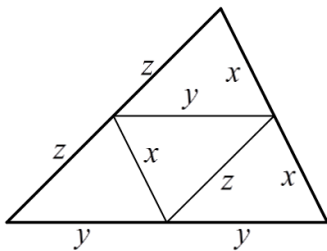


קטעים מיוחדים במשולש:

קטע אמצעים במשולש:

הגדרה: קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

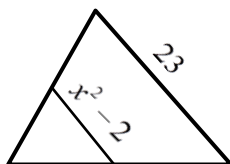


איור – קטע אמצעים במשולש:

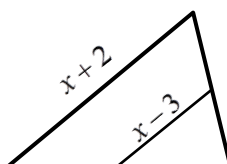
שאלות – קטע אמצעים במשולש:

65) לפינת משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
 מצא את x בכל אחד מהמקרים:

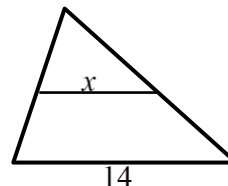
א.

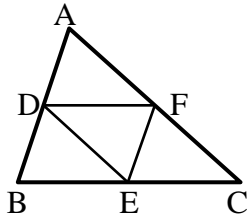


ב.

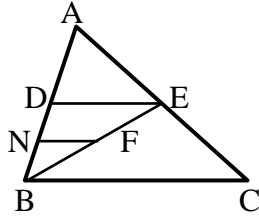


ג.

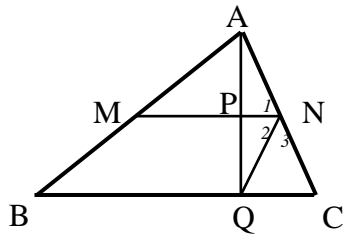




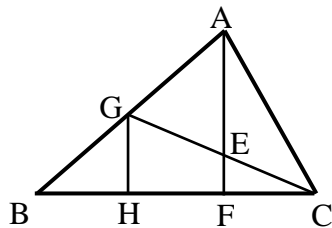
66 הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש ΔABC .
 נתון: $DE = 9$ ס"מ, $EF = 12$ ס"מ, $DF = 10$ ס"מ.
 חשב את היקף המשולש ΔABC .



67 הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC .
 הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש ΔBDE .
 נתון: $NF = 3$ ס"מ.
 מצא את אורך הצלע BC.



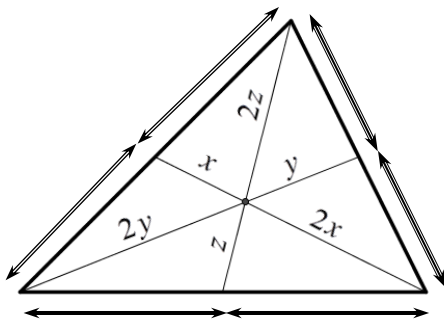
68 הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC .
 AQ הוא גובה לצלע BC.
 הוכח: $\angle N_1 = \angle N_2$.



69 AF הוא גובה לצלע BC ו-GC הוא תיכון לצלע AB במשולש ΔABC .
 הקטע GH מאונך לצלע BC.
 א. הוכח: $HF = BH$.
 ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.
 חשב את אורך הקטע EF.

מפגש התיכונים במשולש:

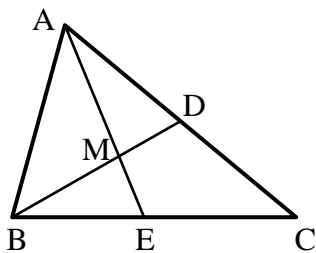
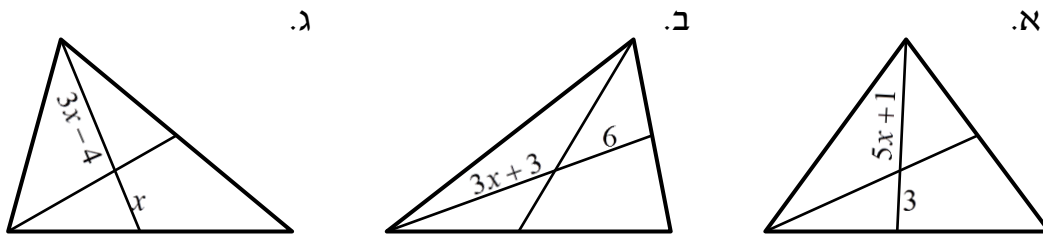
- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.



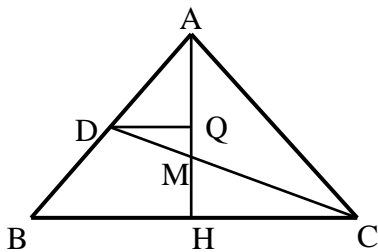
איור – מפגש תיכונים במשולש:

שאלות – מפגש תיכונים במשולש:

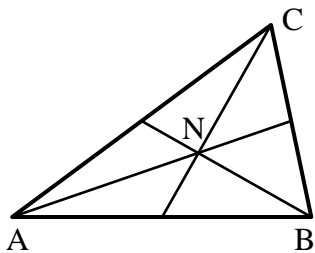
70) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:



71) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש $\triangle ABC$ אשר נחתכים בנקודה M. נתון: $AD = AM$ וכן: $AC = 30$ ס"מ. חשב את AE.



72) המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא מש"ש ($AB = AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC. התיכון CD לשוק AB, יוצר זווית של 30° עם הבסיס BC. נתון: $BC = 12\sqrt{3}$ ס"מ. חשב את אורך הקטע MQ.



73) במשולש $\triangle ABC$ נחתכים התיכונים בנקודה N. נתון: $\angle CNB = 90^\circ$. הוכח: $BC = AN$.

תשובות סופיות – משולשים:

5 $\angle FAB = 120^\circ$, $\angle EAC = 50^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$

6 $\alpha = 46^\circ$, $\beta = 23^\circ$

7 $\angle BOC = 23^\circ$, $\angle COD = 46^\circ$, $\angle DOE = 69^\circ$

8 $\angle EOC = 85^\circ$, $\angle DOC = 25^\circ$

9 $\angle AOM = 72^\circ$, $\angle BOM = 18^\circ$

11 180°

12 $\beta = 117^\circ$

13 א. $\alpha = 36^\circ$ ב. $\angle CBM = 108^\circ$

15 $\angle BCK = 154^\circ$

16 א. כן. ב. לא. ג. כן. ד. לא.

17 א. 28° ב. 45° ג. 13° ד. 125°

18 $a \parallel c \parallel d$, $e \parallel f$

21 א. 34° ב. 27°

22 $\angle BCD = 100^\circ$

23 א. $\alpha = 60^\circ$ ב. $\alpha = 20^\circ$ ג. $\alpha = 35^\circ$ ד. $\alpha = 20^\circ$ ה. $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 58^\circ$

א. $\alpha = 75\frac{1}{3}^\circ$, $\beta = 30\frac{1}{3}^\circ$

24 $\angle A_1 = 42^\circ$, $\angle D_1 = 98^\circ$

25 $\angle A = 78^\circ$, $\angle B = 48^\circ$, $\angle C = 54^\circ$

26 $\alpha = 64^\circ$, $\beta = 46^\circ$

27 20° , 40° , 120°

28 א. $x = 50^\circ$ ב. $x = 22^\circ$

29 $\angle A = 48^\circ$, $\angle B = \angle C = 66^\circ$

30 א. 20° , 80° , 80° ב. 52° , 64° , 64°

31 א. $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 70^\circ$

32 $\angle B_1 = 42^\circ$, $\angle ANM = 37^\circ$

33 $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

59 ט"ו 8

60) 6 ס"מ.

61) $\angle D_1 = 60^\circ$, $\angle D_2 = 40^\circ$.

62) 75° .

63) 90° .

64) א. 12 ס"מ, AD = 150 סמ"ר, S_{ABC} .

65) א. $x = 7$ ב. $x = 8$ ג. $x = \sqrt{13.5}$.

66) 62 ס"מ.

67) 12 ס"מ.

69) ב. 3 ס"מ.

70) א. $x = 1$ ב. $x = 3$ ג. $x = 4$.

71) 22.5 ס"מ.

72) 3 ס"מ.

פרק 7 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים:

מרובע כללי:

הגדרה: מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

משפט: סכום הזוויות במרובע הוא 360° .

שאלות יסודיות:

1) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.

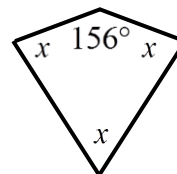
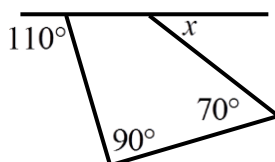
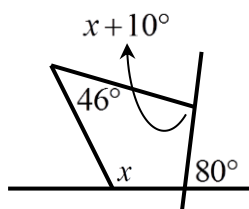
חלק מהזוויות מסומנות ב- x .

מצא את x ואת הזוויות של כל מרובע.

ג.

ב.

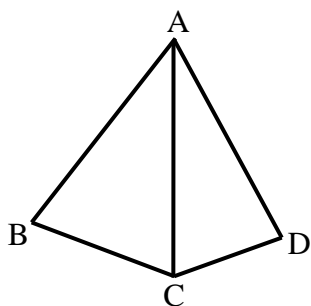
א.



2) מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב- 10° מהזווית הקודמת לה.

ב. זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:3:4.



3) המשולשים ABC ו-ACD שבצירור הם

משולשים שווי שוקיים ($AB = AC = AD$).

נתון: $\angle BAD = 80^\circ$.

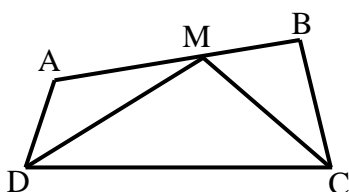
חשב את גודלה של הזווית BCD.

4) בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.

CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.

ידוע כי: $CM = DM$, $\angle A = 130^\circ$, $\angle DMC = 110^\circ$.

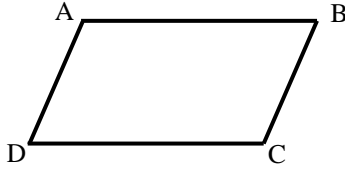
מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.



מקבילית

הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

תכונות המקבילית:

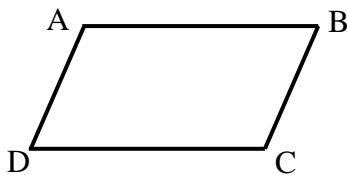


1. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
2. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.
3. במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא 180° .
4. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
5. היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע \cdot גובה לצלע.

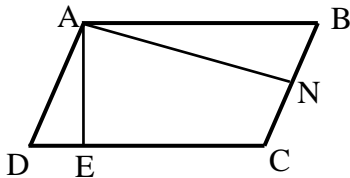
כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:

1. מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
2. מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
3. מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
4. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
5. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

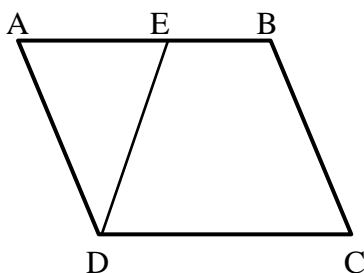
שאלות – תכונות המקבילית:



- 5 נתונה מקבילית ABCD. בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות. מצא את זוויות המקבילית בכל מקרה.
- א. $\angle A = x$, $\angle B = x - 70^\circ$.
 - ב. $\angle B = 3x - 130^\circ$, $\angle D = x + 10^\circ$.
 - ג. $\angle A = x + 20^\circ$, $\angle C = 100^\circ - x$.

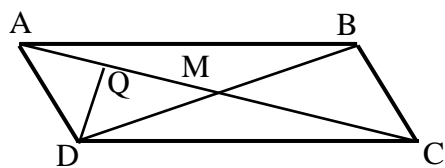


- 6 המרובע ABCD הוא מקבילית
 ובו: $AE \perp CD$, $AN \perp BC$
 הוכח כי: $\angle DAE = \angle BAN$

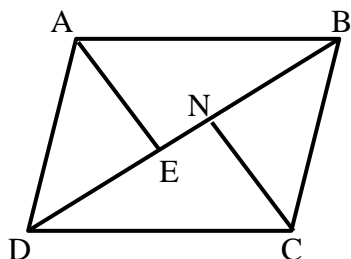


- 7 במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים: $DE = BC$
 הוכח כי: $\angle EAD = \angle EDC$

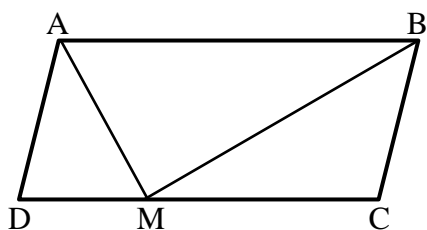
8 נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים בנקודה M.



נתון: 20 ס"מ $AC =$, $BC = \frac{1}{2}BD$, $DQ \perp AC$.
חשב את אורך הקטע AQ.



9 הוכח כי במקבילית הקדקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח: $AE = CN$.

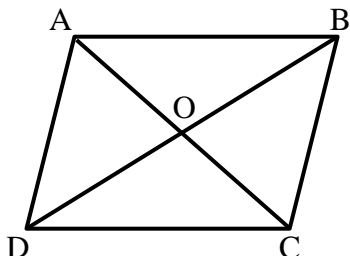


10 במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה

אשר נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC.

א. הוכח כי: $AB = 2BC$.

ב. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.

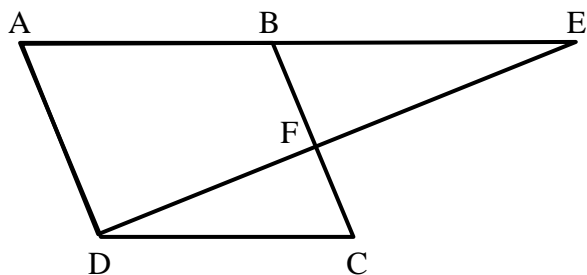


11 המרובע ABCD הוא מקבילית.

O – פגישת האלכסונים.

נתון: $AO = x + 1$, $BO = x + 8$, $DO = 3x - 10$.

מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.



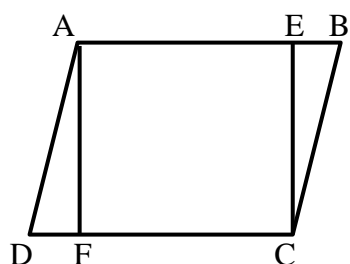
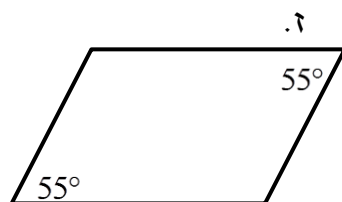
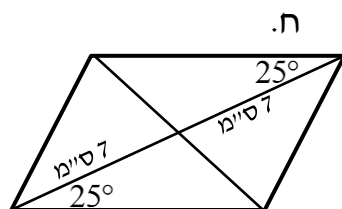
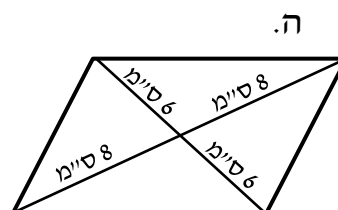
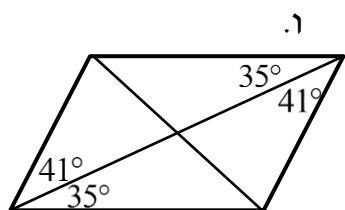
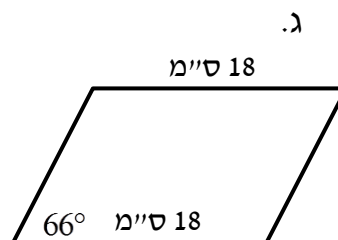
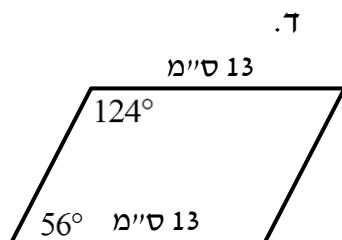
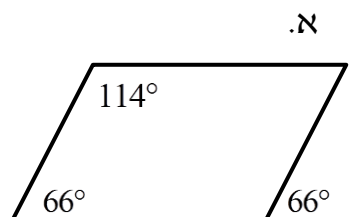
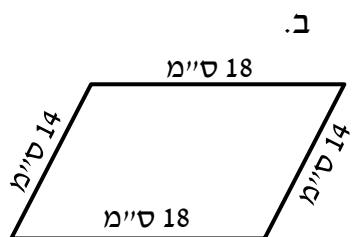
12 נתונה מקבילית ABCD ובה:

$\angle BEF = \frac{1}{2} \angle EAD$, $\angle ADC = 120^\circ$.

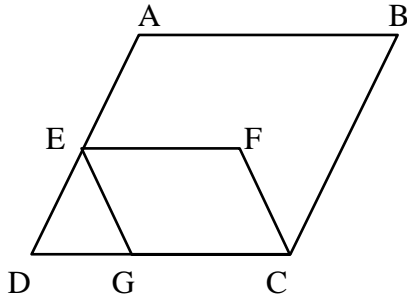
הוכח כי: $BC \perp ED$.

שאלות – הוכחת מקבילית:

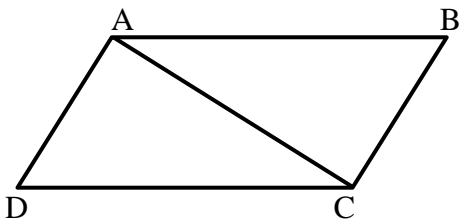
13) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים. קבע אלו מהם הם מקביליות וציין מדוע.



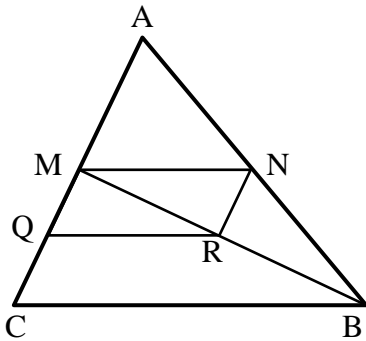
14) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה. נתון: $\angle DAF = \angle BCE$. הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.



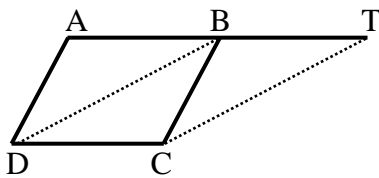
- 15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB.
- א. הוכח: $\angle DAB = \angle EGC$.
- ב. נתון: $\angle GCF = \angle ABC$. הוכח כי EFCG מקבילית.



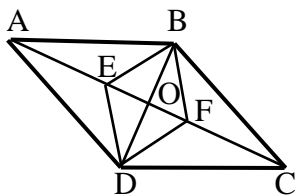
- 16) במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות. כמו כן: $AD \perp AC$, $BC \perp AC$. הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.



- 17) נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים. הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.
- א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.
- ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR. איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.



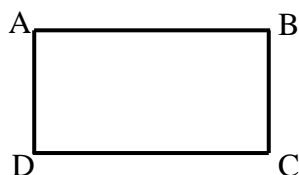
- 18) את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו כאורכה עד לנקודה T. הוכח: BTCD מקבילית. הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



- 19) הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC. נתון: $AE = FC$. הוכח כי EBF D הוא מקבילית.

מלבן:

הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.
(מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).



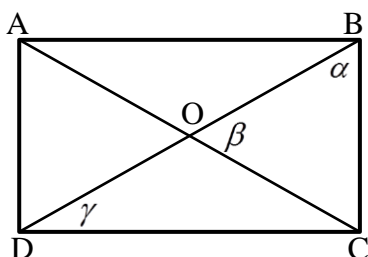
תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

1. ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
2. האלכסונים במלבן שווים זה לזה
3. היקף מלבן = סכום הצלעות, שטח מלבן = צלע · גובה לצלע.

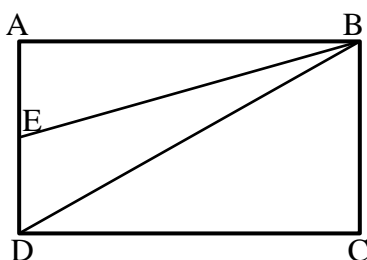
כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

1. מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
2. מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
3. מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

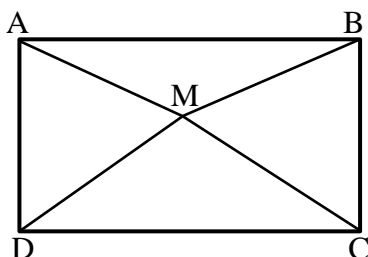
שאלות – תכונות המלבן:



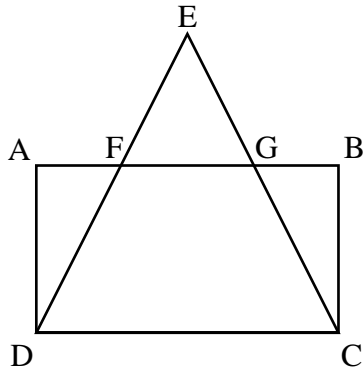
- 20) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
חשב את הזוויות α , β ו- γ במקרים הבאים:
- א. β קטנה ב- 15° מ- α .
 - ב. $\alpha = 2\gamma$.
 - ג. $\gamma = 28^\circ$.



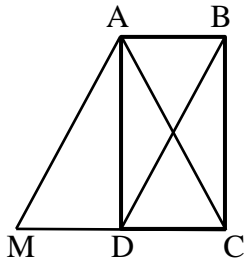
- 21) במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
נתון: $\angle AEB = 70^\circ$, $BD = 2BC$.
חשב את גודלה של הזווית EBD.



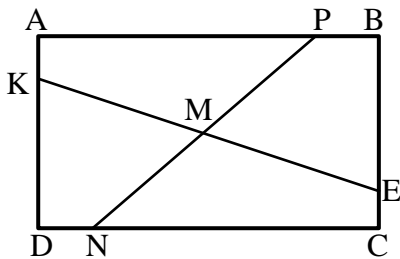
- 22) נתון מלבן ABCD שבו $DM = MC$.
הוכח: $\angle MAB = \angle MBA$.



- 23) המרובע ABCD הוא מלבן.
 המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים בנקודה E.
 נתון: $EF = EG$.
 הוכח: $FD = GC$.

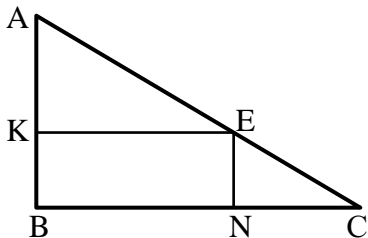


- 24) המרובע ABCD הוא מלבן.
 המרובע ABDM הוא מקבילית.
 הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.

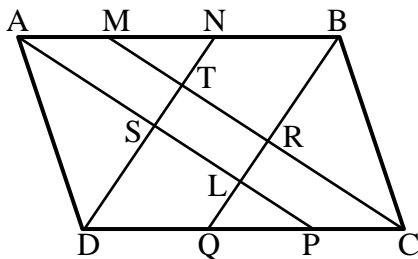


- 25) מרובע ABCD הוא מלבן.
 נתון: $AP = CN$, $AK = CE$.
 הוכח: $KM = EM$, $PM = NM$.

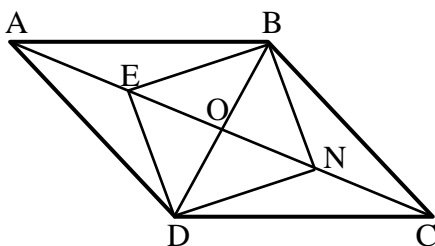
שאלות – הוכחת מלבן:



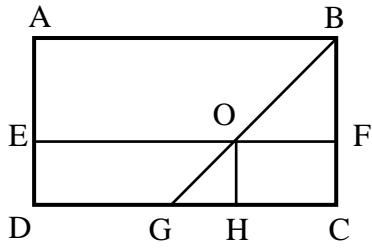
- 26) $\triangle ABC$ הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).
 המרובע KENB חסום במשולש זה.
 נתון כי: $\angle AEK = \angle C$, $\angle NEC = \angle A$.
 הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.



- 27) נתונה מקבילית ABCD ובה AP, BQ, CM ו-DN הם חוצי הזוויות $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ו- $\angle D$ בהתאמה.
 הוכח: TRLS מלבן.

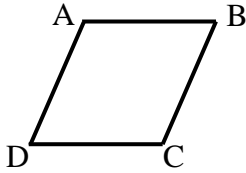


- 28) מרובע ABCD הוא מקבילית.
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים בנקודה O.
 נתון: $2BD = AC$.
 E – אמצע AO.
 N – אמצע CO.
 הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.



29) במלבן ABCD נתון :
 $OH \perp DC$, $\angle ABO = \angle BOF$
 הוכח : EOH הוא מלבן.

מעוין:



הגדרה : מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.
 (מסקנה : מעוין הוא סוג של מקבילית).

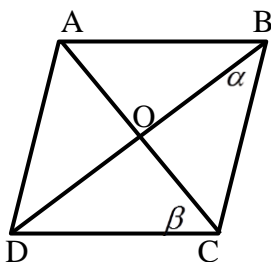
תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

1. במעוין כל הצלעות שוות.
2. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
3. במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
4. היקף מעוין = צלע $\cdot 4$, שטח מעוין = צלע \cdot גובה לצלע = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})/2$.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

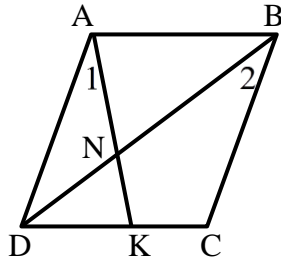
1. מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
2. מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
3. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
4. מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

שאלות – תכונות המעוין:

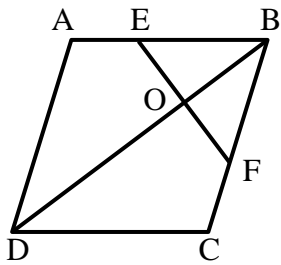


30) המרובע ABCD הוא מעוין.
 חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את α ו- β .

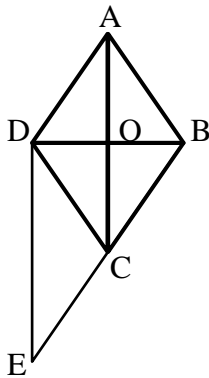
- א. $\angle A = 138^\circ$.
- ב. $\beta = 3.5\alpha$.
- ג. $\beta = \alpha + 20^\circ$.
- ד. $\angle B = \beta$.



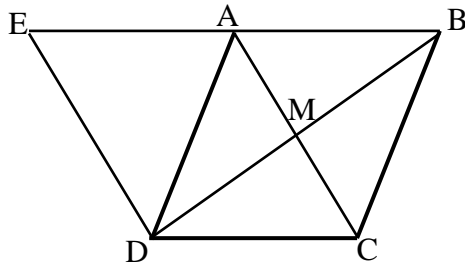
- 31) המרובע ABCD הוא מעוין.
 מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע AK
 אשר נחתכים בנקודה N.
 ידוע כי: $\angle A_1 = \angle B_2$.
 א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.
 ב. הוכח כי: $\angle AND = \angle C$.



- 32) במעוין ABCD הנקודות E ו-F נמצאות
 על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.
 נתון: $\angle DCB = 120^\circ$, $EF \perp BD$.
 הוכח כי משולש EBF הוא שווה צלעות.

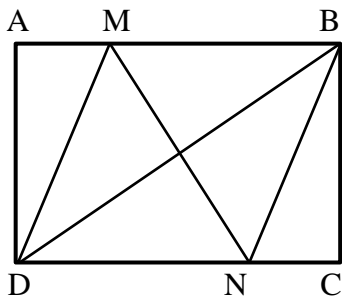


- 33) נתון מעוין ABCD. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.
 נתון: $\angle CDE = \angle BCA$.
 הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.

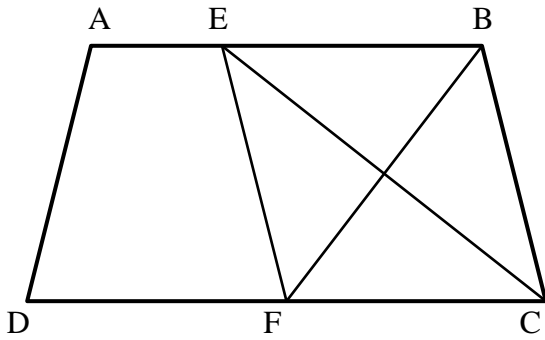


- 34) נתון מעוין ABCD שאלכסונו
 נפגשים בנקודה M.
 האריכו את הצלע AB עד
 לנקודה E כך שמתקיים: $DE \perp BD$.
 הוכח: $AD = AE$.

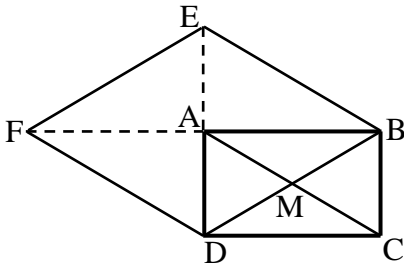
שאלות – הוכחת מעוין:



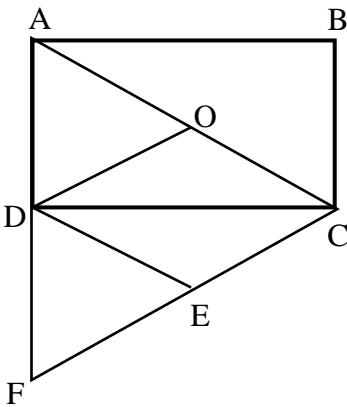
- 35) במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD.
 הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB
 ו-DC בהתאמה. נתון: $AM = CN$.
 ו- $DM = DN$.
 הוכח כי הקטע MN חוצה את
 הזוויות BMD ו-BND.



- 36 נתון טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$ ובו
 הקטעים CE ו- BF חוצים את זוויות
 הקדקודים C ו- B בהתאמה. הוכח:
 א. $BF \perp CE$.
 ב. המשולש EBC הוא שווה שוקיים.
 ג. המרובע $EBCF$ הוא מעוין.



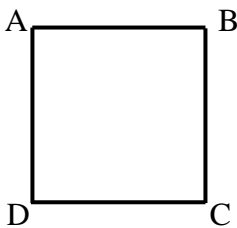
- 37 נתון מלבן $ABCD$ שאלכסונו נפגשים בנקודה M .
 האריכו את הצלע AB כאורכה עד לנקודה F ואת
 הצלע AD כאורכה עד לנקודה E כמתואר בשרטוט.
 הוכח: המרובע $EBDF$ הוא מעוין.



- 38 $ABCD$ הוא מלבן שאלכסונו נחתכים בנקודה O .
 הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD כך
 שמתקיים: $AD = DF$. נתון: $FE = CE$.
 הוכח כי $DOCE$ הוא מעוין.

ריבוע:

הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.
 (מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).

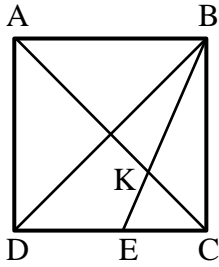


מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים
 כי אלכסונו הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה,
 מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.
 היקף ריבוע = צלע $\cdot 4$, שטח ריבוע = $(צלע)^2 = \frac{2}{2}(\text{אלכסון})^2$

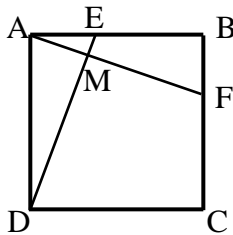
כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

1. מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
2. מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
3. מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
4. מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
5. מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

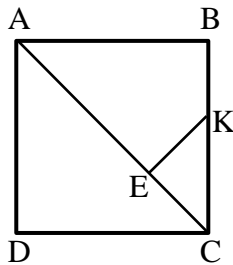
שאלות – תכונות הריבוע:



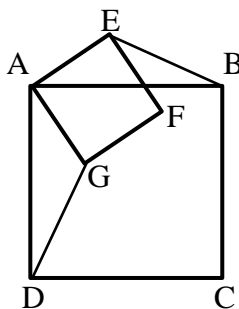
39) המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.
הוכח: $CE = CK$.



40) בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.
נתון כי $AE = BF$.
הוכח: $DE \perp AF$.

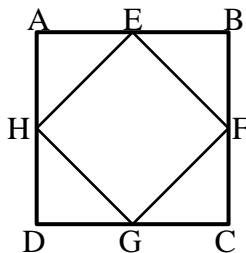


41) המרובע ABCD הוא ריבוע. מעבירים את האלכסון AC.
מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים את
הקטע KE אשר מאונך לאלכסון.
נתון: $AE = AB$.
הוכח כי: $CE = KE = BK$.

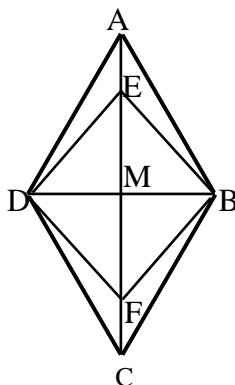


42) המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.
הוכח: $BE = DG$.

שאלות – הוכחת ריבוע:



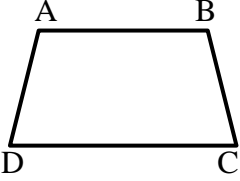
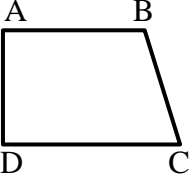
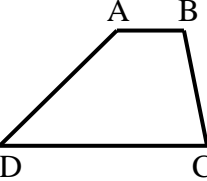
43) הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות
הריבוע ABCD.
הוכח כי EFGH הוא ריבוע.



44) נתון מעוין ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה M.
נתון: $\angle EBA = 15^\circ$, $MB = \frac{1}{2} AB$, $AE = FC$.
הוכח: המרובע EBFM הוא ריבוע.

טרפז כללי:

הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.
 היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = $(\text{גובה} \cdot \text{סכום הבסיסים}) / 2$.

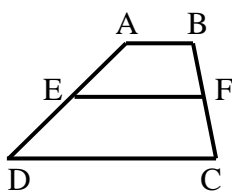
טרפז שווה שוקיים	טרפז ישר זווית	טרפז כללי	סוג הטרפז
			איור מתאים

משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

1. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
2. (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
3. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
4. (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים בטרפז:

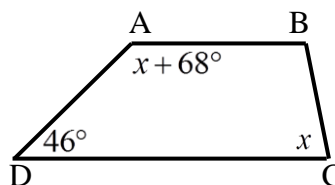
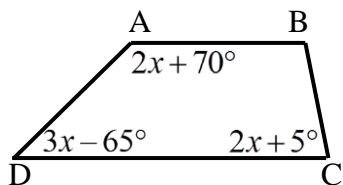
הגדרה: קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.



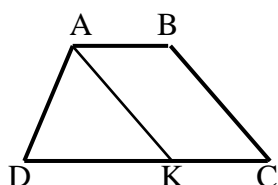
1. קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
2. (משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).

שאלות – תכונות הטרפז הכללי:

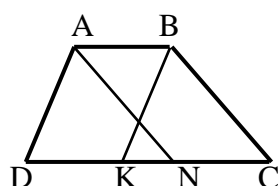
45) בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים ($AB \parallel CD$). מצא את x ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.
א. ב.



46) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

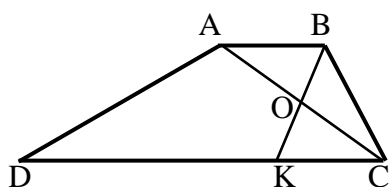


מעבירים את הקטע AK
נתון: $AK = DK$, $AK \parallel BC$
 $DC = 14$ ס"מ, $AB = 6$ ס"מ.
חשב את אורך השוק BC .



47) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

נתון כי: $AN \parallel BC$, $AD \parallel BK$
הוכח כי: $DK = CN$.



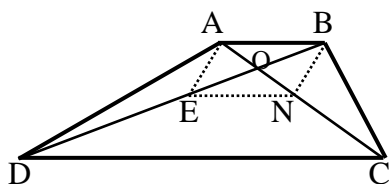
48) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע BK
אשר חוצים זה את זה בנקודה O .
ידוע כי: $\angle C = 60^\circ$, $\angle D = 30^\circ$.

א. חשב את אורך DC , הבסיס הגדול,
אם ידוע כי: $AB = 7$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ.
ב. הוכח כי אם $AB = BC$ אז: $DC = 3AB$.

שאלות – הוכחת טרפז כללי:

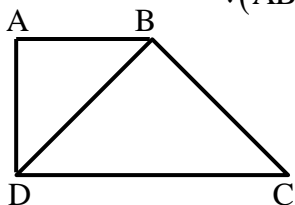
49) מרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).



O - היא נקודת פגישת האלכסונים.
נתון: $BO = EO$, $AO = NO$.
הוכח כי המרובע ENCD הוא טרפז.

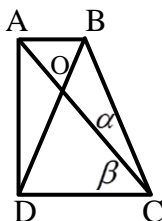
שאלות – תכונות טרפז שווה שוקיים וישר זווית:

50) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD, \angle D = 90^\circ$).



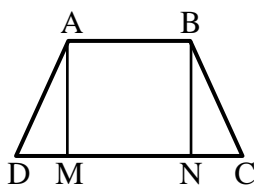
האלכסון BD חוצה את זווית D ונתון בנוסף כי: $BD = BC$
וכי: 15 ס"מ $AD =$.
חשב את אורכי בסיסי הטרפז.

51) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD, AD \perp DC$).

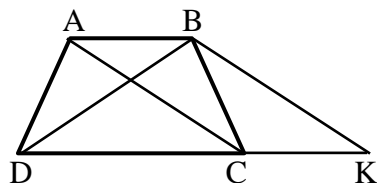


נתון כי: $BD = BC, \beta = 2\alpha$
ו- $\angle DOC = 80^\circ$.
חשב את זוויות הטרפז.

52) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD, AD = BC$).
נתון כי: $AM \perp DC, BN \perp DC$.
הוכח כי: $DM = CN$.

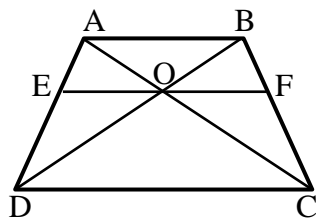


53) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD, AD = BC$).



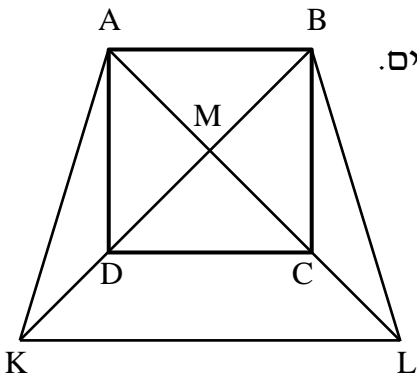
דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC הפוגש את המשך הבסיס DC בנקודה K.
הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.

54) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD, AD = BC$).



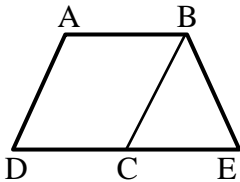
O היא פגישת האלכסונים.
נתון כי: $EF \parallel DC$ כאשר EF עובר דרך O.
הוכח:
א. $\angle BOF = \angle COF$.
ב. $EO = FO$.

55) נתון ריבוע ABCD. הנקודה M היא מפגש האלכסונים AC ו-BD. ממשיכים את האלכסונים ויוצרים את הטרפז השווה שוקיים ABLK. ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים במשולש KML.

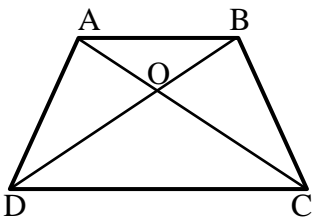


- א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:
- המשולש KML הוא ישר זווית ושווה שוקיים.
 - הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.
 - המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.
 - הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.
- ב. הוכח כי: $3DK = AL$.
- ג. נתון כי $AD = 8\sqrt{2}$ ס"מ. חשב את היקף הטרפז ABLK.

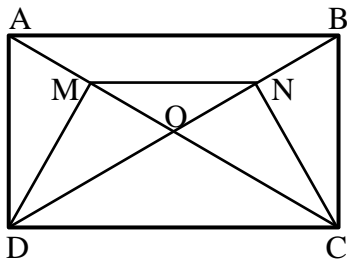
שאלות – הוכחת טרפז שווה-שוקיים וישר זווית:



56) המרובע ABCD הוא מקבילית. הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי: $\angle A + \angle E = 180^\circ$. הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.

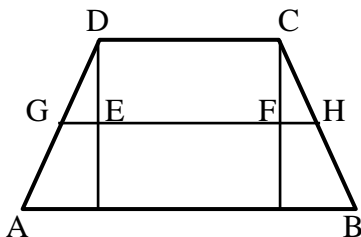


57) במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים. נתון כי: $CO = DO$, $AO = BO$. הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

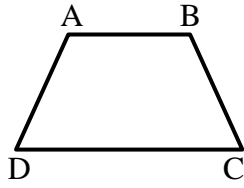


58) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O. נתון: $MN \parallel DC$. הוכח: DMNC טרפז שווה שוקיים.

שאלות – קטע אמצעים בטרפז:



59) בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) הורדו מקצות הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול. קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F. נתון: $GE = 3$ ס"מ, $FH = 2$ ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



60) סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ.
 אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.
 מצא את אורך שוק הטרפז.

61) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O.

א. הוכח כי: $KN = EO$.

ב. בטרפז הנ"ל נתון:

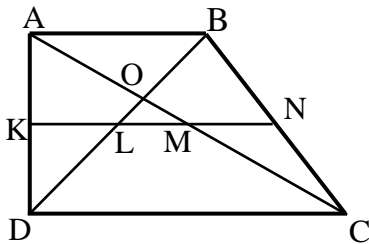
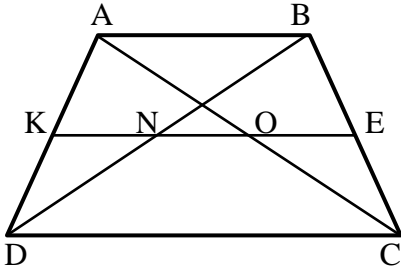
$$DC = 26 \text{ ס"מ}, AB = 14 \text{ ס"מ}$$

חשב את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.

ג. בטרפז הנ"ל נתון:

$$NO = 3 \text{ ס"מ}, KE = 13 \text{ ס"מ}$$

חשב את בסיסי הטרפז.



62) KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCD

($AB \parallel CD, AD \perp AB$) שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.

נתון: $AD = 12$ ס"מ, $DC = 2AB$, $\angle ADB = 45^\circ$.

חשב את אורך הקטע LM

והוכח כי: $KL = LM = MN$.

63) מרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

EF הוא קטע אמצעים.

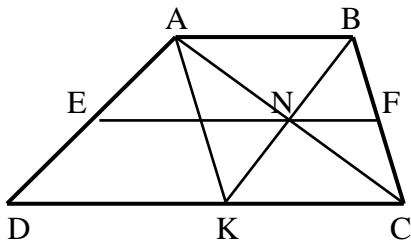
AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.

א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.

ב. נתון: $EN = 9$ ס"מ, $EF = 13$ ס"מ.

חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC

ואת הקטע DK.



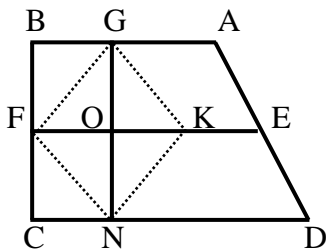
64) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).

EF קטע אמצעים בטרפז. G היא נקודה

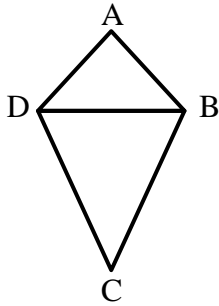
על AB המקיימת: $GN \perp DC$.

בנוסף נתון: $KO = FO$.

הוכח כי מרובע GFNK הוא מעוין.



דלתון:

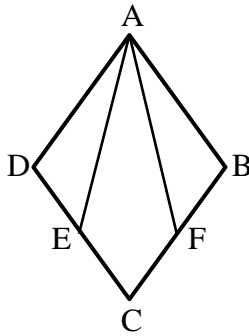


הגדרה: דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.
(מסקנה): דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווים שוקיים בעלי בסיס משותף.

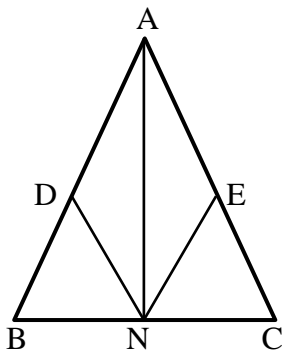
תכונות האלכסונים בדלתון:

1. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
2. האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
3. היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון}) / 2$.

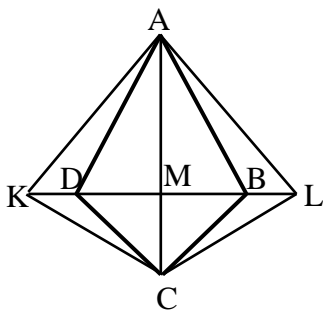
שאלות – דלתון:



65 נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ב-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון.
 הוכח: $\angle DAE = \angle FAB$.

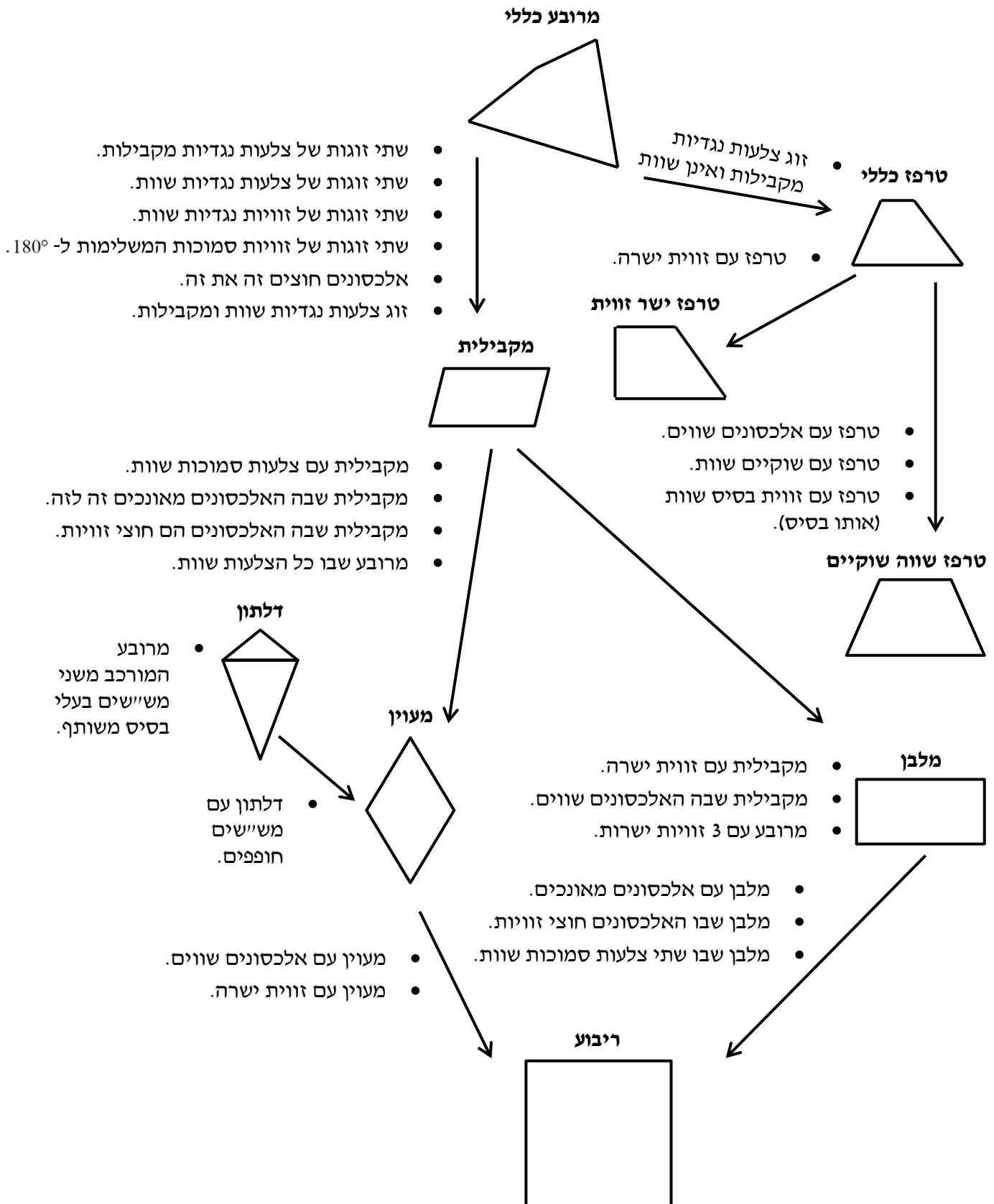


66 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) מקצים נקודות D ו-E על השוקיים. נתון כי: $AD = AE$. הנקודה N היא אמצע BC. הוכח כי ADNE הוא דלתון.



67 בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $KD = BL$. הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.

סיכום משפחת המרובעים:



תשובות סופיות:

- 1) א. $x = 68^\circ$ ב. $x = 50^\circ$ ג. $x = 102^\circ$
- 2) א. $75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ$ ב. $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$
- 3) 140°
- 4) $\sphericalangle B = 90^\circ, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 70^\circ$
- 5) א. $125^\circ, 55^\circ$ ב. $100^\circ, 80^\circ$ ג. $120^\circ, 60^\circ$
- 8) 5 ס"מ
- 11) $BD = 34$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ
- 13) מקביליות: א', ב', ד', ה', ו'. אינן מקביליות: ג', ז', ח'.
- 20) א. $\alpha = 65^\circ, \beta = 50^\circ, \gamma = 25^\circ$ ב. $\alpha = \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$ ג. $\alpha = 62^\circ, \beta = 56^\circ$
- 21) 10°
- 30) א. $\alpha = 21^\circ, \beta = 69^\circ$ ב. $\alpha = 20^\circ, \beta = 70^\circ$ ג. $\alpha = 35^\circ, \beta = 55^\circ$ ד. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$
- 45) א. $x = 66^\circ; 46^\circ, 134^\circ, 66^\circ, 114^\circ$ ב. $x = 35^\circ; 40^\circ, 140^\circ, 75^\circ, 105^\circ$
- 46) 8 ס"מ
- 48) א. 25 ס"מ
- 50) א. 15 ס"מ, 30 ס"מ
- 51) $90^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
- 55) א. ניתן להוכיח את טענות: i, iii. ג. $P_{ABLK} = 16\sqrt{5} + 24\sqrt{2} \approx 69.71$ ס"מ
- 59) 22 ס"מ ו-12 ס"מ
- 60) 14 ס"מ
- 61) א. $DC = 16$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ, $NO = 6$ ס"מ, $KN = EO = 7$ ס"מ
- 62) 6 ס"מ
- 63) 8 ס"מ, $AB = 18$ ס"מ, $DC = 10$ ס"מ, $DK = 8$ ס"מ

פרק 8 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים:

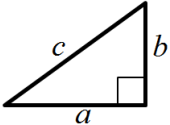
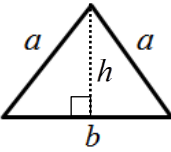
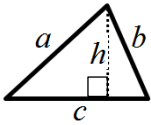
הגדרה - שטח: גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.

שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון:

מטר ריבועי (m^2), סמ"ר ריבועי (סמ"ר cm^2).

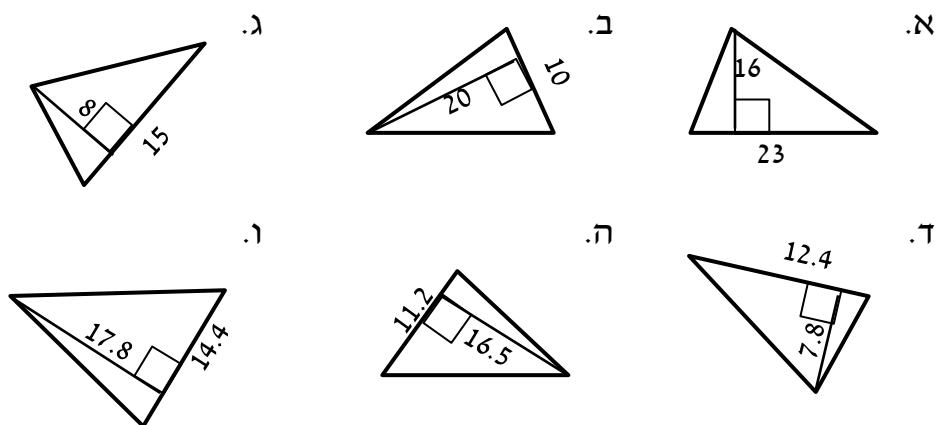
הגדרה - היקף: היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

משולשים:

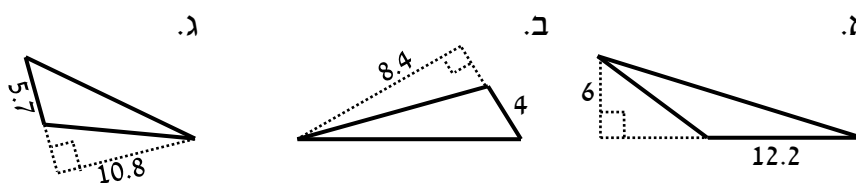
משולש ישר זווית	משולש שווה שוקיים	משולש כללי	סוג
			איור
$S = \frac{a \cdot b}{2}$	$S = \frac{b \cdot h}{2}$	$S = \frac{c \cdot h}{2}$	שטח
$P = a + b + c$	$P = 2a + b$	$P = a + b + c$	היקף

שאלות – שטחים והיקפים של משולשים:

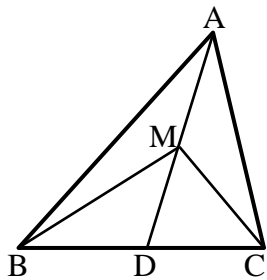
1) מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):



2) מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):



3) הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקדקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים השווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.



4) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC. M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווי שטח.

ב. $S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

מרובעים:

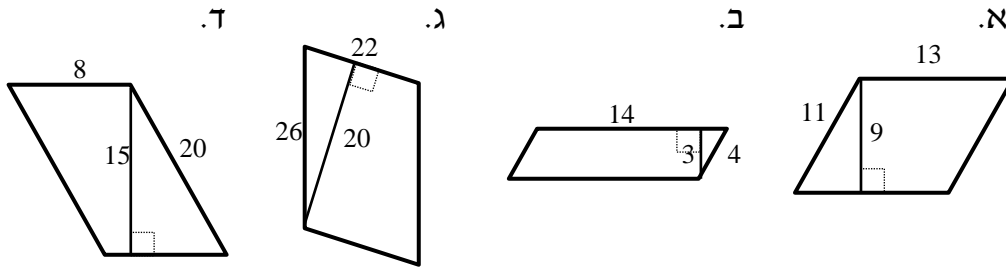
סוג	מקבילית	מלבן	מעוין	ריבוע	טרפז
איור					
שטח	$S = a \cdot h$	$S = a \cdot b$	$S = a \cdot h$ $S = \frac{m_1 \cdot m_2}{2}$	$S = a^2$	$S = \frac{(a+b)h}{2}$
היקף	$P = 2(a+b)$	$P = 2(a+b)$	$P = 4a$	$P = 4a$	$P = a+b+c+d$

הערות כלליות:

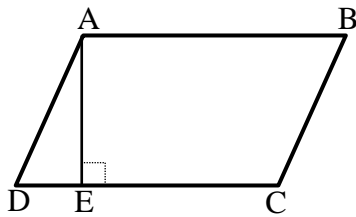
- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע"י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה. כך ניתן לקבל את הנוסחה: $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ כאשר h_a ו- h_b הם הגבהים לצלעות a ו- b בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע"י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע"י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו $h=c$ נקבל: $S = \frac{(a+b)c}{2}$.
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע"י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

שאלות עם מקבילית:

5) חשב את השטחים וההיקפים של המקבילות הבאות (כל המידות בס"מ):



6) נתונה מקבילית ABCD.



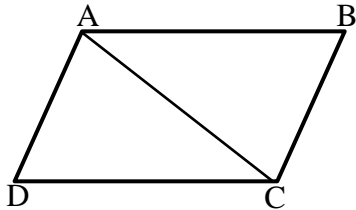
מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ. ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.

מצא את אורך הצלע BC.

7) נתונה מקבילית ABCD.

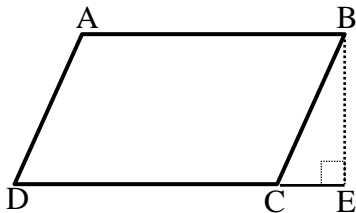


מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.

ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.

חשב את היקף המקבילית.

8) נתונה מקבילית ABCD.

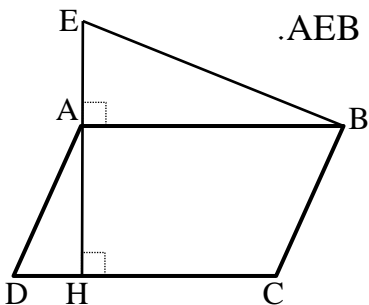


מורידים גובה מהקדקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE. שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר. נתון: $CE = 6$ ס"מ.

א. מצא את אורך הגובה BE.

ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.

9) נתונה מקבילית ABCD.



מעלים אנך מהקדקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB.

מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ.

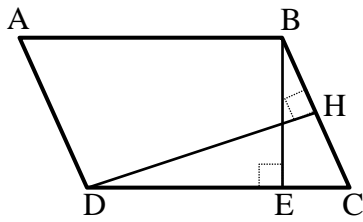
נתון: $AE = 8$ ס"מ, $AD = 13$ ס"מ.

שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

10) במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH.



לצלעות CD ו-BC בהתאמה.

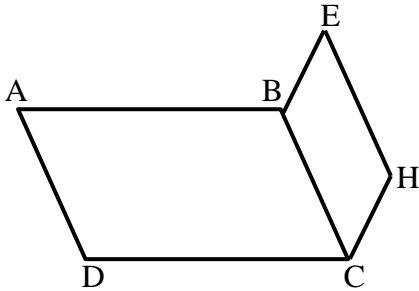
נתון: $BE = 12$ ס"מ, $BC = 14.4$ ס"מ, $DH = 15$ ס"מ.

א. חשב את שטח המקבילית ABCD.

ב. חשב את אורך הצלע AB.

ג. חשב את היקף המקבילית.

11) נתונה המקבילית ABCD. על הצלע BC בונים



מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ.

ידוע כי היקף הצורה ABEHCD הוא 94 ס"מ.

נתון: $BC = 15$ ס"מ.

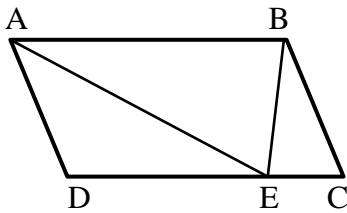
א. חשב את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

12) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודה E נמצאת על DC.

$$\text{הוכח כי: } S_{AEB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

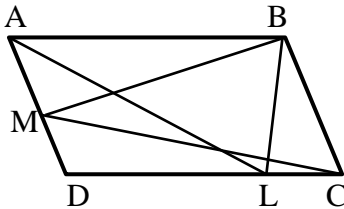


13) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודות M ו-L נמצאות על

הצלעות AD ו-DC בהתאמה.

$$\text{הוכח כי: } S_{BMC} = S_{ALB}$$



שאלות עם מלבן:

14) במלבן ABCD אורכי הצלעות הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ.

מצאו את ההיקף של המלבן.

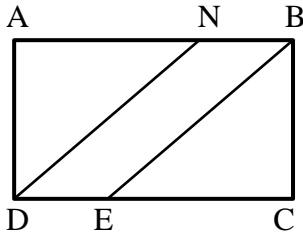
15) במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ.

מצאו את שטח המלבן.

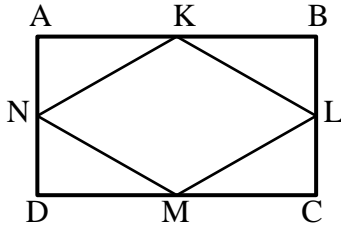
16) היקפו של מלבן ABCD הוא 48 ס"מ. מעבירים את האלכסונים AC ו-BD

אשר נחתכים בנקודה M. ידוע כי שטח המשולש AMB הוא 35 סמ"ר.

מצא את האורך של האלכסון AC.



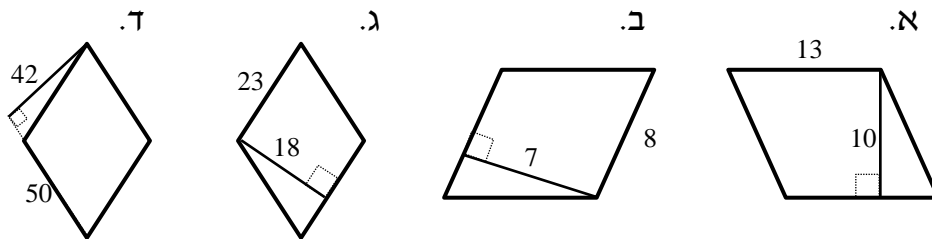
17) המרובע ABCD הוא מלבן.
 הישרים DN ו-BE מקבילים.
 נתון: $AB = 32$ ס"מ, $DN = 30$ ס"מ
 ו- $BN = 8$ ס"מ. הוכח כי מרובע NBED
 הוא מקבילית וחשב את שטחה.



18) הנקודות K, L, M ו-N הן אמצעי
 הצלעות AB, BC, CD ו-AD בהתאמה
 במלבן ABCD. נתון כי היקף המלבן
 הוא 120 ס"מ וכי שטחו הוא 836 סמ"ר.
 חשב את שטחו של המרובע KLMN.

שאלות עם מעוין:

19) חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס"מ):



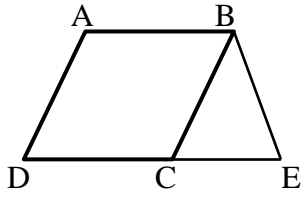
20) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
 נתון: $AO = 3$ ס"מ, $BO = 4$ ס"מ. מצא את אורך צלע המעוין.

21) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
 נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BO = 8$ ס"מ. מצא את AO.

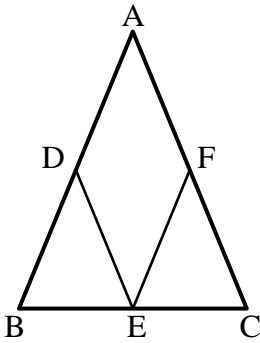
22) במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין.
 נתון: $AB = 20$ ס"מ.

- א. חשב את אורך האלכסון BD.
 ב. חשב את שטח המעוין.

23) נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס"מ ושטח המעוין
 הוא 35 סמ"ר. חשב את היקף המעוין.



- 24) נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס"מ. מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי: $CE = 6$ ס"מ.
- א. איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.
- ב. חשב את היקף הצורה ABCE.

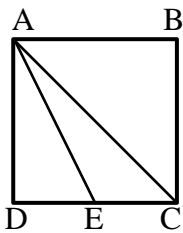


- 25) נתון משולש שווה שוקיים ABC, $(AB = AC)$. מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-D, E ו-F ומעבירים את הקטעים DE ו-EF כך שהמרובע ADEF הוא מעוין.
- נתון: $BC = 12$ ס"מ, וכי היקף המשולש ABC הוא 48 ס"מ.
- א. מצא את אורך צלע המעוין ADEF.
- ב. חשב את היקף המעוין ADEF.

שאלות עם ריבוע:

- 26) נתון ריבוע ABCD בעל אורך צלע של 6 ס"מ.
- א. חשב את שטח הריבוע.
- ב. חשב את היקף הריבוע.
- ג. חשב את אורך האלכסון בריבוע.

- 27) שטחו של ריבוע ABCD הוא 49 סמ"ר.
- א. מהו אורך צלע הריבוע?
- ב. מהו אורך האלכסון בריבוע?
- ג. מהו היקף הריבוע?



- 28) בריבוע ABCD מעבירים את הקטע AE כך ש-E היא אמצע הצלע DC ואת האלכסון AC. שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.
- א. מצא את אורך צלע הריבוע.
- ב. מצא את אורך אלכסון הריבוע.
- ג. מצא את אורך הקטע AE.

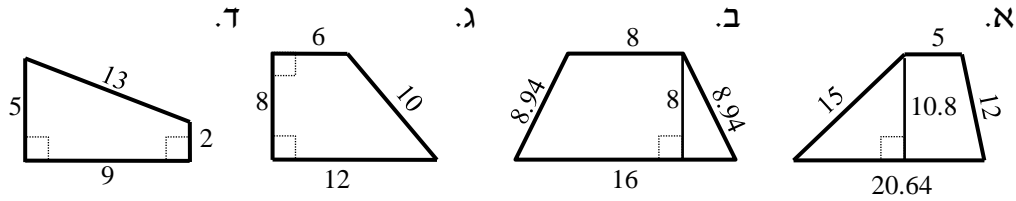
- 29) חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

- 30) נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם. אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו-9 ס"מ. חשב את היקף הריבוע.

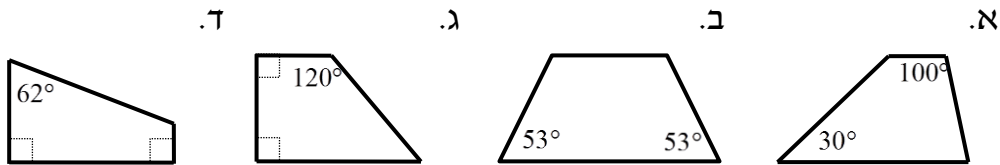
- 31) נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם. שטח הריבוע הוא 36 סמ"ר ואורך המלבן גדול ב-8 ס"מ מרוחבו. חשב את שטח המלבן.

שאלות עם טרפז:

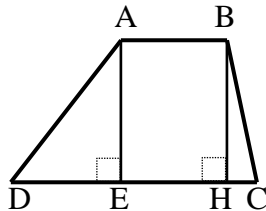
32) חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):



33) מצא את כל הזוויות בכל אחד מהטרפזים הבאים:

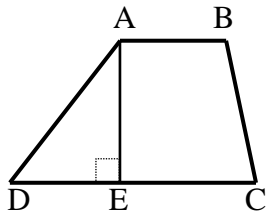


34) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.



מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ.
ידוע כי: $DE = 6$ ס"מ, $HC = 2$ ס"מ.
שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר.
מצא את אורך בסיס הטרפז AB.

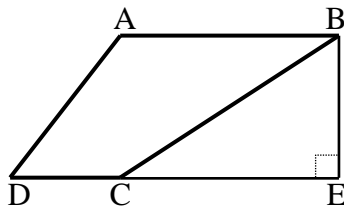
35) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.



מורידים גובה AE מהקדקוד A.
היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי:
 $AD = 18$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ.

א. מצא את אורך הבסיס DC.
ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.

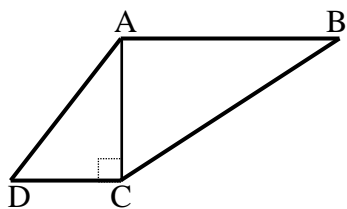
36) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.



מהקדקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE
כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.
ידוע כי: $AB = 20$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ.
וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.

א. מצא את הגובה BE.
ב. נתון כי: $\angle D = 60^\circ$, $\angle BCD = 130^\circ$.
חשב את זווית A ואת זוויות המשולש BCE.

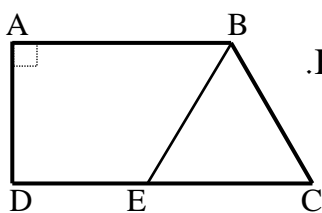
37) נתון טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.



האלכסון AC הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.
 ידוע כי: $AD = AB = 13$ ס"מ, $BC = 17.7$ ס"מ.
 היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\angle B = 42.71^\circ$.

- מצא את אורך הבסיס DC .
- חשב את שטח הטרפז.
- חשב את זווית C .

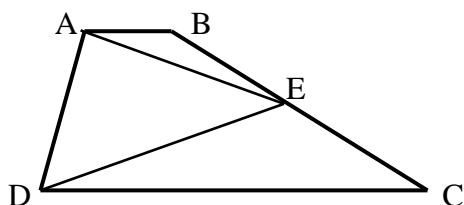
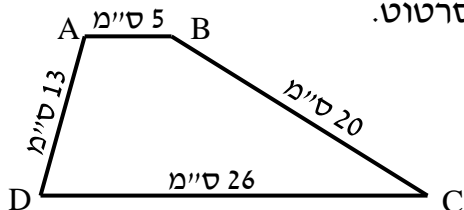
38) הטרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$ הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).



מהנקודה E שעל הבסיס DC מעבירים את הקטע BE
 כך שהמשולש BCE הוא שווה צלעות עם: $BC = 14$ ס"מ.
 היקף הטרפז $ABCD$ הוא 67 ס"מ ו- AD הוא 10 ס"מ.

- מהו היקף הטרפז $ABED$?
- חשב את שטח הטרפז $ABED$.

39) נתון טרפז $ABCD$ שאורכי צלעותיו נתונים בסרטוט.
 חשב את שטח הטרפז (פתור כתרגיל חישוב).



40) המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
 הנקודה E היא אמצע השוק BC .

הוכח כי: $S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 184 סמ"ר ב. 100 סמ"ר ג. 60 סמ"ר ד. 48.36 סמ"ר
ה. 92.4 סמ"ר ו. 128.16 סמ"ר.
- (2) א. 36.6 סמ"ר ב. 16.8 סמ"ר ג. 30.78 סמ"ר.
- (5) א. 48 ס"מ = P , 117 סמ"ר = S ב. 36 ס"מ = P , 42 סמ"ר = S
ג. 96 ס"מ = P , 440 סמ"ר = S ד. 56 ס"מ = P , 120 סמ"ר = S .
- (6) א. 10 ס"מ = AB ב. 8 ס"מ = BC .
- (7) 82 ס"מ = P .
- (8) א. 8 ס"מ = BE ב. 14 ס"מ = AB .
- (9) א. 16 ס"מ = AB ב. 58 ס"מ = P .
- (10) א. 216 סמ"ר = S ב. 18 ס"מ = AB ג. 64.8 ס"מ = P .
- (11) א. 25 ס"מ = AB ב. 80 ס"מ = P .
- (14) 40 ס"מ.
- (15) 60 סמ"ר.
- (16) 17.2 ס"מ $\approx 2\sqrt{74}$.
- (17) 144 סמ"ר.
- (18) 418 סמ"ר.
- (19) א. 52 ס"מ = P , 130 סמ"ר = S ב. 32 ס"מ = P , 56 סמ"ר = S
ג. 92 ס"מ = P , 414 סמ"ר = S ד. 200 ס"מ = P , 2100 סמ"ר = S .
- (20) 5 ס"מ.
- (21) 8.94 ס"מ $\approx \sqrt{80}$.
- (22) א. $AB = 20\sqrt{3}$ ס"מ ב. 173.2 סמ"ר.
- (23) 14.28 ס"מ.
- (24) א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש- $BE=BC$. ב. 38 ס"מ = P .
- (25) א. 9 ס"מ. ב. 36 ס"מ = P .
- (26) א. 36 סמ"ר ב. 24 ס"מ ג. 8.48 ס"מ.
- (27) א. 7 ס"מ ב. 9.89 ס"מ ג. 28 ס"מ.
- (28) א. 6.32 ס"מ ב. 8.94 ס"מ ג. 7.07 ס"מ.

15 ס"מ (29)

15 ס"מ (30)

20 סמ"ר (31)

א. $S = 52.64$ ס"מ , $P = 138.456$ סמ"ר . ב. $S = 41.88$ ס"מ , $P = 96$ סמ"ר . (32)

ג. $S = 36$ ס"מ , $P = 72$ סמ"ר . ד. $S = 29$ ס"מ , $P = 31.5$ סמ"ר .

א. 80° , 150° . ב. 127° , 127° . ג. 60° . ד. 118° . (33)

7 ס"מ = AB (34)

א. $DC = 22$ ס"מ . ב. $AE = 15$ ס"מ . (35)

א. $BE = 14$ ס"מ . ב. $\angle A = 120^\circ$, $\angle CBE = 40^\circ$, $\angle BCE = 50^\circ$, $\angle E = 90^\circ$. (36)

א. $DC = 5$ ס"מ . ב. $S = 108$ סמ"ר . ג. $\angle C = 137.29^\circ$. (37)

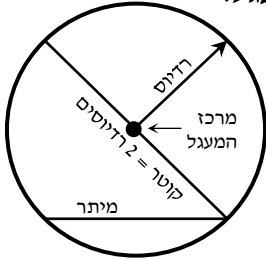
א. $P = 53$ ס"מ . ב. $S = 215$ סמ"ר . (38)

186 סמ"ר (39)

פרק 9 – גיאומטריה אוקלידית - המעגל:

הגדרות:

- מעגל – המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע. הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.
- רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.
- היקף מעגל $= 2\pi R$.
- שטח מעגל $= \pi R^2$.
- קשת – חלק מהיקף המעגל.
- גזרה – חלק משטח המעגל.
- זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית – זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים.

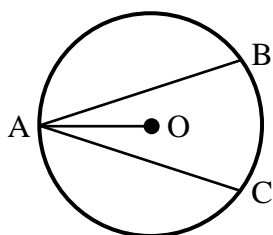


משפטים העוסקים במיתרים במעגל:

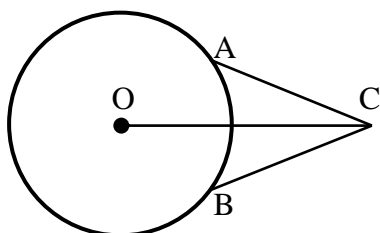
1. מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהפך.
2. על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהפך.
3. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
(משפט הפוך ל-3) מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

שאלות יסודיות – קשתות ומיתרים במעגל:

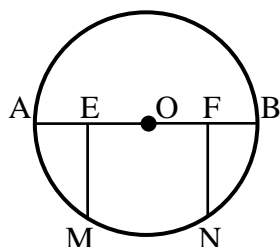
(1) AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O. הוכח כי AO חוצה את זווית BAC.



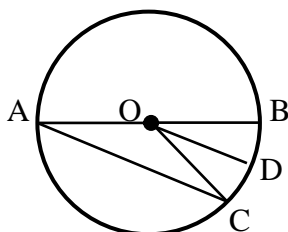
(2) A ו-B הן שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל שמרכזו O. נקודה C הנמצאת מחוץ למעגל מקיימת כי: $AC = BC$. הוכח כי OC חוצה את זווית C.



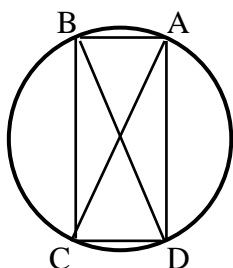
(3) הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. נתון כי: $FN \perp AB$, $EM \perp AB$, $EO = FO$. הוכח כי $MN = EF$.



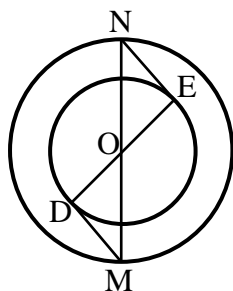
(4) AB הוא קוטר במעגל שלפניך. AC הוא מיתר ו-O מרכז מעגל. הרדיוס OD חוצה את זווית BOC. הוכח כי DO מקביל ל-AC.

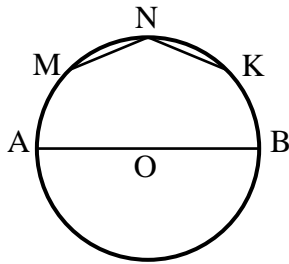


(5) במעגל שלפניך AC ו-BD הם קטרים. הוכח כי המרובע ABCD הוא מלבן.

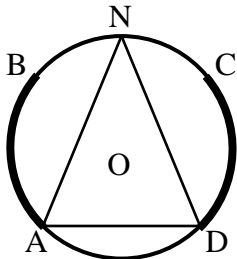


(6) בסרטוט שלפניך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. הקטע MN הוא קוטר במעגל הגדול והקטע DE הוא קוטר במעגל הקטן. מעבירים את הקטעים MD ו-NE. הוכח כי MD שווה ל-NE.

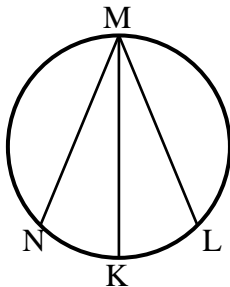




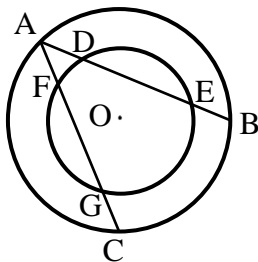
7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
את הקשת העליונה של AB מחלקים ל-4
קשתות שוות, כלומר: $\widehat{AM} = \widehat{MN} = \widehat{NK} = \widehat{KB}$.
חשב את זווית KMN.



8) במעגל שלפניך נתון כי הקשתות המסומנות שוות
ז"א: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. הנקודה N היא אמצע הקשת \widehat{BC} .
הוכח כי המשולש AND הוא שווה שוקיים.



9) המיתרים MN ו-ML שווים זה לזה.
המיתר MK חוצה את זווית NML.
א. הוכח כי $\triangle KMN \cong \triangle KLM$.
ב. הוכח כי MK הוא קוטר במעגל.

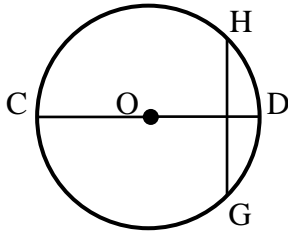


10) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
מעבירים את המיתרים AB ו-AC במעגל הגדול.
ידוע כי שני המיתרים שווים זה לזה.
מסמנים את נקודות החיתוך של המיתרים עם המעגל
הקטן ב-D ו-E עבור המיתר AB, ו-F ו-G עבור
המיתר AC. הוכח: $DE = FG$.

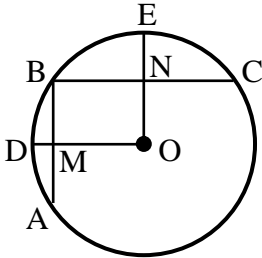
משפט אנך אמצעי למיתר:

4. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר.
(משפט הפוך ל-4 (1)) רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.
(משפט הפוך ל-4 (2)) קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

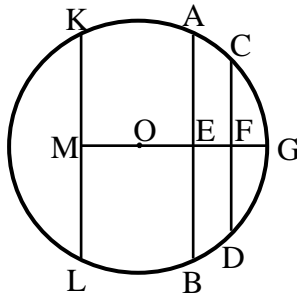
שאלות – אנך אמצעי למיתר:



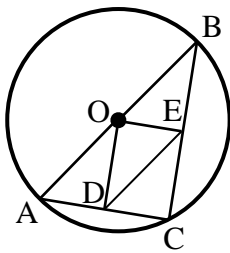
- 11) במעגל שמרכזו O המיתר GH מאונך לקוטר CD.
 א. הוכח כי $GC = HC$.
 ב. נתון כי: $\widehat{HDG} = 80^\circ$.
 בת כמה מעלות הקשת \widehat{CG} ?



- 12) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. מעבירים את הרדיוסים OD ו-OE אשר חותכים את המיתרים AB ו-BC בנקודות M ו-N בהתאמה. ידוע כי מרובע ONBM הוא מלבן. נתונות המידות הבאות: $R = 8$ ס"מ, $MD = 1.5$ ס"מ, $NE = 3.5$ ס"מ. חשב את אורך כל אחד מהמיתרים AB ו-BC.



- 13) AB, CD ו-KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O, והם חותכים את הקטע MG, העובר במרכז המעגל, בנקודות E, F ו-M בהתאמה. נתון $KL \parallel CD$, $CF = DF$.
 א. הוכח: $KL = LM$.
 ב. נתון בנוסף כי: $ML = BE$, $AB \perp MG$.
 הוכח: $MO = EO$.



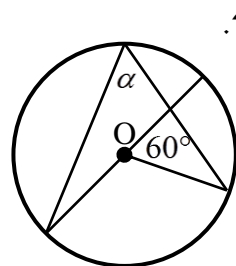
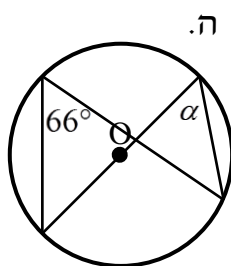
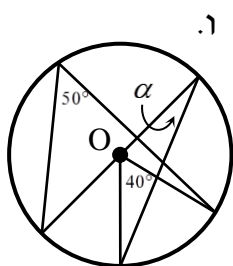
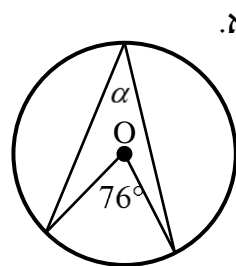
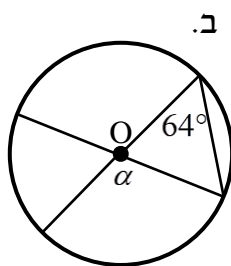
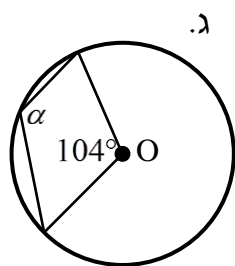
- 14) ABC הוא משולש החסום במעגל O. המיתר AB הוא קוטר במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה. מעבירים את הקטעים OD ו-OE וידוע כי: $OD \perp AC$, $OE \perp BC$. הוכח כי DE שווה באורכו לרדיוס המעגל.

משפטים העוסקים בזוויות במעגל:

5. שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן. (משפט הפוך ל-5) זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.
6. זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
7. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה. (משפט הפוך ל-7) מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

שאלות – זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:

15) נתונים המעגלים הבאים שמרכזם הוא O. חשב את הזווית α בכל אחד מהמקרים.

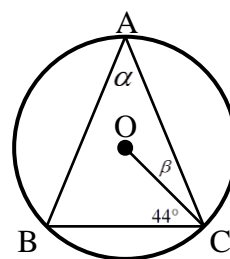
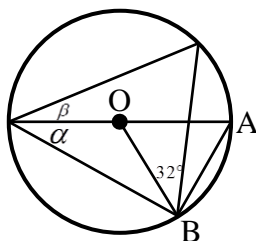
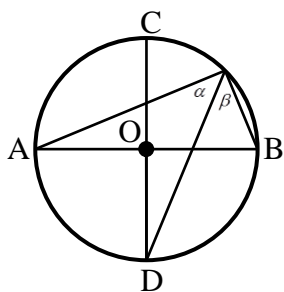


16) במעגלים הבאים שמרכזם O מופיעים הנתונים לידם. חשב את הזוויות α ו- β בכל אחד מהמקרים.

ג. AB, CD קטרים מאונכים זה לזה.

ב. $\triangle AOB$ - שווה צלעות

א. $AB = AC$

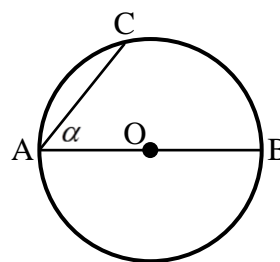
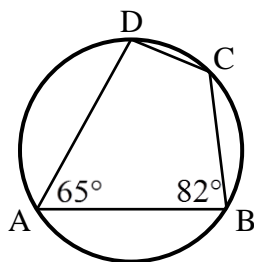
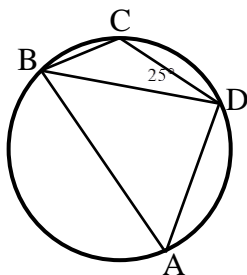


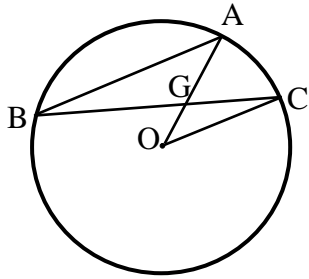
17) חשב את המבוקש בכל מקרה:

ג. $\widehat{DC} = 60^\circ$. חשב $\angle BAD$.

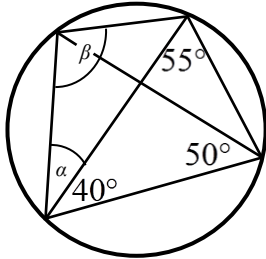
ב. $\widehat{DC} = 52^\circ$. חשב: $\widehat{AD}, \widehat{BC}, \widehat{AB}$

א. AB קוטר, $\widehat{AC} = 84^\circ$. חשב את α .

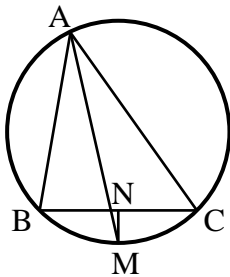




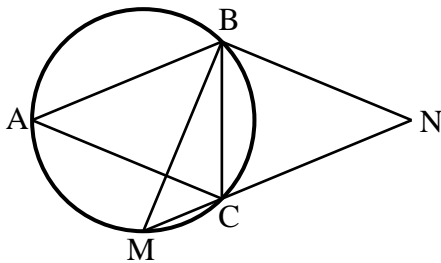
18) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
נתון: $AB \parallel CO$, $\angle AGC = 60^\circ$.
חשב את גודלה של הזווית $\angle AOC$.



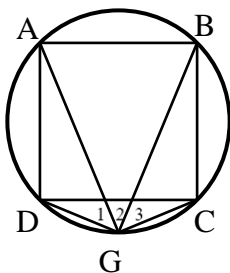
19) חשב את גודל הזוויות α ו- β במעגל הנתון.



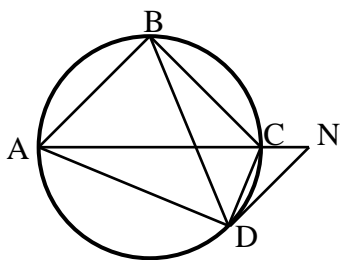
20) המשולש ABC חסום במעגל.
המיתר AM חוצה את זווית A.
מעבירים אנך מהנקודה M לצלע BC
החותך אותה בנקודה N.
הוכח: $BN = CN$.



21) בסרטוט שלפניך נתון כי המשולשים ABC ו-BMN הם שווים שוקיים ($AB = AC$, $BM = BN$).
זווית הראש במשולש BMN היא 94° .
חשב את זווית ACB.

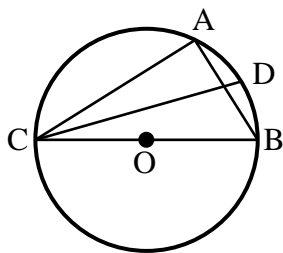


22) במעגל שלפניך חסום ריבוע ABCD.
הנקודה G נמצאת על היקף המעגל.
ממנה מעבירים מיתרים לכל קדקוד
כך שנוצרות הזוויות $\angle G_1$, $\angle G_2$, $\angle G_3$.
הוכח כי $\angle G_1 = \angle G_2 = \angle G_3$ ומצא אותן.

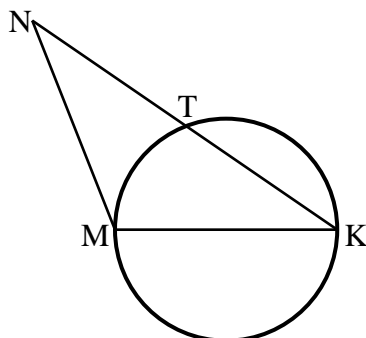


23) המרובע ABCD חסום במעגל. ממשיכים את האלכסון AC עד לנקודה N ומחברים אותה עם הקדקוד D כך שמתקיים: $AB \parallel DN$.
הוכח כי זוויות המשולשים $\triangle ADN$ ו- $\triangle BDC$ שוות.

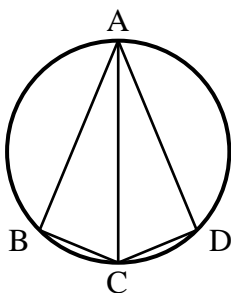
שאלות – זווית היקפית הנשענת על קוטר:



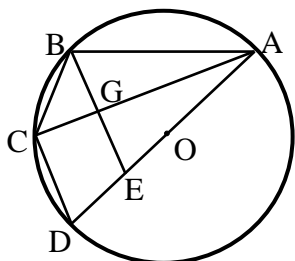
24) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-BC הוא קוטר. מעבירים את המיתר CD המקיים: $\angle DCB = 20^\circ$. מצא את זווית CAD.



25) MK הוא קוטר במעגל שלפניך. הקטע KN חותך את המעגל בנקודה T. מתקיים: $KT = NT$. הוכח כי: $MK = NM$.

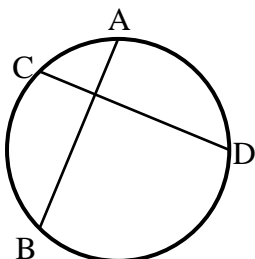


26) מרובע ABCD חסום במעגל כאשר האלכסון AC הוא קוטר וחוצה את זווית BCD. הוכח כי ABCD הוא דלתון.

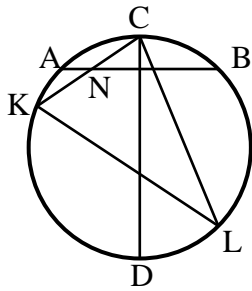


27) AB, AC, AD, BC ו- CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר AD עובר ב-O). הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G. נתון: $BE \parallel CD, BG = GE$. הוכח: $BC = CD$.

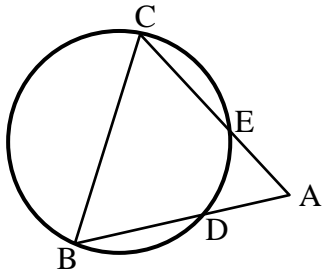
שאלות – זווית פנימית וזווית חיצונית במעגל:



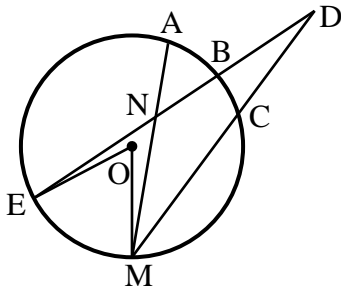
28) המיתרים AB ו-CD מקצים קשתות שזוויותיהן הן: $\widehat{AC} = 40^\circ$ ו- $\widehat{BD} = 140^\circ$. הוכח כי המיתרים מאונכים זה לזה.



29) AB ו-CD הם בהתאמה מיתר וקוטר במעגל אשר מאונכים זה לזה. יוצרים משולש KCL כך ש-N היא נקודת החיתוך של הצלע CK והמיתר AB. הוכח כי: $\angle CNB = \angle CLK$.



30) מהנקודה A יוצאים שני ישרים AB ו-AC החותכים מעגל בנקודות D ו-E בהתאמה. ידוע כי $\widehat{DE} = 45^\circ$, $\widehat{BC} = 165^\circ$, $AB = AC$. הוכח כי משולש ABC הוא שווה צלעות.



31) במעגל שלפניך נתון כי $\widehat{AB} = \widehat{BC}$. הוכח: $\angle EOM = \angle ENM + \angle EDM$.

משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:

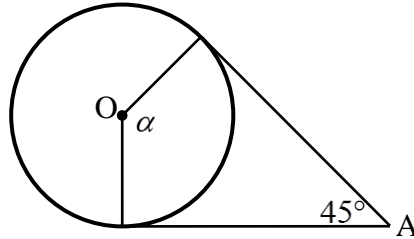
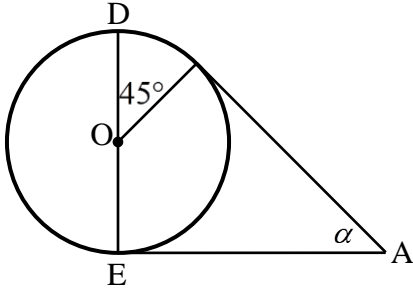
8. משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. (משפט הפוך ל-8) קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
9. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
10. קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.
11. הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

שאלות – משיקים למעגל:

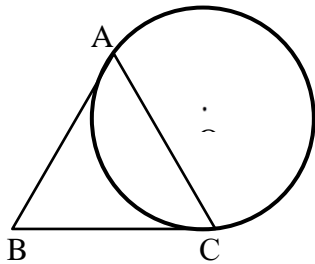
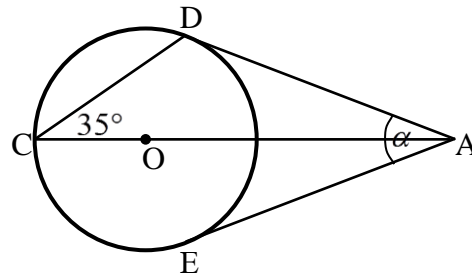
32 באיורים שלפניך נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A שמחוץ למעגל. מרכזי המעגלים מסומנים ב-O. מצא את α בכל מקרה.

ב.

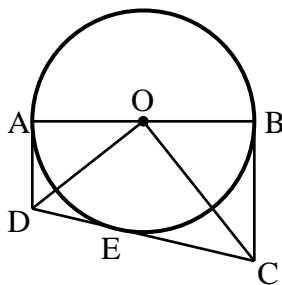
א.



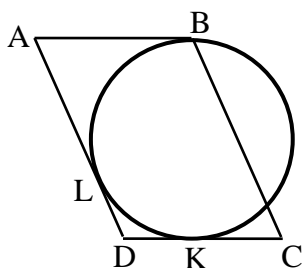
ג.



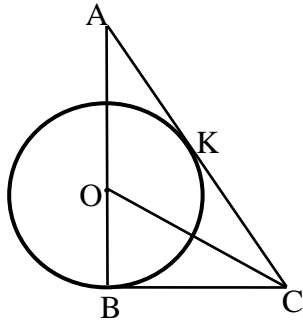
33 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). המעגל O משיק לצלעות AB ו-BC בנקודות A ו-C. הוכח כי ABC הוא שווה צלעות.



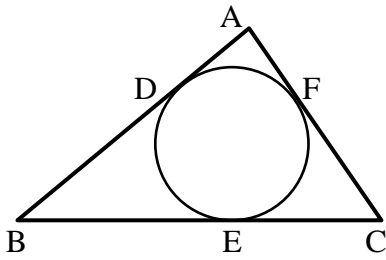
34 במעגל O מעבירים קוטר AB ושלושה משיקים AD, CD ו-BC. E היא נקודת ההשקה של CD עם המעגל. הוכח כי: $\sphericalangle COD = 90^\circ$.



35 הצלעות AB, AD ו-DC של המקבילית ABCD משיקות למעגל בנקודות B, L ו-K בהתאמה (ראה שרטוט). נתון: $BC = 14$ ס"מ, $CK = 6$ ס"מ. חשב את היקף המקבילית.



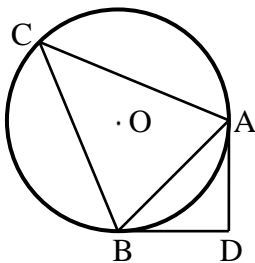
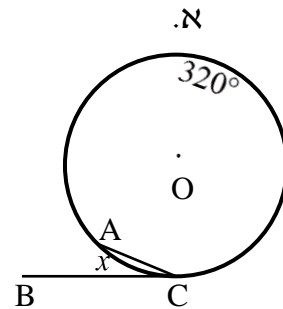
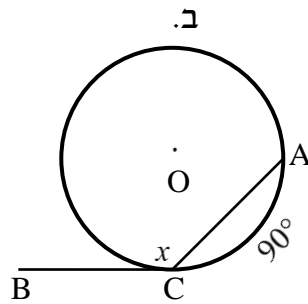
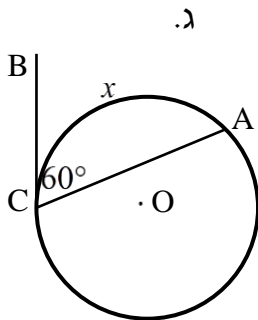
36) הצלעות AC ו-BC של המשולש ABC משיקות למעגל שמרכזו O, בנקודות K ו-B בהתאמה. הצלע AB עוברת בנקודה O. נתון: $AB = 15$ ס"מ, $AK = CK$.
 א. חשב את גודלה של זווית A.
 ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.



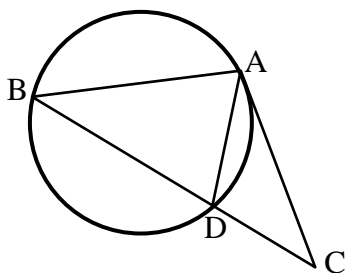
37) משולש ABC חוסם מעגל אשר משיק לצלעותיו בנקודות D, E, F כמתואר באיור. נתון כי: $AC = 18$ ס"מ, $CF = 12$ ס"מ ו- $BD = 14$ ס"מ. מצא את היקף המשולש ABC.

שאלות – משיק ומיתר:

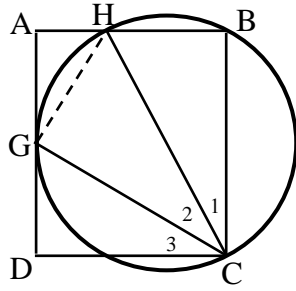
38) באיורים שלפניך נתון מעגל שמרכזו O, מיתר AC ומשיק BC בנקודה C. מצא את x.



39) ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$) החסום במעגל שמרכזו O. מהקדקודים A ו-B מעבירים משיקים אשר נחתכים בנקודה D. ידוע כי זווית הבסיס במשולש ABC היא 68° . חשב את זווית ADB.



40) AC הוא משיק למעגל בנקודה A. BC חותך את המעגל בנקודה D. נתון כי $AD = CD$, הוכח: $AB = AC$.



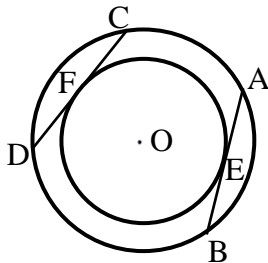
41) הקדקודים B ו-C של המלבן ABCD מונחים על מעגל. הצלע AD משיקה למעגל בנקודה G והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H. הוכח: $\angle C_2 = \angle C_3$. (הדרכה: סמן $\angle AGH = \alpha$.)

משפטים העוסקים בשני מעגלים:

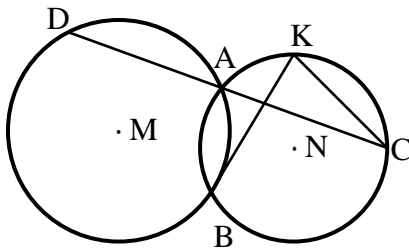
12. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

13. קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

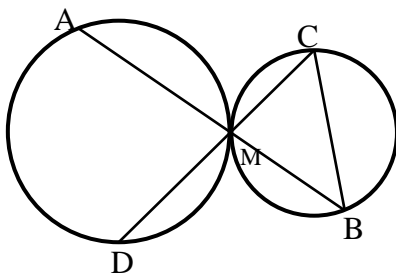
שאלות – שני מעגלים:



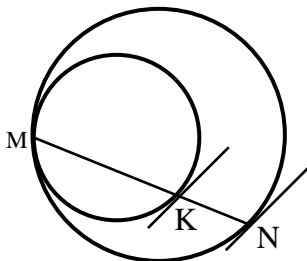
42) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. דרך שתי נקודות E ו-F שעל היקף המעגל הפנימי מעבירים משיקים אשר חותכים את המעגל החיצוני בנקודות A, B, C ו-D. הוכח כי המיתרים AB ו-CD הנוצרים באופן זה שווים.



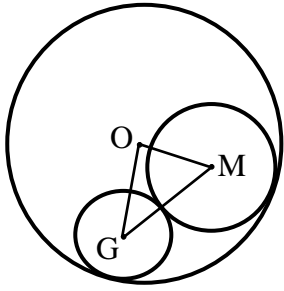
43) שני מעגלים M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B. הישר CD עובר דרך הנקודה A. מעבירים משיק למעגל M החותך את המעגל N בנקודה K. הוכח כי: $CK \parallel BD$.



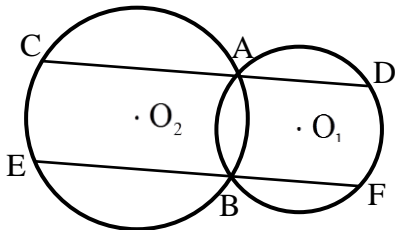
44) שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה M. דרך הנקודה M מעבירים שני ישרים חותכים. האחד חותך את המעגל השמאלי בנקודה A ואת הימני בנקודה B והאחר חותך את המעגל השמאלי בנקודה D ואת הימני בנקודה C. הוכח כי $AD \parallel BC$.



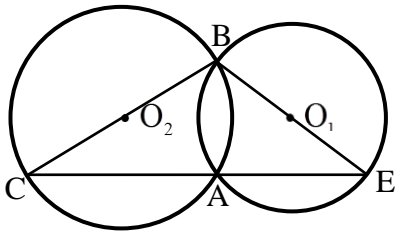
45) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה M. מעבירים מיתר MN במעגל החיצוני אשר חותך את המעגל הפנימי בנקודה K. הוכח כי המשיקים לשני המעגלים בנקודות N ו-K מקבילים זה לזה.



46) המעגלים שמרכזיהם M ו-G משיקים מבחוץ זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O. נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8 ס"מ. חשב את היקף המשולש O.M.G.



47) שני מעגלים O_1 ו- O_2 נחתכים בנקודות A ו-B. דרך נקודות אלו מעבירים ישרים חותכים EF ו-CD לשני המעגלים בהתאמה המקבילים זה לזה. הוכח כי $CD = EF$.



48) שני מעגלים שמרכזיהם O_1 ו- O_2 נחתכים בנקודות A ו-B. מעבירים את הקטרים BC ו-BE. א. הוכח כי הנקודות C, A, E נמצאות על ישר אחד. ב. הוכח כי O_1O_2 הוא קטע אמצעים במשולש BCE.

משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:

14. מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.
15. מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.
16. במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° . (משפט הפוך ל-16) אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° , המרובע בר חסימה במעגל.
17. במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני. (משפט הפוך ל-17) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.
18. כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

שאלות – משולשים ומעגל:

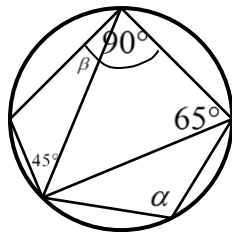
49) AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.

- א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא על AD אז המשולש ABC הוא שווה שוקיים.
 ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החסום את משולש ABC נמצא על AD?

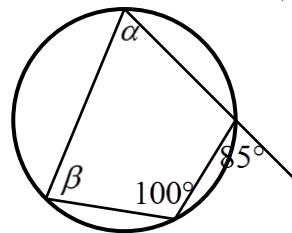
שאלות – מרובעים ומעגל:

50) מצא את הנעלמים בכל אחד מהסרטוטים שלפניך:

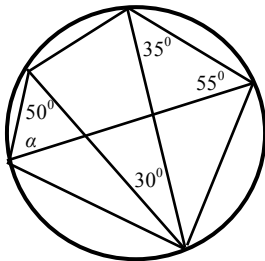
ב.



א.

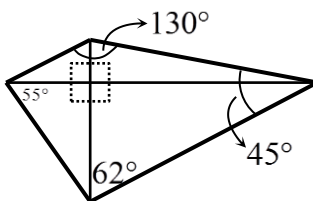


51) חשב את גודלה של הזווית α בסרטוט הבא:

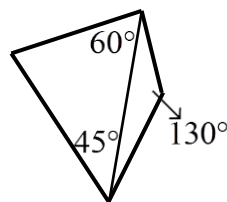


52) קבע אלו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל:

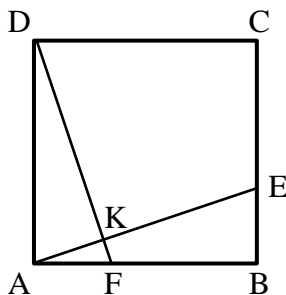
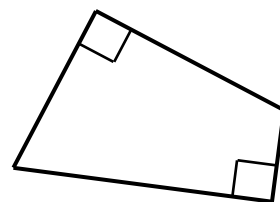
ג.



ב.

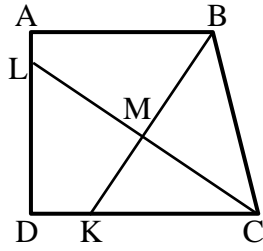


א.

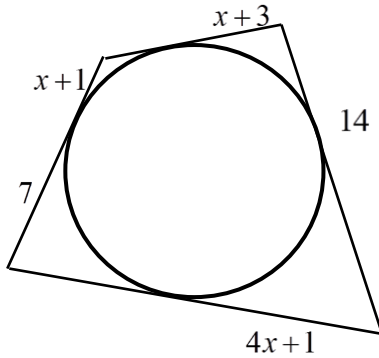


53) בריבוע ABCD נתון כי $AF = BE$.

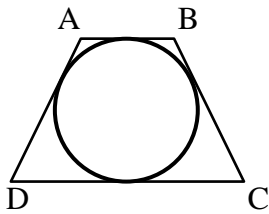
- הנקודה K היא חיתוך של הקטעים AE ו-DF.
 הוכח כי את המרובע DKEC ניתן לחסום במעגל.



54) בטרפז ישר זווית ABCD שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו-DC הנקודות K ו-L נמצאות על הצלעות DC ו-AD בהתאמה, כך שהקטעים BK ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C בהתאמה. חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M. הוכח: את המרובע DKML ניתן לחסום במעגל. הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



55) חשב את גודלו של x בשרטוט הבא:



56) בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) שהיקפו 60 ס"מ וזוויות הבסיס החדות שלו הן 60° חסום מעגל. מצא את אורכי צלעות הטרפז.

שטחים והיקפים עם מעגלים:

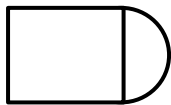
שאלות – שטחים והיקפים במעגל:

57) ענה על השאלות הבאות:

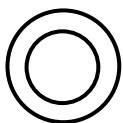
א. היקפו של עיגול הוא 44 ס"מ. חשב את שטחו.



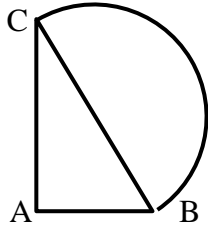
ב. הצורה שבאיור היא $3/4$ עיגול. היקף הצורה שווה ל-45 ס"מ. חשב את אורך הרדיוס של העיגול.



ג. שטח צורה המורכבת מריבוע וחצי עיגול הוא 30 סמ"ר. חשב את רדיוס חצי העיגול.



ד. שטח טבעת הוא 55π סמ"ר. הרדיוס הפנימי הוא 3 ס"מ. חשב את הרדיוס החיצוני של הטבעת.



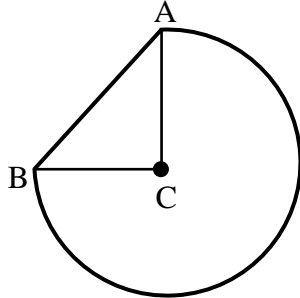
58) נתון משולש ישר זווית ABC , ($\sphericalangle A = 90^\circ$).

על היתר BC בונים חצי עיגול.

נתון: $AB = 10$ ס"מ, $AC = 24$ ס"מ, $BC = 26$ ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



59) באיור שלפניך שלושה רבעי עיגול החסומים ע"י

הקטע AB ומשולש ישר זווית ABC (C מרכז העיגול).

ידוע כי רדיוס העיגול הוא 14 ס"מ וכי אורך

הקטע AB הוא 19.8 ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

60) באיור שלפניך נתון טרפז שווה שוקיים $ABCD$, ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).

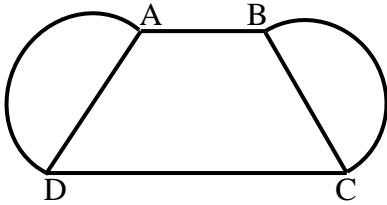
על שוקי הטרפז בונים חצאי עיגולים.

נתון: $AB = 10$ ס"מ, $CD = 16$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ.

אורך גובה הטרפז הוא 11.6 ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



61) נתון טרפז $ABCD$, ($AB \parallel CD$).

מעבירים את האלכסון AC אשר

מאונך לבסיסים AB ו- DC של הטרפז.

על השוק BC בונים חצי עיגול.

נתון: $AB = 24$ ס"מ, $AC = 18$ ס"מ.

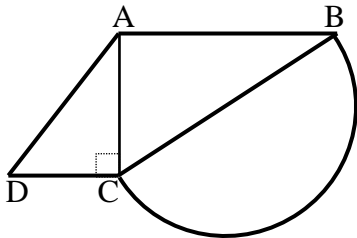
שטח הטרפז הוא 283.5 סמ"ר.

א. מצא את הבסיס DC .

ב. חשב את רדיוס העיגול.

ג. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ד. חשב את שטח הצורה המורכבת.



62) המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.

על הצלעות BC ו- AD בונים שני רבעי

עיגול זהים. מעבירים את האלכסון AC .

ידוע כי האלכסון AC מאונך לשוק BC .

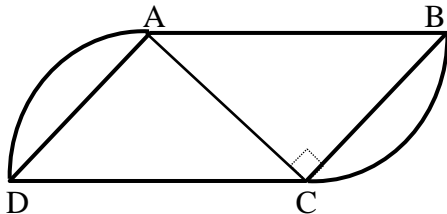
נתון: $AC = 15$ ס"מ, $AB = 17$ ס"מ.

א. מצא את הצלע BC .

ב. חשב את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס העיגול.

ד. חשב את היקף הצורה המורכבת.



63 נתון מעגל שאורך רדיוסו הוא 16 ס"מ. חשב את אורך הקשת ואת שטח הגזרה המתאימות לזווית מרכזית בכל אחד מהמקרים הבאים:

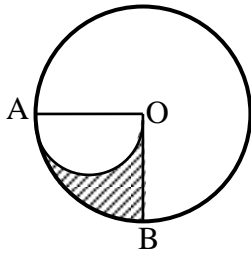
א. 60° .

ב. 45° .

ג. 270° .

ד. 17° .

64 על הרדיוס OA של מעגל O בונים חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA. ידוע כי $\angle BOA = 90^\circ$.



א. חשב את השטח המקווקו OBA

אם ידוע כי $OA = 10$ ס"מ.

ב. הוכח באופן כללי כי שטח הגזרה OBA

שווה לשטח חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.

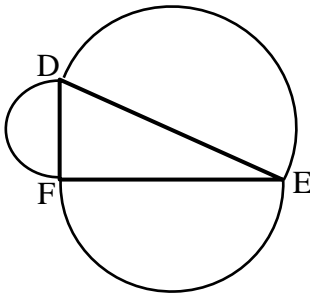
65 על הצלעות של משולש ישר זווית $\triangle DEF$ ($\angle F = 90^\circ$)

בונים חצאי מעגלים.

הוכח כי שטח חצי המעגל הבנוי על היתר

שווה לסכום שטחי חצאי המעגלים הבנויים

על הניצבים.

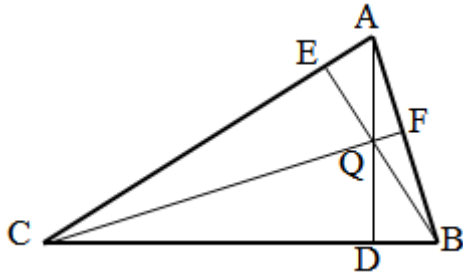


תשובות סופיות:

- (7) 135° .
- (11) א. 140° .
- (12) $BC = 13$ ס"מ, $AB = 9$ ס"מ.
- (15) א. 38° ב. 128° ג. 128° ד. 60° ה. 66° ו. 30° .
- (16) א. $\alpha = 46^\circ, \beta = 23^\circ$ ב. $\alpha = 30^\circ, \beta = 28^\circ$ ג. $\alpha = \beta = 45^\circ$.
- (17) א. $\alpha = 48^\circ$ ב. $\widehat{AD} = 164^\circ, \widehat{BC} = 78^\circ, \widehat{AB} = 118^\circ$ ג. 55° .
- (18) 20° .
- (19) $\alpha = 35^\circ, \beta = 95^\circ$.
- (21) 68.5° .
- (22) $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3 = 45^\circ$.
- (24) 110° .
- (32) א. $\alpha = 135^\circ$ ב. $\alpha = 30^\circ$ ג. $\alpha = 40^\circ$.
- (35) 48 ס"מ.
- (36) א. 30° ב. 5 ס"מ.
- (37) 64 ס"מ.
- (38) א. $x = 20^\circ$ ב. $x = 135^\circ$ ג. $x = 120^\circ$.
- (39) 92° .
- (46) 16 ס"מ.
- (50) א. $\alpha = 80^\circ, \beta = 85^\circ$ ב. $\alpha = 110^\circ, \beta = 20^\circ$.
- (51) $\alpha = 70^\circ$.
- (52) ניתן לחסום את מרובע א' בלבד.
- (55) $x = 2$.
- (56) 15 ס"מ, 15 ס"מ, 24 ס"מ, 6 ס"מ.
- (57) א. $S = \frac{484}{\pi}$ סמ"ר. ב. 6.706 ס"מ. ג. 2.32 ס"מ. ד. 8 ס"מ. $R =$
- (58) א. 74.84 ס"מ. ב. 385.46 סמ"ר. $S =$
- (59) א. 85.77 ס"מ. ב. 559.814 סמ"ר. $S =$
- (60) א. 63.7 ס"מ. ב. 263.89 סמ"ר. $S =$
- (61) א. 7.5 ס"מ. ב. 15 ס"מ. ג. 98.12 ס"מ. $P =$ ד. 636.929 סמ"ר. $S =$
- (62) א. 8 ס"מ. ב. 50 ס"מ. ג. 5.65 ס"מ. ד. 51.75 ס"מ. $P =$
- (63) א. $l = 5\frac{1}{3}$ ס"מ, $S = 42\frac{2}{3}\pi$ סמ"ר. ב. $l = 4\pi$ ס"מ, $S = 32\pi$ סמ"ר.
- ג. $l = 24\pi$ ס"מ, $S = 192\pi$ סמ"ר. ד. $l = 1.51\pi$ ס"מ, $S = 12.08\pi$ סמ"ר.
- (64) א. 12.5π סמ"ר.

שאלות מסכמות ללא פרופורציה:

(1) במשולש $\triangle ABC$ מעבירים את שלושת הגבהים: AD , BE , CF .



הגבהים נפגשים בנקודה Q .

א. הוכח: $\angle ACF = \angle ABE$.

ב. הוכח כי מרובע $QDCE$ הוא מרובע בר-חסימה.

ג. הוכח: $\angle ADF = \angle ADE$.

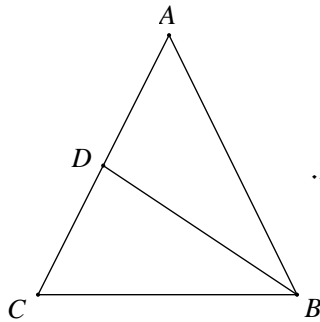
(2) במשולש $\triangle ABC$, E אמצע AB , F על BC ו EF מקביל ל- AC .

G על AC ו- EG מקביל ל- BC .

בלי להשתמש במשפטים על קו אמצעים במשולש הוכח:

א. המשולש $\triangle AEG$ והמשולש $\triangle EBF$ חופפים.

ב. על פי הסעיף הקודם, הוכח כי קטע במשולש החוצה צלע של המשולש ומקביל לצלע השלישית במשולש הוא קטע אמצעים.



(3) במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$),

BD הוא תיכון לשוק AC , $\angle CBD = 30^\circ$.

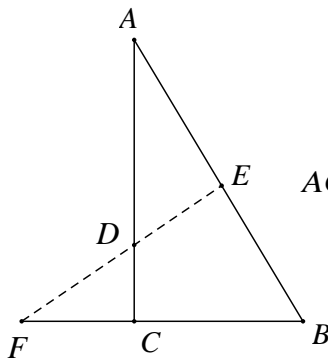
א. הוכח כי משולש $\triangle ABC$ הוא משולש שווה צלעות.

(הדרכה: הורד אנכים AF ו- DE לבסיס BC)

$$\text{והוכח כי: } DE = \frac{1}{2} \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot BD$$

ב. אם נתון כי אורך התיכון BD הוא a ס"מ,

חשב אם אורך צלע המשולש ואת שטחו.



(4) במשולש $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) הנקודה E מונחת

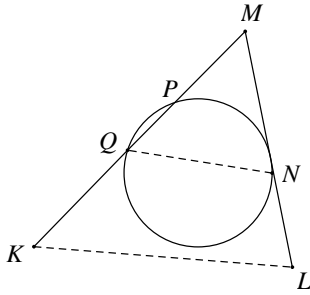
על היתר AB . מהנקודה E מעבירים אנך ליתר,

החותך את המשך הניצב BC בנקודה F ואת הניצב AC

בנקודה D . נתון כי: $AD = 10$ ס"מ,

$EB = 12$ ס"מ, $AE = 8$ ס"מ.

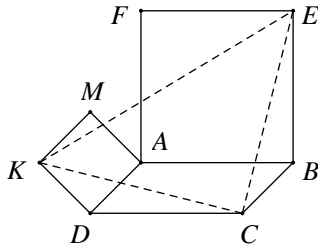
הוכח כי: $\triangle ADE \cong \triangle DFC$.



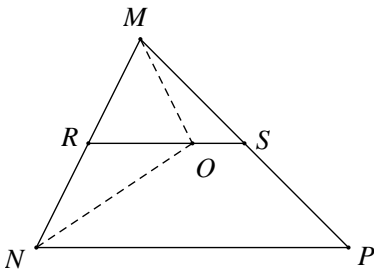
5) מנקודה M הנמצאת מחוץ למעגל מעבירים חותך MPQ ומשיק MN . מנקודה K הנמצאת בהמשך MPQ מעבירים ישר מקביל למיתר QN , החותך את המשך המשיק MN בנקודה L .

א. הוכח כי: $\angle QNL = \angle NPQ$.

ב. הוכח כי המרובע $KPNL$ הוא בר-חסימה.



6) נתונה מקבילית $ABCD$. על הצלע AB בונים ריבוע $ABEF$ ועל הצלע AD ריבוע $ADKM$. הוכח כי המשולש $\triangle KCE$ הוא משולש שווה שוקיים וישר-זווית.



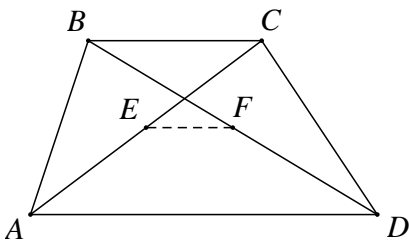
7) א. הוכח: אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אזי המשולש הוא משולש ישר זווית.

ב. בציור הנתון: RS הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle MNP$.

NO הוא חוצה זווית $\angle MNP$.

הוכח כי: $\angle MON = 90^\circ$.

8) הוכח כי: במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר. נסח והוכח את המשפט ההפוך למשפט שבסעיף א.



9) בטרפז $ABCD$ ($BC \parallel AD$).

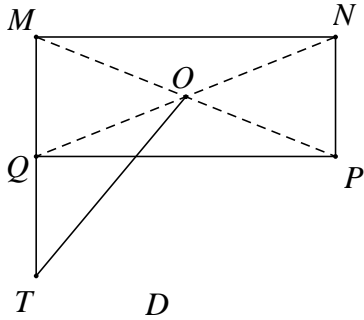
נתון כי: נקודה E נמצאת באמצע אלכסון AC

ונקודה F נמצאת באמצע אלכסון BD .

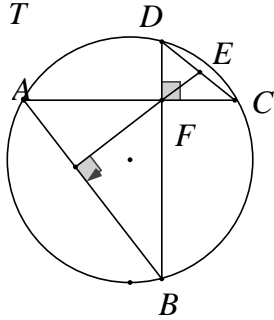
א. הסבר מדוע קטע האמצעים של הטרפז $ABCD$

עובר דרך הנקודות E ו- F .

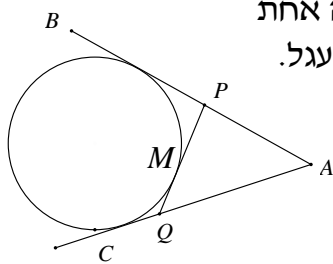
ב. נתון כי: $AD = 4 \cdot EF$. הוכח כי: $AD = 2 \cdot BC$.



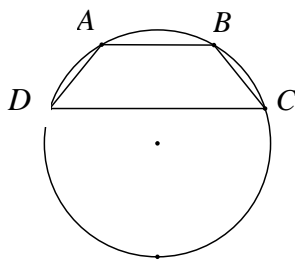
- 10 נתון מלבן $MNPQ$ שבו $QN = 2 \cdot NP$
 אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה O .
 האריכו את הקטע MQ כאורכו $(MQ = QT)$.
 א. הוכח כי: $MO \perp OT$.
 ב. הוכח כי: $OT = PQ$.



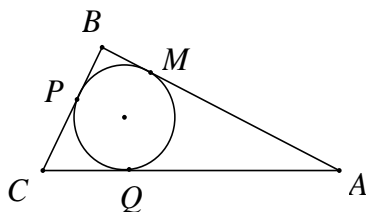
- 11 במעגל שבציור נתון כי המיתר AC מאונך למיתר BD .
 שני המיתרים נחתכים בנקודה F .
 דרך הנקודה F מורידים אנך למיתר AB .
 המשכו של האנך חותך את המיתר DC בנקודה E .
 הוכח כי: $DE = EC$.



- 12 הוכח את המשפט: שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת חיצונית, שווים באורכם. AB ו- AC הם שני משיקים למעגל.
 $AC = a$. נקודה M נמצאת על הקשת \widehat{CB} .
 QP משיק למעגל בנקודה M .
 הוכח כי: היקף המשולש ΔAPQ לא תלוי המקומה של הנקודה M על הקשת \widehat{CB} והוא גודל קבוע השווה ל- $2a$.



- 13 טרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) חסום במעגל כך שמרכז המעגל O נמצא מחוץ לטרפז.
 נתון כי: $AB = 9$ ס"מ, $CD = 21$ ס"מ, גובה הטרפז הוא 8 ס"מ.
 רדיוס המעגל הוא R .
 א. הבע באמצעות R את המרחק ממרכז המעגל O :
 1. לבסיס הקטן של הטרפז AB .
 2. לבסיס הגדול של הטרפז CD .
 ב. חשב את גודלו של רדיוס המעגל R .



- 14 במשולש ישר זווית ΔABC ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$), חוסמים מעגל כך שנקודות ההשקה הן: M , P ו- Q .
 כמו כן, נתון כי: $AQ = 2a$ ו- $QC = a$.
 הבע את היקף המשולש ΔABC באמצעות a .

תשובות סופיות:

(3) ב. אורך צלע המשולש: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a$, שטח המשולש: $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$

(13) א. 1. $\sqrt{R^2 - 4.5^2}$ 2. $\sqrt{R^2 - 10.5^2}$ ב. 10.625 ס"מ $R =$

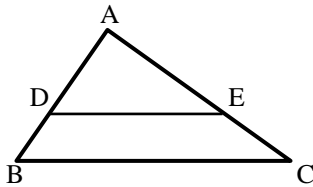
(14) $a \cdot (3 + \sqrt{17})$

פרק 10 – גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון:

משפט תאלס:

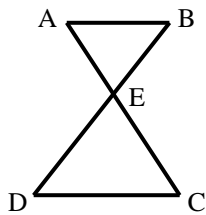
1. שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

2. משפט הפוך: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים הישרים מקבילים.



3. משפט תאלס + ההפוך: $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

4. משפט תאלס המורחב + ההפוך: $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

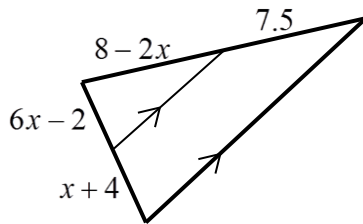


5. משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך: $AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{DC}$.

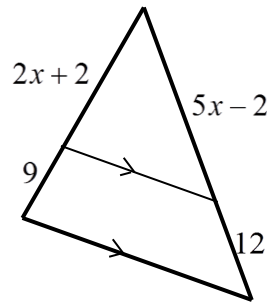
שאלות יסודיות – משפט תאלס:

1) מצא את ערכו של x בשרטוטים הבאים:

ב.



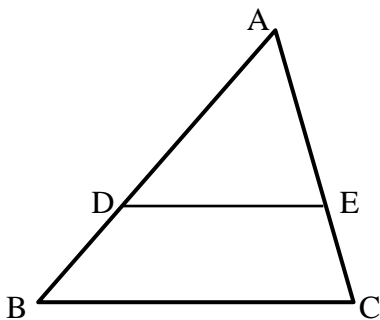
א.



2) בסרטוט שלפניך נתון $DE \parallel BC$.

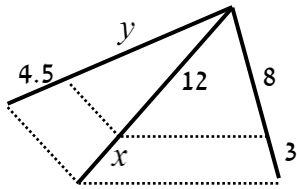
$BD = 12$ ס"מ, $AE = 20$ ס"מ, $AC = 30$ ס"מ.

מצא את אורך הקטע AD .

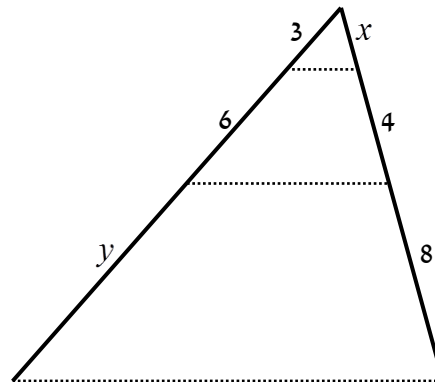


3) חשב את x ואת y בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

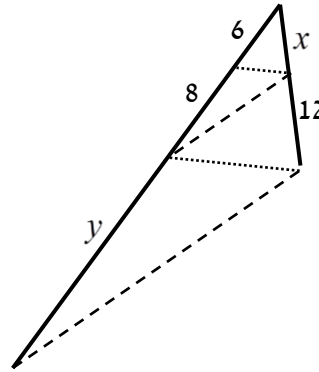
ב.



א.



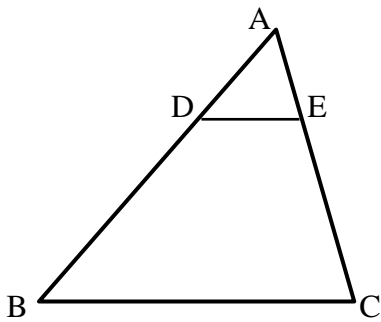
ג.



4) בסרטוט שלפניך נתון:

$$AC = 36 \text{ ס"מ}, \frac{AD}{BD} = \frac{2}{7}, DE \parallel BC$$

מצא את אורכי הקטעים AE ו- CE .

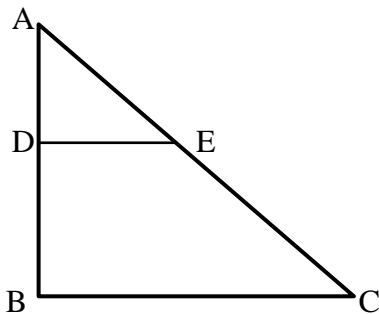


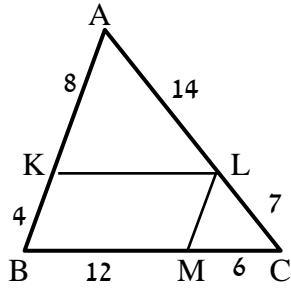
5) במשולש שלפניך נתון $DE \parallel BC$.

כמו כן: $\angle ADE = 90^\circ$ וכן: $AE = BD = 10$ ס"מ.

$DE = 8$ ס"מ. מצא את אורכי

הקטעים AD , CE ו- BC .



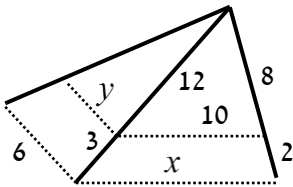


6) מרובע KLMB חסום במשולש ABC. הנתונים המספריים רשומים בסרטוט. כל המידות הן בס"מ. הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

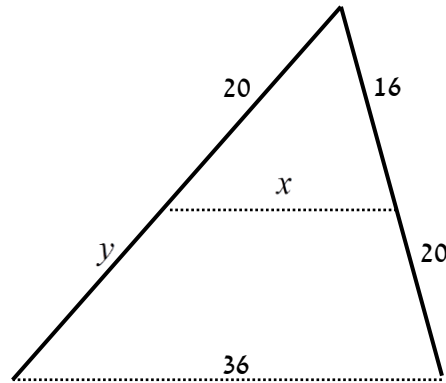
שאלות יסודיות – הרחבות של משפט תלס:

7) חשב את x ואת y בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

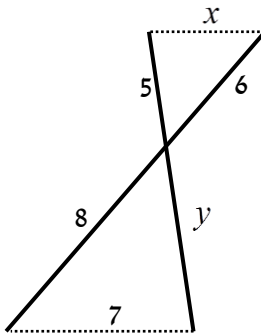
א.



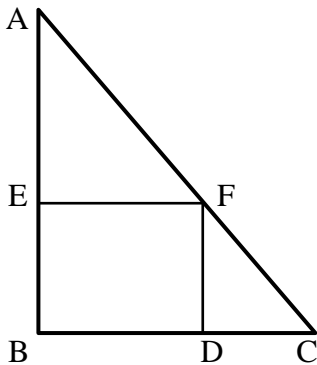
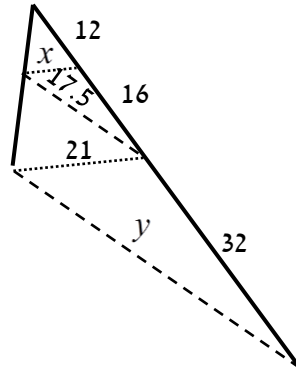
ב.



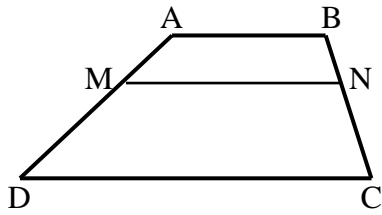
ג.



ד.

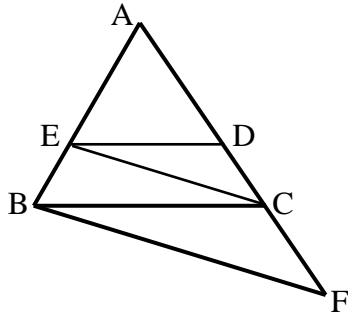


8) המרובע EFDB הוא מלבן החסום במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$). נתון כי: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 15$ ס"מ, $AF = 18$ ס"מ. מצא את אורכי צלעות המלבן.



9) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
מעבירים קטע MN אשר מקביל לבסיסים.

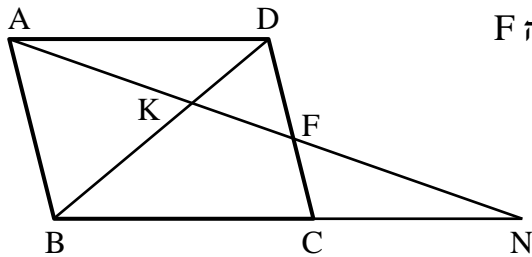
הוכח: $\frac{AM}{DM} = \frac{BN}{CN}$.



10) באיור שלפניך נתון: $DE \parallel BC$, $CE \parallel BF$.
הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CF}$.

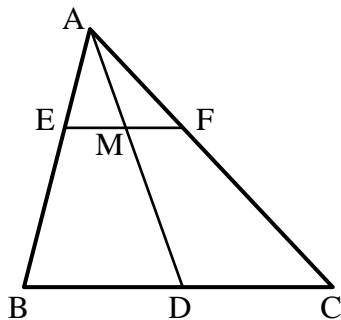
ב. $AC^2 = AD \cdot AF$.



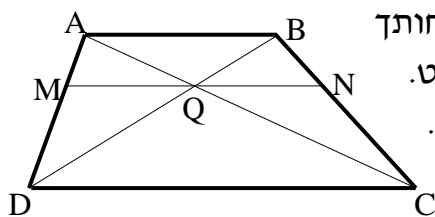
11) במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N. הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{NK}{AK} = \frac{AK}{KF}$.

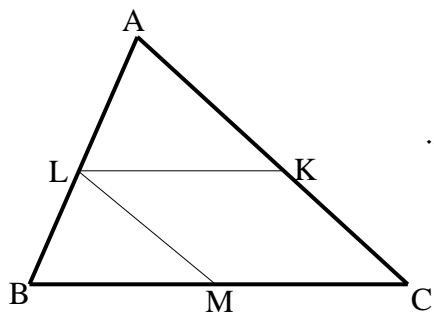
ב. $\frac{BC}{CN} = \frac{DF}{CF}$.



12) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC. הקטע EF מקביל ל-BC וחותך את התיכון בנקודה M. הוכח כי: $EM = FM$.



13) בטרפז ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה Q. בנקודה Q העבירו קטע המקביל לבסיסי הטרפז וחותך את שוקי הטרפז בנקודות M ו-N כמתואר בשרטוט. נתון: $DC = 18$ ס"מ, $DQ = 9$ ס"מ, $BQ = 3$ ס"מ. חשב את גודל הקטע MQ.



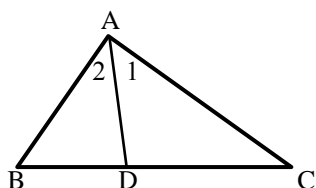
14) בשרטוט נתון: $\frac{AK}{CK} = \frac{CM}{BM} = \frac{AL}{BL}$

א. הוכח: המרובע KLMC הוא מקבילית.

ב. נתון: $BC = 10$ ס"מ, $AL = 1.5BL$.

חשב את אורך הקטע LK.

משפט חוצה הזווית:



6. חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס

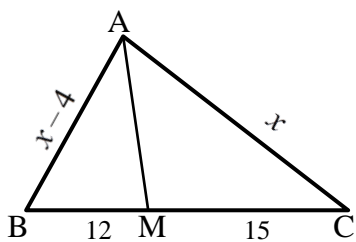
הזהה ליחס בין הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהפך.

אם: $\angle A_1 = \angle A_2$ אז: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ ולהיפך.

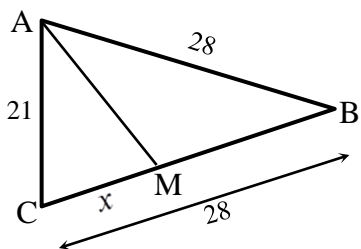
שאלות יסודיות – משפט חוצה זווית:

15) מצא את גודלו של x בסרטטים הבאים אם נתון כי AM חוצה זווית A בכל המשולשים, כל הגדלים הם בס"מ:

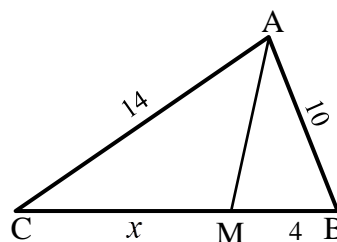
ב.



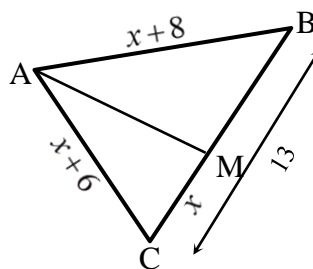
ד.

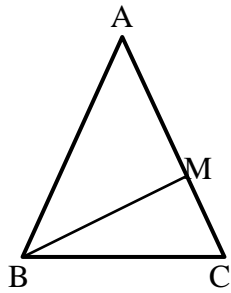


א.

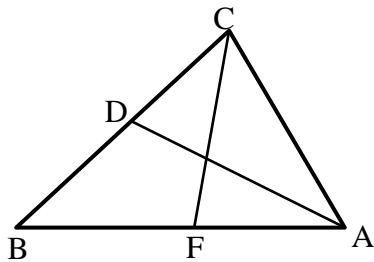


ג.

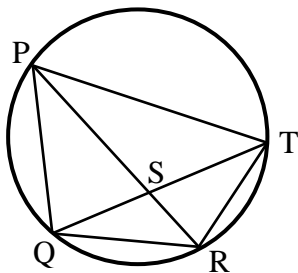




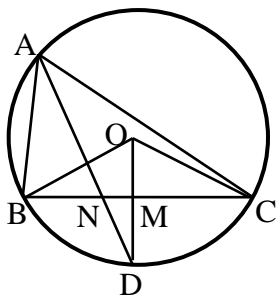
- 16) נתון משולש שווה שוקיים ABC , $(AB = AC)$. ידוע כי היקפו הוא 28 ס"מ. הקטע BM הוא חוצה זווית B . נתון כי הקטע AM גדול פי 3 מהקטע MC . חשב את אורך הקטע MC .



- 17) הקטעים AD ו- CF הם חוצי הזוויות A ו- C בהתאמה במשולש ABC . נתון: $AB = 18$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ, $CD = 6$ ס"מ. חשב את אורך הקטע AF .

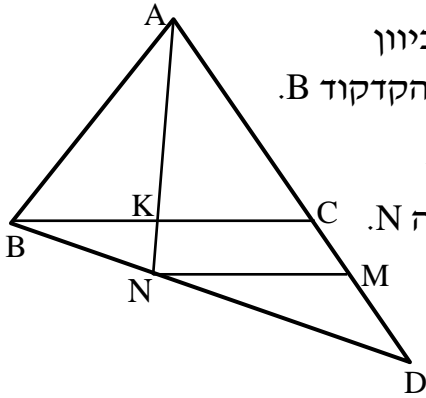


- 18) המרובע $PQRT$ חסום במעגל. נתון כי: $QR = RT$. ידוע כי: $PQ = 20$ ס"מ, $PT = 28$ ס"מ, $QT = 24$ ס"מ. חשב את אורך הקטע QS .



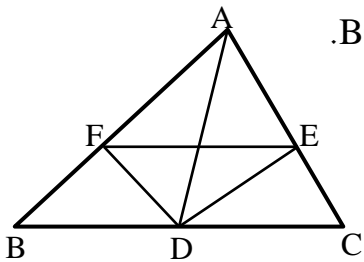
- 19) הנקודות A, B, C ו- D מונחות על היקפו של מעגל שמרכזו O . הרדיוס DO חוצה את הזווית BOC . נתון: $AB = 8$ ס"מ, $AC = 12$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ. חשב את אורכו של הקטע MN .

שאלות המשלבות את משפט תלס ומשפט חוצה זווית:

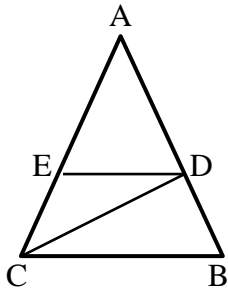


(20) נתון משולש ABC. ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D. מחברים את הנקודה D עם הקדקוד B. מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A במשולש ABC. המשך AK חותך את BD בנקודה N. מעבירים את הקטע MN. נתון: $BC \parallel MN$.

הוכח: $\frac{AB}{AD} = \frac{CM}{DM}$



(21) נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC. נתון כי DE הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADC$ וכי DF הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADB$. הוכח: $EF \parallel BC$.

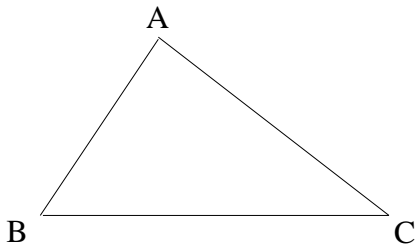


(22) נתון משולש ABC. מעבירים את הקטעים CD ו-DE. נתון כי: $DE \parallel BC$ ו- $AC = 2BC$. הקטע AC גדול פי 3 מהקטע DE. הוכח כי: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD$.

דמיון משולשים:

הגדרה:

משולשים דומים הם משולשים ששווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות בהתאמה על אותו יחס.

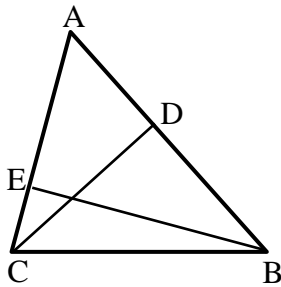


$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle DEF \\ \Downarrow \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F \\ \frac{AB}{DE} &= \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \end{aligned}$$

משפטי הדמיון:

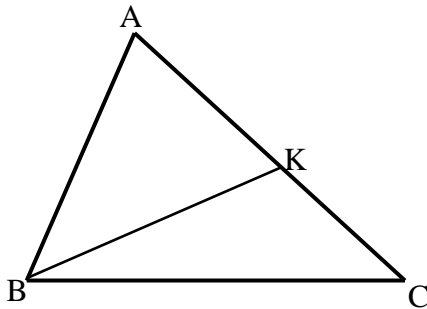
1. משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז.): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות אז המשולשים דומים.
2. משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ.): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזוויות שבניהן שווה אז המשולשים דומים.
3. משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ.): אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
4. משפט דמיון צלע-צלע-זווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהם שווה אז המשולשים דומים.

שאלות העוסקות במשפט דמיון ז.ז.:



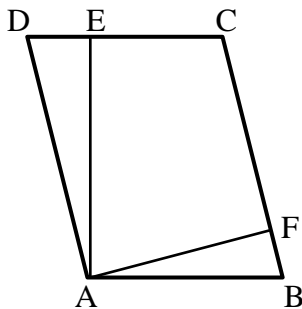
23) CD ו-BE הם גבהים במשולש ABC.

- א. הוכח כי: $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.
- ב. נתון כי: $AB = 18$ ס"מ, $BE = 12$ ס"מ, $CD = 10$ ס"מ. חשב את אורך הצלע AC.



24) במשולש ABC העבירו את הקטע BK

- כך ש- $\angle AKB = \angle ABC$.
- הוכח: $\triangle AKB \sim \triangle ABC$.

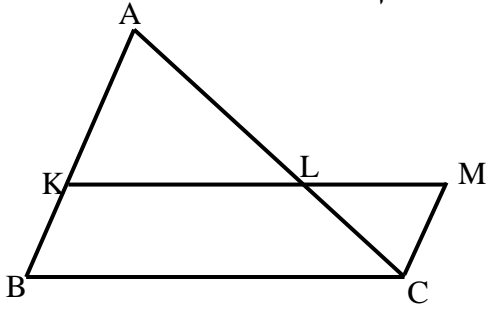


25) המרובע ABCD הוא מקבילית.

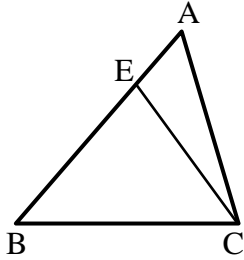
מעבירים גבהים AE ו-AF לצלעות DC ו-BC בהתאמה.

- א. הוכח כי: $\triangle ADE \sim \triangle AFB$.
- ב. הוכח את הטענה הבאה:
במקבילית, מכפלת הגבהים לשתי צלעות סמוכות שווה למכפלת שתי הצלעות עצמן.

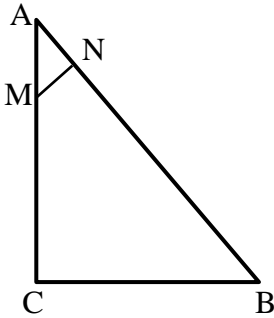
- 26 נתונה מקבילית BKMC. המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.
 הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.
 הוכח: $LC \cdot LB = LM \cdot AC$.



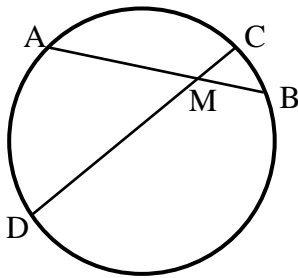
- 27 מעבירים את הקטע CE במשולש ABC.
 ידוע כי: $\angle BAC = \angle ECB$
 וכן: $BC = 10$ ס"מ, $BE = 8$ ס"מ.
 חשב את AB.



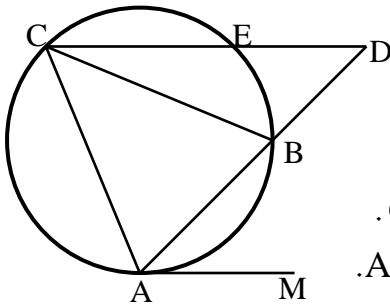
- 28 המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).
 מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
 נתון כי:
 $BC = 12$ ס"מ, $AN = 4$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ.
 מצא את אורך הקטע AM.



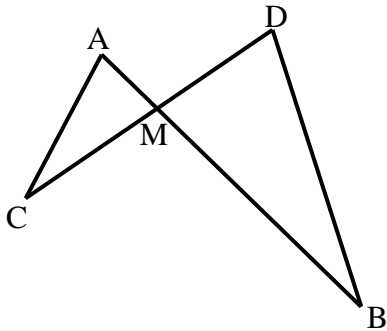
- 29 המיתרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
 א. הוכח כי: $\triangle ADM \sim \triangle CBM$.
 ב. נתון כי: $AM = 5$ ס"מ, $DM = 8$ ס"מ,
 $CM = 2$ ס"מ.
 חשב את אורכו של BM.



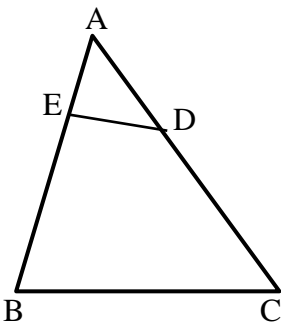
- 30 המשולש ABC חסום במעגל.
 מהנקודה A מעבירים משיק AM.
 ממשיכים את AB עד לנקודה D שמחוץ למעגל.
 מחברים את הנקודה D עם הקדקוד C.
 הישר CD חותך את המעגל בנקודה E כך ש- $CE \parallel AM$.
 הוכח כי AC הוא הממוצע הגיאומטרי בין AB לבין AD.
 כלומר: $AC^2 = AB \cdot AD$.



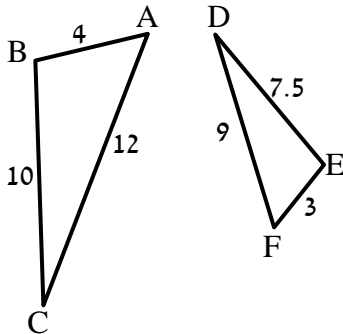
שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.ז.צ:



- 31) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
 אורכי הקטעים הם: $AM = 3$ ס"מ, $DM = 5$ ס"מ, $CM = 6$ ס"מ, $BM = 10$ ס"מ.
 א. הוכח כי: $\triangle AMC \sim \triangle BMD$.
 ב. האם $AC \parallel BD$? נמק.
 ג. מצא את אורכו של AC.
 אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.

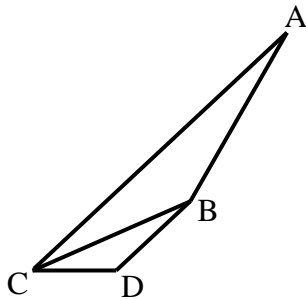


- 32) לפי משולש ABC. מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:
 $AD = 4$ ס"מ, $BD = 11$ ס"מ, $AE = 5$ ס"מ, $CE = 7$ ס"מ.
 א. הוכח כי: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.
 ב. הוכח כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.



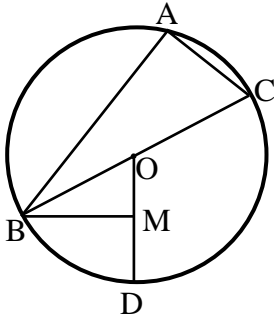
שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.צ:

- 33) בסרטוט שלפניך רשומים שני משולשים. אורכי צלעותיהם נתונים בתרשים (בס"מ).
 א. הוכח כי המשולשים דומים ורשום את הדמיון עפ"י הקדקודים.
 ב. רשום את הזוויות השוות בשני המשולשים.



- 34) נתונים המשולשים ABC ו-BDC.
 ידוע כי: $AC = 16$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ, $BD = 4$ ס"מ.
 א. הוכח כי שני המשולשים דומים ורשום אותם לפי סדר התאמת קדקודיהם.
 ב. הוכח כי: $AC \parallel BD$.

שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.ז שמול הצלע הגדולה:



35) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. הצלע BC

היא קוטר המעגל. הקטע BM מאונך לרדיוס DO.

נתון: $AC = 2OM$.

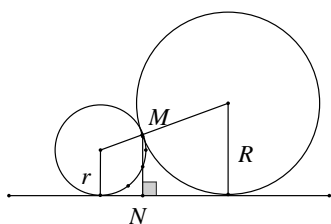
א. הוכח: $\widehat{AB} = 2\widehat{BD}$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BAC}}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $x=2$ ב. $x=1$
- (2) 24 ס"מ.
- (3) א. $x=2, y=12$ ב. $x=4.5, y=12$ ג. $x=9, y=18\frac{2}{3}$
- (4) 8 ס"מ = AE, 28 ס"מ = CE.
- (5) 6 ס"מ = AD, $21\frac{1}{3}$ ס"מ = BC, $26\frac{2}{3}$ ס"מ = AC.
- (7) א. $x=16, y=25$ ב. $x=12.5, y=4.5$ ג. $x=9, y=37.5$
- ד. $x=5.25, y=6\frac{2}{3}$
- (8) 14.4 ס"מ ו-5.6 ס"מ.
- (13) 4.5 ס"מ.
- (14) ב. 6 ס"מ.
- (15) א. $x=5.6$ ב. $x=20$ ג. $x=12$ ד. $x=6$
- (16) 3 ס"מ.
- (17) 8 ס"מ.
- (18) 10 ס"מ.
- (19) 1 ס"מ.
- (23) 15 ס"מ.
- (27) 12.5 ס"מ.
- (28) 5 ס"מ.
- (29) ב. 3.2 ס"מ.
- (31) ב. לא. ג. 8.4 ס"מ.
- (33) א. $\triangle ABC \sim \triangle FED$ ב. $\sphericalangle A = \sphericalangle F, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle D$
- (35) ב. $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{1}{4}$

שאלות שונות – פרופורציה ודמיון:



- (1) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה M .
 רדיוס המעגל הגדול הוא R ורדיוס המעגל הקטן הוא r .
 מעבירים משיק משותף לשני המעגלים.
 MN הוא המרחק שבין נקודת ההשקה של שני
 המעגלים לבין המשיק המשותף שלהם.

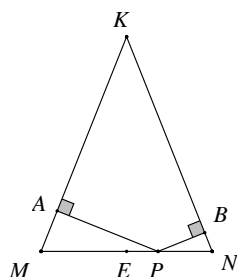
$$\text{הוכח כי: } MN = \frac{2R \cdot r}{R + r}$$

- (2) א. הוכח כי: במשולש ישר זווית בעל זווית חדה בת 30° , הניצב שמול
 הזווית שווה למחצית היתר.

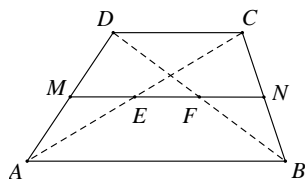
ב. בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ האלכסונים ניצבים לשוקיים.

הוכח כי: אם הזווית החדה בטרפז שווה ל- 60° , אזי נקודת מפגש

האלכסונים מחלקת כל אלכסון ביחס 1:2.



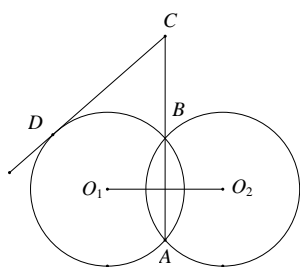
- (3) $\triangle KMN$ הוא משולש שווה שוקיים ($KM = KN$). מנקודה
 כלשהי P הנמצאת על הבסיס MN מורידים אנך לשוק KM
 ואנך לשוק KN החותכים אותן בנקודות A ו- B בהתאמה.
 א. הוכח כי $KAPB$ הוא מרובע בר חסימה.
 ב. הסבר מדוע הנקודה E הנמצאת באמצע הבסיס MN ,
 נמצאת על היקף המעגל החוסם את המרובע $KAPB$.



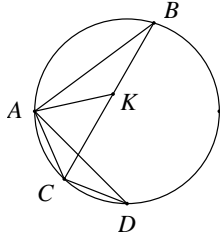
- (4) נסח והוכח את משפט קטע אמצעים בטרפז.
 MN הוא קטע אמצעים בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

$$\text{נסמן: } AB = a, CD = b$$

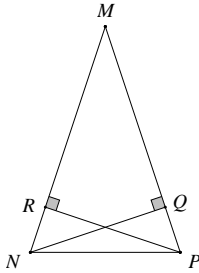
$$\text{הוכח כי: } EF = \frac{1}{2} \cdot (a - b)$$



- (5) שני מעגלים שווים, O_1 ו- O_2 , שמחוגיהם שווים ל-10 ס"מ,
 נחתכים בנקודות A ו- B . מהנקודה C שעל המשך המיתר
 המשותף AB של שני המעגלים יוצא המשיק CD לאחד
 מהמעגלים. נתון כי: $9 \cdot \sqrt{5}$ ס"מ $CD =$ ו-16 ס"מ $O_1O_2 =$.
 חשב את אורך הקטע CB .
 (היעזר בעובדה ש- AB חוצה את הקטע O_1O_2 ומאונך לו.)



- 6) A, B, C, D הן נקודות על המעגל. K היא נקודה על BC כך ש- $BK = CD$. נתון: $AB = AD$.
- הוכח: $\triangle BAK \cong \triangle DAC$.
 - המשך הקטע AK חותך את המעגל בנקודה N . הוכח: $BN = CD$.

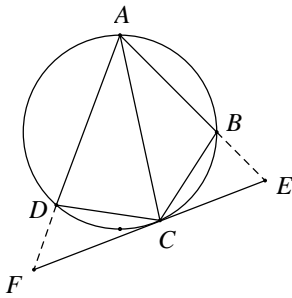


- 7) במשולש $\triangle MNP$ הגבהים NQ ו- PR נפגשים בנקודה O . נתון כי: $OR = OQ$.
- הוכח כי $NO = OP$.
 - הוכח כי: משולש $\triangle MNP$ שווה שוקיים.
 - הוכח כי: $MQ = MR$.

- 8) א. הוכח את המשפט: שני מיתרים הנחתכים בתוך מעגל מחלקים זה את זה, כך שמכפלת קטעי האחד שווה למכפלת קטעי האחר.
 ב. במעגל שרדיוסו R , הקוטר AB מאונך למיתר CD . הקוטר והמיתר נחתכים בנקודה E . נתון כי $AE:EB = 1:4$. הבע את שטח המשולש $\triangle ADC$ באמצעות R .

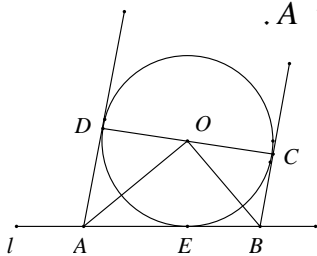
- 9) א. הוכח כי: במרובע חסום במעגל, סכום הזוויות הנגדיות שווה ל- 180° .
 ב. מרובע $ABCD$ חסום במעגל. AC חוצה את הזווית $\angle DAB$.

בנקודה C מעבירים משיק למעגל. המשכי הצלעות AB ו- AD חותכים את המשיק בנקודות E ו- F בהתאמה.

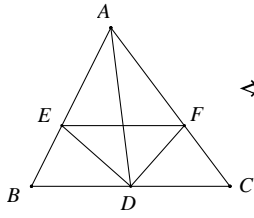


- הוכח כי: $\angle CDF = \angle ABC$.
- הוכח כי: $\triangle ABC \sim \triangle CDF$.
- נתון $AB = 9$ ס"מ, $DF = 4$ ס"מ. חשב את אורך הקטע BC .

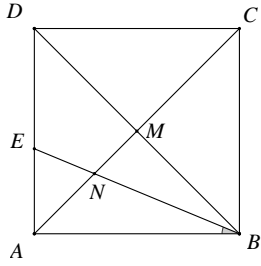
- 10) מעגל O משיק לישר l בנקודה E . CD הוא קוטר במעגל. בנקודה C מעבירים משיק למעגל החותך את הישר l בנקודה B . בנקודה D מעבירים משיר למעגל החותך את הישר l בנקודה A .



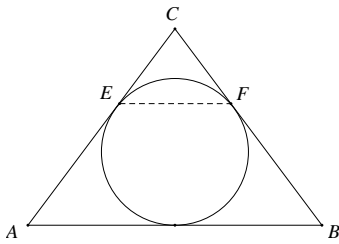
- הוכח כי: $\angle AOB = 90^\circ$.
- הוכח כי: $\triangle AOE \sim \triangle OBE$.
- נתון כי: $R = 6$ ס"מ, $AB = 13$ ס"מ, $EB < AE$. חשב את אורכי הקטעים EB ו- AE .



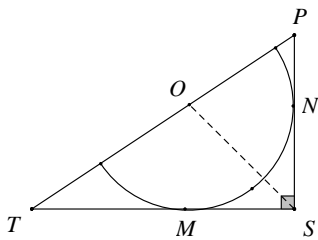
- 11) במשולש $\triangle ABC$ נתון כי: AD הוא התיכון לצלע BC .
 DE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ADB$, DF הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ADC$
 (ראה ציור). הוכח כי: $EF \parallel BC$.



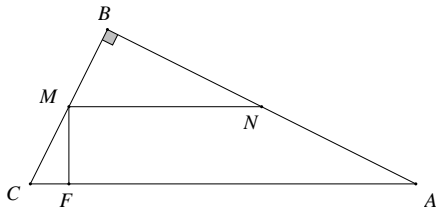
- 12) בריבוע $ABCD$ נתון כי: אלכסונו נפגשים בנקודה M .
 BE חוצה את הזווית $\sphericalangle DBA$ וחותך את האלכסון AC בנקודה N (ראה ציור).
 א. מצא את היחס $\frac{DE}{EA}$ ואת היחס $\frac{MN}{NA}$.
 ב. הוכח כי המשולש $\triangle ENA$ הוא משולש שווה שוקיים.
 ג. הוכח כי: $DE = 2 \cdot MN$.



- 13) במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ נתון כי:
 $AC = BC = 20$ ס"מ, $AB = 24$ ס"מ.
 במשולש זה חסום מעגל, המשיק לשתי השוקיים בנקודות E ו- F .
 א. הוכח כי: EF מקביל לבסיס.
 ב. חשב את אורך הקטע EF .

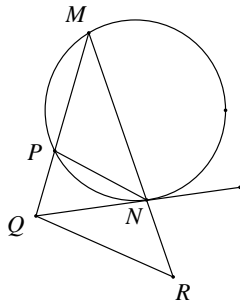


- 14) במשולש ישר זווית $\triangle PST$ ($\sphericalangle PST = 90^\circ$) חסום חצי מעגל שמרכזו O נמצא על יתר PT .
 א. הוכח כי OS חוצה את הזווית $\sphericalangle PST$.
 ב. נתון כי: $PS = 18$ ס"מ ו- $TS = 24$ ס"מ.
 חשב את אורכי הקטעים OP ו- OT .



- 15) במשולש $\triangle ABC$, בו $\sphericalangle B = 90^\circ$, נתון כי: $FC = 6$ ס"מ, $BC = 12$ ס"מ, $AB = 16$ ס"מ.
 הקטע FM מאונך ליתר AC , והקטע MN מקביל ליתר AC . חשב את אורך הקטע MN .

16) משולש $\triangle MPN$ חסום במעגל. ישר NQ משיק למעגל זה בנקודה N .



נתון כי: $NP \parallel RQ$ (ראה ציור).

א. הוכח כי: $\triangle QRN \sim \triangle MRQ$.

ב. נתון כי: $MN = 5$ ס"מ ו- $RN = 4$ ס"מ.

חשב את RQ .

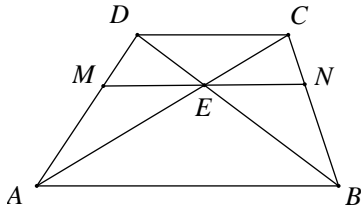
17) בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$).

נתון כי: $AB = 18$ ס"מ, $DC = 9$ ס"מ.

דרך נקודת מפגש האלכסונים E , מעבירים ישר MN

המקביל לבסיסי הטרפז.

מצא את אורכו של MN .



18) א. הוכח: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית חלוקה פנימית

לפי היחס של שתי הצלעות הכולאות את הזווית.

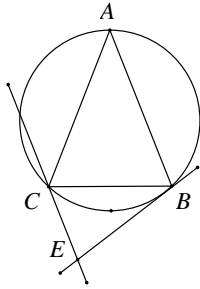
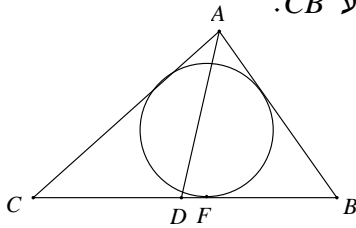
ב. המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ משיק בנקודה F לצלע CB .

נתון כי: $BF = 4$ ס"מ ו- $CF = 7$ ס"מ.

AD חוצה הזווית $\sphericalangle A$ מחלק את הקטע CB לשני

קטעים המתאיחים זה לזה כמו 2:3.

חשב את אורכי הצלעות AC ו- AB .



19) משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) חסום במעגל.

דרך קדקוד B עובר משיק למעגל. דרך קדקוד C עובר ישר

המקביל ל- AB , וחותר את משיק בנקודה E (ראה ציור).

א. הוכח: $\triangle BAC \sim \triangle CBE$

ב. נתון כי: $AC = 27$ ס"מ ו- $CE = 12$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע BC .

20) בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון כי: $AB = 3 \cdot CD$.

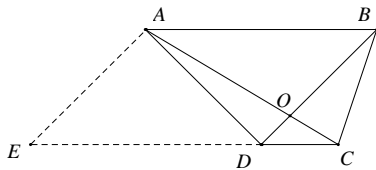
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O .

דרך הנקודה A מעבירים מקביל ל- BD , החותר

את המשך הצלע CD בנקודה E (ראה ציור).

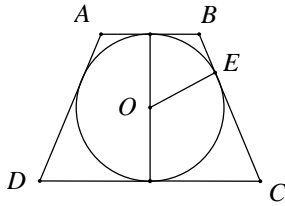
נסמן את שטח המשולש $\triangle DOC$ באמצעות S .

הבע את שטח הטרפז $ABCE$ באמצעות S .



21) $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים ($AD = BC$, $AB \parallel CD$).

O הוא מרכז המעגל החסום בטרפז ו- E היא נקודת ההשקה של השוק BC עם המעגל O (ראה ציור).



א. הוכח כי: $OE^2 = BE \cdot EC$.

ב. הוכח כי: הגובה בטרפז שווה שוקיים החוסם מעגל הוא הממוצע ההנדסי של שני הבסיסים של הטרפז.

22) במשולש ישר-זווית ΔPQR ($\sphericalangle PQR = 90^\circ$) נתון:

h הוא הגובה ליתר, x ו- y הם הניצבים,

א ו- b הם היטלי הניצבים x ו- y בהתאמה (ראה ציור).

א. הוכח כי הגובה ליתר הוא ממוצע גאומטרי של

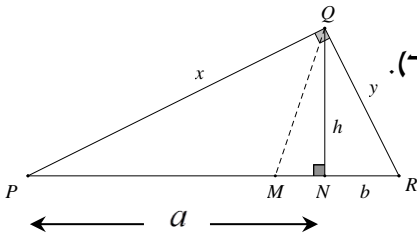
היטלי הניצבים על היתר: $h = \sqrt{a \cdot b}$.

ב. הוכח כי כל ניצב הוא ממוצע גאומטרי של היתר

והיטל הניצב על היתר: $x = \sqrt{a \cdot (a+b)}$, $y = \sqrt{b \cdot (a+b)}$.

ג. מקדקוד Q מעבירים חוצה זווית החותך את היתר PR בנקודה M .

הוכח כי: $PM : MR = \sqrt{a} : \sqrt{b}$.

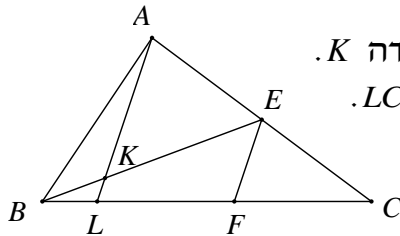


23) במשולש ΔABC התיכון BE והקטע AL נחתכים בנקודה K .

הקטע EF מקביל ל- AL (ראה ציור). נתון כי: $LC = 5 \cdot BL$.

א. הוכח כי: $LF = 2.5 \cdot BL$.

ב. הוכח כי: $\frac{BK}{BE} = \frac{2}{7}$.



24) א. הוכח את המשפט: היחס בין השטחים של שני משולשים דומים שווה

לריבוע יחס הדימיון.

ב. במקבילית $ABCD$ נקודה E נמצאת על

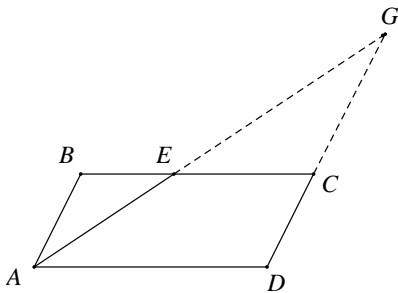
הצלע BC , כך ש- $BE : CE = 2 : 3$.

המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC

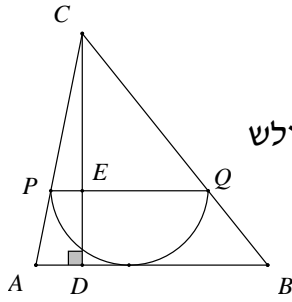
בנקודה G . נתון $S_{\Delta CEG} = 18$ סמ"ר.

1. חשב את שטח המשולש ΔABE .

2. חשב את שטח המשולש ΔABC .

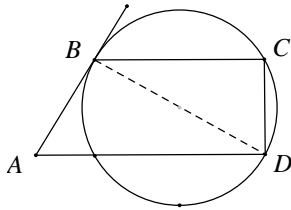


25) א. הוכח כי: במשולשים דומים היחס בין הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון של המשולשים.



ב. במשולש $\triangle ABC$ חסום חצי מעגל שרדיוסו 6 ס"מ. קוטר המעגל PQ מקביל לצלע AB . CD הוא גובה במשולש $\triangle ABC$ וחותך את הקוטר PQ בנקודה E (ראה ציור). נתון כי: $AB = 20$ ס"מ. חשב את אורך הקטע CE .

26) $ABCD$ הוא טרפז ($BC \parallel AD$). הצלעות BC ו- CD הן מיתרים במעגל.

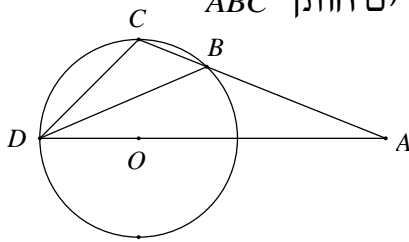


הצלע AB משיקה למעגל בנקודה B (ראה ציור).

א. הוכח כי: $\triangle ABD \sim \triangle DCB$.

ב. נתון כי: $BC = 5$ ס"מ, $AD = 12.8$ ס"מ. חשב את אורך האלכסון BD .

27) מנקודה A הנמצאת מחוץ למעגל שרדיוסו R , מעבירים חותך ABC וחותך AOD , שעובר דרך מרכז המעגל O .

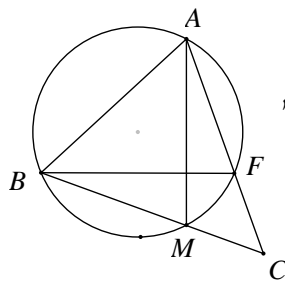


כך ש- $\angle CDB = \angle BDA = \angle BAD = \alpha$.

נתון גם: $BC = n$, $AB = m$.

הוכח כי: $DC^2 = n^2 + m \cdot n$.

28) א. הוכח כי: חותכים למעגל היוצאים מנקודה אחת מחוץ למעגל יוצרים קטעים פרופורציוניים כך שמכפלת כל החותך בחלקו מחוץ למעגל היא גודל קבוע.



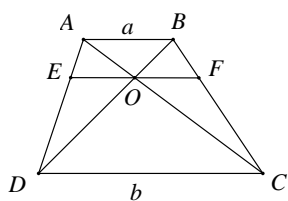
ב. נתון משולש $\triangle ABC$. מעגל העובר דרך הקדקודים A ו- B , חותך הצלעות AC ו- BC בנקודות F ו- M בהתאמה.

1. הוכח כי: $\triangle ACM \sim \triangle BCF$.

2. נתון כי: $BC = 48$ ס"מ, $AC = 40$ ס"מ.

16 ס"מ $AF =$. מצא את אורך המיתר BM .

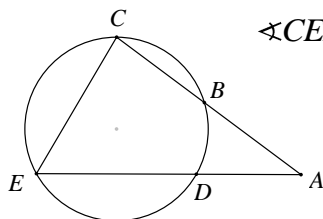
29) בטרפז $ABCD$ אורך הבסיס AB הוא a ואורך הבסיס CD הוא b .



אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O .
דרך הנקודה O מעבירים מקביל לבסיסים החותך את AD בנקודה E ואת BC בנקודה F .

הוכח כי מתקיים: $EO = OF = \frac{a \cdot b}{a + b}$.

30) מנקודה A מעבירים שני חותכים למעגל, חותך ABC וחותך ADE ,



כך שהנקודה B נמצאת באמצע הקשת \widehat{CD} , ו- $\angle CED = 2\angle CAD$. (ראה ציור).

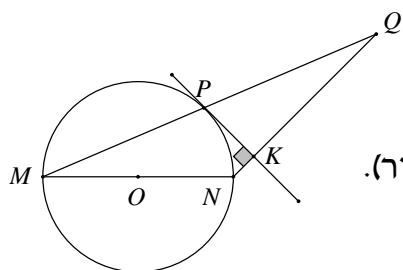
א. הוכח: $\triangle ECB \sim \triangle ACE$.

ב. נתון כי: $CB = 4$ ס"מ, $AC = 9$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע CE .

31) MN הוא קטע במעגל שמרכזו ב- O .

PK משיק למעגל בנקודה P ומאונך ל- NQ .

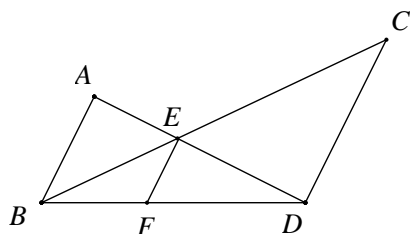


הנקודה Q נמצאת על המשך המיתר MP (ראה ציור).

א. הוכח כי: $MP \cdot KN = PK \cdot PN$.

ב. הוכח כי: $MP = PQ$.

32) בציור נתון כי: $AB \parallel EF \parallel CD$.



הוכח כי: $\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$.

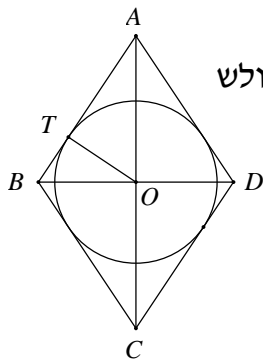
33) א. הוכח כי: הגובה ליתר במשולש ישר-זווית מחלק את המשולש לשני משולשים, שכל אחד מהם דומה למשלוש כולו.

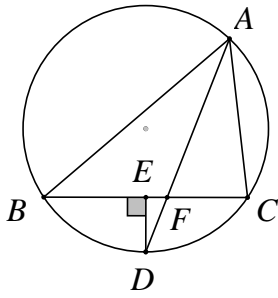
ב. מעויין $ABCD$ חוסם מעגל שמרכזו ב- O .

נתון כי: אורך הרדיוס המעגל OT הוא 24 ס"מ

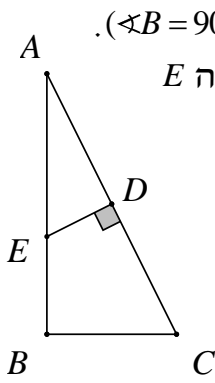
ואורך צלע המעויין הוא 50 ס"מ.

מצא את אורך האלכסון BD ($BD < AC$).

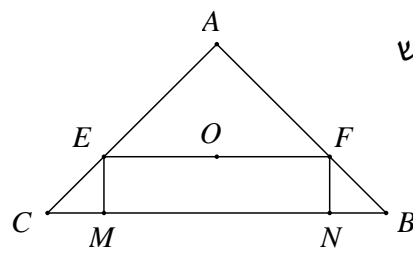




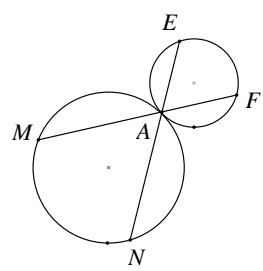
- 34) משולש $\triangle ABC$ חסום במעגל. חוצה זווית $\sphericalangle BAC$ חותך את המעגל בנקודה D ואת הצלע BC בנקודה F (ראה ציור). מנקודה D הורד אנך על הצלע CB החותך אותה בנקודה E . נתון כי: $AB:AC=5:3$. הוכח כי: $BC=8 \cdot EF$.



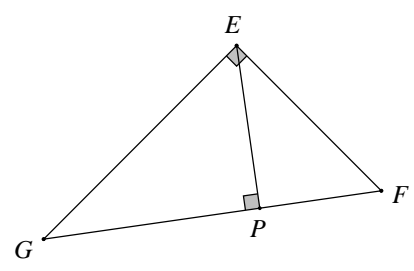
- 35) נקודה D היא אמצע היתר AC המשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B=90^\circ$). בנקודה D מעלים אנך לצלע AC החותך את הניצב AB בנקודה E (ראה ציור). נתון כי: 8 ס"מ $AC=m$, $AB=m$. הבע את CE ו- BE באמצעות m .



- 36) במשולש $\triangle ABC$ נתון כי: 15 ס"מ $AB=AC$, 18 ס"מ CB . דרך מרכז המעגל O החסום במשולש עובר הקטע EF המקביל לבסיס BC . EM ו- FN הם אנכים לבסיס BC . חשב את שטח המלבן $EFNM$.

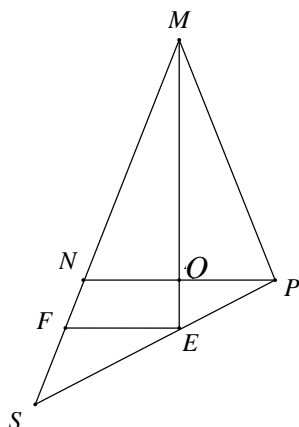


- 37) א. הוכח כי: הזווית הכלואה בין משיק ומיתר בעלי נקודה משותפת, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה.
 ב. שני מעגלים משיקים מבחוץ בנקודה A . דרך נקודה זו עוברים שני ישרים, החותכים את המעגלים בנקודות E, F ו- M, N . הוכח כי: $\triangle AMN \sim \triangle AFE$.

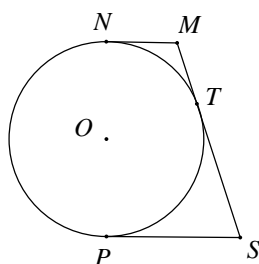


- 38) במשולש ישר-זווית $\triangle EFG$ ($\sphericalangle GEF=90^\circ$), EP הוא הגובה ליתר GF . נתון כי: 24 ס"מ EF , 32 ס"מ GE . חשב את אורכי הקטעים: GP, PF, GF ו- EP .

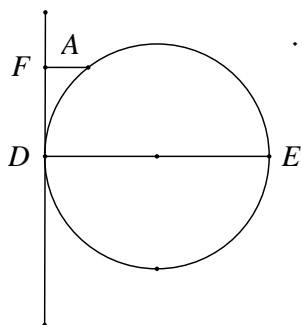
39) MQ הוא התיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים $\triangle MNP$ ($MN = MP$).



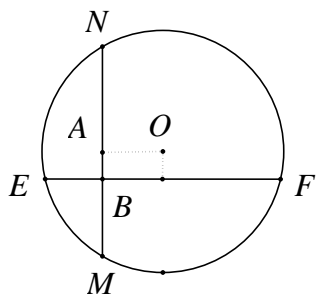
S היא נקודה על המשך הצלע MN .
 המשך התיכון MQ חותך את הקטע PS בנקודה E .
 הקטע EF מקביל ל- NP (ראה ציור).
 א. הוכח כי: $MP : MS = NF : FS$.
 ב. נתון כי: $MP = 20$ ס"מ, $NF = 4$ ס"מ.
 חשב את אורך הקטע FS .



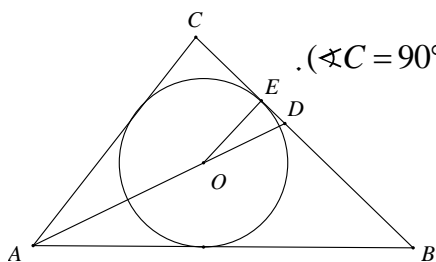
40) NP הוא קוטר במעגל O . MT , MN ו- SP הם משיקים למעגל O בנקודות T ו- N בהתאמה.
 א. הוכח כי: $\angle MOS = 90^\circ$.
 ב. הוכח כי רדיוס המעגל שווה ל- $\sqrt{MN \cdot SP}$.



41) DE הוא קוטר במעגל. בנקודה D מעבירים משיק למעגל. מנקודה A , שעל המעגל, מעבירים ישר המקביל לקוטר DE . הישר חותך את המשיק למעגל בנקודה F (ראה ציור).
 א. הוכח כי: $AD^2 = AF \cdot DE$.
 ב. נתון $AF = 4$ ס"מ, $DE = 9$ ס"מ.
 חשב את שטח הטרפז $AFDE$.



42) א. הוכח כי המחוג המאונך למיתר המעגל חוצה אותו.
 ב. בציור שלפניך המיתרים EF ו- MN מאונכים זה לזה.
 נתון כי: $EB = 3$ ס"מ, $BF = 8$ ס"מ, $MB = 4$ ס"מ.
 1. חשב את אורך הקטע NB .
 2. מצא את המרחק המיתר EF ממרכז המעגל O .

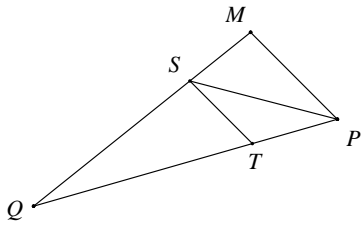


43) מעגל שמרכזו בנקודה O חסום במשולש ישר-זווית ($\angle C = 90^\circ$).
 נתון כי: $AB = 30$ ס"מ, $AC = 18$ ס"מ.
 חשב את אורך הקטע ED .

44) במשולש $\triangle MPQ$ חוצה את הזווית $\sphericalangle MPQ$, $ST \parallel MP$.

נתון כי: $MP = 27$ ס"מ, $QP = 45$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע TP .



תשובות סופיות:

(5) 15 ס"מ $CB =$ ב. (8) $S_{\Delta ACD} = \frac{8}{25}R^2$.ג. 6 ס"מ $BC =$ (9)

(10) ג. 4 ס"מ $EB =$, 9 ס"מ $AE =$.א. (12) $\frac{MN}{NA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{DE}{EA} = \sqrt{2}$

(13) ב. 9.6 ס"מ $EF =$.ב. (14) $OP = \frac{90}{7}$ ס"מ , $OT = \frac{120}{7}$ ס"מ

(15) $MN = 3\frac{1}{3}$ ס"מ .ב. (16) $RQ = 6$ ס"מ .ג. (17) $MN = 12$ ס"מ

(18) ב. 6 ס"מ $AB =$, 9 ס"מ $AC =$

(19) ב. 18 ס"מ $BC =$. (20) $S_{ABCE} = 28 \cdot S$

(24) ב. 1. 8 סמ"ר $S_{\Delta ABE} =$.2. 20 סמ"ר $S_{\Delta ABC} =$.ב. 9 ס"מ $CE =$ (25)

(26) ב. 8 ס"מ $BD =$. (28) ב. 28 ס"מ $BM =$. (30) ב. 6 ס"מ $CE =$

(33) ב. 60 ס"מ $BD =$. (35) $CE = \frac{32}{m}$, $BE = \frac{m^2 - 32}{m}$

(36) $S_{EFNM} = 50.625$ סמ"ר

(38) 40 ס"מ $GF =$, 14.4 ס"מ $PF =$, 25.6 ס"מ $GP =$, 19.2 ס"מ $EP =$

(39) ב. 6 ס"מ $FS =$.ב. (41) 29.07 סמ"ר $S_{AFDE} =$

(42) ב. 1. 6 ס"מ $NB =$.2. 1 ס"מ . (43) 3 ס"מ $DE =$

(44) $TP = 16.875$ ס"מ

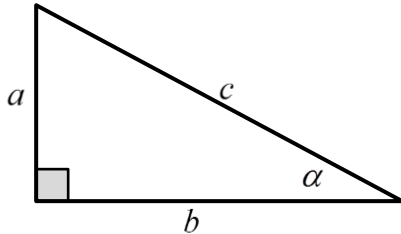
תוכן העניינים – טריגונומטריה:

262	פרק 11 – טריגונומטריה במישור:
262	משולש ישר זווית:
264	זהויות טריגונומטריות:
266	טריגונומטריה במישור:
270	תרגול מבגרויות:
279	תשובות סופיות:

פרק 11 – טריגונומטריה במישור:

משולש ישר זווית:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

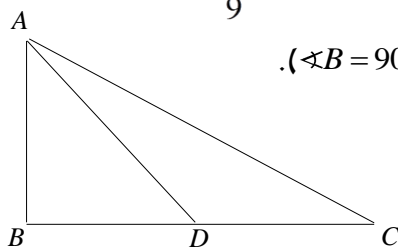
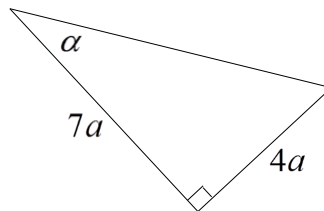
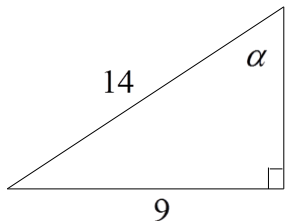
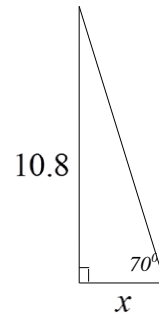
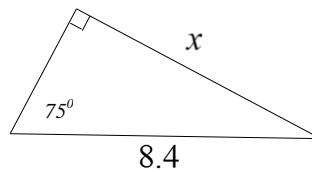
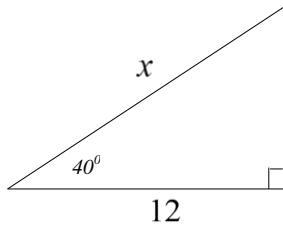
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2 + b^2 = c^2$.

שאלות:

(1) מצא את ערכו של α/x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

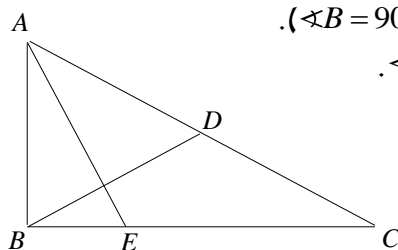


(2) המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle B = 90^\circ$).

AD הוא התיכון לניצב BC .

נתון: $AB = 6_{cm}$, $\sphericalangle C = 28^\circ$.

מצא: $AD = ?$, $\sphericalangle BAD = ?$.



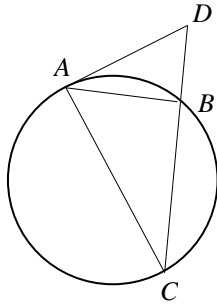
(3) המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle B = 90^\circ$).

BD הוא התיכון ליתר AC ו- AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.

נתון: $BC = 8_{cm}$, $BD = 5.6_{cm}$.

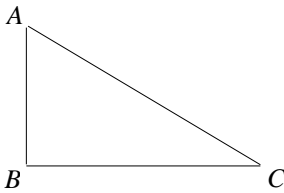
מצא: $BE = ?$, $\sphericalangle BAE = ?$.

(4) מצא את זוויתו של מעויין שאורכי אלכסונו 24_{cm} ו- 18_{cm} .

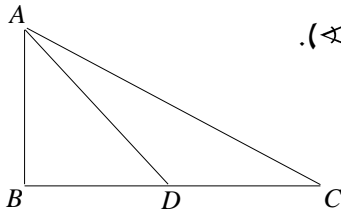


(5) המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D . נתון: $\angle DAB = 32^\circ$, $BD = 4_{cm}$. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

(6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° . מצא את שטח המשולש.

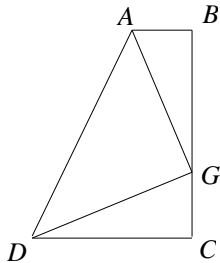


(7) המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). נתון: $AB = a$, $\angle A = \alpha$. הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.



(8) המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). AD הוא התיכון לניצב BC . נתון: $AB = b$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים AD ו- BD .

(9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k . הבע באמצעות α ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



(10) טרפז $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$. נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$. הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.

(11) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

תשובות סופיות:

בפתרון לתרגילים עם פרמטרים יתכנו דרכים נוספות להצגת התשובה.

(1) א. $x = 15.665_{cm}$ ב. $x = 8.114_{cm}$ ג. $x = 3.931_{cm}$ ד. $\alpha = 40.005^\circ$ ה. $\alpha = 29.745^\circ$

(2) $\angle BAD = 43.24^\circ$, $AD = 8.236_{cm}$ (3) $\angle BAE = 22.792^\circ$, $BE = 3.294_{cm}$

(4) $73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ$ (5) $R = 6.04_{cm}$ (6) $S = 28.618_{cm^2}$

$$AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, BD = \frac{b}{2 \tan \alpha} \quad (8) \quad P = a \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \quad (7)$$

$$\frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2} \quad (10) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2} \quad (9)$$

$$R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2} \quad (11)$$

זהויות טריגונומטריות:

זהויות של סכום והפרש זוויות:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

זהויות של זווית כפולה:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

זהויות היסוד:

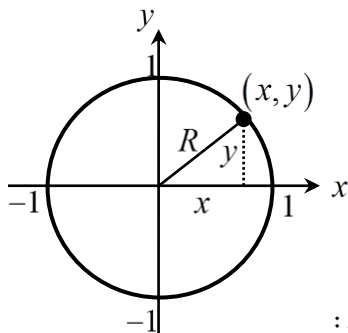
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



המעגל הטריגונומטרי:

המעגל הטריגונומטרי הוא מעגל היחידה

(מעגל קנוני שרדיוסו 1)

טבלת ערכי הפונקציות הטריגונומטריות לזוויות המיוחדות:

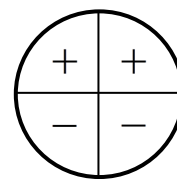
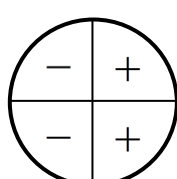
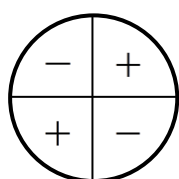
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$0 \left(= \frac{\sqrt{0}}{2} \right)$	$\frac{1}{2} \left(= \frac{\sqrt{1}}{2} \right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 \left(= \frac{\sqrt{4}}{2} \right)$
$\cos \alpha$	$1 \left(= \frac{\sqrt{4}}{2} \right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} \left(= \frac{\sqrt{1}}{2} \right)$	$0 \left(= \frac{\sqrt{0}}{2} \right)$
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ערכים עבור זוויות בכפולות של 90° :

$\sin 0^\circ = 0$	$\cos 0^\circ = 1$	$\tan 0^\circ = 0$
$\sin 90^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$	$\tan 90^\circ =$ לא מוגדר
$\sin 180^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$	$\tan 180^\circ = 0$
$\sin 270^\circ = -1$	$\cos 270^\circ = 0$	$\tan 270^\circ =$ לא מוגדר

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$



שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות :

א. $\cos^3 \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos \alpha$ ב. $\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha$

ג. $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2$ ד. $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha$

(2) הוכח את הזהות הבאה: $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

א. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$ ב. $4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ג. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$ ד. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ה. $\frac{\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$ ו. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$

4) ענה בלי להשתמש במחשבון :

$$\begin{array}{lll} \cos(-45^\circ) = & \tan 225^\circ = & \sin 150^\circ = \\ \sin 510^\circ = & \sin 315^\circ = & \cos 210^\circ = \\ \cos 930^\circ = & \cos 120^\circ = & \tan 120^\circ = \\ \tan(-225^\circ) = & \tan(-30^\circ) = & \sin 330^\circ = \end{array}$$

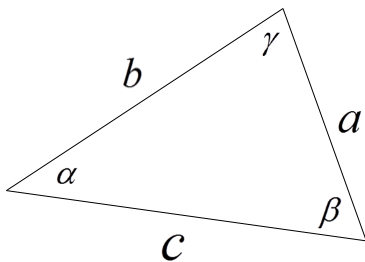
5) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(-2\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha}$

טריגונומטריה במישור:

משפט הסינוסים:

הגדרה:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.



בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

משפט הקוסינוסים:

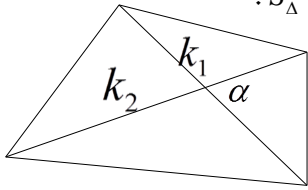
$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ או $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
 - א. נתונות שתי זוויות וצלע.
 - ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
 - ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
 - א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
 - ב. נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנושתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שטחים של משולשים ומרובעים:

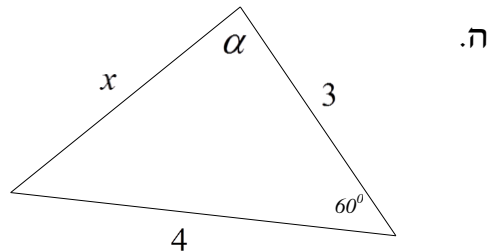
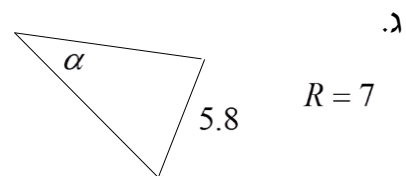
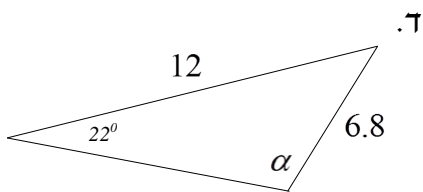
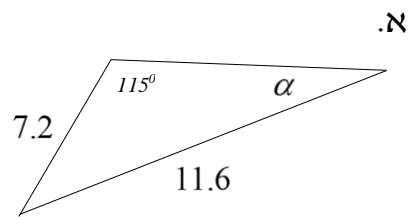
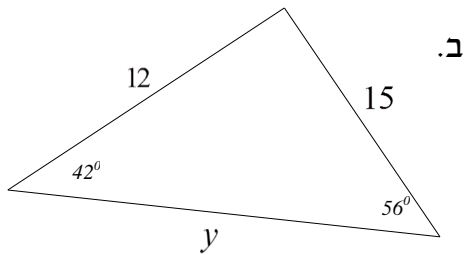
שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$



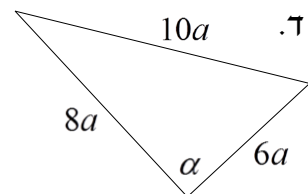
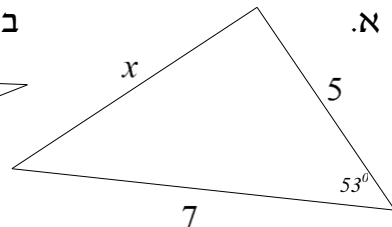
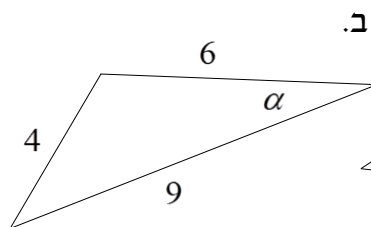
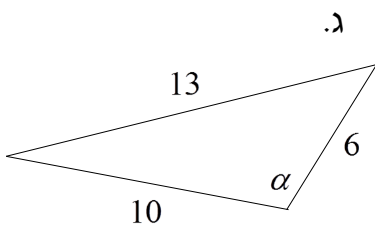
שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו: $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

שאלות:

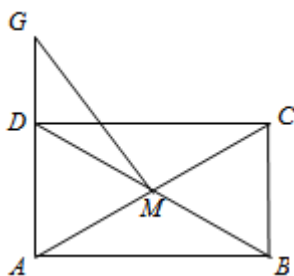
1) מצא את ערכו של $\alpha/x/y$ במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



2) מצא את ערכו של α/x במשולשים הבאים:

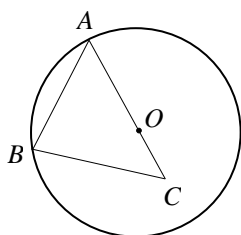


- (3) נתון משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70° . CD הוא חוצה זווית הבסיס $\angle C$. מצא את אורכו של הקטע AD .



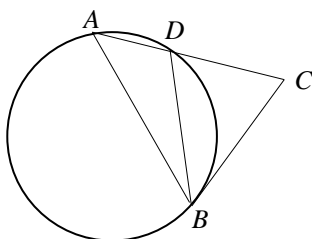
- (4) אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה M . הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD . נתון: $DG = 1.2\text{ cm}$, $AB = 4\text{ cm}$, $AD = 3\text{ cm}$. מצא את גודלו של הקטע GM .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 cm ו- 11 cm חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 cm . חשב את זוויות המרובע.



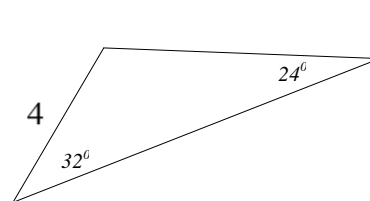
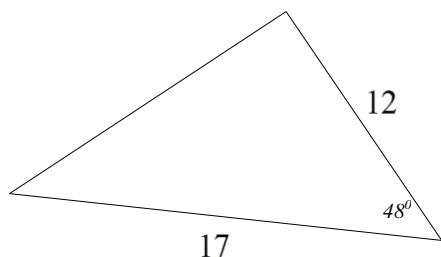
- (6) הצלע AB במשולש $\triangle ABC$ היא מיתר במעגל שמרכזו O . הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון: $\angle BAC = 38^\circ$, $OC = 3\text{ cm}$, $BC = 9\text{ cm}$. מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המשולש $\triangle ABD$ חסום במעגל שרדיוסו R . המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B נפגשים בנקודה C . נתון: $\angle C = \alpha$, $\angle ADB = \beta$. הבע באמצעות R , α ו- β את אורך הקטע BC .

- (9) חשב את שטחי המשולשים הבאים:



- (10) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של 15° עם הבסיסים.

- (11) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) חוצה את הזווית $\angle B$. נתון: $\angle A = \alpha$, $AB = m$. הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש $\triangle BCD$.

תשובות סופיות:

***הערה: מצ"ב פתרונות אפשריים בשאלות עם פרמטרים, תתכנה דרכי רישום שונות שגם נכונות.**

(1) א. $\alpha = 34.231^\circ$ ב. $y = 22.199_{cm}$ ג. $\alpha = 155.526^\circ$ או $\alpha = 24.474^\circ$

ד. $\alpha = 41.382^\circ$ או $\alpha = 138.618^\circ$ ה. $x = 3.606_{cm}$, $\alpha = 73.898^\circ$

(2) א. $x = 5.646_{cm}$ ב. $\alpha = 20.742^\circ$ ג. $\alpha = 105.962^\circ$ ד. $\alpha = 90^\circ$

(3) $AD = 13.064_{cm}$ (4) $GM = 3.360_{cm}$ (5) $66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$

(6) $AB = 14.56_{cm}$, $R = 9.242_{cm}$ (7) $P = 22_{cm}$ (8) $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$

(9) א. $S = 8.641_{cm^2}$ ב. $S = 75.801_{cm^2}$ (10) $S = 16_{cm^2}$

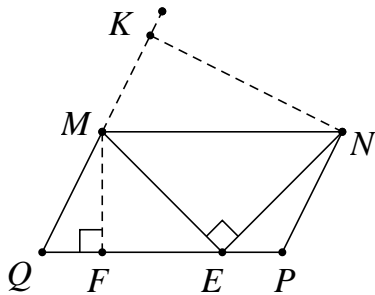
(11) $S_{\Delta BCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$

תרגול מבגרויות:

1) המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל שרדיוסו R . נתון כי $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$.

א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת α , β , R .

ב. נתון כי: $\alpha = \beta = 60^\circ$. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R .



2) במקבילית $MNPQ$ נקודה E נמצאת על הצלע PQ

כך ש- $\sphericalangle MEN = 90^\circ$ (ראה ציור).

נתון: 12 ס"מ $MQ = 70^\circ$, $\sphericalangle MNE = 40^\circ$.

מצא את הגובה MF , ואת הגובה NK .

3) במשולש ישר-זווית $\triangle MNP$ ($\sphericalangle P = 90^\circ$) הוא גובה PA

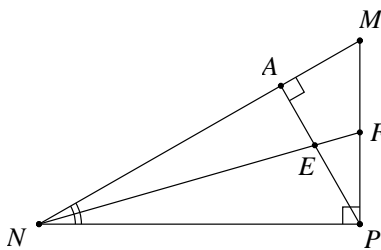
ליתר ו- NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.

PA ו- NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

נתון: 24 ס"מ $NP = 40^\circ$, $\sphericalangle MNP = 40^\circ$.

א. מצא את אורך הקטע NA .

ב. מצא את אורך הקטע EF .



4) אלכסוני המלבן $MNPQ$ נחתכים בנקודה O .

מנקודה O מעלים אנך ל- QN החותך את QP

בנקודה K (ראה ציור).

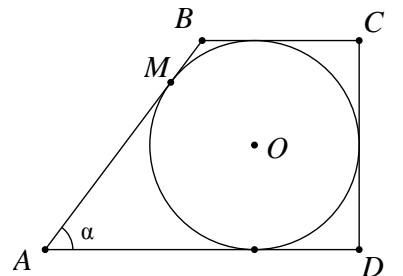
נתון: $NP = a$, $\sphericalangle MOQ = 2\beta$.

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a .

ב. הבע את היקף המשולש $\triangle NOK$

באמצעות β ו- a .

ג. חשב את היקף המשולש $\triangle NOK$ אם נתון: 10 ס"מ $a = 25^\circ$, $\beta = 25^\circ$.



5) בטרפז ישר-זווית $ABCD$ חסום מעגל שמרכזו O .

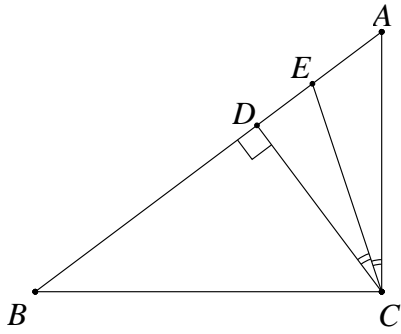
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם

השוק AB . נתון: 12 ס"מ $AM = \alpha$, $\sphericalangle BAD = \alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .

ג. נתון כי: $\alpha = 45^\circ$. חשב את היקף הטרפז.



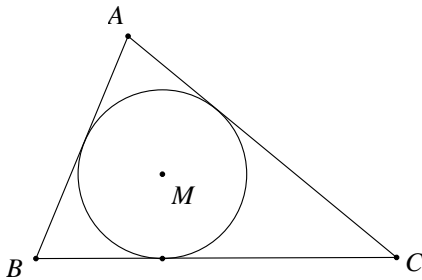
- 6 במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ (ראה ציור) נתון:
 $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 8$ ס"מ.
 CD הוא הגובה ליתר.
 CE הוא חוצה-הזווית $\angle ACD$.
הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .

7 נתון מעגל שרדיוסו R .

מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה. מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה. חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

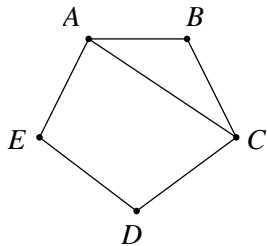
- 8 $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שאורך בסיסו 12 ס"מ. AD הוא הגובה לבסיס BC , ו- CE הוא הגובה לשוק AB . שני הגבהים נחתכים בנקודה O . נתון: $\angle ABC = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$).

- א. הבע את היחס $AO:DO$ באמצעות α .
 ב. הראה כי בעבור $\alpha = 60^\circ$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



- 9 במשולש $\triangle ABC$ חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור). נתון: $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 46^\circ$.

- א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC .
 ב. נתון: $BC = 16$ ס"מ. מצא את r .

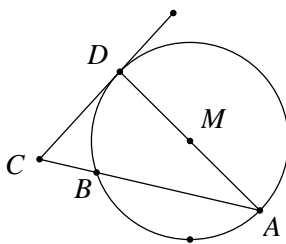


- 10 במחומש משוכלל $ABCDE$ (ראה ציור) אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ. חשב את שטח המחומש.

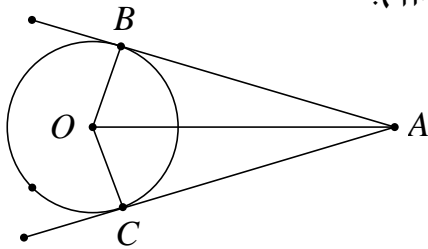
- 11 מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותר CBA למעגל (ראה ציור).

$$\text{נתון: } CD = \frac{3}{5}R$$

- א. מצא את זוויות המשולש $\triangle CAD$.
 ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש $\triangle ABCD$.



12) מנקודה A , הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O , יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו- AC (ראה ציור).



נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $AO = 10$ ס"מ.

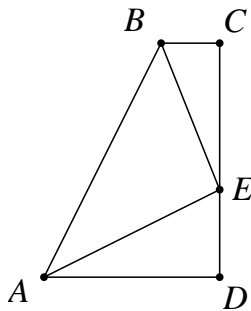
א. הבע באמצעות α את S_1 ,

שטח המרובע $ABOC$.

ב. הבע באמצעות α את S_2 ,

שטח המשולש $\triangle BOC$.

ג. הראה שאם $\alpha = 30^\circ$, אזי: $S_1 = 4 \cdot S_2$.



13) $ABCD$ הוא טרפז ישר-זווית ($\angle C = \angle D = 90^\circ$).

נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: $\angle AEB = 90^\circ$, $AE = BE = k$ ו- $\angle CBE = \beta$.

א. הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.

ב. חשב את שטח הטרפז עבור: $k = 6$ ס"מ, $\beta = 75^\circ$.

14) א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.

מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.

ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.

מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

15) $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שבו זווית הראש היא זווית חדה.

נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא $2a$.

AD הוא הגובה לבסיס BC ו- CE הוא הגובה לשוק AB .

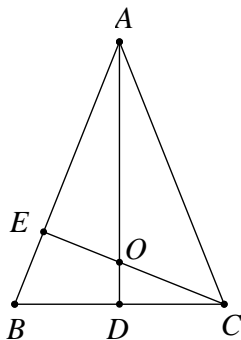
הגבהים AD ו- CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

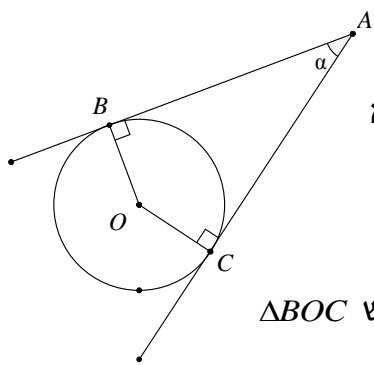
א. הבע באמצעות a ו- β את אורכי הקטעים CO ו- CE .

ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{CO}{CE}$.

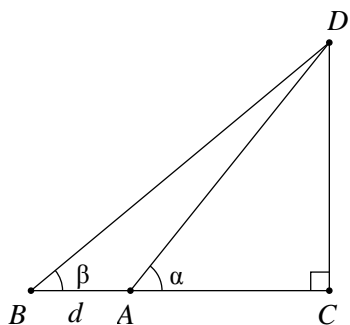
ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta = 60^\circ$,

והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

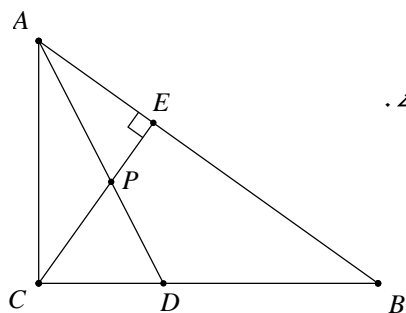




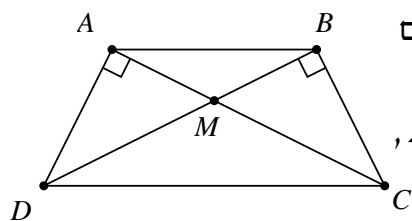
- 16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB = AC = m$). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\angle BAC = \alpha$ (ראה ציור).
- הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש $\triangle ABC$.
 - הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש $\triangle BOC$.
 - הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש $\triangle BOC$ לבין שטחו של המשולש $\triangle ABC$.
 - בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90^\circ$.



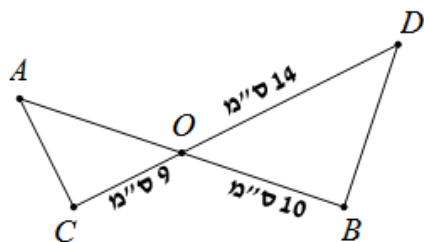
- 17) במשולש ישר-זווית $\triangle DAC$ נתון $\angle DAC = \alpha$. מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$. נתון כי: $\angle DBA = \beta$ (ראה ציור). סמן: $AC = x$. הבע את x באמצעות d ו- α .



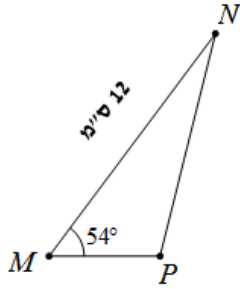
- 18) נתון משולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$). CE הוא הגובה ליתר. AD הוא חוצה-הזווית $\angle CAB$. CE ו-AD נחתכים בנקודה P (ראה ציור). נתון: $\angle CAB = \alpha$, $AC = m$. הבע באמצעות m ו- α את:
- אורך הקטע AE.
 - אורך הקטע PD.



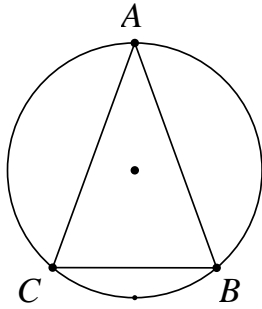
- 19) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AD = BC$) האלכסונים נפגשים בנקודה M (ראה ציור). נתון: $\angle ADC = \angle BCD = 65^\circ$, $\angle DAC = \angle DBC = 90^\circ$, $DC = 11$ ס"מ. חשב את שטח המשולש $\triangle AMD$.



- 20) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O. נתון כי: $CO = 9$ ס"מ, $\angle OAC = 60^\circ$, $OD = 14$ ס"מ, $AC = 6$ ס"מ, $OB = 10$ ס"מ. חשב את $\angle ODB$.

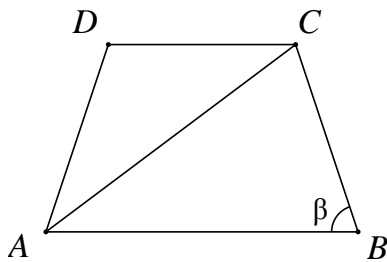


- 21) במשולש $\triangle MNP$ גודל הזווית M הוא 54° .
 נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ (ראה ציור), והצלע NP
 ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP .
 א. חשב את אורך הצלע NP .
 ב. PA הוא תיכון לצלע MN .
 חשב את שטח המשולש $\triangle PAN$.



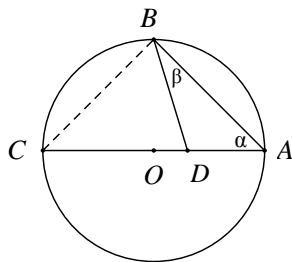
- 22) המשולש שווה-שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) חסום במעגל
 (ראה ציור). נתון: $\angle ABC = \beta$.
 כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.
 א. הבע בעזרת β את שטח
 המשולש $\triangle ABC$.
 ב. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$
 בעבור $\beta = 45^\circ$.

- 23) במשולש $\triangle ABC$ הזווית $\angle C$ היא בת 60° , אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ,
 והיקף המשולש הוא $7 + \sqrt{13}$ ס"מ.
 חשב את שטח המשולש.

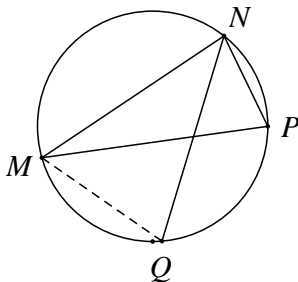


- 24) בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($AD = BC$)

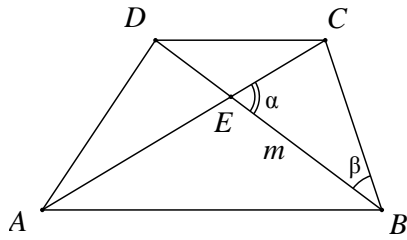
- אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך הלאכסון.
 זווית הבסיס היא β ($\beta > 60^\circ$), ראה ציור.
 הבע באמצעות β את היחס שבין שטח
 המשולש $\triangle ACD$ לשטח המשולש $\triangle ABC$.



- 25) הקדקודים A ו- B של המשולש $\triangle ABD$
 נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O .
 הקדקוד D של המשולש $\triangle ABD$ נמצא על הרדיוס OA .
 א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש $\triangle ABD$.
 ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש
 $\triangle ABC$ לשטח המשולש $\triangle ABD$.



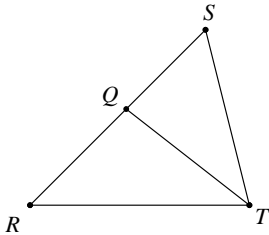
- 26) משולש $\triangle MNP$ חסום במעגל.
 המיתר NQ חוצה את הזווית $\angle MNP$.
 נתון: $\angle MNP = 80^\circ$, $\angle MPN = 70^\circ$, ו- $NP = 12$ ס"מ.
 חשב את אורך המיתר MQ .



27) נתון טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז.
נתון: $\angle CEB = \alpha$, $BE = m$, $DC = BC$,
 $\angle CBD = \beta$ (ראה ציור).

הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו- CD
באמצעות m , α ו- β .



28) במשולש ΔRST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\angle RTS$,

$\angle TRQ = 45^\circ$, $\angle RST = \alpha$, $RQ = \sqrt{2}$, $QS = m$.

א. הבע את $\sin \alpha$ באמצעות m .

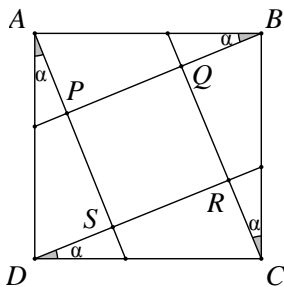
ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$. חשב את זוויות המשולש ΔRST .

29) במשולש שווים שוקיים ABC ($AB = AC$) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

30) נתון משולש שצלעותיו $t, 2t, kt$.

א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?

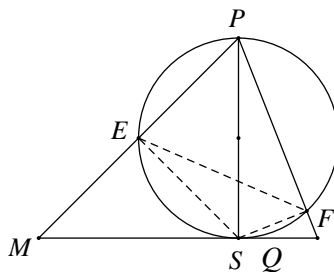
ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע"י t את אורך חוצה הזווית הקהה.



31) בתוך הריבוע $ABCD$ נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית α עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי $PQRS$.

א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$.



32) PS הוא גובה במשולש ΔPMQ (ראה ציור).

נתון: $PS = h$, $\angle MPS = \alpha$, $\angle SPQ = \beta$.

א. הבע את שטח המשולש ΔPMQ באמצעות h , α ו- β .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM ו- PQ

בנקודות E ו- F בהתאמה (ראה ציור).

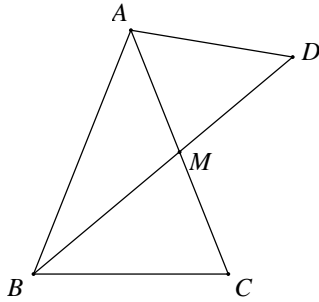
1. הבע באמצעות α ו- β את $\angle ESF$.

2. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח המשולש ΔESF

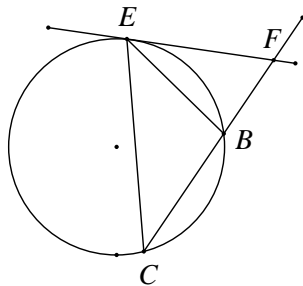
לשטח המשולש ΔPMQ .

33) במשולש $\triangle ABC$ הצלעות הן a, b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α, β ו- γ בהתאמה.

- א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α .
 ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה צלעות.

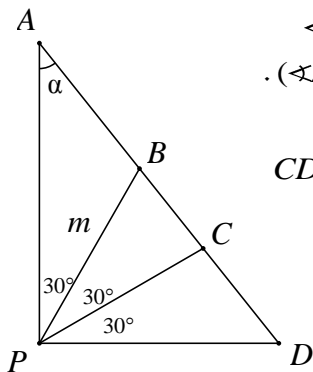


34) במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$), BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור). נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle ABC$ הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$.
 א. מצא את גודל הזווית $\angle BMC$.
 ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D , כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle ABD$ הוא 14 ס"מ.
 מצא את שטח המשולש $\triangle AMD$.



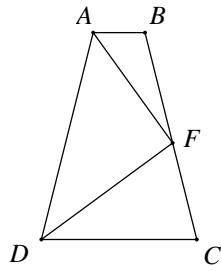
35) משולש שווה שוקיים $\triangle BCE$ ($BC = BE$) חסום במעגל שרדיוסו R . זווית הבסיס של המשולש $\triangle BCE$ היא α . בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).
 א. בטא את שטח המשולש $\triangle BEF$ באמצעות R ו- α .
 ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח המשולש $\triangle BCE$ שווה לשטח המשולש $\triangle BEF$.

36) בטרפז $BCDE$ ($BC \parallel ED$) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ. הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא 80° . אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\angle CBE$. חשב את היקף הטרפז.

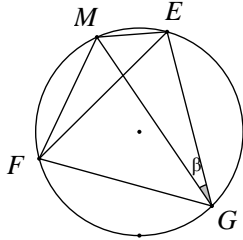


37) במשולש ישר-זווית $\triangle APD$ מחלקים את הזווית הישרה $\angle P$ לשלוש זוויות שוות. כלומר: $(\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ)$. נתון כי: $\angle PAD = \alpha$ $PB = m$.
 א. היעזר במשפט הסינוסים, והבע את AB, AC, BD ו- CD באמצעות m ו- α .

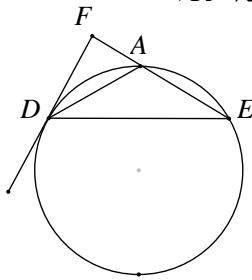
ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.



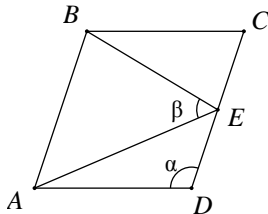
- 38) בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AD = BC$, $AB \parallel DC$), היא נקודה על השוק BC , כך ש- DF חוצה את הזווית $\sphericalangle CDA$ ו- AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle FAB = \beta$, $AB = b$. הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC .



- 39) משולש שווה צלעות $\triangle EFG$ חסום במעגל שרדיוסו R . M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).
 א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.
 ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG ?

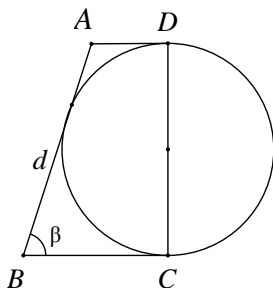


- 40) משולש שווה שוקיים $\triangle ADE$ ($AD = AE$). חסום במעגל שרדיוסו R . ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle DAE = \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 180^\circ$).
 א. הבע את שטח המשולש $\triangle ADF$ באמצעות R ו- α .
 ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש $\triangle ADE$ ובין שטח המשולש $\triangle ADF$.
 ג. חשב את α אם שטח המשולש $\triangle ADE$ שווה לשטח המשולש $\triangle ADF$.

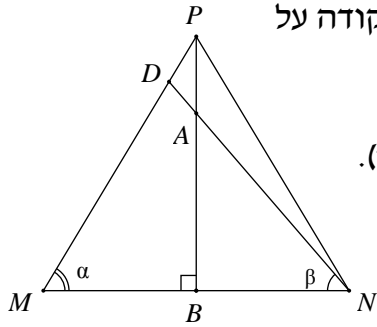


- 41) במעוין $ABCD$ הנקודה E היא אמצע הצלע CD . נתון: $\sphericalangle AEB = \beta$, $\sphericalangle ADC = \alpha$ (ראה ציור).

הוכח כי: $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$



- 42) נתון טרפז $ABCD$ ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל. השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור). נתון כי: $\sphericalangle B = \beta$, $AB = d$.
 א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז
 ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.
 ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר. חשב את הזווית החדה β .



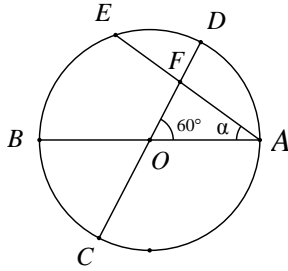
43) במשולש שווה שוקיים $\triangle PMN$ ($PM = PN$) היא נקודה על

הגובה PB , כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.

הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $\angle DMN = \alpha$, $\angle DNB = \beta$ ו- $BN = a$.

א. חשב את היחס $\tan \beta : \tan \alpha$.

ב. חשב את היחס $PM : DM$.



44) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים AB

ו- CD הנחתכים בזווית של 60° . מיתר AE היוצר

זווית α עם הקוטר AB , חותך את הקוטר CD

בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש $\triangle ACF$ באמצעות R ו- α .

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30^\circ$, שטח המשולש $\triangle ACF$ הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.

תשובות סופיות:

*הערה: מצ"ב פתרונות אפשריים בשאלות עם פרמטרים, תתכנה דרכי רישום שונות שגם נכונות.

$$(1) \text{ א. } \frac{1}{2}R \cdot 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ ב. } \frac{1}{2}R \text{ ב. } 21.52 \text{ ס"מ } KN = MF = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$(3) \text{ א. } 18.385 \text{ ס"מ } NA = \text{ב. } 5.975 \text{ ס"מ } EF = \text{א. } \frac{a}{2 \cos \beta} OK = \quad (4)$$

$$\text{ב. } \frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[1 + \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right] \text{ א. } (5) \text{ א. } 12 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ ב. } 24 \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

$$(6) \text{ א. } AE = 8 \sin \beta \cdot \left[\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \beta \right) \text{ ב. } \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$(8) \text{ א. } -2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 \text{ ב. מתקיים: } AO = 2 \cdot DO \text{ (מפגש הגבהים)}$$

$$(9) \text{ א. } BC = r \cdot (\operatorname{tg} 59^\circ + \operatorname{tg} 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \text{ הוא גם מפגש התיכונים.}$$

$$\text{ב. } r = \frac{16}{\operatorname{tg} 59^\circ + \operatorname{tg} 67^\circ} \approx 3.98 \quad (10) \text{ א. } S = 147.86 \text{ סמ"ר}$$

$$(11) \text{ א. } \angle D = 90^\circ, \angle A \approx 16.7^\circ, \angle C \approx 73.3^\circ \text{ ב. } S \approx 0.0495 \cdot R^2$$

$$(12) \text{ א. } S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha$$

$$\text{ב. } S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$(13) \text{ א. } S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \text{ (או כל תשובה שקולה). ב. } 27 \text{ א. } 5.548 \text{ ס"מ } r \approx$$

$$\text{ב. } 90.45 \text{ סמ"ר } S \approx \text{א. } (15) \text{ א. } CE = 2a \cdot \sin \beta, CO = \frac{a}{\sin \beta} \text{ ב. } \frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta}$$

$$\text{ג. היחס הוא: } \frac{2}{3} \text{ (בדומה למפגש התיכונים במשולש).}$$

$$(16) \text{ א. } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \text{ ב. } S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \text{ ג. יחס השטחים: } \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

ד. במקרה זה $ABOC$ הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ($\operatorname{tg}^2 45^\circ = 1$).

$$(17) \text{ א. } AC = x = d \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

$$(18) \text{ א. } AE = m \cdot \cos \alpha \text{ ב. } PD = \frac{m \cdot (1 - \cos \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2m \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2m \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$(19) \text{ א. } 9.07 \text{ סמ"ר } S \approx \text{ב. } \angle ODB \approx 44.7^\circ \quad (20)$$

$$(21) \text{ א. } 10.38 \text{ ס"מ } NP = \text{ב. } 8.2 \text{ סמ"ר } S_{\triangle PAN}$$

$$.S_{\Delta ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (23) \quad .S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad .\text{נ} \quad (22)$$

$$(24) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta = \left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \text{ או כל תשובה שקולה.}$$

$$.MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (26) \quad .\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha} \quad .\text{ג} \quad .S_{\Delta ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad .\text{נ} \quad (25)$$

$$.DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (27)$$

$$. \alpha \approx 20.7 \quad (29) \quad .45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ \quad .\text{ג} \quad .\sin \alpha = \frac{1}{m} \quad .\text{נ} \quad (28)$$

$$. \alpha = 15^\circ \quad (31) \quad \frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t \quad .\text{ג} \quad .1 < k < \sqrt{3} \text{ או } \sqrt{5} < k < 3 \quad .\text{נ} \quad (30)$$

$$. \sphericalangle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad .1 \quad .\text{ג} \quad S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad .\text{נ} \quad (32)$$

$$.m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha} \quad .\text{נ} \quad (33) \quad .S_{\Delta EFS} : S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad .2$$

$$.S_{\Delta AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad .\text{ג} \quad \sphericalangle BMC = 79.5^\circ \quad .\text{נ} \quad (34) \quad .m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad .\text{ג}$$

$$.P_{BCDE} = 51.09 \quad (36) \quad .\alpha = 45^\circ \quad .\text{ג} \quad S_{\Delta BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad .\text{נ} \quad (35)$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, \quad AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, \quad AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad .\text{נ} \quad (37)$$

$$.MG \text{ הוא קוטר במעגל.} \quad (39) \quad .DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad (38) \quad .CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$. \alpha = 90^\circ \quad .\text{ג} \quad \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta DF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad .\text{ג} \quad S_{\Delta ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad .\text{נ} \quad (40)$$

$$. \beta = 30^\circ \quad .\text{ג} \quad S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta \quad P = 2d + d \sin \beta \quad .\text{ג} \quad .AD + BC = d \quad .\text{נ} \quad (42)$$

$$. PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad .\text{ג} \quad .\tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad .\text{נ} \quad (43)$$

$$.S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad .\text{נ} \quad (44)$$

תוכן העניינים – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

283	פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי:
283	נגזרות ומשיקים:
289	תשובות סופיות:
290	חקירת פולינום:
293	תשובות סופיות:
295	חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש:
301	תשובות סופיות:
303	חקירת פונקציה עם פרמטר:
303	תשובות סופיות:
304	תרגול נוסף:
304	תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:
314	תשובות סופיות:
317	תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:
327	תשובות סופיות:
331	תרגילים העוסקים בפונקצית שורש (אי-רציונאלית):
352	תשובות סופיות:
359	תרגול מבגריות:
364	תשובות סופיות:
366	הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת:
369	תשובות סופיות:
370	פרק 13 - בעיות קיצון:
370	שלבי עבודה:
370	שאלות:
372	תשובות סופיות:
373	תרגול נוסף:
373	תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:
379	תשובות סופיות:
380	תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:
388	תשובות סופיות:
389	תרגילים העוסקים בפונקצית שורש:
393	תשובות סופיות:
394	תרגול מבגריות של 3 יחידות:
394	בעיות בהנדסת המישור:
396	בעיות בהנדסת המרחב:

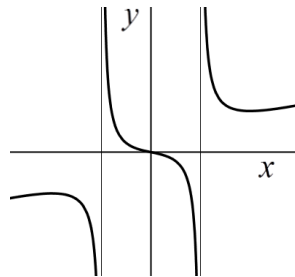
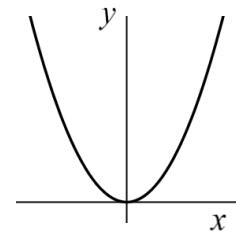
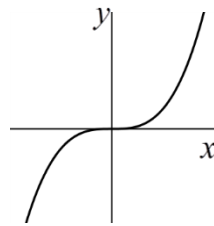
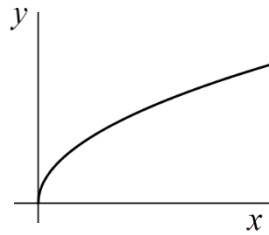
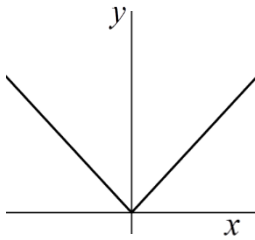
397	בעיות בפונקציות וגרפים :
400	תשובות סופיות :
401	תרגול מבגרריות :
404	תשובות סופיות :
405	פרק 14 - חשבון אינטגרלי :
406	שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה :
408	האינטגרל המסוים :
408	חישובי שטחים – פונקציה פולינומית :
415	שאלות עם פרמטר :
415	חישובי שטחים – פונקציה רציונאלית :
416	חישובי שטחים – פונקצית שורש :
416	חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים :
420	תשובות סופיות :
423	תרגול נוסף - חשבון אינטגרלי :
423	תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית :
433	תשובות סופיות :
435	תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית :
439	תשובות סופיות :
440	תרגילים העוסקים בפונקציה אי-רציונאלית :
445	תשובות סופיות :
446	תרגול מבגרריות של 3 יחידות :
447	תשובות סופיות :
448	תרגול מבגרריות :
452	תשובות סופיות :
453	נספח 1 – דף ההודאות הרשמי לשאלון 804 :
454	נספח 2 – עקרונות מנחים לבדיקת בחינות הבגרות :
462	נספח 3 – משפטים בגאומטריה :

פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי:

נגזרות ומשיקים:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$

הנגזרת:

כלל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה:

1. כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
2. כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
3. כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
4. כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
5. כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
6. כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
7. כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
8. כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
9. כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שיפוע של פונקציה:

1. השיפוע (m) של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
2. השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
3. משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 & \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} & \text{ה.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \\ \text{ג.} & f(x) = 3(x-x^2)^2 & & \end{array}$$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} & \text{ב.} & f(x) = -\frac{2}{x} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{3}{x^3} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{6}{x+5} & \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ז.} & & \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \end{array}$$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א.} \quad f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב.} \quad f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ג.} \quad f(x) = x^3(6-x)^4$$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} & \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} & \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} & \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} & \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} & \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = ax^4 - bx & \text{ב.} & f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \\ \text{ד.} & f(x) = a\sqrt{bx^2+c} & \text{ג.} & f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \end{array}$$

11) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2,2)$.

12) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ בנקודה שבה $x = -2$.

13) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x=1$.

14) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה שבה $x=-1$.

15) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה שבה $y=2$.

16) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה שבה: $x=1$.

17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה שבה: $x=4$.

18) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר: $y = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

22) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

23) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$, (a פרמטר) בנקודה שבה $x=3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

24) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, (a פרמטר) בנקודה שבה $y=2$ הוא -4. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

25) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$, (a פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר a .

26) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$, (A פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A .

27) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, (a, b פרמטרים) בנקודה $(1, 6)$ הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

28) א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.

ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

תשובות סופיות:

1. א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ (1)

2. א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8 ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$ (2)

3. א. 0 ב. 0 ג. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ א. (4) (3)

5. א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$ א. $12x^3-18x^2+6x$ (5)

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$ (6)

6. א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$ (6)

7. א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$ (7)

8. א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ (8)

9. א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$ (9)

10. א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3} - \frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$ (11) $m=17$ (12) $m=4$ (10)

13. $m=2$ (13) $y=24x+22$ (14) $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$ (15) $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$ (16) (13)

17. $y=22x-56$ (17) $y=3x-1$ א. (18) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ (19) $y=-6x-12$ (19) $y=6x-24$ (17)

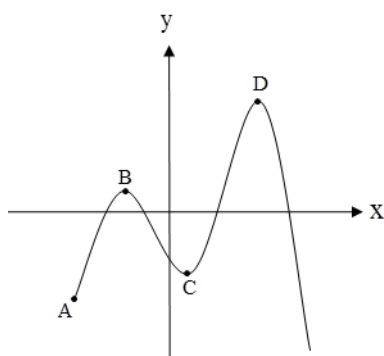
20. $y=2x-3$ (20) $y=-2x+8$ (21) $y=-x-1\frac{1}{3}$ (22) $y=-x+1\frac{1}{3}$ (22) (20)

23. $a=2, y=8x-18$ (23) $a=2, y=-4x-2$ (24) $a=4$ (25) $A=1$ (26) (23)

27. $b=2, a=6, y=-6x+12$ (27) $y=2tx-t^2+1$ א. (28) $t=0, t=-2$ (27)

חקירת פולינום:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):



מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D

מינימום או מקסימום קצה - A

מינימום או מקסימום מוחלט - D

נקודות קיצון מקומיות:

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית – נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

מציאת נקודות קיצון מקומיות:

- א. נגזור את הפונקציה.
- ב. נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- ג. נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- ד. נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

5) לפונקציה: $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

6) לפונקציה: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$, (A, B פרמטרים) יש נקודת קיצון ב-(2,3). מצא את ערכי הפרמטרים A, B.

7) לפונקציה: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ וב- $x = 4$. מצא את ערכי הפרמטרים ואת שיעורי ה- y של שתי נקודות הקיצון.

8) לפונקציה: $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה (2,3). מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

9) נתונה הפונקציה: $f(x) = 10x - x^2$. ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(11) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(הגרפים לשאלות החקירה מופיעים בסוף התשובות).

(1) $\max(5,25)$ א. $\min(2,-16)$, $\max(-2,16)$

ב. עלייה: $x > 2$, $x < -2$ ירידה: $-2 < x < 2$

(3) א. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

ב. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$ או $x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$

(4) א. $\min(3,5)$ ב. עלייה: $x > 3$ עלייה: $x < 3$, $x \neq 0$ (5) $a = 3$ (6) $A = -1$, $B = 3$

(7) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $\left(-1, 2\frac{5}{6}\right)$, $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$ (8) $a = 2$, $b = -16$

(9) א. כל x ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x < 5$ ירידה: $x > 5$ ד. $(0,0)$, $(10,0)$

(10) א. כל x ב. $\min(2,-16)$, $\max(-2,16)$

ג. עלייה: $x < -2$, $x > 2$ ירידה: $-2 < x < 2$ ד. $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$

(11) א. כל x ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$ או $x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$

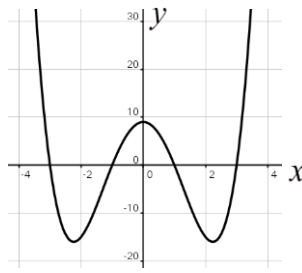
ד. $(0,9)$, $(\pm 1,0)$, $(\pm 3,0)$

(12) א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$ תחומי ירידה: $x < 3$ ד. $(0,32)$

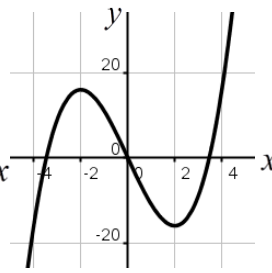
(13) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x ד. $(0,0)$

סקיצות לשאלות החקירה:

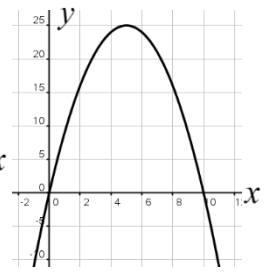
(9)



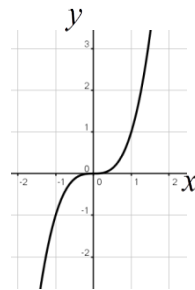
(8)



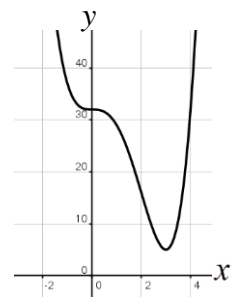
(7)



(11)



(10)



חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש:

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

1. תחום הגדרה.
2. נקודות קיצון.
3. תחומי עלייה וירידה.
4. נקודות חיתוך עם הצירים.
5. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
6. שרטוט.

תחום הגדרה של פונקציה:

1. כל פולינום מוגדר לכל x .
2. בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
3. בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטות:

1. אסימפטוטה אנכית:
בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותנו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

2. אסימפטוטה אופקית:

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots} \text{ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)}$$

- אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.
- אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

שאלות:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x & \text{ב.} & f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 & \text{ג.} & f(x) = \frac{2x}{x-3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1} & \text{ה.} & f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x} & \text{ו.} & f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x^2 + 1} & & & & \end{array}$$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} & \text{ב.} & f(x) = 2\sqrt{x-3} & \text{ג.} & f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}} & \text{ה.} & f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10} & \text{ו.} & f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}} & & & & \end{array}$$

3 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

4 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 4x - 12$.

5 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$.

6 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x^2 + 1}{x^2 - 9}$.

7 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 + 3x^2}$.

8 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2x - 15}$.

9 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^3 - 5x + 1}{1 + 2x^2}$

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + b}{x - b}$

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 12}$

(14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2}$

(15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 4x}$

(16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$

(18) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$

(19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{ax^2 - x + b}$

לפונקציה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 2$ ואסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x = -1$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 8}{x + b\sqrt{x}}$. הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית

שלה בנקודה $(16, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(21) נתונה הפונקציה : $f(x) = x + \frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

27) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

28) נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

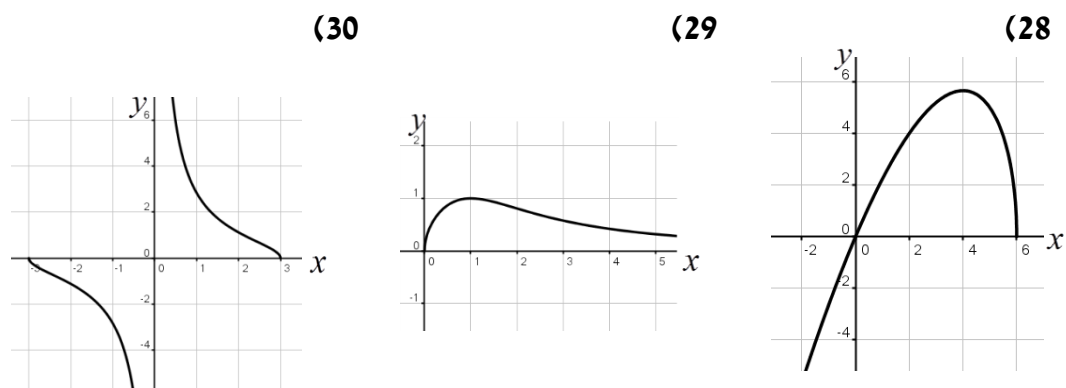
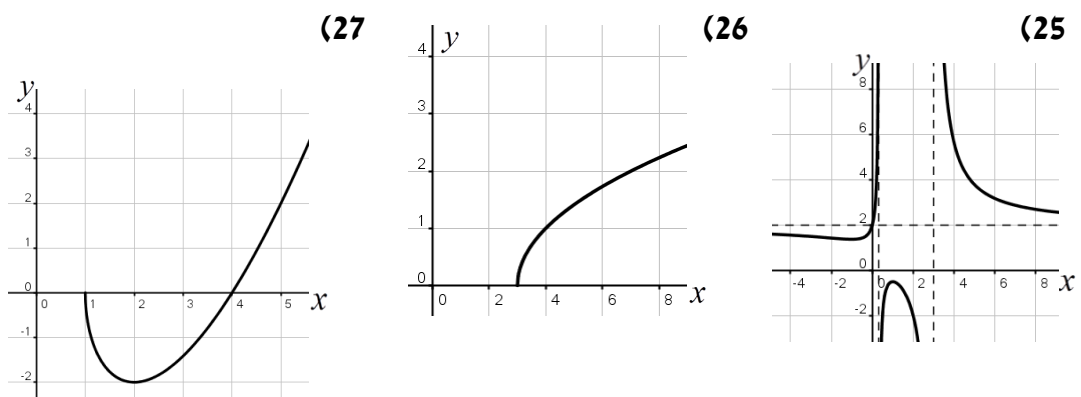
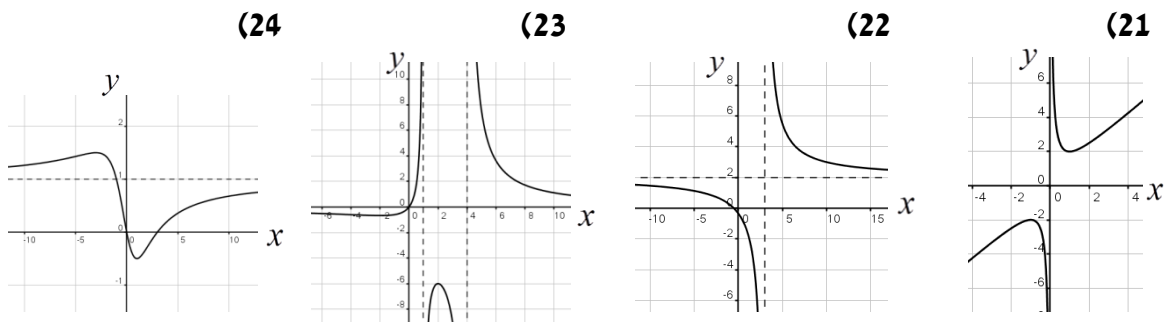
- 1) א. כל x ב. כל x ג. $x \neq 3$ ד. $x \neq \pm 1$ ה. $x \neq 0, 2, -2$ ו. $x \neq 4, -2$ ז. כל x .
- 2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \leq \frac{1}{2}$ ד. $x > -4$ ה. $x \geq 2$ או $x \leq -5$ ו. $x > 3$ או $-3 < x < 0$
- ז. $x \leq 2$ וגם $x \neq -2, 1$ א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ 3)
- ב. תחומי עלייה: $-3 < x < 3$ וגם $x \neq 1$ תחומי ירידה: $3 < x \neq 9$ או $x < -3$.
- 4) אין 5) אופקית: $y = 3$ אנכית: $x = 2$ 6) אופקית: $y = 5$ אנכית: $x = \pm 3$.
- 7) אופקית: $y = \frac{2}{3}$ 8) אופקית: $y = 0$ אנכית: $x = 5, x = -3$ 9) $x = 0, y = 0$.
- 10) אין 11) אופקית: $y = a$ אנכית: $x = b$ 12) אופקית: $y = 1$ אנכית: $x = 1$.
- נקודת אי הגדרה: $(2, 4)$ 13) $x = 4, y = 1$ 14) אין, לפונקציה יש נקודת אי הגדרה
- ששיעוריה הם $(2, 10)$ 15) אופקית: $y = \frac{1}{2}$ אנכית: $x = 2$ נקודת אי הגדרה: $(0, 0)$
- 16) $x = 0, y = 0$ 17) $x = -1, y = 0$ 18) אופקית: $y = 0$ אנכית: $x = 2$.
- 19) $b = -3, a = 2$ 20) $b = 1, a = 2$.
- 21) א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, 2), \max(-1, -2)$ ג. תחומי עלייה: $1 < x$ או $x < -1$, תחומי ירידה: $x \neq 0, -1 < x < 1$ ד. אין ה. $x = 0$.
- 22) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה. ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ה. $y = 2, x = 3$.
- 23) א. $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$ ג. תחומי עלייה: $-2 < x < 2, x \neq 1$, תחומי ירידה: $2 < x \neq 4$ או $x < -2$ ד. $(0, 0)$ ה. $y = 0, x = 1, x = 4$.
- 24) א. כל x ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$.
- ג. תחומי עלייה: $1 < x$ או $x < -3$, תחומי ירידה: $-3 < x < 1$ ד. $(3, 0), (0, 0)$ ה. $y = 1$.
- 25) א. $x \neq \frac{1}{3}, x \neq 3$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$, וגם $x \neq \frac{1}{3}$ תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$ ד. $(0, 2)$ ה. $y = 2, x = \frac{1}{3}, x = 3$.
- 26) א. $x \geq 3$ ב. $\min(3, 0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ד. $(3, 0)$.
- 27) א. $x \geq 1$ ב. $\max(1, 0), \min(2, -2)$ קצה ג. תחומי עלייה: $2 < x$, יורדת: $1 < x < 2$ ד. $(1, 0), (4, 0)$.

(28) א. $x \leq 6$ ב. $\max(4, 4\sqrt{2})$, $\min(6, 0)$ קצה ג. עולה: $x < 4$, יורדת: $4 < x < 6$
 ד. $(0, 0)$, $(6, 0)$.

(29) א. $x \geq 0$ ב. $\max(1, 1)$, $\min(0, 0)$ קצה ג. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x$ ד. $(0, 0)$.

(30) א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3, 0)$ קצה, $\min(3, 0)$ קצה ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3, 0)$, $(3, 0)$ ה. $x = 0$.

סקיצות לשאלות החקירה:



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "y":

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז:

אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.

אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$.

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x - 16$.

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3b^2x$, $b > 0$ פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

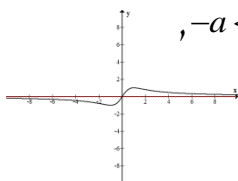
(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$). חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מצא את תחום הגדרה.
- מצא את נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(1) $\min(-2, 16)$, $\max(-2, 16)$ (2) $\min(3, -25)$ (3) $\min(b, -2b^3)$, $\max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל x . ב. $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$, $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$. ג. תחומי עלייה: $-a < x < a$.



תחומי ירידה: $x < -a$ או $x > a$. ד. $(0, 0)$. ה. אופקית: $y = 0$.

תרגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3 & \text{(3)} & y = (x-1)^2 & \text{(2)} & y = x^2 & \text{(1)} \\ y = x^2(2x+1)^2 & \text{(6)} & y = (x^2-1)(x^2+3) & \text{(5)} & y = 3x^3 - 3x & \text{(4)} \\ y = \frac{4x^2 - 2x + 6}{2} & \text{(9)} & y = \frac{5}{7}x^7 - \frac{4x^5}{5} + \frac{1}{2}x & \text{(8)} & y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 & \text{(7)} \\ y = \frac{x(x+7)^2}{2} & \text{(12)} & y = x^4 + 1 + \frac{x^3 + 9x}{3} & \text{(11)} & y = \frac{x^3 - 3x^2 - 6x - 9}{5} & \text{(10)} \\ y = (4x-5)^4 & \text{(15)} & y = (3x+2)^8 & \text{(14)} & y = (x-1)^6 & \text{(13)} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llllll} y' = 4x^3 + 4x & \text{(5)} & y' = 9x^2 - 3 & \text{(4)} & y' = 3x^2 - 8x + 4 & \text{(3)} & y' = 2x - 2 & \text{(2)} & y' = 2x & \text{(1)} \\ y' = 4x - 1 & \text{(9)} & y' = 5x^6 - 4x^4 + \frac{1}{2} & \text{(8)} & y' = x + \frac{1}{3} & \text{(7)} & y' = 16x^3 + 12x^2 + 2x & \text{(6)} \\ y' = \frac{3x^2 + 28x + 49}{2} & \text{(12)} & y' = 4x^3 + x^2 + 3 & \text{(11)} & y' = \frac{3x^2 - 6x - 6}{5} & \text{(10)} \\ y' = 16(4x-5)^3 & \text{(15)} & y' = 24(3x+2)^7 & \text{(14)} & y' = 6(x-1)^5 & \text{(13)} \end{array}$$

תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$.

(16) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x=1, f(x) = 2x^2 - x & \text{ב. } x=7, f(x) = x^3 + 5x^2 - 5x \\ \text{ג. } x=-1, f(x) = x(4x-3)^2 & \text{ד. } x=2, f(x) = \frac{x^5 - 15x^3 + 20x + 4}{5} \\ \text{ה. } x=0, f(x) = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 & \text{ו. } x=-1, f(x) = x(x-3)(x^2+1) \end{array}$$

17 לפניך מספר פונקציות. לכל פונקציה מצא את שיעורי הנקודות עבורם שיפוע המשיק הוא המצוין לידה.

א. $m=13$, $f(x)=5x^2+3x$ ב. $m=0$, $f(x)=x(x-2)^2$

ג. $m=20$, $f(x)=2x^3+14x$ ד. $m=6$, $f(x)=(x^2+6)(x-2)$

18 א. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y=3x^2-x-2$ אשר המשיק העובר דרכה מקביל לישר: $y=5x+2$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y=x^3+3x^2+2x$ אשר המשיק העובר דרכה מקביל לישר: $y+x=3$.

19 נתונה הפונקציה הבאה: $y=3x^2-12x$.

הראה כי שיפוע המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x הם מספרים נגדיים ומצא את הזוויות שכל משיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y-y_1=m(x-x_1)$, כאשר: (x_1, y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

20 מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x=3$, $y=x^2-4x-5$ ב. $x=-1$, $y=x^3-4x$

ג. $x=0$, $y=x(x+5)^2$ ד. $x=1$, $y=3x^4+4x^3+5x$

ה. $x=-3$, $y=\frac{x^3+6x^2-9x}{3}$ ו. $x=1$, $y=\frac{4x^7}{7}-\frac{2x^{10}}{5}$

ז. $x=0$, $y=(3x^2-4)(6-x)$ ח. $x=2$, $y=x(x-1)(3x+8)$

21 נתונה הפונקציה: $y=x^3-3x+12$. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

22 נתונה הפונקציה: $y=x^2-7x+10$. מצא את משוואת המשיקים לגרף הפונקציה העוברים דרך נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(23) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 + 5x + 3$ ונתון הישר: $y = 4x + 4$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שמצאת.

(24) נתונה הפונקציה: $y = 4x^3$ ונתון הישר: $y = 4x$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שמצאת.

(25) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 3x - 4$ ו- $g(x) = 5x - x^2$.

- א. מצא את משוואות המשיקים לכל הפונקציה העוברים דרך הנקודה שבה $x = 1$.
ב. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים שמצאת בסעיף הקודם.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 3$.

הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשלוש נקודות.

- א. מצא את נקודות החיתוך בין הפונקציה והישר.
ב. מצא את משוואות המשיקים בנקודות החיתוך.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

(27) א. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x^2 + x + 3$.

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה ששיפועו: $m = 9$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + 2x^2$.

מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה ששיפועם: $m = -1$.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = x(x+4)^2$.

מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה ששיפועם: $m = 0$.

(28) א. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 + 12x + 4$.

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר: $y = 44x + 1$.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$.

המקבילים לישר: $3y - 12x = 5$.

(29) א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 4x + 1$.

בעלי שיפוע 2.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $y = -2x^3 - 3x^2 + 10x + 3$.

ששיפועם הוא: $m = -2$.

תרגילים עם פרמטרים :

(30) נתונה הפונקציה : $y = ax^2 + 4x + 5$. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ הוא 8 . מצא את a .

(31) נתונה הפונקציה : $y = x^2 + a$.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש משיק שמשוואתו : $y = 2x - 2$.

א. מצא את נקודת ההשקה .

ב. מצא את a .

(32) נתונה הפונקציה : $y = x^3 + 6x^2 + ax$. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא 5 . מצא את a וכתוב את הפונקציה .

(33) נתונה הפונקציה : $y = \frac{x^2}{A} + 8x + 20$. ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה

העובר דרך אחת מנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x היא : $y = 12x + 24$.

א. מצא את A .

ב. מצא את משוואת המשיק העובר דרך נקודת החיתוך השנייה של

הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. מצא את הזווית החדה שיוצר המשיק שמצאת בסעיף הקודם עם ציר ה- x .

(34) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = (x-1)(x^2 + a)$.

ידוע כי : $f'(1) = 2$. מצא את a .

(35) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^4}{A} + 2x^3 + 4x^2 + 4$.

ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -2$ מקביל לציר ה- x .

א. מצא את A .

ב. האם יש לגרף הפונקציה משיקים נוספים המקבילים לציר ה- x ?

אם כן, מצא את המשוואות שלהם .

(36) נתונה הפונקציה : $f(x) = x^5 + Bx^3 + 4x$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ מקביל לישר : $y = 24x$.

א. מצא את B .

ב. כתוב את משוואת המשיק .

ג. האם יש משיק נוסף לגרף הפונקציה המקביל לישר $y = 24x$?

במידה וכן מצא את משוואתו .

(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = Ax^2 + Bx + 5$. ידוע כי: $f(1) = 12$ וגם: $f'(1) = 8$. מצא את A ו-B.

(38) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + Ax + C$. ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה: $y = 5$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודה זו הוא 4. מצא את A ו-C.

(39) נתונה הפונקציה: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + 8$. משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה שבה $x = -2$ היא: $y = 12x + 28$. מצא את A ו-B.

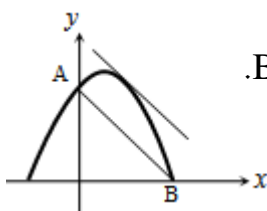
(40) נתונה הפונקציה: $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + 10$. שיפוע הפונקציה בנקודה $(1, 18)$ הוא 18.
 א. מצא את A ו-B.
 ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה-x.

(41) נתונות הפונקציות: $f(x) = 3x^2 + Ax$ ו- $g(x) = x^2 + B$. ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה: $x = 1$ ולשתיהן יש את אותו השיפוע בנקודה שבה $x = -0.25$. מצא את A ו-B.

(42) נתונות הפונקציות: $f(x) = Ax^2 + 10x$ ו- $g(x) = x^2 + Bx - 16$. ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה: $x = -1$. כמו כן לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע בעבור $x = -8.5$. מצא את A ו-B.

תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:

(43) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 6x + 16$.



הנקודה A היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y והנקודה B

היא נקודת החיתוך החיובית של הפונקציה עם ציר ה-x.

א. מצא את משוואת המיתר העובר דרך הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מצא את הזווית שיוצר המשיק שמצאת בסעיף

הקודם עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.



(44) נתונה הפרבולה: $f(x) = -x^2 + 8x - 12$.

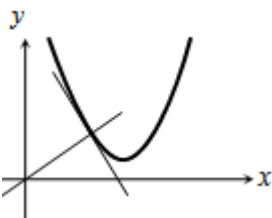
- מצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x .
- דרך נקודות החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- x מעבירים משיקים. מצא את משוואות המשיקים הללו.
- מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.
- חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים וציר ה- x .
- חשב את זוויות המשולש הנוצר בין המשיקים וציר ה- x , איזה משולש זה?

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 27x$.

- מצא את שיעורי הנקודות שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x .
- כתוב את משוואות המשיקים העוברים דרך הנקודות שמצאת.
- חשב את שטח המלבן הנוצר בין שני המשיקים שמצאת והאנכים לציר ה- x היוצאים מנקודות ההשקה.

(46) נתונות הפונקציות: $f(x) = 8 - x^2$ ו- $g(x) = Ax^2 + 15.5x - 1$.

- ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה: $x = 1$.
- מצא את A .
 - הראה כי המשיקים לכל פונקציה בנקודת החיתוך שבה $x = 1$ מאונכים זה לזה. (תזכורת: השיפועים m_1, m_2 של שני ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$ - מכפלתם שווה ל-1).

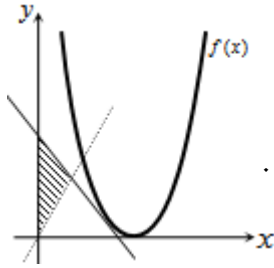


(47) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 2x^2 - 10x + 13$.

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה שבה $x = 2$.
- מצא את משוואת הנורמל לפונקציה העובר דרך נקודת ההשקה של המשיק שמצאת.
- חשב את שטח המשולש הנוצר בין הנורמל, המשיק והצירים. (היעזר באיור).

(48) נתונה הפונקציה: $f(x) = Ax^2 - 6x + 9$.

- שיפוע הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ הוא אפס.
- מצא את A .
 - הראה כי הפונקציה משיקה לציר ה- x .
 - מעבירים את הישר $y = 1$ החותך את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם הישר.



49 נתונה הפונקציה: $f(x) = (2x-5)^8$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=2$.
- ב. מצא את נקודת החיתוך של משיק זה עם הישר $y=17x$.
- ג. חשב את שטח המשולש שנוצר בין המשיק, הישר וציר ה- y (ראה איור).
- ד. חשב את זוויות המשולש הנ"ל (היעזר בשיפוקי הישר והמשיק).

50 נתונה הפונקציה: $f(x) = a(x-b)^5$, $a, b \neq 0$.

- ידוע כי ערך הנגזרת הוא אפס כאשר $x=1$.
- כמו כן הישר $y=15x-27$ משיק לפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- ב. מצא שתי נקודות על הפונקציה $f(x)$ ועל הפונקציה: $g(x) = 7.5(x-1)^4 - 24$ בעבורה שיפוע המשיק זהה לשני הגרפים.

תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון לפי הכלל: $f'(x) = 0$, סיווג ומציאת תחומי עלייה וירידה:

51 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

- א. $y = x^2 - 6x + 8$
- ב. $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 8$
- ג. $y = x(x+3)^2$
- ד. $y = x^5 + 80x$
- ה. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{26x^3}{3} + 25x$

52 לפניך מספר פונקציות. רשום בעבור כל פונקציה את תחומי העלייה והירידה שלה:

- א. $y = x^2 - 7x + 10$
- ב. $y = x^3 - 12x$
- ג. $y = x^2(x-1)$
- ד. $y = 16 - x^2 + 2x^4$
- ה. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$
- ו. $y = \frac{x^3 + 6x^2 + 15x}{3}$
- ז. $y = (2x-5)^6$
- ח. $y = (4-x)^7$

53 נתונה הפונקציה הבאה: $y = x^4 - 3x^3 + 4x$.

- א. הראה כי הנקודה שבה: $x=2$ היא נקודת קיצון.
- ב. כתוב את הנגזרת השנייה של הפונקציה.
- ג. קבע על פי הנגזרת השנייה את סוג הקיצון של נקודה זו.

54) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + 6x^2$.

- הראה כי יש לפונקציה נקודת קיצון על ציר ה- x וקבע את סוגה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וכתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

55) א. מצא את הערך הגדול ביותר של הפונקציה: $y = 27 - x^2$.

ב. מצא את הערך הקטן ביותר של הפונקציה: $y = x^4 - 8x^2 + 10$.

56) נתונה הפונקציה: $y = 4x^3 + x$.

- הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.
- הראה כי הפונקציה עולה תמיד.
- כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון מוחלטות כאשר נתונה פונקציה בקטע מסוים:

57) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות בעבור כל פונקציה בתחום הנתון לידה:

ב. $-4 \leq x \leq 4, y = 16 - x^2$

א. $1 \leq x \leq 7, y = x^2 - 2x$

ד. $-1 \leq x \leq 5, y = -x^3 + 7.5x^2 - 12x$

ג. $-2 \leq x \leq 4, y = x^3 - 3x^2 - 9x$

ה. $-6 \leq x \leq 6, y = x^4 - 50x^2 + 3$

58) נתונה הפונקציה: $y = -x^3 + 6x^2 - 9x - 6$ בתחום הסגור: $[0; 5]$.

- מצא את נקודות קיצון הקצה בתחום הסגור הנ"ל.
- מצא את נקודות הקיצון המקומיות בתחום הנ"ל.
- קבע אלו נקודות הן נקודות הקיצון המוחלטות.

59) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 36x$ בתחום: $[-8; 6]$.

- מצא את שיעורי נקודות קיצון הקצה בתחום הנתון.
- מצא את שיעורי נקודות הקיצון המקומיות.
- מצא אלו נקודות הן נקודות הקיצון המוחלטות בתחום הנתון.

תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה פולינומית:

60) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה.
2. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
3. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
4. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
5. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $y = x^2 - 8x + 12$ ב. $y = x^3 - 12x$

ג. $y = x(x+8)^2$ ד. $y = x(x-12)(2x-9)$

ה. $y = x^4 - 4x$ ו. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$

ז. $y = (3x-1)^6$ ח. $y = (6-x)^8$

תרגילים שונים העוסקים בחקירות:

61) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 3$.

הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. מצא את הנקודות המקיימות $f'(x) = 0$.
- ג. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

62) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + a$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בראשית הצירים.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

63) נתונה הפונקציה: $y = (x-2)(x+1)^2$.

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

64) נתונה הפונקציה: $y = (x-3)(2-x)^2$.

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

65) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2(x+a)^2$, $a > -6$.

- ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x = 4$.
- א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- ב. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה וכתוב את תחומי החיוביות והשליליות שלה.

66) לגרף הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$ מעבירים משיק $y = 21x + 6$ החותך אותו בנקודה שבה $x = 6$.

- א. מצא את k .
- ב. מצא את נקודת ההשקה של המשיק עם הפונקציה $f(x)$.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון?
- ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

67) נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$.

- ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.
- א. מצא את d .
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

68) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3(3x-5)^4$.

- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

- (16) א. 3 ב. 212 ג. 105 ד. -16 ה. 0 ו. -18 ז. 17 א. (1,8) ב. $(\frac{2}{3}, 1\frac{5}{27})$ (2,0) ג. $(1,16)(-1,-16)$ ד. $(\frac{4}{3}, -5\frac{5}{27})$ (0,-12) ז. 18 א. (1,0) ב. (-1,0) (19) $85.24^\circ, 97.64^\circ, m = \pm 12$
- (20) א. $y = 2x - 14$ ב. $y = -x + 2$ ג. $y = 25x$ ד. $y = 29x - 17$ ה. $y = -6x$ ו. $y = \frac{6}{35}$ ז. $y = 4x - 24$ ח. $y = 48x - 68$ ט. 21 א. $y = -3x + 12$ (22) $y = -3x + 6, y = 3x - 15$ א. 23 (3,10) ב. $(-1,0), (0.5,6)$ ג. $y = x + 1, y = 7x + 2.5$ (24) א. $(0,0), (1,4), (-1,-4)$ ב. $y = 0, y = 12x + 8, y = 12x - 8$ (25) א. $(0,3), (1,3), (3,3)$ ב. $y = 5x - 5, y = 3x + 1$ (26) א. $y = 3x + 3, y = -2x + 5, y = 6x - 15$ ב. $y = -x, y = -x - \frac{4}{27}$ ג. $y = 9x - 1$ (27) א. $y = 4x - 4, y = 4x + 5\frac{13}{27}$ ב. $y = 44x - 44$ (28) א. $y = 0, y = -9\frac{13}{27}$ ג. (29) א. $y = 2x - 9, y = 2x + 4.5$ ב. $y = -2x + 10; y = -2x - 17$ (30) א. 1 (31) א. (1,0) ב. -1 (32) $a = 5, y = x^3 + 6x^2 + 5x$ א. 33 -1 ב. $y = -12x + 120$ ג. 85.24° (34) א. 1 (35) א. 4 ב. כן: $y = 4$ (36) א. 5 ב. $y = 24x - 14$ ג. כן: $y = 24x + 14$ (37) א. 1, B = 6 (38) א. 4, C = 5 (39) א. 2, B = 3 (40) א. 1, B = 7 (41) א. 1, B = 3 (42) א. 2, B = -7 (43) א. 2, B = -7 (44) א. (2,0), (6,0) ב. $y = -4x + 24, y = 4x - 8$ ג. (4,8) ד. 16 ה. $75.96^\circ, 75.96^\circ, 28.08^\circ$ (45) א. $(3,-54), (-3,54)$ ב. $y = \pm 54$ ג. 648 א. 46 $A = -7.5$ (47) א. $y = -2x + 5$ ב. $y = 0.5x$ ג. 1.25 א. 48 $A = 1$ ג. $y = -2x + 5, y = 2x - 7$ (49) א. $y = -16x + 33$ ב. (1,17) ג. 16.5 ד. $3.58^\circ, 3.37^\circ, 173.06^\circ$ (50) א. $a = 3, b = 1$ ב. (3,96) (51) א. (3,-1) ב. $(-\frac{1}{3}, 8\frac{14}{27})$ ג. $(3,-10)(-1,-4)$ ד. אין קיצון. ה. $(-1, -16\frac{8}{15}), (1, 16\frac{8}{15}), (-5, 333\frac{1}{3}), (5, -333\frac{1}{3})$ (52) א. עולה: $x > 3.5$ יורד: $x < 3.5$ ב. עולה: $x < -2, x > 2$ יורד: $-2 < x < 2$ ג. עולה: $x < 0, x > \frac{2}{3}$ יורד: $0 < x < \frac{2}{3}$ ד. עולה: $-0.5 < x < 0, x > 0.5$ יורד: $0 < x < 0.5, x > -0.5$ ה. עולה: $x < -0.5, 0 < x < 0.5$ יורד: $-1 < x < 2$ ו. עולה לכל x ז. עולה: $x > 2.5$ יורד: $x < 2.5$ ח. יורד לכל x (53) א. $f''(x) = 12x^2 - 18x$ ג. Min (54) א. $\text{Min}(0,0)$ ב. $\text{Max}(-4,32)$ עולה: $x < -4, x > 0$ יורד: $-4 < x < 0$ ג. חיובית: $-6 < x < 0, x > 0$ שלילית: $x < -6$ א. 27 ב. -6 (56) א. חיובית: $x > 0$ שלילית: $x < 0$

57) א. $Min(1, -1)$ מוחלט. $Max(7, 35)$ מוחלט. ב. $Min(\pm 4, 0)$ מוחלט. $Max(0, 16)$ מוחלט.

ג. $Min(3, -27)$ מוחלט. $Max(-1, 5)$ מוחלט.

ד. $Min(1, -5.5)$ מוחלט. $Max(-1, 20.5)$ מוחלט.

ה. $Min(\pm 5, -622)$ מוחלט. $Max(0, 3)$ מוחלט.

58) א. $Min(5, -26)$, $Max(0, -6)$. ב. $Max(3, -6)$, $Min(1, -10)$. ג. $Min(5, -26)$ מוחלט.

$Max(0, -6)$, $Max(3, -6)$ מוחלט.

59) א. $Min(-8, -224)$, $Max(6, 0)$. ב. $Min(-3.464, 83.13)$, $Max(3.464, -83.13)$.

ג. $Min(-8, -224)$, $Max(-3.464, 83.13)$.

60. תשובות לסעיפים 1 עד 4:

א. 1. כל x . 2. $Min(4, -4)$. 3. עולה: $x > 4$, יורד: $x < 4$. 4. $(0, 12)$, $(6, 0)$, $(2, 0)$.

ב. 1. כל x . 2. $Min(2, -16)$, $Max(-2, 16)$. 3. עולה: $x > 2$, $x < -2$, יורד: $-2 < x < 2$.

ג. 1. $(0, 0)$, $(\pm 3.464, 0)$. 2. $Min(-2\frac{2}{3}, -75\frac{23}{27})$, $Max(-8, 0)$.

ד. 1. כל x . 2. $Min(9, -243)$, $Max(2, 100)$. 3. עולה: $x < -8$, $x > -2\frac{2}{3}$, יורד: $-8 < x < -2\frac{2}{3}$. 4. $(0, 0)$, $(-8, 0)$.

ה. 1. כל x . 2. $Min(1, -3)$. 3. עולה: $x > 1$, יורד: $x < 1$.

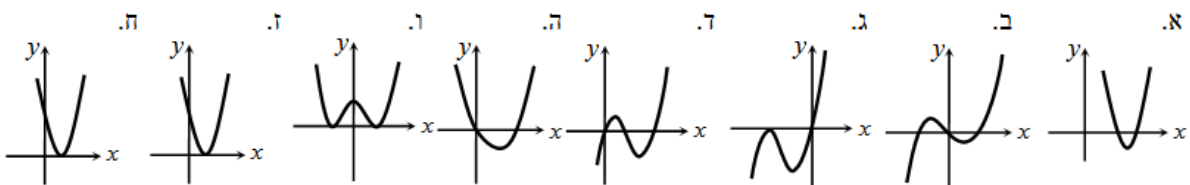
ו. 1. $(0, 0)$, $(1.587, 0)$. 2. $Min(\pm 1, 0)$, $Max(0, 0.25)$.

ז. 1. כל x . 2. $Min(\frac{1}{3}, 0)$. 3. עולה: $-1 < x < 0$, $x > 1$, יורד: $0 < x < 1$, $x < -1$.

ח. 1. כל x . 2. $Min(6, 0)$. 3. עולה: $x > \frac{1}{3}$, יורד: $x < \frac{1}{3}$. 4. $(\frac{1}{3}, 0)$, $(0, 1)$.

ט. 1. כל x . 2. $Min(6, 0)$. 3. עולה: $x > 6$, יורד: $x < 6$. 4. $(6, 0)$, $(0, 6^8)$.

סקיצות:



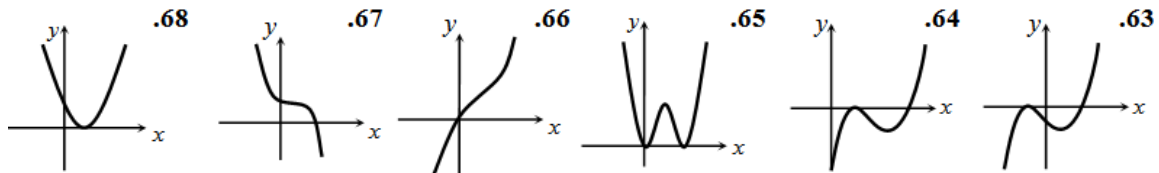
61) א. $a = -3$. ב. $(1, 4)$. ג. לא. ד. עולה בכל תחום הגדרתה חוץ מ- $x = 1$.

62) א. $a = 0$. ב. $Min(0, 0)$, $Max(-\frac{1}{4}, \frac{5}{256})$, $Min(-2, -4)$. ג. עולה: $x > 0$, $-2 < x < -\frac{1}{4}$.

יורדת: $x < -2$, $-\frac{1}{4} < x < 0$.

- 63 א. $Max(-1,0)$, $Min(1,-4)$. ב. עולה: $x < -1$, $x > 1$, יורדת: $-1 < x < 1$.
 ג. $(-1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$. ה. חיובית: $x > 2$, שלילית: $-1 < x < 2$, $x < -1$.
- 64 א. $Max(2,0)$, $Min(2\frac{2}{3}, -\frac{4}{27})$. ב. עולה: $x < 2$, $x > 2\frac{2}{3}$, יורדת: $2 < x < 2\frac{2}{3}$.
 ג. $(2,0)$, $(3,0)$, $(0,-12)$.
- 65 א. $y = 2x^2(x-4)^2$, $a = -4$. ב. $(0,0)$, $(2,32)$, $(4,0)$. ג. עולה: $0 < x < 2$, $x > 4$.
 יורדת: $x < 0$, $2 < x < 4$. ד. $(4,0)$, $(0,0)$. ה. חיובית: $x \neq 0,4$.
- 66 א. $k = 10$. ב. $(-1,-15)$. ג. $(0,0)$. ד. לא. ה. עולה בכל תחום הגדרתה.
- 67 א. $d = 8$. ב. לא. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד. $(0,8)$.
- 68 א. $Min(1\frac{2}{3}, 0)$. ב. עולה בתחום: $x > 1\frac{2}{3}$. יורדת בתחום: $x < 1\frac{2}{3}$. ג. $(0,1875)$, $(1\frac{2}{3}, 0)$.

סקיצות של שאלות 63-68:



תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:

תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} y = \frac{x}{6} + \frac{6}{x} & \text{(3)} & y = \frac{4x-1}{x} & \text{(2)} & y = \frac{1}{x} & \text{(1)} \\ y = \frac{(x+3)^2}{x^2} & \text{(6)} & y = \frac{x^2-3x+4}{x^2} & \text{(5)} & y = \frac{x^2+5x+4}{x} & \text{(4)} \\ y = \frac{x+6}{x^2-6} & \text{(9)} & y = \frac{6}{x^2+8x+12} & \text{(8)} & y = \frac{3x}{2x+1} & \text{(7)} \\ y = \frac{x^2}{(x^2+4)^2} & \text{(12)} & y = 3 + \frac{(x-9)^2}{(x+9)^2} & \text{(11)} & y = \frac{x^2-6x+8}{x^2+2x+1} & \text{(10)} \\ & & y = \frac{x^2+7x+12}{x^4} & \text{(14)} & y = \frac{x^3+x}{x^2-1} & \text{(13)} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llllll} y' = \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3} & \text{(5)} & y' = 1 - \frac{4}{x^2} & \text{(4)} & y' = \frac{1}{6} - \frac{6}{x^2} & \text{(3)} & y' = \frac{1}{x^2} & \text{(2)} & y' = -\frac{1}{x^2} & \text{(1)} \\ y' = -\frac{6(2x+8)}{(x^2+8x+12)^2} & \text{(8)} & y' = \frac{3}{(2x+1)^2} & \text{(7)} & y' = -\frac{6}{x^2} - \frac{18}{x^3} & \text{(6)} \\ y' = \frac{36(x-9)}{(x+9)^3} & \text{(11)} & y' = \frac{8x^2-14x-22}{(x^2+2x+1)^2} & \text{(10)} & y' = -\frac{x^2+12x+6}{(x^2-6)^2} & \text{(9)} \\ y' = -\frac{2x^2+21x+48}{x^5} & \text{(14)} & y' = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} & \text{(13)} & y' = \frac{2x(4-x^2)}{(x^2+4)^3} & \text{(12)} \end{array}$$

תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$.

15) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x=1$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.
ב. $x=2$, $f(x) = \frac{x^2}{3x^2-2}$.

ג. $x=-2$, $f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2}$.
ד. $x=0$, $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{3x^2-x-2}$.

16) לפניך מספר פונקציות. מצא את הנקודות שבהן שיפוע הפונקציה הוא m :

א. $m=-3$, $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.
ב. $m = \frac{5}{9}$, $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$.

ג. $m = \frac{1}{36}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+8}$.
ד. $m=4$, $f(x) = x^2 + 4x - \frac{x-16}{x}$.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$, כאשר: (x_1, y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

17) מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x=-1$, $y = \frac{x^2+2x}{x+3}$.
ב. $x=2$, $y = \frac{2x+5}{x^2+5}$.

ג. $x=7$, $y = 3x - \frac{x+6}{x^2-12x+36}$.
ד. $x=3$, $y = \frac{(x+3)^2}{x^2}$.

18) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{2x+4}{(x+1)^2}$ העובר דרך נקודת החיתוך

שלה עם ציר ה- x ואת הזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

19) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה שבה $x = 3$.

- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- ג. מצא את הזווית שיוצר המשיק עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+4}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x}$.

- א. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x ?
- ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.
- ג. האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם? אם כן – כתוב את משוואתו.

(22) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x-1}{x+1}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- ב. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

(23) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{4x+2}{2x}$, $g(x) = x^3 + 2$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
- ב. מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה העוברים דרך הנקודה הנמצאת ברביע הראשון.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x-6}{x}$.

- א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה שהשיפוע שלהם הוא 6.
- ב. מצא את המרחק בין שתי נקודות החיתוך של שני המשיקים עם ציר ה- y .

- 25) א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ היוצרים זווית של 71.56° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ המקבילים לישר: $y + 3x = 10$.

תרגילים עם פרמטרים:

- 26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + kx - 5}{x}$. הישר $y = 6x - 14$ משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.
- א. מצא את הפרמטר k .
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. האם קיים עוד משיק לגרף הפונקציה המקביל למשיק זה? אם כן, מצא את משוואתו.

- 27) המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + A}$ בנקודה שבה $x = 1$ מקביל לציר ה- x .
- מצא את A .

- 28) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2 + kx + 3}{x^2}$. ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1$.
- א. מצא את הפרמטר k .
- ב. האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.
- ג. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- x .

- 29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12}{9 - ax^2}$.
- הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.
- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{8x+4}{x^2+a}$

הישר $x=4$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלו עם הישר: $4y+2x+1=0$ הנמצאת על ציר ה- x .

(31) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{mx^2+2x+3}{x^2+1}$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=3$.

- א. מצא את m .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית $y=3$.

(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3} + A$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=3$.

- א. מצא את A .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית $y=3$.

(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+2} + A$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=5$.

- א. מצא את A .
- ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

(34) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{Ax^2+1}{x^2+1} + B$

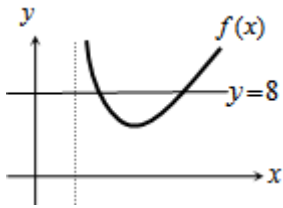
ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=1$.

כמו כן, שיפוע הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 1.

- א. מצא את A ואת B .
- ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

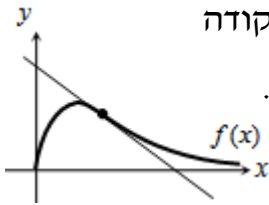
תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:

(35) באיור שלפניך נתונות הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2}{2x-3}$ והישר: $y = 8$.



- מצא את נקודות החיתוך של הישר והפונקציה.
- כתוב את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות החיתוך שלה עם הישר.
- מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.
- חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים לישר $y = 8$.

(36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$. מעבירים לפונקציה משיק בנקודה שבה $x = 2$. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק לצירים.



(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

- הראה כי הפונקציה עולה תמיד.
- מצא את משוואת המשיק המאונך לישר: $y = -9x$ העובר דרך נקודת ההשקה הנמצאת ברביע ראשון.

(38) א. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$ בנקודה שבה: $x = 1$.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $g(x) = \frac{x^2-4x}{x+2}$ המקבילים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

ג. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $h(x) = \frac{x^2+1}{x+7}$ המאונכים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה רציונאלית:

חקור את הפונקציות שבעמוד הבא לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x} \quad (40)$$

$$y = 1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} \quad (42)$$

$$y = 1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} \quad (44)$$

$$y = \frac{3}{x^2 - 10x + 25} \quad (46)$$

$$y = \frac{6}{x^2 - 9} \quad (48)$$

$$y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} \quad (50)$$

$$y = -\frac{16x^2 - 3x + 4}{x} \quad (39)$$

$$y = \frac{x^2 + 10x + 25}{x} \quad (41)$$

$$y = 5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \quad (43)$$

$$y = \frac{3x}{5} - \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{x} \quad (45)$$

$$y = \frac{4}{3x^2 - 6x - 9} \quad (47)$$

$$y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} \quad (49)$$

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{(x+4)^2}{3x-5} \quad (52)$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2-8} \quad (54)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 - 5x + 4} \quad (51)$$

$$f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5} \quad (53)$$

(55) נתונה הפונקציה : $y = ax + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x}$, (a פרמטר).

ידוע כי גרף הפונקציה עובר בנקודה (3,7.5).

- א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(56) נתונה הפונקציה: $y = \frac{-9}{10+ax-2x^2}$.

ידוע כי יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית: $x = 5$.

- מצא את ערך הפרמטר a .
- האם יש לפונקציה עוד אסימפטוטות? אם כן, מהן?
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(57) נתונה הפונקציה: $y = \frac{a}{2x^2+5}$, (a פרמטר).

ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 2$.

- מצא את הפרמטר a .
- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? אם כן – מצא אותן.
- כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

(58) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון

שנמצאת על ציר ה- y .

- ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y = -1$. נמק את תשובתך.
- כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

(59) לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+4}{x^2}$, (a פרמטר) יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.

- מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

60 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$, (פרמטר a).

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה (0.5,3).

- מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- היעזר בגרף הפונקציה וקבע לאלו ערכים של k הישר $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

61 הפונקציה: $f(x) = \frac{ax - 30}{x^2 - 6x + a}$, (פרמטר a) מוגדרת לכל x .

ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x = 2$.

- מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

62 נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$, (פרמטר a).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא $m = 4$.

- מצא את כל הערכים האפשריים בעבור a .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

63 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x - 2}$, (פרמטר a).

ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- מצא את הערך של הפרמטר a .
- הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 - את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 - את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
- לאילו ערכי x הפונקציה שלילית?

ד. לאלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר $y = k$ ולגרף הפונקציה? נמק.

64) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $a \neq 1$ פרמטר.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. 1. מצא לאלו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
2. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$.
מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

65) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+3}{x-2} + A$, A פרמטר.

- גרף הפונקציה עובר בנקודה: $(3A, A)$.
- א. מצא את ערך הפרמטר A .
 - ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x .
 - ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. נתון הישר: $y = k$. האם קיים ערך של k בעבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

66) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$, $a > 0$, m פרמטרים.

- ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .
- א. מצא את הערך של הפרמטר m .
 - ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבע באמצעות a את:
 1. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 3. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
 - ג. שרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.
 - ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y , נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a .
 - ה. מצא לאלו ערכים של k אין לישר $y = k$ ולגרף הפונקציה נקודות משותפות.

תשובות סופיות:

(15) א. -1 ב. $-\frac{2}{25}$ ג. $-\frac{1}{9}$ ד. $-\frac{1}{4}$

(16) א. (1.5, -1.5), (4.5, 13.5) ב. $(2, 3\frac{1}{3}), (-4, -5\frac{1}{3})$ ג. $(-2, -\frac{1}{6}), (2, \frac{1}{6})$ ד. (2, 19)

(17) א. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ב. $y = -\frac{2}{9}x + 1\frac{4}{9}$ ג. $y = 28x - 188$ ד. $y = -\frac{4}{3}x + 8$

(18) $63.64^\circ, y = 2x + 4$ א. (-2, 0) ב. $y = 1.5x + 3$

(20) א. $y = 4 - x$ ב. (0, 4), (4, 0) ג. 135° ד. 8 א. (21) לא ב. $y = -2x + 7$ ג. $y = -2x - 3$

(22) א. $y = 2x - 1$ ב. $\frac{1}{4}$ א. (23) (-1, 1), (1, 3) ב. $y = 4 - x, y = 3x$

(24) א. $y = 6x + 16, y = 6x - 8$ ב. 24

(25) $y = -3x + 9, y = -3x + 1$ ב. $y = -3x - 18, y = -3x - 2$

(26) א. $k = -4$ ב. (-1, 0), (5, 0) ג. כן. $y = 6x + 6$ א. (27) $A = 1$

(28) א. $k = -5$ ב. כן. (1.5, 0) ג. $9y = 4x - 6, y = -x + 1$

(29) א. $a = 1$ ב. כן. $y = 0, x = -3$ ג. $y = \frac{4}{3}$

(30) א. $a = -16$ ב. $y = 0, x = -4$ ג. $63y + 32x + 16 = 0$ א. (31) $m = 3$ ב. $y = 2x + 3$

(32) א. $A = 3$ ב. $y = -0.5x + 2.5$ א. (33) $A = 3$ א. (34) $A = 3, B = -2$

(35) א. (2, 8), (6, 8) ב. $y = -8x + 24, 9y = 8x + 24$ ג. (2.4, 4.8) ד. 6.4

(36) $S = 17\frac{1}{15}$ א. (37) לכל x מתקיים: $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$ ולכן הפונקציה עולה

תמיד. ב. $9y = x + 5$

(38) א. -2 ב. $y = -2x, y = -2x - 24$ ג. $y = 0.5x - 0.5, y = 0.5x - 20.5$

(39) א. $x \neq 0$ ב. $Max(0.5, -13), Min(-0.5, 19)$ ג. עולה: $-0.5 < x < 0.5$, $x \neq 0$

יורדת: $x < -0.5, x > 0.5$ ד. אין. ה. $x = 0$

(40) א. $x \neq 0$ ב. $Max(-1, -9), Min(1, -1)$

ג. עולה: $x < -1, x > 1$ יורדת: $-1 < x < 1$ ד. (0.5, 0), (2, 0) ה. $x = 0$

(41) א. $x \neq 0$ ב. $Max(-5, 0), Min(5, 20)$ ג. עולה: $x < -5, x > 5$

יורדת: $-5 < x < 5$ ד. (-5, 0) ה. $x = 0$

(42) א. $x \neq 0$ ב. $max(2.5, 1.8)$ ג. עולה: $0 < x < 2.5$

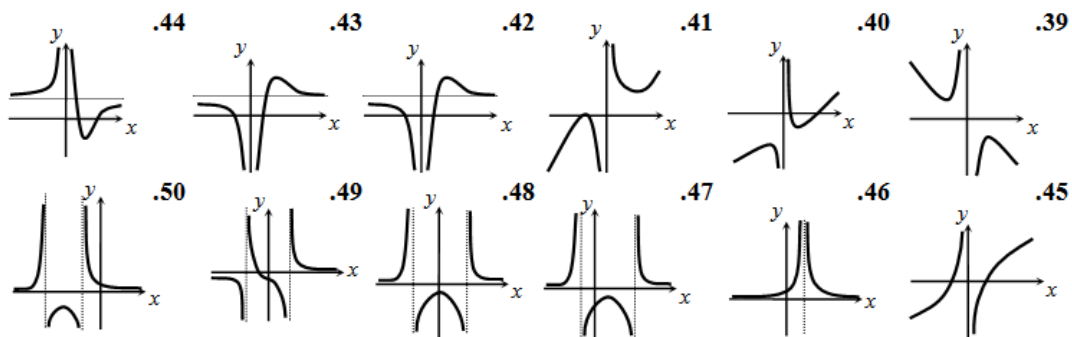
יורדת: $x < 0, x > 2.5$ ד. (-5, 0), (1, 0) ה. $x = 0, y = 1$

(43) א. $x \neq 0$ ב. $Max(3, 5\frac{1}{3})$ ג. עולה: $0 < x < 3$ יורדת: $x < 0, x > 3$

ד. (-1, 0), (0.6, 0) ה. $x = 0, y = 5$

- 44 א. $x \neq 0$ ב. $Min(2\frac{2}{3}, -\frac{1}{8})$ ג. עולה: $x > 2\frac{2}{3}$, $x < 0$ יורדת: $0 < x < 2\frac{2}{3}$.
 ד. $(2,0)$, $(4,0)$ ה. $x=0, y=1$.
- 45 א. $x \neq 0$ ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. $(-2,0)$, $(2,0)$
 ה. $x=0$ 46 א. $x \neq 5$ ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה: $x < 5$ יורדת: $x > 5$
 ד. $(0,0.12)$ ה. $y=0, x=5$.
- 47 א. $x \neq -1, 3$ ב. $Max(1, -\frac{1}{3})$ ג. עולה: $x < 1$, $x \neq -1$ יורדת: $x > 1, x \neq 3$
 ד. חיתוך עם ציר ה- y : $(0, -\frac{4}{9})$ ה. $y=0, x=-1, 3$.
- 48 א. $x \neq \pm 3$ ב. $Max(0, -\frac{2}{3})$ ג. עולה: $x < 0$, $x \neq -3$ יורדת: $x > 0, x \neq 3$
 ד. חיתוך עם ציר ה- y : $(0, -\frac{2}{3})$ ה. $y=0, x=\pm 3$.
- 49 א. $x \neq -3, 2$ ב. אין נקודות קיצון. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.
 ד. $(-0.5, 0)$, $(0, -\frac{1}{6})$ ה. $y=0, x=-3, 2$.
- 50 א. $x \neq -1, -5$ ב. $Max(-3, -1)$ ג. עולה: $x < -3$, $x \neq -5$ יורדת: $x > -3, x \neq -1$
 ד. $(0, 0.8)$ ה. $y=0, x=-1, -5$.

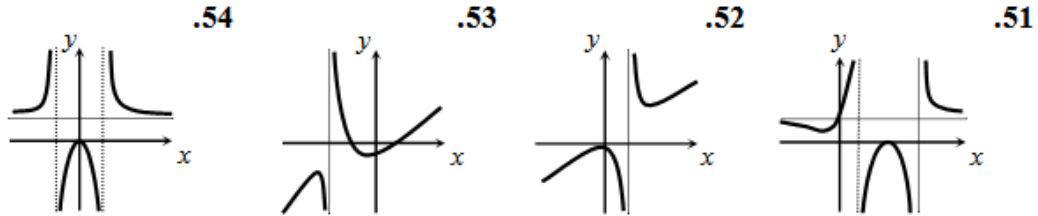
סקיצות של שאלות 39-50:



- 51 א. $x \neq 1, 4$ ב. $Max(2, 0)$, $Min(-2, 1\frac{7}{9})$ ג. עולה: $-2 < x < 2$, $x \neq 1$
 יורדת: $x < -2, x > 2, x \neq 4$ ד. $(0, 2)$, $(2, 0)$ ה. $x=1, 4, y=2$.
- 52 א. $x \neq \frac{5}{3}$ ב. $Min(7\frac{1}{3}, 7\frac{5}{9})$, $Max(-4, 0)$ ג. עולה: $x < -4, x > 7\frac{1}{3}$
 יורדת: $-4 < x < 7\frac{1}{3}$, $x \neq \frac{5}{3}$ ה. $(0, -3.2)$, $(-4, 0)$ ד. $x = \frac{5}{3}$.
- 53 א. $x \neq -5$ ב. $Min(-1, -0.5)$, $Max(-9, -24.5)$ ג. עולה: $x < -9, x > -1$
 יורדת: $-9 < x < -1, x \neq -5$ ד. $(-2, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$, $(0, -0.2)$ ה. $x = -5$.

54 א. $x \neq \pm 2$ ב. $Max(0,0)$ ג. יורדת: $x > 0, x \neq 2$. עולה: $x < 0, x \neq -2$. ד. $(0,0)$.
 ה. $x = \pm 2, y = 1.5$

סקיצות של שאלות 51-54:



55 א. $a = 2, y = 2x + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x}$ ב. $Max(-1.5, -6), Min(1.5, 6)$ ג. עולה: $x < -1.5, x > 1.5$, יורדת: $-1.5 < x < 1.5, x \neq 0$

56 א. $a = 8$ ב. כן. $y = 0, x = -1$ ג. $Max(2, -0.5)$ ד. עולה: $x < 2, x \neq -1$

יורדת: $x > 2, x \neq 5$ א. $a = 10$ ב. כל x ג. $Max(0, 2)$

ד. אין חיתוך עם ציר ה- x . ה. חיובית לכל x

58 ב. מתקבל: $k = -3$ ג. $(-3, 0), (3, 0)$ ד. $y = -1$

ה. באף נקודה. הגרף שואף לישר ואינו חותך אותו.

ו. חיובית: $\sqrt{3} < x < 3, -3 < x < -\sqrt{3}$, שלילית: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

59 א. $a = 1, f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8 < x < 0$, יורדת: $x < -8, x > 0$ ג. $(-4, 0)$

60 א. $a = 3, f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$ ב. $Max(-2, 8), Min(3, -\frac{1}{3})$

ג. עולה: $x < -2, x > 3$ יורדת: $-2 < x < 3$ ד. $(2, 0), (0, 4\frac{2}{3}), (4\frac{2}{3}, 0)$

ו. $k = 8, -\frac{1}{3}, 3$

61 א. $a = 10, y = \frac{10x-30}{x^2-6x+10}$ (הפתרון: $a = -6$ נפסל). ב. כן - $(4, 5)$

ג. עולה: $2 < x < 4$ יורדת: $x < 2, x > 4$ ד. $(0, -3), (3, 0)$

62 א. $a = \pm 2$ ב. $(0, 4), (1, 0)$ ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1, 0)$

63 א. $a = -3$ ב. 1. $x \neq 2$ 2. $(0, -3)$ 3. $Max(0, -3), Min(4, 5)$ 4. $x = 2$ ג. $x < 2$

ד. $-3 < k < 5$

64 א. $x \neq 1$ ב. $x = 1, y = 1$ ג. $(0, a), (a, 0)$ ד. 1. $a > 1$ 2. $a = 2$

65) א. $A = -1$. ב. $x \neq 2$. ג. הנגזרת בנויה ממנה של מספר שלילי בחיובי ולכן תמיד

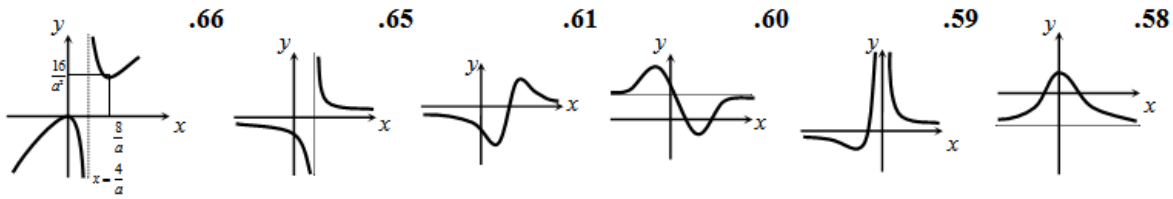
$$\text{שלילית: שלילי} \rightarrow \left[\begin{array}{c} (-) \\ (+) \end{array} \right] = \frac{-5}{(x-2)^2} = y' \quad \text{ד. } (0, -2.5)$$

ו. לא. אין נקודות על גרף הפונקציה בעלות שיעור y זהה.

66) א. $m = 0$ (מתקבל: $am = 0$ וידוע כי: $a > 0$ לכן נותרנו עם הפתרון הנ"ל).

ב. 1. $x \neq \frac{4}{a}$. 2. $\text{Max}(0,0), \text{Min}\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$. 3. $x = \frac{4}{a}$. ד. $a = 2$. ה. $0 < k < 4$

סקיצות של שאלות: 58-61 ו- 65-66:



תרגילים העוסקים בפונקצית שורש (אי-רציונאלית):

תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|--|------------------------------------|------------------------------------|
| $y = x^2 - 16\sqrt{x}$ (3) | $y = x - 3\sqrt{x}$ (2) | $y = \sqrt{x}$ (1) |
| $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ (6) | $y = x^2\sqrt{x}$ (5) | $y = (2x-1)\sqrt{x}$ (4) |
| $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ (9) | $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2}$ (8) | $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-1}$ (7) |
| $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2}$ (12) | $y = (x^2+4)\sqrt{x-2}$ (11) | $y = x\sqrt{5x-2}$ (10) |
| $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ (15) | $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ (14) | $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ (13) |
| $y = x\sqrt{x^4+6x^2-8}$ (18) | $y = (3x+1)^8\sqrt{x^2+x}$ (17) | $y = (x+10)^6\sqrt{x}$ (16) |
| $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (21) | $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ (20) | $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ (19) |

תשובות סופיות:

- | | | | |
|--|---|--|--------------------------------|
| $y' = 2\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}$ (4) | $y' = 2x - \frac{8}{\sqrt{x}}$ (3) | $y' = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$ (2) | $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (1) |
| $y' = -\frac{3x^2+4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$ (7) | $y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ (6) | $y' = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$ (5) | |
| $y' = \sqrt{5x-2} + \frac{5x}{2\sqrt{5x-2}}$ (10) | $y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ (9) | $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ (8) | |
| $y' = -\frac{x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ (13) | $y' = \frac{8-3x}{2x^3\sqrt{x-2}}$ (12) | $y' = 2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2+4}{2\sqrt{x-2}}$ (11) | |
| $y' = 6(x+10)^5\sqrt{x} + \frac{(x+10)^6}{2\sqrt{x}}$ (16) | $y' = \frac{1-x}{2(x^2+x+1)^{1.5}}$ (15) | $y' = -\frac{4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ (14) | |
| $y' = \frac{3x^4+12x^2-8}{\sqrt{x^4+6x^2-8}}$ (18) | $y' = 24(3x+1)^7\sqrt{x^2+x} + \frac{(2x+1)(3x+1)^8}{2\sqrt{x^2+x}}$ (17) | | |
| $y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ (21) | $y' = \frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$ (20) | $y' = -\frac{3}{2(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ (19) | |

תרגילים העוסקים במציאת תחום ההגדרה של פונקציות:

(22) לפניך מספר פונקציות, מצא את תחום ההגדרה שלהן. תזכורת:

- תחום הגדרה של פונקציה המכילה ביטוי עם שורש: $y = \sqrt{f(x)}$ הוא: $f(x) \geq 0$.
- תחום הגדרה של פונקציה אי-רציונאלית: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ הוא: $g(x) \neq 0$.

$y = \sqrt{x-5}$.ב.	$y = \sqrt{x}$.א.
$y = \sqrt{x^2-1}$.ד.	$y = \sqrt{7-2x}$.ג.
$y = \sqrt{x^2-4x-5}$.ו.	$y = \sqrt{x^2+2x}$.ה.
$y = \sqrt{x^3-3x^2-4x}$.ח.	$y = x^2-3\sqrt{x}$.ז.
$y = (x^2-3)\sqrt{x^2+x}$.י.	$y = 2x\sqrt{2-x}$.ט.
$y = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$.יב.	$y = \frac{4-\sqrt{x}}{x+2}$.יא.
$y = \frac{x+6}{\sqrt{x}}$.יד.	$y = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-16}$.יג.
$y = \frac{4}{\sqrt{x^2-25}}$.יז.	$y = \frac{x^2}{\sqrt{3x-8}}$.טו.
$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$.יח.	$y = \frac{2x}{\sqrt{81-4x^2}}$.יז.
$y = \sqrt{\frac{25x-x^2}{x+2}}$.כ.	$y = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$.יט.

- (23) א. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{kx^2-18}$, (k פרמטר).
 ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא: $x \leq -3$, $x \geq 3$. מצא את הפרמטר k .
- ב. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{k-3x^2}$, (k פרמטר).
 ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא: $-1 \leq x \leq 1$. מצא את הפרמטר k .
- ג. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, (k פרמטר).
 לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x = 7$. מצא את הפרמטר k .
- ד. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{6}{\sqrt{x^2+k}}$, (k פרמטר).
 לפונקציה יש אסימפטוטות אנכיות: $x = \pm 4$. מצא את k .

(24) נתונה הפונקציה הבאה: $y = ax + \sqrt{x-b}$, (a, b) פרמטרים).
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(2, 2)$ וכי תחום הגדרתה הוא: $x \geq 2$.
 מצא את a ואת b .

(25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = ax^2 + \sqrt{bx+3}$, (a, b) פרמטרים). ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(1, 4)$ וכי תחום הגדרתה הוא: $x \geq -3$. מצא את a ואת b .

(26) נתונה הפונקציה: $y = \sqrt{ax^2 + bx + 12}$, (a, b) פרמטרים).
 ידוע כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום: $-4 < x < -3$. מצא את a ואת b .

תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$.

(27) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

- | | |
|---|--|
| א. $x=1$, $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ | ב. $x=4$, $f(x) = (x+2)\sqrt{x}$ |
| ג. $x=9$, $f(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x}$ | ד. $x=1$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$ |
| ה. $x=3$, $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x}$ | ו. $x=2$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4x + 8}$ |

(28) לפניך מספר פונקציות. מצא את שיעורי הנקודות שבעבורם שיפוע המשיק הוא המצוין לידה.

- | | |
|---|---|
| א. $m=1.5$, $f(x) = \sqrt{3x-2}$ | ב. $m = \frac{2}{5}$, $f(x) = \sqrt{4x-7}$ |
| ג. $m = \frac{1}{4}$, $f(x) = x - \frac{1}{4}\sqrt{x}$ | ד. $m = 2$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 12}$ |
| ה. $m = 2$, $f(x) = x\sqrt{x-1}$ | ו. $m = 5$, $f(x) = (x+3)\sqrt{x}$ |

- (29) א. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y = 2x\sqrt{4x+5}$ אשר המשיק העובר דרכה יוצר זווית של 116.57° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y = 3x + \sqrt{3x^2 + 24}$ אשר המשיק העובר דרכה מקביל לישר: $y = 4x - 7$.

30 א. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x^2 + 24}$.

מצא את שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{3x^2 + 240}$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה שווה לשיפוע הפונקציה שמצאת בסעיף א'. האם קיימת יותר מנקודה אחת? אם כן, מצא את כולן. אם לא, נמק.

ג. הראה כי לשתי הפונקציה יש את אותו השיפוע בעבור: $x = 0$. מהו השיפוע?

31 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{x-3}$ ו- $g(x) = 2 - \sqrt{5-x}$.

א. מצא את שיעור ה- x בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.

ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

32 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{2x+6}$ ו- $g(x) = 6 - \sqrt{9-x}$.

א. מצא את שיעור ה- x בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.

ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

33 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 5\sqrt{4x-3} + \frac{1}{3}\sqrt{36x-27}$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה שווה ל-12. הנחייה: לאחר הגזירה הוצא גורם משותף בתוך השורש שבמכנה השני וסמן: $t = 4x - 3$ ופתור משוואה בעבור t .

34 מצא שתי נקודות על גרף הפונקציה $y = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ ששיפוע המשיק

העובר דרכן הוא: $m = -1$.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$,

כאשר: (x_1, y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

35 מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x = 1$, $y = 3x^2 - \sqrt{x}$ ב. $x = 7$, $y = \sqrt{2x-5}$

ג. $x = 4$, $y = (2x^2 - 8)\sqrt{x}$ ד. $x = 2\frac{2}{3}$, $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

ה. $x = 2$, $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ ו. $x = 3$, $y = \frac{\sqrt{x+6}}{x}$

ז. $x = 6$, $y = \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}$ ח. $x = 1$, $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x}}$

36) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x - 4\sqrt{x}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה בראשית הצירים.

37) נתונה הפונקציה הבאה: $y = 2x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה בראשית הצירים.

38) לגרף הפונקציה: $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $y = 3$.

- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של משיק זה עם הצירים.
- ג. חשב את הזוויות של המשולש שנוצר בין המשיק והצירים.
- ד. חשב את שטח משולש זה.

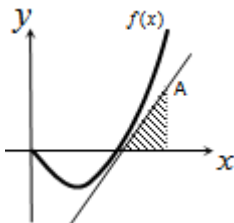
39) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

40) נתונה הפונקציה הבאה: $y = 3x - \sqrt{25 - 2x^2} + 1$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

41) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$.



- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הנמצאת ברביע הראשון.
- ג. מהנקודה A שנמצאת על המשיק מורידים אנך לציר ה- x . כך שנוצר משולש בין המשיק, האנך וציר ה- x (ראה איור). ידוע כי שטח המשולש הוא $S = 12$. מצא את שיעורי הנקודה A.

42) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x\sqrt{x^2 + 4}$.

מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה $x = 1.5$.

- מצא את משוואת המשיק.
- מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- y .
- מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת ההשקה של המשיק. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק, האנך וציר ה- y .

43) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הראה כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ עובר ב- $(0, 0)$.

44) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{2x+3}$.

- מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 11$.
- כתוב את משוואת המשיק הנ"ל.
- האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם? אם כן – כתוב את משוואתו.

45) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x}$.

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.
- חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק שמצאת לצירים.

47) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון. הנחייה: השווה בין שני הביטויים והעלה בריבוע את המשוואה ופתור משוואה דו-ריבועית על ידי סימון: $x^2 = t$.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:
 תזכורת: בחלק מהתרגילים יש להיעזר בתכונות השיפועים של ישרים מקבילים ומאונכים:

- ישרים מקבילים הם בעלי אותו השיפוע ולהפך.
- מכפלת השיפועים של ישרים מאונכים תמיד -1.
 כגון שני ישרים בעלי שיפועים: m_1, m_2 אזי: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

48 א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 4\sqrt{x} - 2$
 המקביל לישר: $2y - x = 3$.

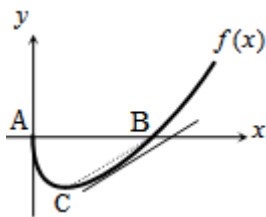
ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{10x+7}$
 המקביל לישר: $y = 5x$.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ המאונך לישר: $4y = 5 - x$.

ד. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4x+3} - 2x$
 המאונך לישר: $y = x$.

49 נתונה הפונקציה: $f(x) = 8\sqrt{x} - x$

- מצא על גרף הפונקציה נקודה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך עם ציר ה- x שאינה ראשית הצירים.



50 נתונה הפונקציה: $f(x) = x - 10\sqrt{x}$ באיור הסמוך.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B - נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. מצא את שיעורי הנקודה C המקיימת: $f'(x) = 0$.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר BC.

51 נתונות הפונקציה הבאות: $f(x) = x^2\sqrt{x}$, $g(x) = 4\sqrt{2x+3}$

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בעל השיפוע $m = 20$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק שמצאת בסעיף הקודם והפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

52) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 4\sqrt{3x-2}$, $g(x) = 2x\sqrt{x}+3$.
 הראה כי לשתי הפונקציות משיק משותף ששיפועו הוא 3.

53) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 4x\sqrt{10-x}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המאונך לישר: $y = -0.5x + 51$.
 ב. הראה כי הישר הנתון בסעיף הקודם הוא נורמל לפונקציה בנקודת ההשקה.

54) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. מצא את הנקודה אשר שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרכה הוא 0.
 ד. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות שמצאת בסעיפים ב' ו-ג'.

55) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן, באיזו נקודה?
 ג. הראה כי לא קיים ישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לישר: $y = 6$.

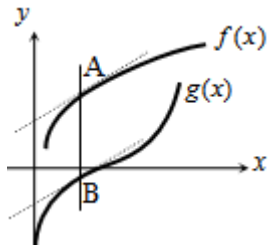
56) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$.

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
 ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
 ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

57) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{3-3x}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
 ב. הראה כי הגרפים מאונכים זה לזה בנקודת החיתוך שמצאת.
 ג. מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה בנקודת החיתוך שמצאת.
 ד. מהנקודות A ו-B הנמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בהתאמה מעבירים ישר המקביל לציר ה- y .
 ידוע כי הפונקציות מאונכות זו לזו בנקודות A ו-B.
 מצא את הנקודות A ו-B.

58) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{10-x}$.



מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B על גרף

הפונקציה $g(x)$ כמתואר באיור. ידוע כי הישר AB

מקביל לציר ה- y . מעבירים מהנקודות A ו-B משיקים

לכל פונקציה. ידוע כי המשיקים מקבילים.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואות המשיקים.

תרגילים עם פרמטרים:

59) ענה על השאלות הבאות:

א. נתונה הפונקציה: $f(x) = A\sqrt{x} + 3x^2$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק

לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 4$ הוא 25. מצא את A.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{5x+A}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק

לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$ הוא 1. מצא את A.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + Ax + 25}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק

לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא 2. מצא את A.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x) = (x+A)\sqrt{x+1}$, (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = 3$ הוא 3. מצא את A.

ה. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+A}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע הפונקציה

בנקודה שבה: $x = 1$ הוא $\frac{1}{18}$. מצא את A. הבחן בין שני מקרים.

ו. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + Ax + 4}}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע

הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא 4. מצא את A.

60) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{2x+A} + Bx$, (A, B פרמטרים).

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y

היא: $y = 3x + 1$. מצא את A ואת B.

61) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x^2 + Ax + B}$, (A, B פרמטרים). משוואת

המשיק לגרף הפונקציה בנקודת שבה: $x = 1$ היא: $y = x + 2$. מצא את A ואת B.

62) נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sqrt{x-3}$, פרמטר a .

ידוע כי הפונקציה עוברת ב- $A(12, a+4)$.

- מצא את ערך הפרמטר a .
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A .
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק לצירים.

63) נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sqrt{3x+16}$, פרמטר a .

ידוע כי הישר $y = 2x - 8$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 11$.

- מצא את נקודת החיתוך.
- מצא את ערך הפרמטר a .
- האם הישר חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודה? אם כן, מהי?
- האם הישר הנתון הוא המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף א'? אם כן, נמק. אם לא, מצא את משוואת המשיק.

64) הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 5$ ו- $g(x) = x^2 - k\sqrt{x}$ (פרמטר k).

נחתכים בנקודה שבה: $x = 6.25$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
- האם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים בעוד נקודות? אם כן – מצא אותן.
- מצא את משוואות המשיקים לגרפים של שתי הפונקציות בנקודות החיתוך שלהם.

65) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ (פרמטר k).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x = 0.8$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן – מצא אותה.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 0.52$.

66) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+A}}{x+B}$ (פרמטרים A, B).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $(0, -\frac{1}{3})$ הוא: $-1/18$.

- מצא את A ואת B .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y והראה כי בעבור שני המקרים מתקבלת אותה הנקודה.

67 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{Ax^2 + Bx}}$, (A, B פרמטרים). שיפוע המשיק

לגרף הפונקציה בנקודה: $(1, \frac{1}{2})$ הוא: $\frac{1}{8}$. מצא את A ואת B.

68 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x\sqrt{Ax+3}$. ידוע כי: $f'(1) = 2.25$.

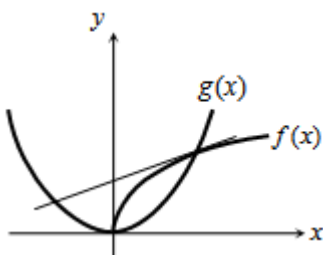
- מצא את ערך הפרמטר A.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.
- כתוב את משוואת הישר המאונך לגרף הפונקציה ועובר דרך נקודת ההשקה הנ"ל (נורמל לפונקציה).

69 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{x^2 + A}$, פרמטר A.

- ידוע כי לגרף הפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x=4$.
- מצא את A ואת האסימפטוטה האנכית הנוספת של גרף הפונקציה.
 - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $x=2$.
 - מצא את נקודת החיתוך של המשיק והאסימפטוטה: $x=4$.

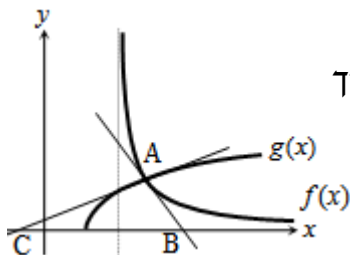
תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:

70 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = x^2 - 1$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

71 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ ו- $g(x) = \sqrt{x-3.5}$.



- מצא את הנקודה A - נקודת החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיקים לכל גרף העוברים דרך נקודת החיתוך.
- המשיקים חותכים את ציר ה- x בנקודות B ו- C כך שנוצר המשולש ABC. חשב את שטח המשולש.

(72) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{kx - \sqrt{x}}{2}$. ידוע כי: $f'(9) = \frac{5}{12}$.

- מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שבה x חיובי שמצאת בסעיף הקודם.

(73) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + 4}}$, A פרמטר.

- הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
- מצא את A אם ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 5$.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

(74) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{\sqrt{x}}$, (A, B פרמטרים). מעבירים לגרף הפונקציה

- שני משיקים. משיק אחד עובר דרך הנקודה שבה $x = 4$ ושיפועו הוא: $m = \frac{3}{8}$.
- משיק שני מעבירים דרך הנקודה שבה $x = 1$ וידוע כי הוא מקביל לישר: $2y = 5x + 3$. מצא את A ואת B .

(75) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

- הראה כי הפונקציה אינה חותכת את הצירים כלל.
- מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר הוא 0.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 5$.

(76) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ? נמק והראה חישוב מתאים.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון לפי הכלל: $f'(x) = 0$, סיווג ומציאת תחומי עלייה וירידה:

77) לפניך הפונקציות הבאות:

מצא את נקודות הקיצון (כולל נקודות קיצון קצה במידה וישנן) שלהן וקבע את סוגן (זכור למצוא תחילה את תחום ההגדרה ולפסול נקודות שאינן נמצאות בו).

א. $y = x - \sqrt{x}$	ב. $y = x^2 \sqrt{x+2}$	ג. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 25}$
ד. $y = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$	ה. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$	ו. $y = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$
ז. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$	ח. $y = \frac{x}{\sqrt{3x^2 - x - 2}}$	

78) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

79) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4.5}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

80) נתונה הפונקציה: $y = \sqrt{x^2 + 3x} - x$.

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון מקומיות כלל.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה אי-רציונאלית:

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = 2x - \frac{\sqrt{16x-1}}{4} \quad (82)$$

$$y = 2\sqrt{x} - x \quad (81)$$

$$y = \sqrt{x^3 - x} \quad (84)$$

$$y = x^2 \sqrt{4x+5} \quad (83)$$

$$y = \sqrt{x+8} + \sqrt{x-1} \quad (86)$$

$$y = x\sqrt{x^2+5x+7} \quad (85)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \quad (88)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+2} \quad (87)$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{10-x}} \quad (90)$$

$$y = \frac{\sqrt{x+8}}{x^2} \quad (89)$$

$$y = \frac{x^2-4}{\sqrt{9-x^2}} \quad (92)$$

$$y = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}} \quad (91)$$

93 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{16x - x^2}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיים וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

94 נתונה הפונקציה: $f(x) = -2\sqrt{36x - x^2}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיים וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

95 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

96) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + 24x - 25}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- כתוב את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

97) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 16} + k$, k פרמטר. ידוע כי לפונקציה יש נקודת מקסימום הנמצאת על ציר ה- x .

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן. אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

98) נתונה הפונקציה: $f(x) = k\sqrt{9-x^2}$. ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון שבה: $y = 12$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן. אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

99) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x+1}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

100) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + k - \sqrt{11-2x}$, k פרמטר.

- ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה (5,6).
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - האם יש לפונקציה נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.
 - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

- 101** נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x + k\sqrt{x}$, k פרמטר.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 16$.
 א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

- 102** נתונה הפונקציה: $f(x) = k\sqrt{x} - x$, k פרמטר.
 ידוע כי הישר $y = 3$ חותך את הפונקציה בנקודה שבה $x = 9$.
 א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. האם הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

- 103** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{8} - 4\sqrt{x}$.
 א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ו. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

- 104** נתונה הפונקציה: $f(x) = kx + k\sqrt{x} - 4$, k פרמטר.
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(4, 4k)$.
 א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

- 105** נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{16-x}$.
 א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

106 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{kx} - \sqrt{4-x}$. פרמטר k .

- ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן ואם לא נמק.
 - האם יש לפונקציה נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.

107 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-2x} + m$, פרמטר m .

- הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את m אם ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
- מצא את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.

108 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \sqrt{16-x^2}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

109 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{8-x^2} + kx$, פרמטר k .

- הישר $y = -2x + 4$ משיק לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

110 נתונה הפונקציה: $y = \frac{\sqrt{x-2}}{4} + \frac{x}{16}$.

- כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון מקומיות (פנימיות)? מצא במידה וכן.
- מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים? אם כן, מצא אותן.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- נתון הישר: $y = m$. לאלו ערכים של m יש לישר ולגרף הפונקציה נקודה משותפת אחת בלבד?

(111) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת קיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. הסבר מדוע הפונקציה חיובית בכל תחום הגדרתה.

(112) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y - x = 0$.
- א. מצא את ערך הפרמטר a .
 - ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 - ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(113) לפניך שלוש פונקציות:

$$(k > 0); f(x) = \sqrt{x+k}; g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}; h(x) = x\sqrt{x+k}$$

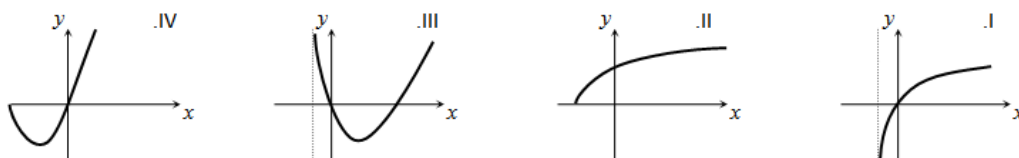
- א. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו לא נכונות והצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

1. לכל הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.
2. כל הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
3. כל הפונקציות חותכות את ציר ה- x פעם אחת בלבד.

מעבירים משיקים לגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודת החיתוך שלהם עם ציר ה- y . ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $g(x)$ גדול ב- $1/4$ משיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

1. בטא באמצעות k את שיפועי המשיקים לכל פונקציה.
2. מצא את k .

ג. לפניך 4 איורים, קבע איזה איור מייצג כל פונקציה. נמק את בחירותיך.



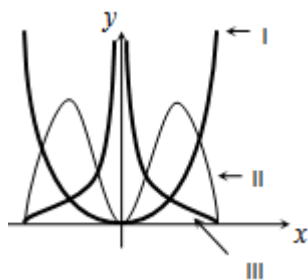
114) לפניך שלוש פונקציות:

$$f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}} \quad ; \quad h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2} \quad (k > 0)$$

א. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

1. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.
2. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
3. הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).
4. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ עם ציר ה- y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה: $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d = 6$.

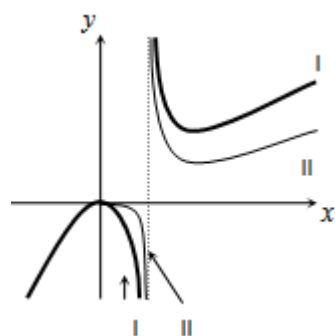


- ב. מצא את k .
- ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות. קבע על פי הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.

115) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$; $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

א. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

1. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.
2. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y = x$.
3. הפונקציות לא חותכות זו את זו.



- א. מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x) = (g(x))^2$.
- ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה $h(x)$.
- ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$? נמק.
- ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים. קבע על פי הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף מתאר מבין הפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.

116 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, $k > 0$.

- א. 1. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).
2. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה בעבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . (בטא באמצעות k).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A . ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: $S = 4$. מצא את k .

117 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.
- ב. לפניך מספר טענות. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
 1. לפונקציות תחום הגדרה זהה.
 2. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
 3. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותה נקודה.
 4. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות משותפות.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y .
אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:
מאחר שהפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה- y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ על ידי כך שנמצא תחילה את שיעור ה- y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

*הערה: בשאלה הבאה נדרש ידע בפתרון אי-שוויונים ממעלה גבוהה.

$$(118) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. גזור את הפונקציה $f(x)$.

גדירים פונקציה נוספת $g(x)$ המקיימת: $g(x) = (f(x))^2$. לפי כללי הגזירה

של פונקציה מורכבת ניתן לכתוב את הנגזרת של $g(x)$ באופן

$$\text{הבא: } g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$$

ג. כתוב את הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ לפי המכפלה הני"ל וצמצמם במידת

$$\text{האפשר. הראה כי הביטוי הסופי של הנגזרת הוא: } g'(x) = -\frac{4+x^2}{(x^2-4)^2}$$

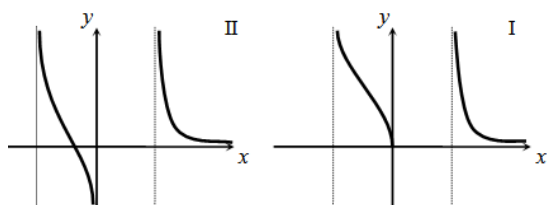
ד. באופן כללי, לפי כלל הגזירה הני"ל, אלו נקודות על גרף הפונקציה $f(x)$ הן

נקודות החשודות לקיצון בעבור $g(x)$?

ה. 1. האם לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון במקרה שלנו?

נמק על פי הסעיף הקודם.

2. מה ניתן לומר על גרף הפונקציה $f(x)$ לפי זה?



ו. לפניך שתי סקיצות:

קבע איזו סקיצה מתארת את גרף הפונקציה $f(x)$. נמק את בחירתך.

תשובות סופיות:

(22) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 5$ ג. $x \leq 3.5$ ד. $x \leq -1, x \geq 1$ ה. $x \leq -1, x \geq 0$ ו. $x \leq -2, x \geq 0$ ז. $x \leq -1, x \geq 5$ ח. $x \geq 0$ ט. $-1 \leq x \leq 0, x \geq 4$ י. $x \leq 2$ יא. $x \leq -1, x \geq 0$ יב. $x \geq 0$ יג. $x \neq \pm 4$ יד. $x > 0$ יו. $x > 2\frac{2}{3}$ יז. $x < -5, x > 5$ יח. $-4.5 < x < 4.5$

יח. $x < -3, x \geq 1$ יט. $x \geq 0$ כ. $x < -2, 0 \leq x \leq 25$ (23) א. 2 ב. 3 ג. 7 ד. 16

(24) א. $a=1, b=2$ (25) א. $a=2, b=1$ (26) א. $a=1, b=7$ (27) א. 3.5 ב. 3.5 ג. $66\frac{5}{6}$ ד. $\frac{1}{16}$

ה. $-\frac{2}{9}$ ו. $\frac{28}{\sqrt{20}}$ (28) א. (1,1) ב. (8,5) ג. $(\frac{1}{36}, -\frac{1}{72})$ ד. (4,2)

ה. $(\frac{10}{9}, \frac{10}{27})$ ו. (2,2) , $(\frac{1}{9}, \frac{28}{27})$, (9,36) (29) א. (-1,-2) ב. (2,12)

(30) א. $m = \frac{2}{\sqrt{28}}$ ב. $(2, \sqrt{252})$ הנקודה $x = -2$ נפסלת עקב העלאה בריבוע. ג. $m = 0$

(31) א. (4,1) (32) א. (5,4) (33) (1,6) (34) (2.25, 4.5) , (0,0) (35) א. $y = 5.5x - 3.5$

ב. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ג. $y = 38x - 104$ ד. $y = 1.25x - 2$ ה. $y = 4\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$

ו. $y = -\frac{5}{18}x + 1\frac{5}{6}$ ז. $y = -2x + 4$ ח. $y = 3.75x - 4.5$ ט. $y = -\frac{5}{18}x + 1\frac{5}{6}$

(36) א. (16,0), (0,0) ב. $y = 0.5x - 8$ (37) א. $(\frac{1}{36}, 0)$, (0,0) ב. $y = x - \frac{1}{36}$

(38) א. $y = \frac{2}{3}x - 3$ ב. (0,-3) , (4.5,0) ג. 90° , 33.69° , 56.31° ד. 6.75

(39) א. (0,3) ב. $y = -\frac{2}{3}x + 3$ (40) א. (0,-4) ב. $y = 3x - 4$

(41) א. (1,0) , (0,0) ב. $y = 1.5x - 1.5$ ג. A(5,6)

(42) א. $y = 3.4x - 1.35$ ב. (0,-1.35) ג. 3.825

(43) א. $2 \leq x \leq 6$ ב. משוואת המשיק: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ניתן לראות כי הגרף עובר ב-(0,0).

(44) א. $m = 2.4$ ב. $y = 2.4x - 8\frac{1}{15}$ ג. לא. מתקבל פתרון שנפסל עקב העלאה בריבוע.

(45) א. $y = -1\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$ ב. 4.225 (46) א. (0,1) ב. $y = -x + 1$ ג. 0.5

(47) א. (1,2) ב. $y = -1.5x + 3.5$ (48) א. $y = 0.5x + 6$ ב. $y = 5x + 4$ ג. $y = 4x + 0.25$

ד. $y = -x + 1.75$ (49) א. (1,7) ב. (64,0) , (0,0) ג. $9y + x = 64$

(3,12) .ב $y = 20x - 48$.א (51 $y = \frac{x}{3} - 37.5$.ג (25, -25) .ב (0,0) , (100,0) .א (50

(-2,0) .ב $x \geq -2$.א (54 $y = 2x + 36$.א (53 $y = 3x + 2$ (52 $y = \frac{4}{3}x + 8$.ג

(4,0) .ב $x \leq 4, x \neq 0$.א (55 $y = 0.5x + 1$.ד (-1,0.5) .ג

(0.75, $\sqrt{0.75}$) .א (57 $y = 6$.ג (9,6) .ב $x \geq 0, x \neq 1$.א (56

A(0.25,0.5) , B(0.25,1.5) .ד $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}$, $y = -\sqrt{3}x + 1.25\sqrt{3}$.ג

$y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)x + \sqrt{6} + 1$, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)x + \sqrt{6} - 7$.ב A(6, $2\sqrt{6} + 4$) , B(6, $2\sqrt{6} - 4$) .א (58

A = B = 4 (61 A = 1 , B = 2 (60 -64 .ו 2,5 .ה 1 .ד 20 .ג 15 .ב 4 .א (59

$7y - 3x = 65$.ד .לא .ג $a = 2$.ב (11,14) .א (63 $S = 6$.ג $y = \frac{1}{3}x + 2$.ב $a = 2$.א (62

(64 $k = 3$.ב $x \geq 0$.ג אין עוד נקודות חיתוך בנייהם.

$y = 10.5x - 34.0625$, $y = 11.9x - 42.8125$.ד

(65 $k = 0.48$.ב .כן (0.6,0.57) .ג $y = 0.74x + 0.1352$.א

(66 $A = 9$, $B = -9$.ב $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.א $A = B = 2$ (67

(68 $A = 1$.ב $y = 2.25x - 0.25$.ג $y = -\frac{4}{9}x + 2\frac{4}{9}$.א

(69 $A = -16$, $x = -4$.ב $y = -\frac{7}{72}x - \frac{1}{18}$.ג $\left(4, -\frac{4}{9}\right)$.א

(70 $A = 1$, (1,1) , (0,0) .ב $y = 0.5x + 0.5$.ג (-0.5,0.25) .א

(71 $A = 5.5, \sqrt{2}$.ב $y = 6.5\sqrt{2} - \sqrt{2}x$.ג $y = \frac{x}{\sqrt{8}} - \frac{3}{4\sqrt{2}}$.א $S = \frac{5}{\sqrt{2}}$.א

(72 $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{2}$, $k = 1$.ב (0,0) , (1,0) .ג $y = 0.25x - 0.25$.א (73 $A = 10$.ג $y = 5$.א

(74 $A = 1$, $B = -7$ (75 .ב $\left(3, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$.ג $y = 0.125x + 2.375$.א (76 (2,0) .ב .לא, מאחר

שאינ פתרון למשוואה: $f'(x) = 0$.ג $y = \frac{4}{\sqrt{2}}x - 4\sqrt{2}$.ד $S = 4\sqrt{2}$.א

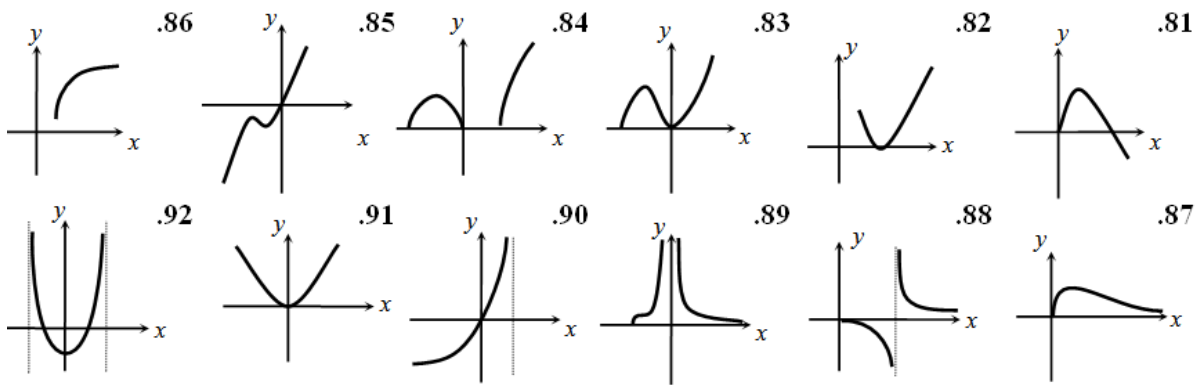
(77 $Min(0,0)$, $Max(-1.6, 1.619)$, $Min(-2,0)$.ב $Max(0,0)$, $Min(0.25, -0.25)$.א

$Min(2, \sqrt{21})$.ד $Min(-2,0)$, $Max(0,4)$, $Min(2,0)$.ה $Max\left(3, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.א $Min(0,0)$.א

ו. $Max(0,0)$.ז אין קיצונים כלל. ח. $Max\left(-4, \frac{-4}{\sqrt{50}}\right)$.א

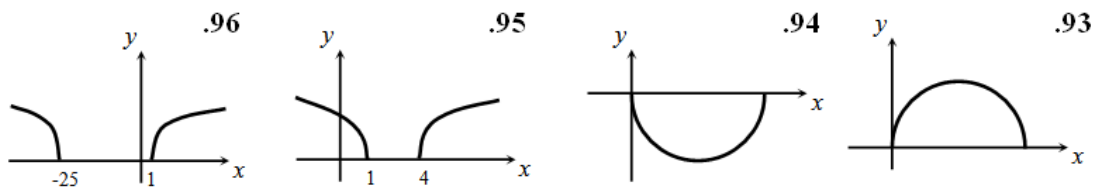
- (78) א. $x \leq -4, x \geq 1$ ב. $Min(-4,0), Min(1,0)$ ג. עולה: $x > 1$ יורדת: $x < -4$
- (79) א. כל x ב. $Min(-1.5,1.5)$ ג. עולה: $x > -1.5$ יורדת: $x < -1.5$
- (80) א. $x \leq -3, x \geq 0$ ג. עולה: $x > 0$, יורדת: $x < -3$.
- (81) א. $x \geq 0$ ב. $Max(1,1), Min(0,0)$ ג. עולה: $0 < x < 1$ יורדת: $x > 1$.
- ד. $(0,0), (4,0)$ ה. אין. (82) א. $x \geq \frac{1}{16}$ ב. $Max\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right), Min\left(\frac{1}{8}, 0\right)$
- ג. עולה: $x > \frac{1}{8}$ יורדת: $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$ ד. $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ ה. אין.
- (83) א. $x \geq -\frac{5}{4}$ ב. $Min(0,0), Max(-1,1), Min\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ ג. עולה: $x > 0, x < -1$ יורדת: $-\frac{5}{4} < x < -1$
- ד. $(0,0), \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ ה. אין.
- (84) א. $-1 \leq x \leq 0, x \geq 1$ ב. $Min(-1,0), Min(0,0), Min(1,0), Max(-0.57, 0.62)$ ג. עולה: $x > 1, -1 < x < -0.57$ יורדת: $-0.57 < x \leq 0$ ד. $(0,0), (1,0), (-1,0)$
- ה. אין. (85) א. כל x ב. $Max(-2,-2), Min(-1.75,-2.004)$ ג. עולה: $x < -2, x > -1.75$ יורדת: $-2 < x < -1.75$ ד. $(0,0)$ ה. אין.
- (86) א. $x \geq 1$ ב. $Min(1,3)$ ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. אין. ה. אין.
- (87) א. $x \geq 0$ ב. $Max\left(2, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), Min(0,0)$ ג. עולה: $0 < x < 2$ יורדת: $x > 2$ ד. $(0,0)$
- ה. אין.
- (88) א. $x \geq 0, x \neq 2$ ב. $Max(0,0)$ ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד. $(0,0)$
- ה. $x = 2$.
- (89) א. $x \geq -8, x \neq 0$ ב. $Min(-8,0)$ ג. עולה: $-8 < x < 0$ יורדת: $x > 0$ ד. $(-8,0)$
- ה. $x = 0$.
- (90) א. $x < 10$ ב. אין קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. $(0,0)$ ה. $x = 10$
- (91) א. כל x ב. $Min(0,0)$ ג. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$ ד. $(0,0)$ ה. אין.
- (92) א. $-3 < x < 3$ ב. $Min\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ג. עולה: $0 < x < 3$ יורדת: $-3 < x < 0$
- ד. $(\pm 2, 0), \left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ה. $x = \pm 3$.

סקיצות של שאלות 81-92:



- 93 א. $0 \leq x \leq 16$. ב. $Min(0,0)$, $Min(16,0)$, $Max(8,8)$. ג. עולה: $0 < x < 8$.
 יורדת: $8 < x < 16$. 94 א. $0 \leq x \leq 36$. ב. $Max(0,0)$, $Max(36,0)$, $Min(18,-36)$.
 ג. עולה: $18 < x < 36$. יורדת: $0 < x < 18$.
 95 א. $x \leq 1$, $x \geq 4$. ב. $Min(1,0)$, $Min(4,0)$. ג. עולה: $x > 4$, יורדת: $x < 1$. ד. $(0,2)$.
 96 א. $x \leq -25$, $x \geq 1$. ב. $Min(1,0)$, $Min(-25,0)$. ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $x < -25$.

סקיצות של שאלות 93-96:



- 97 א. $k = -3$. ב. $2 \leq x \leq 8$. ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה: $Min(2,-3)$, $Min(8,-3)$.
 ד. עולה: $2 < x < 5$. יורדת: $5 < x < 8$.
 98 א. $k = 4$. ב. $-3 \leq x \leq 3$. ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה: $Min(-3,0)$, $Min(3,0)$.
 ד. עולה: $-3 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 3$.
 99 א. $x \geq -1$. ב. $Min(0,-1)$, $Max(-1,0)$. ג. $(-1,0)$, $(3,0)$.
 ד. עולה: $x > 0$, יורדת: $-1 < x < 0$. ה. חיובית: $x > 3$, שלילית: $-1 < x < 3$.
 100 א. $k = 2$. ב. $x \leq 5.5$. ג. כן – ישנה נקודת קיצון קצה: $(5.5, 7.5)$. לא קיימת
 נקודת קיצון מקומית מאחר ש- $x = 5$ המתקבל בעת השוואת הנגזרת לאפס
 נפסל כי אינו מקיים את המשוואה המקורית. ד. $(1,0)$. הנקודה שבה $x = -7$
 אינה מקיימת את המשוואה המקורית ולכן נפסלת.
 101 א. $k = -12$. ב. $Max(0,0)$, $Min(4,-12)$. ג. עולה: $x > 4$. יורדת: $0 < x < 4$.
 102 א. $k = 4$. ב. $(1,3)$. ג. $Max(4,4)$, $Min(0,0)$. ד. $(0,0)$, $(16,0)$.
 103 א. $x \geq 0$. ב. $Max(0,0)$, $Min(4,-6)$. ג. עולה: $x > 4$. יורדת: $0 < x < 4$.
 ד. $(0,0)$, $(\sqrt[3]{1024}, 0)$. ו. חיובית: $x > 10$, שלילית: $0 < x < 10$.

104 א. $k=2$. ב. יש קיצון קצה - $(0, -4)$. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. $(1, 0)$.

105 א. $0 \leq x \leq 16$. ב. $Min(0, 4)$, $Max(8, 2\sqrt{8})$, $Min(16, 4)$. ג. עולה: $0 < x < 8$, יורדת: $8 < x < 16$.

106 א. $k=1$. ב. $0 \leq x \leq 4$. ג. לא. ד. אין קיצונים.

107 א. יש להראות כי הנגזרת מורכבת מחיבור של שני ביטויים שחיוביים תמיד ומכאן שסימן הנגזרת חיובי והפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$ - הנגזרת בנויה משני ביטויים חיוביים. ב. $0 \leq x \leq 4.5$. ג. $m=2$.

ד. $Min(0, -1)$, $Max(4.5, 2 + \sqrt{4.5})$.

108 א. $-4 \leq x \leq 4$. ב. $Min(4, 4)$, $Max(\sqrt{8}, 2\sqrt{8})$, $Min(-4, -4)$. ג. $(-\sqrt{8}, 0)$, $(0, 4)$.

109 א. $k=-1$. ב. $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$. ג. $Min(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$, $Max(-2, 4)$, $Min(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$.

ד. עולה: $-\sqrt{8} < x < -2$, יורדת: $-2 < x < \sqrt{8}$.

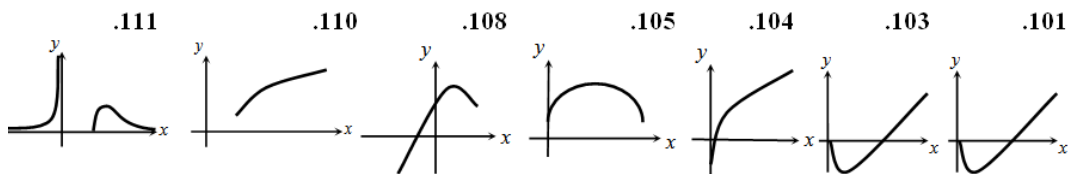
110 א. $x \geq 2$. ב. אין נקודות קיצון. ג. $(2, \frac{1}{8})$. ד. אין נקודות חיתוך עם הצירים.

נ. $m \geq \frac{1}{8}$. 111 א. $x < 0$, $x \geq 2$. ב. $Max(3, \frac{1}{\sqrt{27}})$, $Min(2, 0)$. ג. $(2, 0)$.

112 א. $a=1$. ב. $-3 < x < 3$. ג. $(-1.5, \sqrt{3})$.

ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$. עולה: $-1.5 < x < 3$.

סקיצות של שאלות 101-111 (אלו שיש בהן גרף):



113 א 1. הטענה אינה נכונה.

תחומי ההגדרה הם: $f(x): x \geq -k$; $g(x): x > -k$; $h(x): x \geq -k$.

2. הטענה אינה נכונה. הפונקציה: $f(x)$ עולה תמיד שכן: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}} > 0$.

הפונקציה: $g(x)$ גם עולה תמיד שכן: $g'(x) = \frac{x+2k}{(x+k)^{1.5}} > 0$ כי

הנקודה $x = -2k$ אינה בתחום ההגדרה וערך הנגזרת בתחום ההגדרה

חיובי. לפונקציה: $h(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x = -\frac{2}{3}k$ אשר בתוך תחום

הגדרתה ולכן היא יורדת בעבור: $-k < x < -\frac{2}{3}k$.

3. הטענה אינה נכונה.

נקודות החיתוך: $f(x):(-k,0)$; $g(x):(0,0)$; $h(x):(-k,0)$, $(0,0)$

ב. 1. $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$. 2. $k=4$. ג. $I=g(x)$, $II=f(x)$, $IV=h(x)$.

(114) א. 1. הטענה אינה נכונה. תחומי ההגדרה:

. $f(x):-\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$; $g(x):-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$; $h(x):-\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}, x \neq 0$

2. הטענה אינה נכונה. נקודות החיתוך הן:

. $f(x):(\pm\sqrt{k},0)$, $(0,0)$; $g(x):(0,0)$; $h(x):(\pm\sqrt{k},0)$

3. הטענה נכונה. בעבור $g(x)$ נקבל: $g'(x) = \frac{2kx-x^3}{(k-x^2)^{1.5}}$ ולכן: $x=0$ נקודת

מינימום. (הנקודות $x = \pm\sqrt{2k}$ נפסלות). בעבור $h(x)$ נקבל: $h'(x) = \frac{x^3-2kx}{(k-x^2)^{1.5}}$

ולכן: $x=0$ נקודת מקסימום. (הנקודות $x = \pm\sqrt{2k}$ נפסלות).

4. הטענה אינה נכונה. לפונקציה יש 3 נקודות קיצון: $x=0$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}k}$

ב. $k=24$. ג. $(\pm 4, 32\sqrt{2})$ Max , $(0,0)$ Min . ד. $I=h(x)$, $II=f(x)$, $III=g(x)$

(115) א. 1. הטענה אינה נכונה. תחומי ההגדרה הם: $g(x):x > 1$; $f(x):x \geq 0, x \neq 1$

2. הטענה נכונה. ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון $(4,4)$ ול- $g(x)$ יש קיצון $(2,2)$.

שתייהן נמצאות על הישר $y=x$.

3. הטענה נכונה. מתקבלים: $x=0,1$ אשר שניהם נפסלים מחמת תחום

ההגדרה של הפונקציות.

ב. $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$. ג. לא. $h(x): x \neq 1$. ד. $I=h(x)$, $II=f(x)$

(116) א. 1. $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$. 2. $x = \pm\sqrt{k}$. ב. הנגזרת היא: $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$

ג. $y = \sqrt{k}x$. ד. $k=4$

(117) א. $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$

ב. 1. הטענה אינה נכונה. תחומי ההגדרה

הם: $g(x):x < -4, x \geq -2$; $f(x):x \neq -4$

2. הטענה נכונה. הנגזרות חיוביות: $f(x) = \frac{2}{(x+4)^2} > 0$

ג. $g(x) = \frac{1}{(x+4)^2 \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}} > 0$

3. הטענה נכונה. הנקודה היא: $(-2, 0)$.

4. הטענה נכונה. האסימפטוטות משותפות הן: $x = -4$, $y = 1$.

ג. $f(x): (0, \frac{1}{2})$; $g(x): (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

ד. אסף צודק שכן מכוח ההגדרה: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ ניתן לראות כי בעבור

כל ערך של x_0 בחיתוך תחום ההגדרה המשותף קיימות שתי

נקודות: $A(x_0, f(x_0))$ ו- $B(x_0, g(x_0))$ (אחת על כל גרף כמובן) ושיעורי

ה- y שלהן מקיימות: $g(x_0) = \sqrt{f(x_0)}$.

$$(118) \text{ א. } -2 < x \leq 0, x > 2. \text{ ב. } f'(x) = -\frac{x^2 + 4}{2(x^2 - 4)^2 \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}}$$

ד. נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x ונקודות המאפסות את הנגזרת

של $f(x)$.

ה. 1. לא. ל- $f(x)$ אין נקי קיצון והנקודה $(0, 0)$ אינה קיצון בעבור $g(x)$.

2. יורדת בכל תחום הגדרתה. ו. 1.

תרגול מבגרויות:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, a הוא פרמטר השונה מ-0.

- א. 1. מצא את השיעורים של הנקודות שבהן נגזרת הפונקציה שווה ל-0. (הבע באמצעות a במידת הצורך).
2. נתון כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על הישר $y = x + 4$. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. הצב את ערך הפרמטר a שמצאת, וקבע את סוג נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-x^2 - a}{(x-1)^2}$, a הוא פרמטר.

- א. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- ב. גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה בנקודה P . (1) הבע באמצעות a את שיעור ה- x של הנקודה P . (2) נתון כי שיעור ה- x של הנקודה P הוא 3.5. מצא את הערך של a .
- ג. הצב את הערך של a שמצאת בתת-סעיף ב-2, ומצא:
 - (1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - (2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - (3) את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- ד. האם הפונקציה עולה בתחום $x < 1$? נמק.

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + 2x + 16}{bx^2 - 8x + 16}$, a ו- b הם פרמטרים.

- תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 4$.
- א. מצא את הערך של b .
 - ב. הצב את הערך של b שמצאת בסעיף א, וענה על תת-סעיפים 1 ו-2.
 1. הבע באמצעות a את האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- x .
 2. האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- x וגרף הפונקציה נחתכים בנקודה שעל ציר ה- y . מצא את הערך של a .
 - ג. הצב גם את הערך של a שמצאת בתת-סעיף ב-2 וענה על תת-סעיפים 1, 2 ו-3.
 1. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).
 2. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק.
 3. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{2-x^2}$, a הוא פרמטר.

- א. הישר $y = -x - \sqrt{2}$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y . מצא את הערך של a .
- הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ב-ד.
- ב. 1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. פתור את המשוואה $f'(x) = 0$, ובדוק אם הפתרונות מקיימים את המשוואה.
3. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של הפונקציה.
- ד. דרך נקודת המינימום המוחלט ודרך נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה העבירו מקבילים לציר ה- y . מצא את המרחק בין שני המקבילים.

5) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 + bx + 5}$, b הוא פרמטר.

נתון כי שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$, הוא $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

- א. מצא את הערך של b .
- הצב $b = -6$, וענה על הסעיפים ב-ה.
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x-1}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. קבע אם נקודה ששיעור ה- y שלה הוא -5 נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$. נמק.

7 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+5}{x^2-a} + b$, ו- a ו- b הם פרמטרים. תחום ההגדרה של

הפונקציה הוא $x \neq \pm 2$, ואחת האסימפטוטות של הפונקציה היא $y = 2$.

א. מצא את הערך של a ואת הערך b . נמק.

הצב $a = 4$ ו- $b = 2$, וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. 1. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

2. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

3. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{x+5}{x^2-4}$. בלי חקירה נוספת קבע במה שונות נקודות

הקיצון של $g(x)$ מנקודות הקיצון של $f(x)$.

8 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{-x} + 2$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מצא את משוואת הישר המחבר את נקודות המינימום של הפונקציה.

ה. מצא עבור אילו ערכים של k , למשוואה $f(x) = k$ יש שני פתרונות.

9 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-5}{x+3}$.

א. 1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם ישנן).

3. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

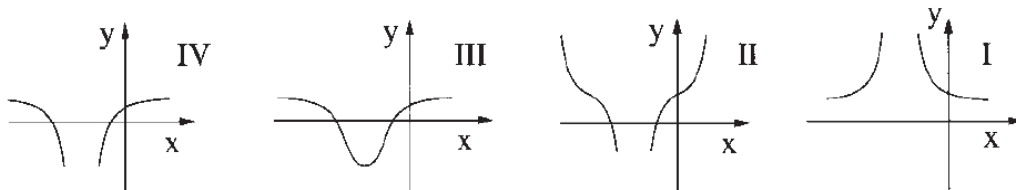
4. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

5. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. 1. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

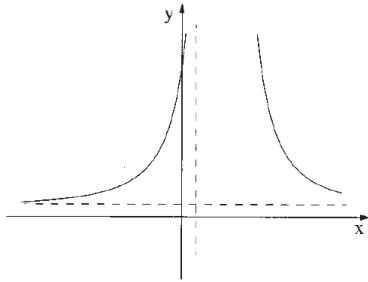
2. מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך, איזה גרף מתאר את פונקציית

הנגזרת $f'(x)$? נמק.



$$10) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 1}$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים (אם ישנן).
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



- ו. לפניך סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הגדרתה. עבור אילו ערכים של k הישר $y = k$ אינו חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.

$$11) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = -x^2 \sqrt{x+5}$$

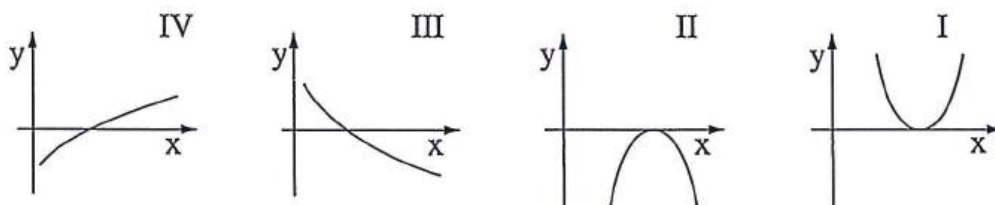
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. האם יש ערכים של x שעבורם $f(x) > 0$? נמק.
- ד. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של גרף הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. כמה פתרונות יש למשוואה $-14 = -x^2 \sqrt{x+5}$? נמק.

$$12) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2}$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- ג. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ד. 1. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. היעזר בגרף שסירטטת, ומצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

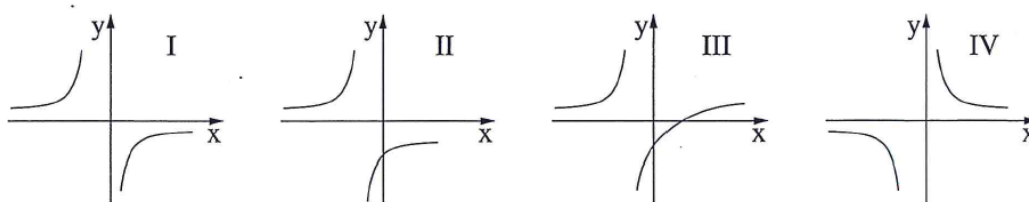
13) נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{4x} - 6x$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. איזה גרף מבין הגרפים I, II, III, IV עשוי לתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $1 \leq x \leq 10$? נמק.



14) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{9}{(x+1)^2} - 1$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מציג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.

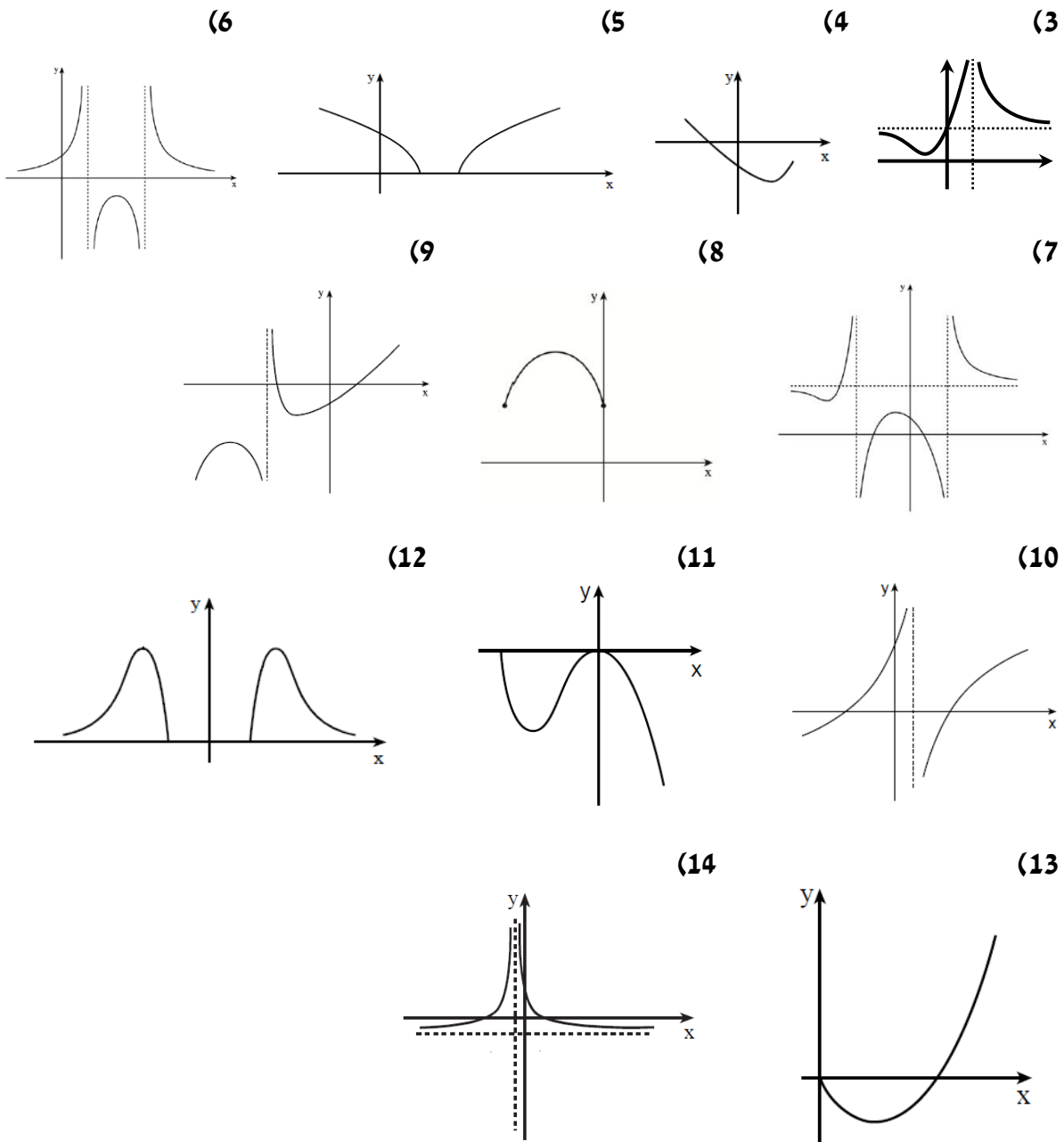


תשובות סופיות:

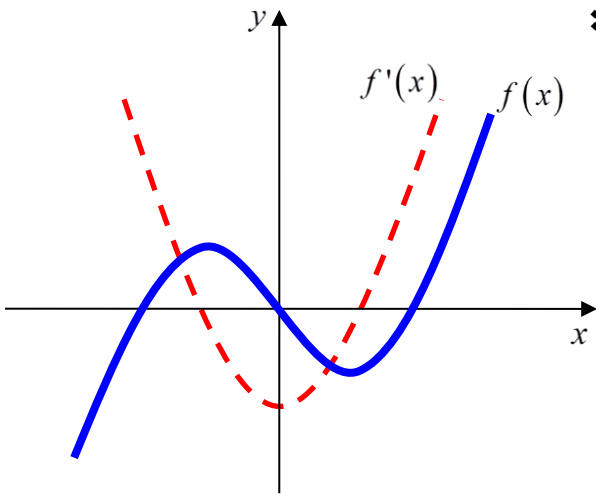
- 1 א. 1. $(0,0)$, $(2a,4a)$ 2. $a=2$ ב. $\max(0,0)$, $\min(4,8)$
 ג. עולה: $x < 0$, $x > 4$ יורדת: $0 < x < 4$, $x \neq 2$
- 2 א. 1. $y = -1$ ב. 1. $\frac{1-a}{2}$ 2. $a = -6$ ג. 1. $x \neq 1$ 2. $(0,6)$, $(\pm\sqrt{6},0)$ 3. $\min(6,-1.2)$
- 3 א. 1. $b=1$ ב. 1. $y=a$ 2. $a=1$ ג. 1. $\min(-4,0.375)$ 2. עליה: $-4 < x < 4$
 ירידה: $x < -4$, $x > 4$ 3. סקיצה בסוף. 4 א. $a = -1$ ב. 1. $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$
 2. $x=1$, הפתרון $x=-1$ נפסל בבדיקה.
 3. $(1,-2)$ מינימום מוחלט, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ מקסימום מוחלט. ג. סקיצה בסוף.
 ד. $1 + \sqrt{2} = 2.414$
- 5 א. 1. $b = -6$ ב. $x \geq 5$ או $x \leq 1$ ג. $(0,\sqrt{5})$, $(1,0)$, $(5,0)$ ד. עלייה: $x > 5$
 ירידה: $x < 1$ ה. סקיצה בסוף.
- 6 א. 1. $x \neq 1$, $x \neq 3$ ב. $y=0$, $x=1$, $x=3$ ג. $(2,-6)$ מקסימום ד. $(0,2)$
 ה. סקיצה בסוף. ו. לא.
- 7 א. 1. $b=2$, $a=4$ ב. 1. $(0,0.75)$, $(1,0)$, $(-1.5,0)$ 2. $(-0.42,0.8)$ מקסימום
 $(-9.58,1.95)$ מינימום. 3. סקיצה בסוף. ד. שיעור ה- x נשאר זהה, שיעור
 ה- y קטן ב-2.
- 8 א. 1. $-2 \leq x \leq 0$ ב. $(-1,4)$ מקסימום, $(-2,3.414)$ מינימום, $(0,3.414)$ מינימום.
 ג. סקיצה בסוף. ד. $y = 3.414$ ה. $3.414 \leq k < 4$
- 9 א. 1. $x \neq -3$ 2. $x = -3$ 3. $(0,-1\frac{2}{3})$, $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$
 4. $(-1,-2)$ מינימום, $(-5,-10)$ מקסימום. 5. סקיצה בסוף.
 ב. 1. $y=1$, $x=-3$ 2. גרף IV.
- 10 א. 1. $x \neq \frac{1}{2}$ ב. $x = \frac{1}{2}$ ג. $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$ ד. תחומי עלייה: $x > \frac{1}{2}$ או $x < \frac{1}{2}$
 תחומי ירידה: אין. ה. סקיצה בסוף. ו. $k \leq \frac{1}{2}$
- 11 א. 1. $x \geq -5$ ב. $(0,0)$, $(-5,0)$ ג. לא. ד. $(0,0)$ מקסימום, $(-4,-16)$ מינימום,
 $(-5,0)$ מקסימום. ה. סקיצה בסוף. ו. שלושה פתרונות.
- 12 א. 1. $x \geq 2$ או $x \leq -2$ ב. $(-2,0)$, $(2,0)$ ג. $(\sqrt{8},\frac{1}{4})$ מקסימום מוחלט
 $(-\sqrt{8},\frac{1}{4})$ מקסימום מוחלט, $(2,0)$ מינימום מוחלט, $(-2,0)$ מינימום מוחלט.
 ד. 1. סקיצה בסוף. 2. $y = 0.25$

- 13 א. (1) $x \geq 0$ (2) $(0,0)$, $(9,0)$ (3) $(0,0)$ מקסימום, $(4,-8)$ מינימום.
 ב. סקיצה בסוף. ג. גרף IV.
 14 א. $x \neq -1$. ב. $(2,0)$, $(-4,0)$, $(0,8)$. ג. $y = -1$, $x = -1$.
 ד. עלייה: $x < -1$, ירידה: $x > -1$. ה. סקיצה בסוף. ו. גרף II.

סקיצות לפי מספרי שאלות:



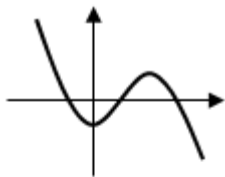
הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת:



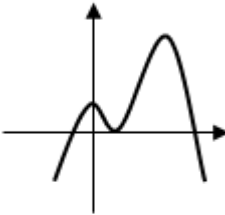
חוקים כלליים:

1. כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית ולהפך.
2. כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית ולהפך.
3. כאשר ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון, $f'(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ולהפך.

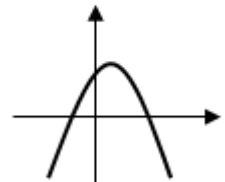
שאלות:



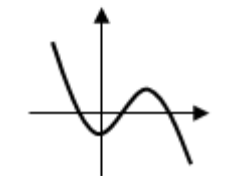
- 1) נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת. נמק את שיקוליך בשרטוט.



- 2) נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת. נמק את שיקוליך בשרטוט.



- 3) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בשרטוט.



- 4) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בשרטוט.

- 5) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- א. 1. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
2. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הנגזרת $f'(x)$.

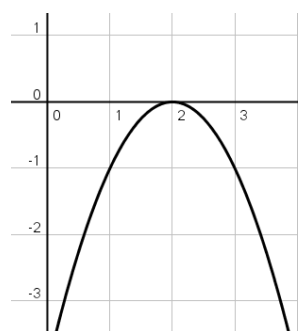
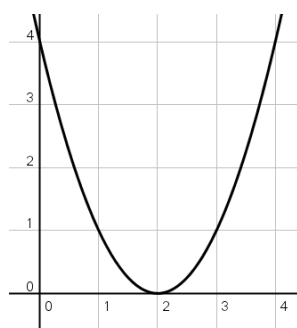
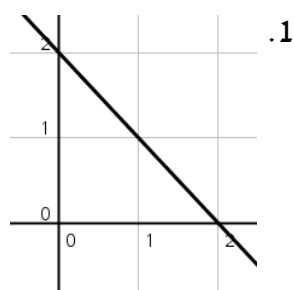
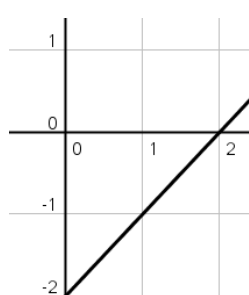
6 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x$.

- א. 1. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
2. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הנגזרת $f'(x)$.

7 לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת.

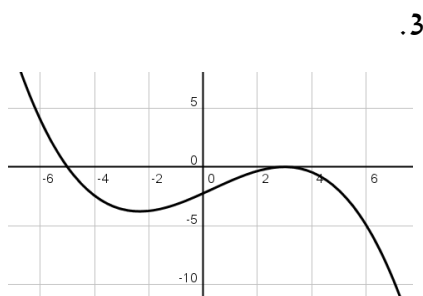
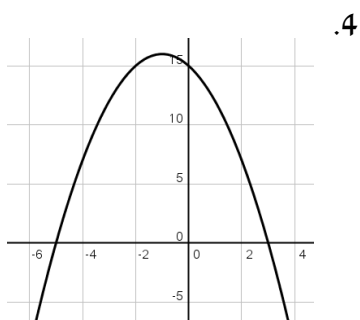
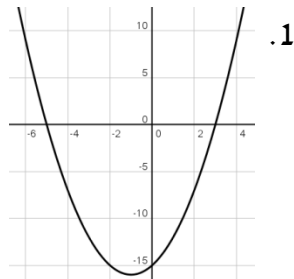
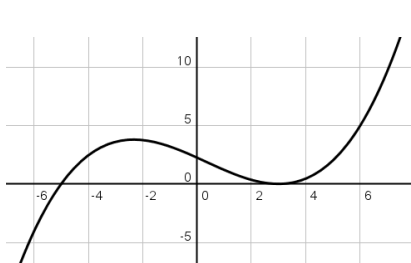
הערך המקסימלי שלה מתקבל בנקודה שבה: $x = 2$.

- א. מהו סימן הנגזרת עבור: $x < 2$?
ב. מהו סימן הנגזרת עבור: $x > 2$?
ג. איזה מבין הגרפים הנ"ל יכול לתאר את גרף הנגזרת:



8 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x$.

- א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ב. איזה מבין הגרפים הבאים מתאר סקיצה של הנגזרת $f'(x)$? נמק.



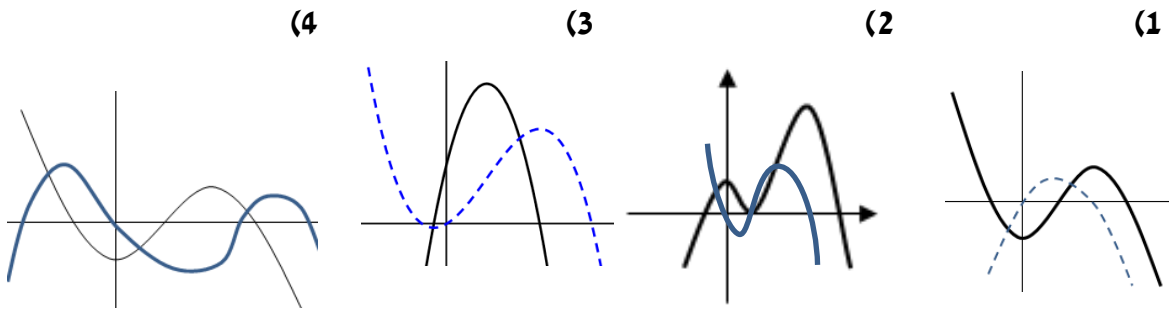
9 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 4x^3$.

- א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ב. סרטט באמצעות נתונים אלו את הגרף של נגזרת הפונקציה.

10 ענה על הסעיפים הבאים:

- א. סרטט את גרף פונקצית הנגזרת, $f'(x)$, של $f(x)$, אם ידוע כי ל- $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון: מקסימום כאשר $x = -1$ ומינימום כאשר $x = 3$.
 ב. נתונה הפונקציה $f(x)$ ולה 3 נקודות קיצון: מקסימום כאשר $x = 0, 5$ ומינימום כאשר $x = 2$. סרטט את גרף הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.
 ג. סרטט את גרף הנגזרת, $f'(x)$, של $f(x)$, אם ידוע כי היא יורדת לכל x , והנגזרת שלה מתאפסת בנקודה שבה: $x = 3$.

תשובות סופיות:



(5) א. 1. $(0,5)$, $(1,0)$, $(5,0)$ 2. $\min(3,-4)$

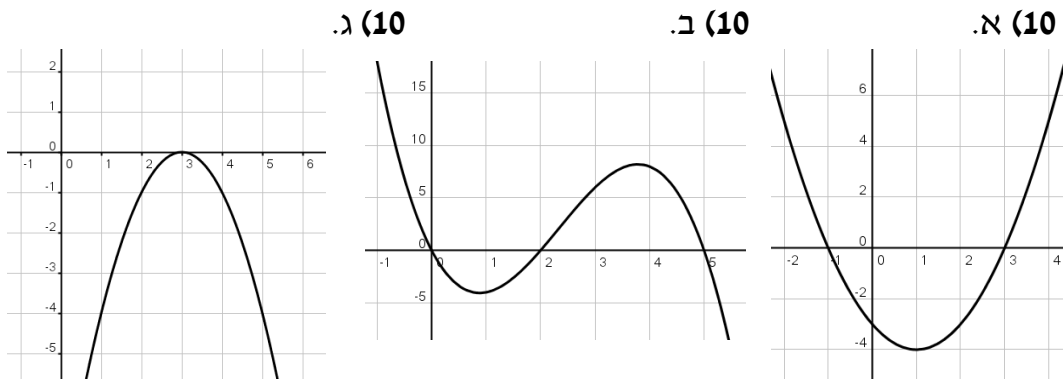
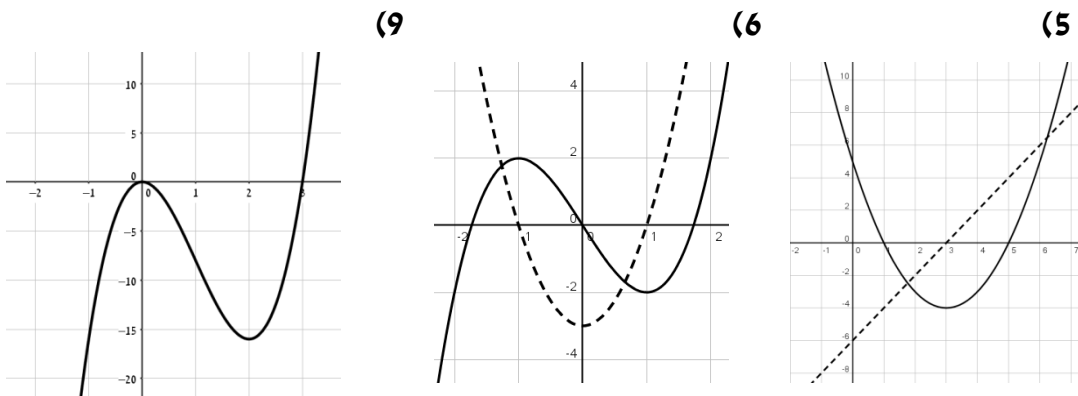
(6) א. 1. $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(0,0)$ 2. $\max(-1,2)$, $\min(1,-2)$

(7) א. $f'(x) > 0$ ב. $f'(x) < 0$ ג. 1.

(8) א. עולה: $x > 3$, $x < -5$ יורדת: $-5 < x < 3$ ב. 1.

(9) א. עולה: $x > 3$ יורדת: $0 < x < 3$, $x < 0$

סקיצות לשאלות:



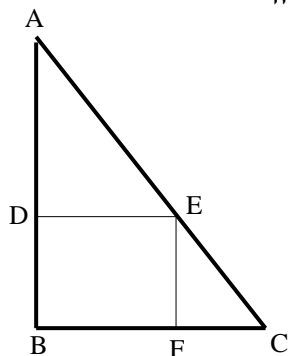
פרק 13 - בעיות קיצון:

שלבי עבודה:

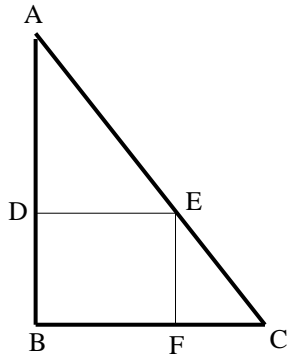
1. נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
2. נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
3. נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
4. נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ את ערך/ערכי ה- x .
5. נוודא שערך ה- x מסעיף ד' הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
6. ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

שאלות:

- 1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
- 2) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- 3) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- 4) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.
- 5) א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.
ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



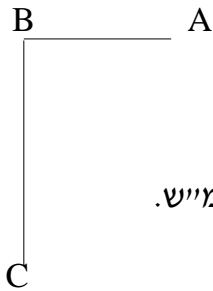
- 6) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון: $AB = 20_{cm}$, $BC = 16_{cm}$. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



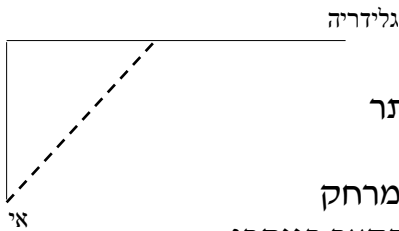
7) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $BC = b$, $AB = a$.
מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

8) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

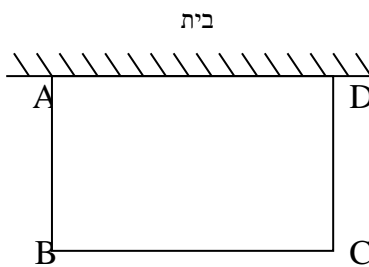
9) מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



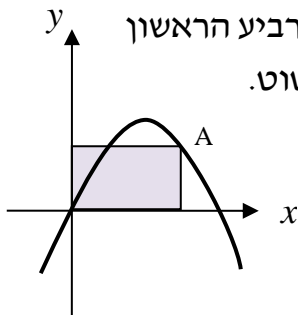
10) שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C. המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ. מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש. כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי? מצא גם את המרחק המינימלי.



11) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?

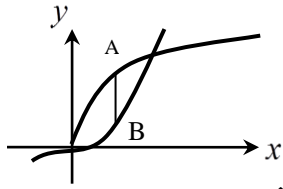


12) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



13) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון

הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

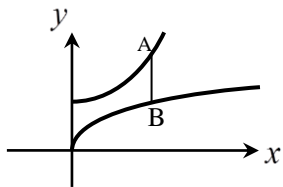


14 נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B,

שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



15 נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = 4\sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 5$.

א. התאם לכל גרף את הפונקציה המתאימה.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודות A ו-B כדי שאורך

הקטע AB (המקביל לציר ה- y) יהיה מינימלי?

ג. חשב את אורך הקטע המינימלי.

16 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.

מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

תשובות סופיות:

1 (1,7) 2 (8,8,8) 3 (1) 4 (8 יחידות אורך. 5) א. $\frac{a}{3}$ 6 (80 סמ"ר 7) $\frac{ab}{4}$ יח"ש

8 (4·4·4) 9 $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $V =$ 10 (4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ 11) $2\frac{1}{3}$ ק"מ

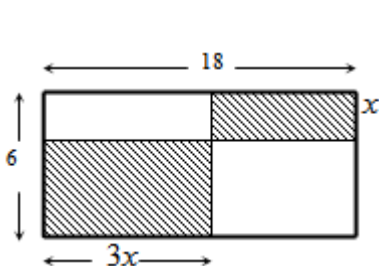
12 (4·6) 13 (A(4,8) 14 (A(1,2) 15) ב. (A(1,6), B(1,4)) ג. 2. 16) 2·1.

תרגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

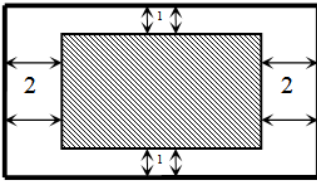
תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 45. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום זהה לו?
ג. באיזה מקרה (א' או ב') המכפלה תהיה גדולה יותר? הראה דרך חישוב.
- (2) א. מבין כל המספרים המקיימים: $3x + y = 60$ מצא את המספרים x ו- y שמכפלת ריבועיהם מקסימלית.
ב. מהי המכפלה הנ"ל?
- (3) סכום שלושה מספרים הוא 11. ידוע כי המספר הראשון גדול ב-4 מהמספר השני. הראה כי המספרים שמכפלתם היא מקסימלית מקיימים:
א. מכפלת שני המספרים הקטנים שווה למספר הגדול.
ב. ערך המכפלה של שלושת המספרים שווה לריבוע המספר הגדול מבניהם.
- (4) סכום שלושה מספרים הוא 26. מספר אחד גדול פי 3 מהשני. מצא את שלושת המספרים שסכום ריבועיהם הוא מינימלי.
- (5) א. x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$. הבע את y באמצעות x .
ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הנ"ל?
- (6) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום זהה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

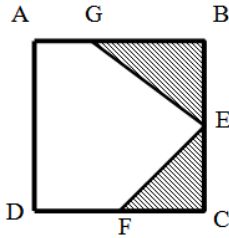


- (7) במלבן שצלעותיו הן 6 ס"מ ו-18 ס"מ חסומים שני מלבנים מקווקווים. אורך אחד המלבנים המקווקווים גדול פי 3 מרוחב המלבן השני כמתואר באיור.
א. מה צריך להיות האורך x כדי שסכום שטחי שני המלבנים יהיה מקסימלי.
ב. בעבור ה- x שמצאת מהו סכום השטחים הללו?

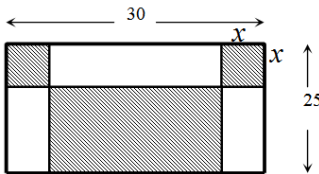
8) יוסי רוצה לקנות דף מחשב צבעוני ומיוחד בעל היקף של 60 ס"מ כדי להכין ברכה ליום הולדתה של חברתו רחל. המדפסת של יוסי אינה מדפיסה עד גבולות הדף אלא משאירה מרחק של 2 ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון, ומרחק של 2 ס"מ מצידי הדף (ראה איור). יוסי רוצה לבחור דף שבו השטח שהמדפסת תוכל להדפיס יהיה מקסימלי. מה הן מידות הדף שיוסי צריך לקנות כדי שהשטח המודפס יהיה מקסימלי?



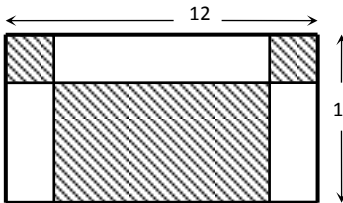
9) בריבוע ABCD חסומים שני משולשים ישרי-זווית GBE ו-ECF כמתואר באיור. ידוע שאורך הקטע AG הוא 5 ס"מ ואורך צלע הריבוע ABCD הוא 13 ס"מ. המשולש ECF הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים (CE=CF).
 א. מצא מה צריך להיות אורך שוק המשולש ECF בעבורו סכום שטחי שני המשולשים הנ"ל יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



10) במלבן שצלעותיו הן 30 ס"מ ו-25 ס"מ חסומים שני ריבועים ומלבן (המסומנים) כמתואר באיור. מסמנים את צלע הריבוע ב- x .

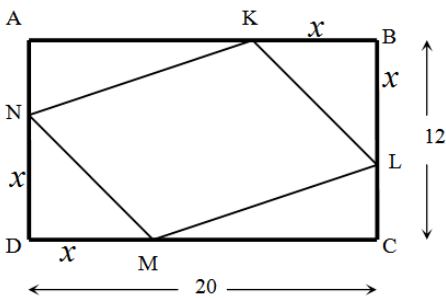


א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.
 ב. בעבור אורך הצלע שמצאת מהו סכום השטחים המינימלי?



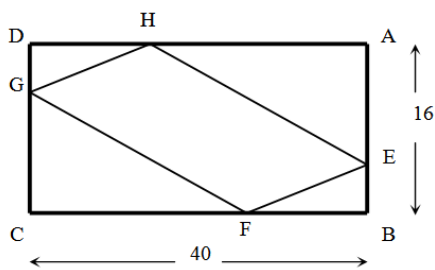
11) במלבן שמידותיו הן 12 ס"מ ו-10 ס"מ חסומים בצדדים למעלה שני ריבועים ומלבן מתחתיהם במרכז.
 א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה השטח שלהם במקרה זה?

12) הנקודות K, L, M, N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$.



צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.
 א. הבע באמצעות x את סכום שטחי המשולשים: $\triangle AKN + \triangle BKL + \triangle CLM + \triangle DNM$.
 ב. מצא מה צריך להיות x כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.
 ג. מה הוא השטח של המרובע LKNM במקרה זה?

13) במלבן ABCD שמידותיו הן 40 ס"מ ו-16 ס"מ מקצים נקודות על צלעות המלבן כך



שמתקיים: $AE = BF = CG = DH = x$.

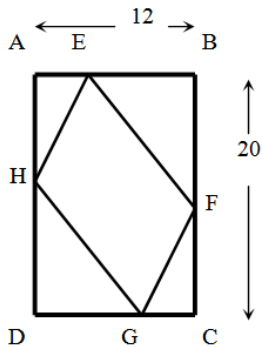
א. הבע באמצעות x את שטחי ארבעת המשולשים:

$$\Delta AEH + \Delta BEF + \Delta CGF + \Delta DGH$$

ב. מצא מה צריך להיות x בעבורו שטח

המרובע EFGH יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה שטח המרובע EFGH במקרה זה?



14) אורך המלבן ABCD הוא 20 ס"מ ורוחבו הוא 12 ס"מ.

מקצים על צלעות המלבן קטעים כך ש: $AH = BE = CF = DG = x$.

א. מצא מה צריך להיות x בעבורו

שטח המרובע EFGH יהיה מינימלי.

ב. בעבור ה- x שמצאת מה השטח המינימלי?

15) נתון מלבן שמידותיו הן 8 ס"מ על 40 ס"מ.

מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן כך שנוצרים 4 מלבנים.

מסמנים צלע אחת של המלבן הימני ב- x , כך שהצלע הסמוכה

לה גדולה פי 4 ממנה כמתואר באיור ובמלבן השמאלי בונים משולש.

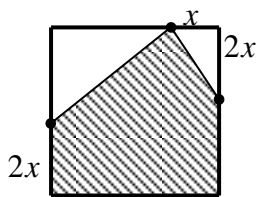
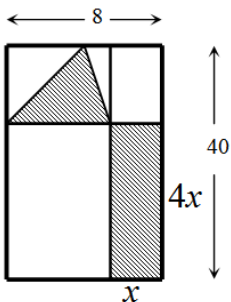
א. בטא באמצעות x את סכום השטחים של המלבן

והמשולש המקווקוים.

ב. מצא מה צריכות להיות מידות המלבן הימני כדי

שסכום השטחים הנ"ל יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



16) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.

מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם

הוא $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש

המקווקו. מצא מה צריך להיות ערכו של x בעבורו שטח המחומש

יהיה מקסימלי.

17) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 16 - 2x^3, \quad g(x) = -6x^2 - 18x$$

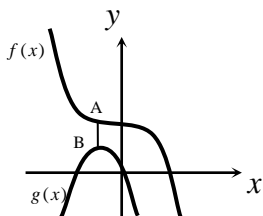
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני ומותחים

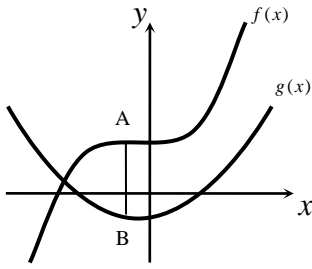
ממנה ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף

הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

א. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



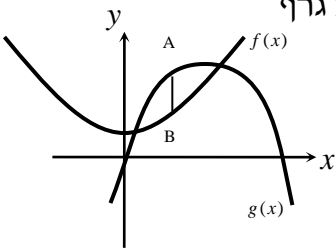


18) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

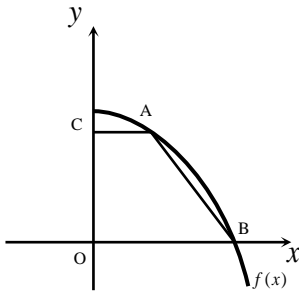
$$f(x) = x^3 + 8, \quad g(x) = x^2 + x - 6$$

- מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ומורידים ממנה ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי.
- ב. מה יהיה האורך המקסימלי?

19) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 20x - x^2$



- מעבירים קטע AB המקביל לציר ה- y כך שהנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.
- א. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t . הבע באמצעות t את אורך הקטע AB.
- ב. מה צריך להיות t כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?
- ג. מהו האורך AB במקרה זה?



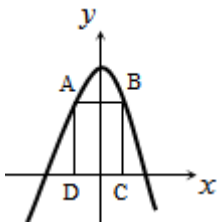
- 20) נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו- O ראשית הצירים.
- א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCO יהיה מקסימלי?
- ב. מהו שטח הטרפז המקסימלי?

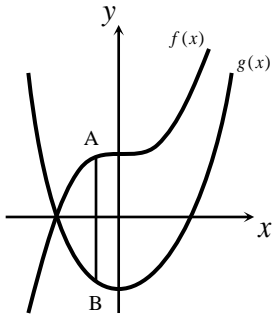
21) מעבירים ישר AB המקביל לציר ה- x כך שהנקודות A ו-B נמצאות

על גרף הפונקציה $f(x) = 48 - x^2$. מהנקודות A ו-B מורידים אנכים

לציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B בעבורם שטח המלבן ABCD יהיה מקסימלי.
- ב. בעבור שיעורי הנקודה B שמצאת מה יהיה השטח?





(22) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = x^3 + 8$ ו- $g(x) = 6x^2 - 24$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת

על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

א. מצא את שיעורי הנקודה A בתחום: $x_A < 4$ עבורם

הקטע AB יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

(23) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 + x + 7$ ו- $g(x) = 2x - 5$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B נמצאת על גרף

הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

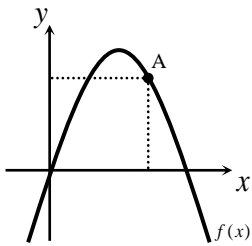
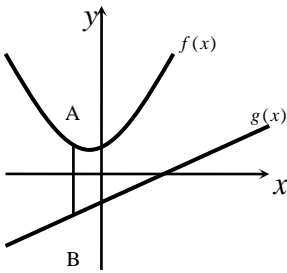
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את t בעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ג. בעבור הערך של t שמצאת בסעיף הקודם, מה

יהיה אורך הקטע AB?



(24) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 7x$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

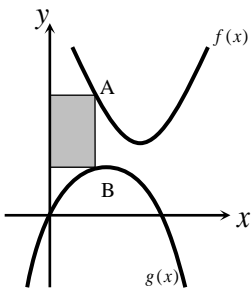
מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם

היקף המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם

היקף המלבן יהיה מינימלי?



(25) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 8x + 18 \text{ ו- } g(x) = -x^2 + 4x$$

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B

נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל

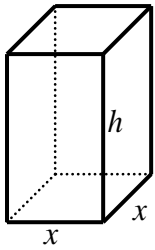
לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y

כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

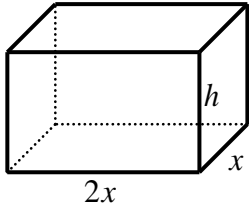
א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.

ב. מצא את ערכו של t בעבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.

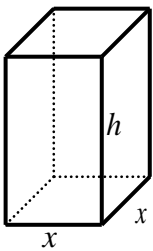
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



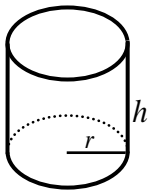
- (26)** נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים: $4x + h = 63$.
- הבע את h באמצעות x .
 - הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
 - מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- (27)** נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים: $x + h = 9$. מצא מה צריכות להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

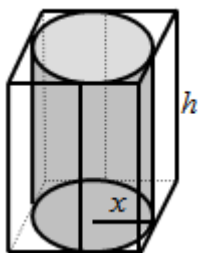


- (28)** נתונה תיבה שבסיסה הוא ריבוע. ידוע כי סכום כל המקצועות הוא 60 ס"מ. נסמן את אורך צלע הבסיס ב- x ואת גובה התיבה ב- h .
- הבע את h באמצעות x .
 - מצא את מידות התיבה עבורן נפחה הוא מקסימלי.
 - מה הוא הנפח המקסימלי של התיבה?



- (29)** נתון גליל שרדיוס בסיסו הוא r וגובהו h . ידוע כי סכום הרדיוס והגובה הוא 6 ס"מ. מצא את מידות רדיוס הגליל וגובהו בעבורם נפח הגליל יהיה מקסימלי.

- (30)** באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h . ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.



- הבע באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
- הבע באמצעות x את נפח הגליל.
 - הבע באמצעות x את נפח התיבה.
- מצא את x בעבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מינימלי.

תשובות סופיות:

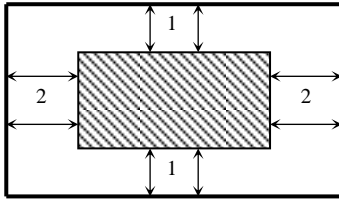
- (1 א. 15, 15, 15 ב. 10, 20, 15 ג. מקרה א' (2 א. $y=30$, $x=10$ ב. $M=90000$
- (3 המספרים: 2, 3, 6 (4 . 4, 10, 12 (5 א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $y=5$, $x=30$ ג. $M=22500$
- (6 א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א' (7 א. $x=3$ ב. $S=54$
- (8 14 ס"מ, 16 ס"מ (9 א. 4 ס"מ ב. $S=125$ (10 א. $x=10$ ב. $S=350$
- (11 א. 4 ס"מ ב. $S=56$ (12 א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. $S=128$ (13 א. $-2x^2+56x$
- ב. $x=14$ ג. $S=248$ (14 א. $x=8$ ב. $S_{Min}=112$
- (15 א. $6x^2-36x+160$ ב. 3 ס"מ על 12 ס"מ ג. $S=214$ (16 א. $x=6$
- (17 א. $A(-1,18)$ ב. 6 (18 א. $A(-\frac{1}{3}, 7\frac{26}{27})$ ב. $AB=14\frac{5}{27}$
- (19 א. $-2t^2+20t-3$ ב. $t=5$ ג. $AB=47$ (20 א. $A(2,32)$ ב. $S=128$
- (21 א. $B(4,32)$ ב. $S=256$ (22 א. $A(0,8)$ ב. $AB=32$
- (23 א. $B(t,2t-5)$ ב. $t=0.5$ ג. $AB=11.75$ (24 א. $A(4,12)$ ב. $A(0,0)$
- (25 א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$
- (26 א. $h=63-4x$ ב. $p=-14x^2+252x$ ג. $x=9$ (27 א. $x=6$
- (28 א. $h=15-2x$ ב. $5X5X5$ ג. $V=125$ (29 א. $h=2$, $r=4$
- (30 א. $2x$ ב. 1. $V=12\pi x^2-\pi x^3$ 2. $V=48x^2-4x^3$ ג. $x=8$

תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:

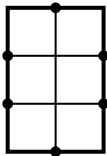
*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

- (1) נתונים שני מספרים x ו- y שמקיימים: $2x^2y = 27$.
- א. הבע את y באמצעות x .
- ב. מה צריכים להיות המספרים כדי שסכומם יהיה מינימלי?
- (2) א. מבין כל המשולשים שווים השוקיים ששטחם הוא 128 סמ"ר מצא את אורך הבסיס ואורך גובהו במשולש שבו סכום אורך הבסיס וגובהו הוא מינימלי.
- ב. מה יהיה הסכום במשולש זה?
- (3) מכפלת שלושה מספרים היא 27. ידוע כי המספר הראשון זהה לשני.
- נסמן ב- x את המספר הראשון.
- א. הבע באמצעות x את המספר השלישי.
- ב. מצא את שלושת המספרים שסכומם מינימלי.
- (4) נתונים שני מספרים חיוביים. ידוע כי המספר הראשון גדול פי 4 מהמספר השני.
- מחברים את המספר השני עם ההופכי של המספר הראשון.
- א. מצא מה יהיו המספרים בעבורם חיבור זה יהיה מינימלי.
- ב. מה הוא ערך החיבור?
- (5) נתונים שלושה מספרים חיוביים כך שהמספר השני גדול פי 3 מהמספר הראשון והמספר השלישי גדול פי 9 מהמספר הראשון. המספר הראשון יסומן ב- x .
- א. הבע באמצעות x את המספרים השני והשלישי.
- ב. הבע באמצעות x את הסכום בין המספר הראשון למספרים ההופכיים של המספרים השני והשלישי.
- ג. מצא את שלושת המספרים בעבורם הסכום שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.
- (6) נתונים שני מספרים. ידוע כי המספר הראשון גדול ב-14 מהמספר השני.
- סמן ב- x את המספר הקטן. מצא את המספרים בעבורם ההפרש בין המספר ההופכי של המספר הקטן למספר ההופכי של המספר הגדול הוא מקסימלי.
- (7) x ו- y הם שני מספרים חיוביים המקיימים: $xy + y = 16$.
- א. הבע את y באמצעות x .
- ב. מצא מה צריכים להיות x ו- y בעבורם הסכום: $x + y$ יהיה מינימלי.
- ג. מה יהיה הסכום במקרה זה?

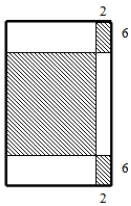
8) בבית הדפוס "עמירן" רוצים לעצב גלויה על גבי קרטון ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר. הנהלת החברה החליטה שיש להשאיר רווחים של 2 ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון ו-2 ס"מ מצידי הדף (ראה איור).



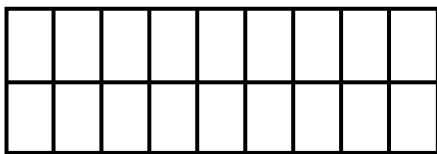
- א. מצא מה צריכות להיות מידות הקרטון כדי שהשטח של התמונה יהיה מקסימלי.
 ב. מה יהיה השטח במקרה זה?



9) בחלון מלבני ששטחו הכולל הוא 192 מ"ר בונים סורגי מתכת מ-7 מוטות: 3 מאונכים ו-4 אופקיים (ראה איור). מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים שיחסמו את חלון זה.



10) נתון מלבן ששטחו 1176 סמ"ר. מקצים בצדדי המלבן העליון והתחתון קטעים שאורכם 2 ס"מ ובצדדי המלבן הימניים קטעים שאורכם 6 ס"מ כך שנוצרים שישה מלבנים. מסמנים שלושה מלבנים כמתואר באיור. חשב מה צריכות להיות מידות המלבן כדי ששטח שטחי המלבנים המסומנים יהיה מקסימלי.

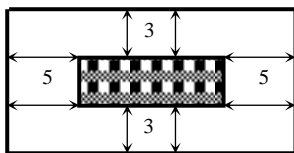


11) בתור תשתית לקיר עץ, קנו רפי וחבריו מוטות מתכת. מחיר המוטות נקבע בהתאם לאורכם.

החבורה העמידה 10 מוטות מתכת מאונכים ולאחר מכן תפסו אותם עם שלושה מוטות נוספים אופקים כמתואר בתרשים. אחד מחבריו של רפי מדד

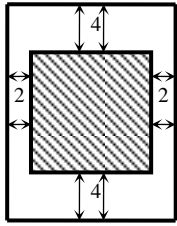
וגילה ששטח המלבן שנוצר הוא 120 מ"ר. רפי בתגובה שמח ואמר "איזה יופי! עכשיו אני יודע שהשקעתנו הייתה מינימלית". מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים בעבור השטח שמדד חברו של רפי.

12) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ". תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצידי הקרטון (ראה איור). יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה:

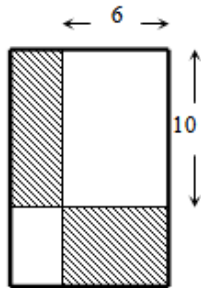


"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר. מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

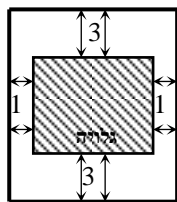
- א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.
 ב. מה תהיינה מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?



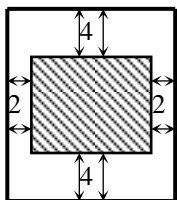
13 לרותי צבעי מים ומשטח עץ ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר. רותי רוצה לצייר מלבן במרכז המשטח כך שמרחקו מצידי המשטח 2 ס"מ ומהקצוות העליון והתחתון של המשטח - 4 ס"מ. רותי ראתה שהמשטח שברשותה לא עומד בתנאים אלו ולכן החליטה לקנות משטח חדש. כשהגיעה רותי לנגר הוא אמר לה שמחיר העץ נקבע לפי מידותיו. איזה מידות רותי צריכה לבקש כדי לקבל משטח שבו היא תוכל לצייר מלבן בעל שטח מקסימלי לפי דרישותיה?



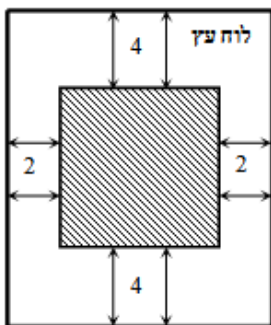
14 נתון מלבן ששטחו הוא 135 סמ"ר. מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן ומקצים עליהם קטעים באורכים של 6 ו-10 ס"מ (ראה איור). על ידי הקצאת קטעים אלו נוצרים מלבנים נוספים המסומנים באיור. א. מצא מה צריכות להיות מידות המלבן הנתון בעבורם סכום שטחי מלבנים אלו יהיה מינימלי. ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



15 לדני גלויה מלבנית במידות לא ידועות ששטחה הכולל הוא 12 סמ"ר. דני רוצה לקנות קרטון כדי להדביק את הגלויה במרכזו. כשהלך דני לחנות כלי מלאכה אמר לו המוכר שניתן לבחור קרטון על פי שטח. דני הדגיש למוכר שהוא רוצה שהגלויה תהיה מודבקת במרכז הקרטון כך שמרחקה מצידי הקרטון יהיה 1 ס"מ בלבד ומרחקה מהקצוות העליון והתחתון יהיה 3 ס"מ. המוכר נתן לדני קרטון בעל שטח מינימלי בעבור הגלויה שלו. א. מה הן מידות הגלויה בעבורן שטח הקרטון הוא מינימלי? ב. מה הוא שטח הקרטון שנתן המוכר לדני?

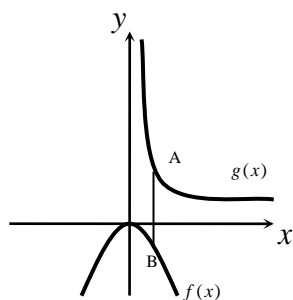


16 לרבקה קרטון מלבני ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר. רבקה רוצה לחתוך מלבן במרכז הקרטון כדי שתוכל להשתמש בשארית הקרטון כמסגרת לתמונה. כדי שהקרטון לא יקרע רבקה צריכה לשמור על רווחים של 2 ס"מ מצידי הקרטון ו-4 ס"מ מקצוות העליון והתחתון. מה הן מידות הקרטון בעבורן שטח המלבן שרבקה תחתוך יהיה מקסימלי?



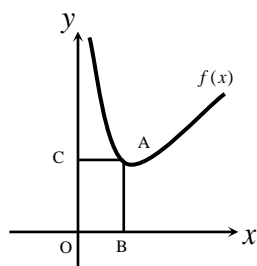
17 אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון - 4 ס"מ. כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר בעבור המקום לתמונה (השטח המסומן). א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין בעבור המשימה? ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה בעבור המידות שאלינה בחרה?

18 נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{x^2}{16}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$



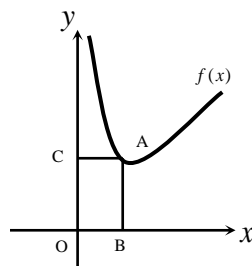
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
- א. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.
- ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

19 הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x) = x + \frac{16}{x^3}$ ברביע הראשון.



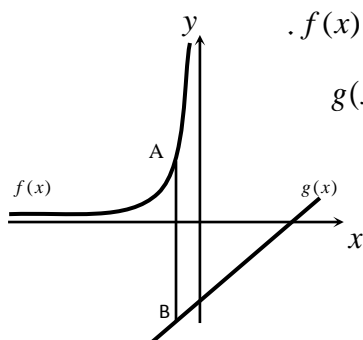
- מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כפי שמתואר באיור כך שנוצר המלבן ABOC. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.

20 באיור שלפניך נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{8}{x}$ ברביע הראשון.



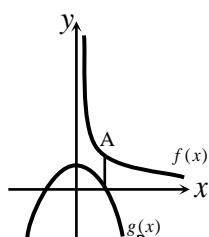
- מנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך שמתקבל מלבן ABOC.
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן ABOC יהיה מינימלי.
- ב. מה הוא ההיקף המינימלי?

21 הגרפים שלפניך מתארים את הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$, $g(x) = x - 3$

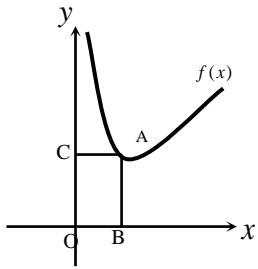


- מסמנים על גרף הפונקציה $f(x)$ נקודה A ועל גרף הפונקציה $g(x)$ נקודה B כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.
- ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

22 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{x}$ ו- $g(x) = -4x^2 + 1$



- מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה בעל אורך מינימלי.
- ב. מה יהיה האורך במקרה זה והיכן תמוקם הנקודה B?



(23) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x + \frac{16}{x^2}$ ברביע הראשון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים שיוצרים את המלבן ABCO (O-ראשית הצירים).

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

א. בטא באמצעות t את שיעור ה- y של הנקודה A ואת שטח המלבן ABCO.

ב. מצא מה צריך להיות ערכו של t בעבורו שטח המלבן יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

(24) באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x) = x + \frac{8}{x^2} + 3$ ברביע הראשון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

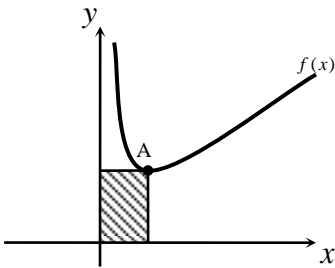
מנקודה זו מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המקווקו).

הנקודה A תסומן ב- $A\left(t, t + \frac{8}{t^2} + 3\right)$.

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את ערכו של t בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.

ג. בעבור הערך של t שמצאת בסעיף הקודם, מה יהיה שטחו של המלבן?



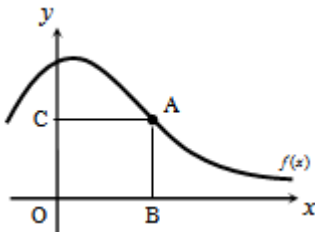
(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x^2+0.5}$ בתחום: $x \geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים

לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.

מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם

שטח המלבן יהיה מקסימלי.



(26) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{4x-5}{4(x-2)}$ והישר: $y = \frac{x}{4}$.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

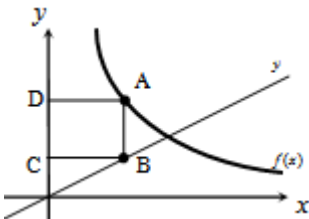
מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y כך שנוצר המלבן ABCD.

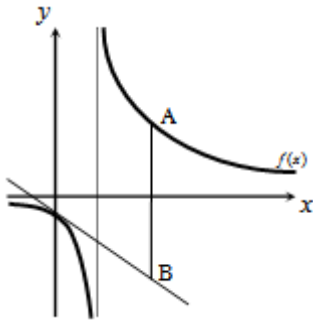
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

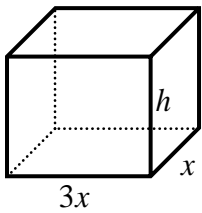
ב. מצא את t עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

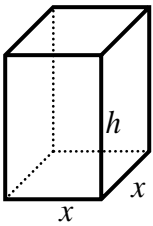




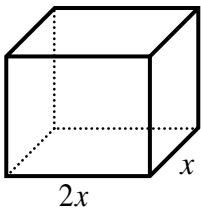
- (27)** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+6}{x-3}$ ברביע הראשון. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- א. מצא את משוואת המשיק.
 מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
- ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם הקטע AB הוא
 ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



- (28)** נתונה תיבה שבסיסה מלבן ונפחה הוא $V = 288$. ידוע כי אורך הבסיס גדול פי 3 מרוחבו (ראה איור). מסמנים ב- x את מקצוע המלבן הקטנה וב- h את גובה התיבה.
- א. הבע את h באמצעות x .
 ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
 ג. מצא את מידות התיבה בעבורם שטח הפנים של התיבה יהיה מינימלי.

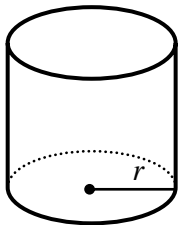


- (29)** נפח תיבה שבסיסה ריבוע הוא 729 סמ"ר. נסמן ב- x את אורך מקצוע הבסיס וב- h את גובה התיבה (ראה איור).
- א. הבע את h באמצעות x .
 ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
 ג. מה צריך להיות x בעבורו שטח הפנים של התיבה יהיה מינימלי?

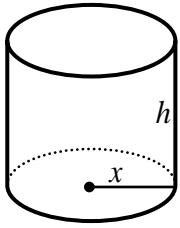


- (30)** נפח קופסה בצורת תיבה הפתוחה מלמעלה הוא 36 סמ"ר. בסיס הקופסה הוא מלבן שרוחבו גדול פי 2 מאורכו.
- א. מצא את מידות בסיס הקופסה בעבורן שטח הפנים שלה יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה גובה הקופסה במקרה זה?

- (31)** נתון גליל שרדיוסו r וגובהו h . ידוע כי רדיוס הגליל וגובהו מקיימים: $r^2 \cdot h = 128$.



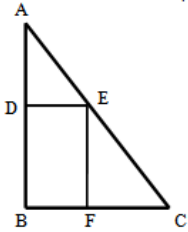
- א. 1. הבע באמצעות r את גובה הגליל.
 2. הבע באמצעות r את שטח הפנים של הגליל.
 ב. מצא את אורך הרדיוס בעבורו שטח הפנים של הגליל יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה נפח הגליל במקרה זה?



32 הנפח של קופסת עפרונות בצורת גליל הוא $V = 512\pi$.
ידוע כי הקופסה פתוחה מלמעלה.

רדיוס הקופסה יסומן ב- x וגובה הקופסה יסומן ב- h .

- הבע באמצעות x את גובה הקופסה ואת שטח הפנים שלה.
- מצא את רדיוס הקופסה בעבורו שטח הפנים שלה יהיה מינימלי.
- מה יהיה שטח הפנים של הקופסה במקרה זה?



33 במשולש הישר זווית ABC חוסמים מלבן BDEF כמתואר באיור.

מידות המלבן הן: $DE = 6$, $EF = 12$.

מסמנים את אורך הצלע AB ב- x .

- הבע באמצעות x את אורך הצלע BC.
- מצא את אורכי הניצבים AB ו-BC של המשולש בעל השטח המינימלי?

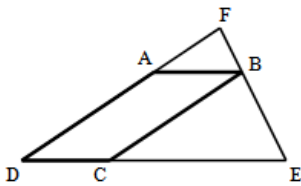
34 המרובע ABCD הוא מקבילית. מהקדקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD. ידוע כי מידות המקבילית הן: $AD = 8$, $AB = 2$.

מסמנים את אורך הצלע DE ב- x .

א. הבע באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצא את x בעבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?



35 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$ ברביע הראשון.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

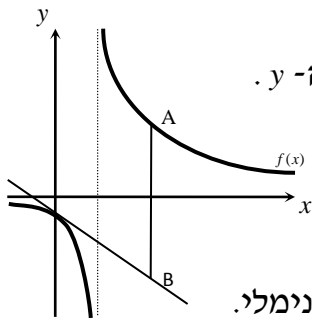
א. מצא את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ו- B על גרף

המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

ב. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

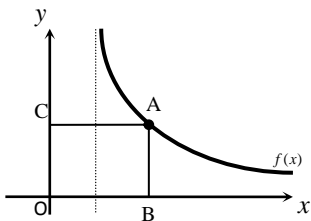


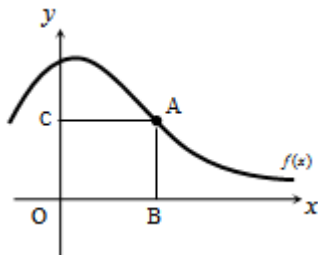
36 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$ ברביע הראשון.

מהנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך

שנוצר המלבן ABOC. מצא מה צריכים להיות שיעורי

הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.





(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x \geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABOC כמתואר באיור.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

(38) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y = \frac{9x}{25}$.

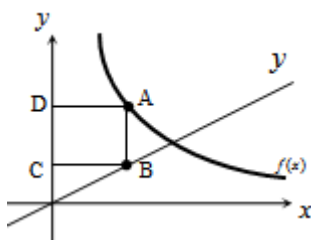
הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה-y כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את t בעבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?



תשובות סופיות:

- (1) א. $y = \frac{27}{2x^2}$. ב. $x=3, y=1.5$. (2) א. 16, 16 . ב. 32 . (3) א. $\frac{27}{x^2}$. ב. 3, 3, 3 .
- (4) א. 2, $\frac{1}{2}$. ב. 1 . (5) א. 9x, 3x . ב. $S = x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x}$. ג. 6, 2, $\frac{2}{3}$. (6) א. 7, -7 .
- (7) א. $y = \frac{16}{x+1}$. ב. $x=3, y=4$. ג. $S=7$. (8) א. 11 ס"מ ו-22 ס"מ . ב. $S=162$.
- (9) 12 ו-16 מטרים . (10) 14 ס"מ ו-84 ס"מ . (11) 6 ו-20 מטרים .
- (12) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ . ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ . (13) 9 ס"מ על 18 ס"מ .
- (14) א. 15 ס"מ על 9 ס"מ . ב. $S=75$. (15) א. 2 ס"מ על 6 ס"מ . ב. $S=48$.
- (16) 9 ס"מ על 18 ס"מ . (17) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ . ב. $S=98$.
- (18) א. $A(2,0.25)$. ב. $AB = \frac{1}{2}$. (19) $A(2,4)$. (20) א. $A(2,6)$. ב. $p=16$.
- (21) א. $A(-2,2)$. ב. $AB=7$. (22) א. $A(0.5,2)$. ב. 2, הנקודה B ממוקמת על ציר ה-x .
- (23) א. $t + \frac{16}{t^2}$. ב. $S = t^2 + \frac{16}{t}$. ג. $t=2$. ד. $S=12$. (24) א. $P = 4t + \frac{16}{t^2} + 6$. ב. $t=2$. ג. $S=14$.
- (25) א. $A(1,2)$. (26) א. $P = \frac{3t^2 - 2t - 5}{2(t-2)}$. ב. $t=3$. ג. 8 ס"מ .
- (27) א. $y = -x - 2$. ב. $A(6,4)$. ג. 12 ס"מ .
- (28) א. $h = \frac{96}{x^2}$. ב. $S = 6x^2 + \frac{768}{x}$. ג. $x=4$. ד. 4, 6, 12 .
- (29) א. $h = \frac{729}{x^2}$. ב. $S = 2x^2 + \frac{2916}{x}$. ג. $x=9$. (30) א. 3, 6 . ב. $h=2$.
- (31) א. 1. $h = \frac{128}{r^2}$. 2. $S = \frac{256\pi}{r} + 2\pi r^2$. ב. $r=4$. ג. $V=128\pi$.
- (32) א. $h = \frac{512}{x^2}$, $S = \frac{1024\pi}{x} + \pi x^2$. ב. $x=8$. ג. $S=192\pi$.
- (33) א. $BC = \frac{6x}{x-12}$. ב. 12 ס"מ ו-24 ס"מ . (34) א. $DF = \frac{8x}{x-2}$.
- ב. מתקבלת הפונקציה: $L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$. הפתרון הוא: $x=6$. ג. $L=18$.
- (35) א. $y = -3x - 5$. ב. $A(4,7)$. ג. $AB=24$. (36) $A(10,2.5)$. (37) א. $A(2,2)$. ב. בקצה התחום שטח המלבן יהיה אפס ולכן: $A(0,0)$.
- (38) א. $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1}$. ב. $t = 4\frac{3}{4}$. ג. $P=12.88$.

תרגילים העוסקים בפונקצית שורש:

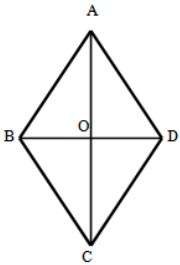
***הערה: לשאלות בחוץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.**

(1) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + y = 15$.

- א. הבע את y באמצעות x .
- ב. מצא את x ו- y בעבורם סכום השורשים שלהם יהיה מקסימלי.

(2) נתונים שני מספרים חיוביים x ו- y המקיימים: $3x + y = 36$.

- א. הבע את y באמצעות x .
- ב. מצא את המספרים בעבורם סכום השורשים שלהם מקסימלי.
- ג. מה יהיה סכום השורשים שלהם במקרה זה?



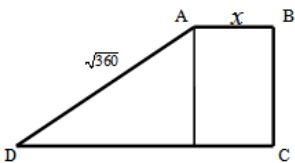
(3) נתון המעוין ABCD. ידוע כי סכום אורכי האלכסונים של המעוין

הוא 80 ס"מ. הנקודה O היא נקודת מפגש האלכסונים במעוין.

הקטע AO יסומן ב- x .

- א. הבע את אורכי האלכסונים באמצעות x .
- ב. מה צריך להיות ערכו של x בעבורו אורך צלע המעוין היא מינימלית.

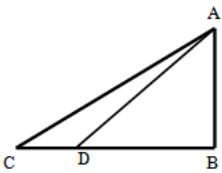
(4) באיור שלפניך מתואר טרפז ישר זווית ABCD המחולק למלבן ומשולש ישר זווית.



גובה הטרפז BC גדול פי 3 מהבסיס הקטן AB ואורך השוק

הארוכה AD הוא $\sqrt{360}$. הבסיס הקטן יסומן ב- x .

- א. הבע באמצעות x את אורך הבסיס הגדול DC.
- ב. מצא את ערכו של x בעבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.



(5) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית. הנקודה D נמצאת על

הניצב BC כך שהקטע BD גדול פי 2 מהקטע CD.

ידוע כי סכום הניצבים הוא 13 ס"מ.

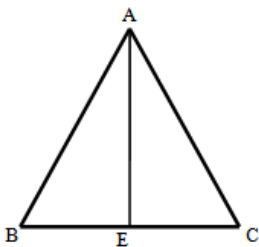
- א. מצא את אורכי הניצבים בעבורם אורך הקטע AD יהיה מינימלי.
- ב. מה יהיה אורך היתר AC במקרה זה?

(6) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).

הקטע AE הוא גובה לבסיס BC.

ידוע כי סכום אורכי הבסיס והגובה הוא 20 ס"מ.

הגובה AE יסומן ב- x .



א. הבע באמצעות x את היקף המשולש ABC.

- ב. מצא את x בעבורו ההיקף שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.
- ג. בעבור הערך של x שמצאת בסעיף הקודם מה הוא השטח של המשולש?

7) המרובע ABCD הוא ריבוע. הנקודה E נמצאת על הצלע AD של הריבוע

והנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD. מעבירים את הקטעים BE

ו-BG ומוסיפים את הנקודה F, כך שהמרובע BEFG הוא מלבן

כמתואר באיור. הקטע AG גדול פי 2 מהצלע BE של

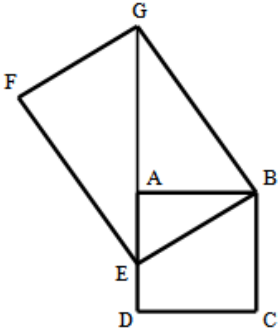
המלבן וסכום הצלע BE ואלכסון המלבן GE הוא 16 ס"מ.

הקטע BE יסומן ב- x .

א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE.

ב. מצא את x בעבורו אורך צלע הריבוע תהיה מקסימלית.

(היעזר במשולש ABE).



8) המרובע ABCD הוא מקבילית. הנקודה O היא פגישת האלכסונים AC ו-BD.

ידוע כי האלכסון BD מאונך לצלעות BC ו-AD של המקבילית.

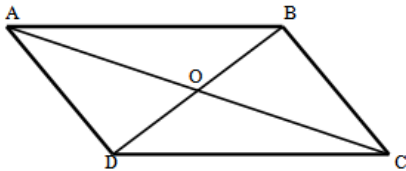
כמו כן האלכסון AC גדול ב-27 ס"מ מהצלע BC.

סמן את הצלע BC ב- x וענה על השאלות הבאות:

א. הבע באמצעות x את אורך הקטע CO.

ב. הבע באמצעות x את אורך הקטע BO.

ג. מצא בעבור איזה ערך של x יהיה אורך הקטע BO מקסימלי.



9) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

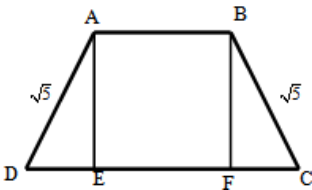
מורידים את הגבהים לטרפז AE ו-BF כך

שהמרובע ABFE הוא ריבוע.

ידוע כי אורך שוק בטרפז הוא $\sqrt{5}$ ס"מ.

מצא מה צריך להיות אורך הבסיס הקטן AB

בעבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.



10) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x + 3$

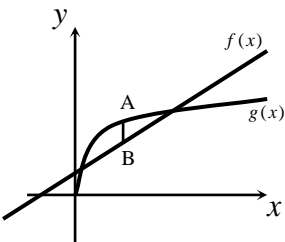
ו- $g(x) = 4\sqrt{x}$. מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $g(x)$

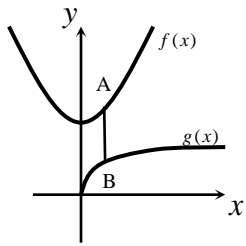
ונקודה B על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם אורך

הקטע AB יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?





11 נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2x^2 + 30$ ו- $g(x) = 8\sqrt{x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

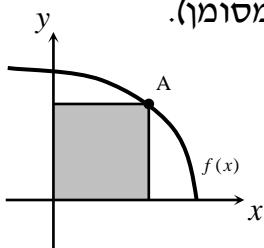
א. הבע באמצעות t את:

1. שיעורי הנקודה B.

2. אורך הקטע AB.

ב. מצא את t בעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

12 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{4-x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון. מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המסומן).



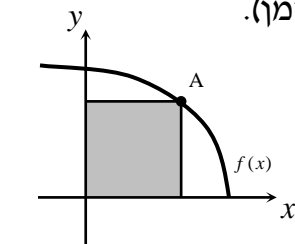
מסמנים את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את t בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?

13 נתונה הפונקציה: $f(x) = 4\sqrt{5-x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון. מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המסומן).

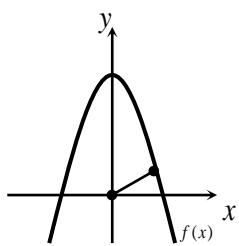


מסמנים את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את t בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.

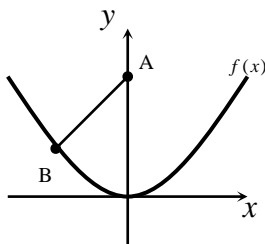
ג. מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?



14 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 6\frac{3}{4} - x^2$.

א. מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה מראשית הצירים הוא מינימלי.

ב. האם קיימת נקודה על גרף הפונקציה שמרחקה מראשית הצירים הוא מקסימלי? אם כן היכן היא ממוקמת?



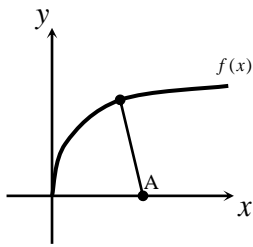
15 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

הנקודה A(0, 6) נמצאת על ציר ה- y והנקודה B היא

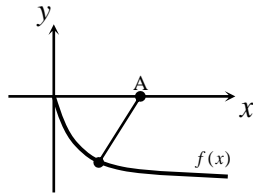
נקודה כלשהי על גרף הפונקציה ברביע השני.

מצא את שיעורי הנקודה B בעבורם המרחק

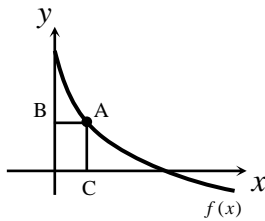
בין A ל-B יהיה מינימלי.



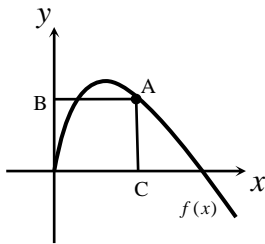
16 נתון גרף הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x}$. מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה מהנקודה $A(6,0)$ מינימלי.



17 נתון גרף הפונקציה: $f(x) = -3\sqrt{x}$. מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הרביעי שמרחקה מהנקודה $A(5.5,0)$ הוא מינימלי.



18 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים $AC+AB$.
 ב. מצא את ערכו של t בעבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.



19 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים AB ו-AC. כמתואר באיור. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם סכום הקטעים $AB+AC$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות:

א (1) $y = 15 - x$ ב. $x = y = 7.5$ א (2) $y = 36 - 3x$ ב. $y = 27$, $x = 3$ ג. $4\sqrt{3} \sim 6.92$

א (3) $AC = 2x$, $BD = 80 - 2x$ ב. $x = 20$

א (4) $DC = x + 3\sqrt{40 - x^2}$ ב. $x = 2$ א (5) $AB = 4$, $BC = 9$ ב. $AC = \sqrt{97}$

א (6) $P = 2\sqrt{1.25x^2 - 10x + 100} + 20 - x$ ב. $x = 8$ ג. 48

א (7) $AE = 16 - 3x$ ב. $x = 6$

א (8) $CO = 0.5x + 13.5$ ב. $BO = \sqrt{-\frac{3x^2}{4} + \frac{27x}{2} + 182\frac{1}{4}}$ ג. $x = 9$

א (9) $AB = 1$ ב. $A(4, 8)$ א (10) $AB = 1$

א (11) 1. $B(t, 8\sqrt{t})$ 2. $AB = 2t^2 - 8\sqrt{t} + 30$ ב. $t = 1$

א (12) $P = 2t + 4\sqrt{4 - t}$ ב. $t = 3$ ג. $P = 10$

א (13) $P = 2t + 8\sqrt{5 - t}$ ב. $t = 1$ ג. $P = 18$

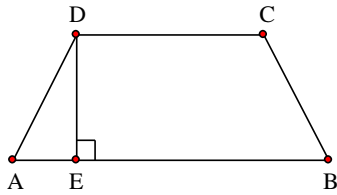
א (14) $(2.5, 0.5)$ ב. כן, הנקודה $(0, 6.75)$ והיא נמצאת על ציר ה- y .

א (15) $B(-4, 4)$ א (16) $(4, 4)$ א (17) $(1, -3)$

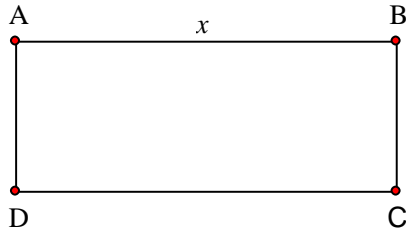
א (18) $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$ ב. $t = 2.25$ א (19) $(16, 0)$

תרגול מבגרויות של 3 יחידות:

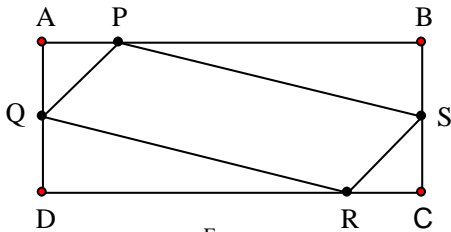
בעיות בהנדסת המישור:



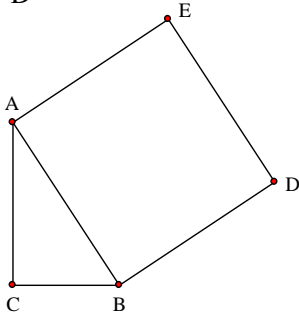
- 1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) אורך השוק הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ. DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הקטע AE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



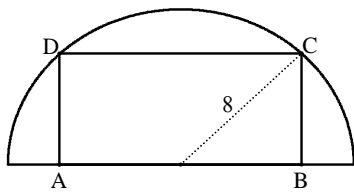
- 2) נתון מלבן ABCD. נסמן ב- x את אחת מצלעות המלבן.
 א. אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות x את שטח המלבן.
 ב. אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכים להיות אורכי הצלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי (הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).



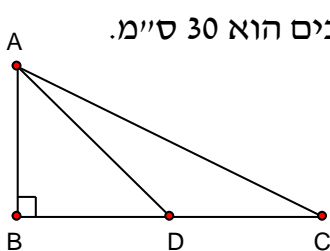
- 3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$ ס"מ, $AB = CD = 10$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$ (ראה ציור). מה צריך להיות ערכו של $f(x)$ כדי ששטח המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?



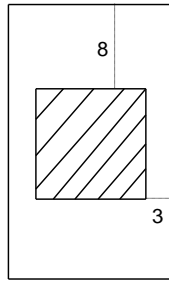
- 4) במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים, כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.



- 5) בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

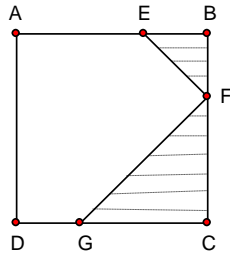


- 6) במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\sphericalangle B = 90^\circ$), סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ. AD הוא תיכון לניצב BC (ראה ציור). חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.

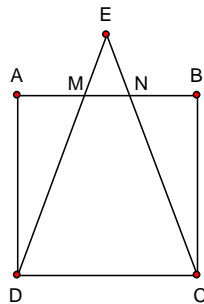


7) בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר. רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ, ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ. מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המקווקו).

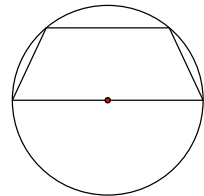
8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על הצלעות AB, BC, DC בהתאמה, כך ש- $BE = BF$, $CF = CG$ (ראה ציור). נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.



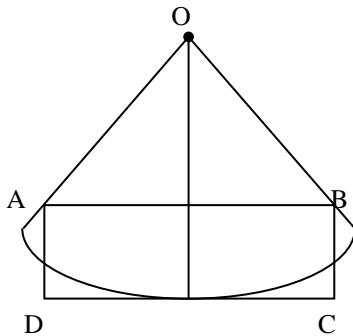
א. סמן ב- x את BF ואת BE, והבע באמצעות x את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG (השטח המקווקו).
 ב. 1. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.
 2. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.



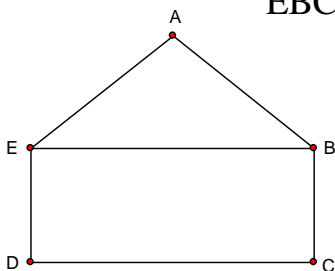
9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ. E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שוו"ש ($ED = EC$). שוקי המשולש חותכים את הצלע AB בנקודות M ו-N. מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים AMD, EMC, BNC יהיה מינימלי.



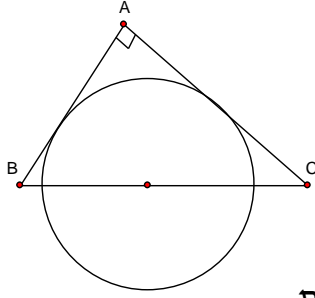
10) נתון מעגל שרדיוסו R. במעגל זה חסום טרפז שוו"ש, כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו מקסימלי.



11) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ. בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקודקודים A ו-B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה. מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.

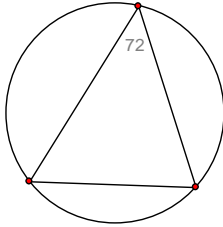


12) ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE וממלבן EBCD (ראה ציור). נתון: $BC = 2$ ס"מ, $AB = AE = 4$ ס"מ. מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.

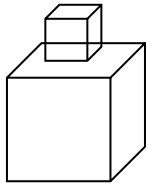


13) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור. מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?

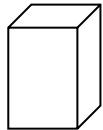
14) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של הזווית בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$. מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.



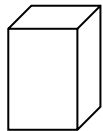
בעיות בהנדסת המרחב:



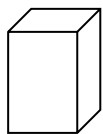
15) גובהו של "מגדל" הבנוי משתי קוביות (לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע של הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי?



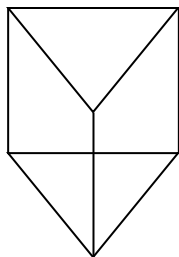
16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו x ס"מ, כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ. מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



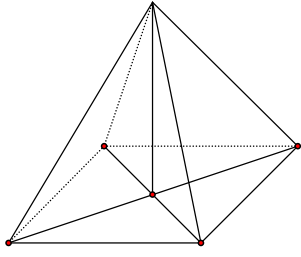
17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.



18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?

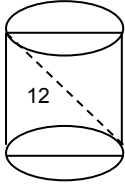


19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים:
 א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.
 ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

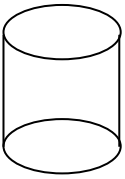


20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



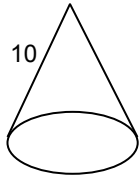
22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק. המיכל עשוי כולו מפח.

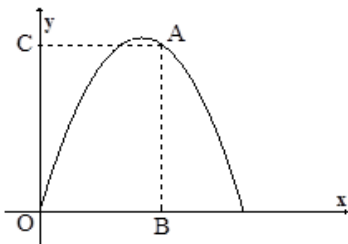
הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס

$$\text{הבסיס הוא } \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ מטר.}$$



24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

בעיות בפונקציות וגרפים:

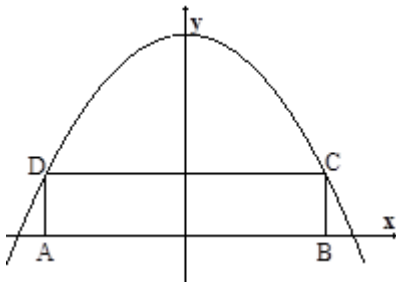


25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה $y = -x^2 + 5x$,

מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן ABCO.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?

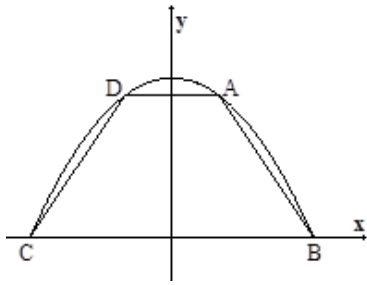
ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



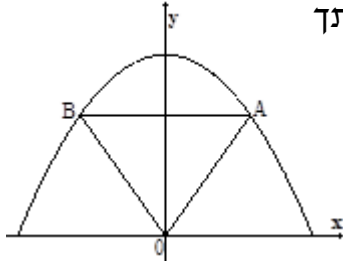
26) בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך

שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).

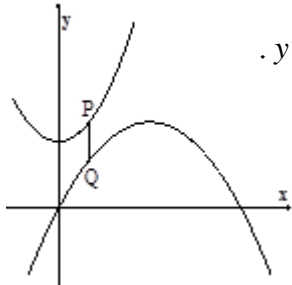
מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



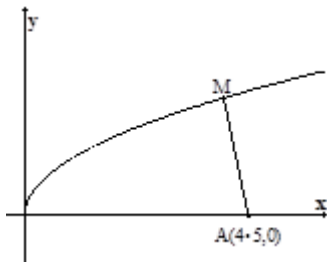
27 טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$ לבין ציר ה- x (ראה ציור).
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?
 ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



28 נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$. ישר המקביל לציר ה- x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).
 מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.
 א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?
 ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

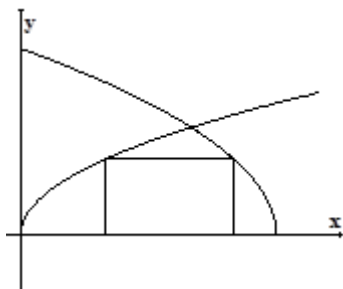


29 נתונים הגרפים של שתי פרבולות: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 7$.
 קו מקביל לציר ה- y חותך את שתי הפרבולות בנקודות P ו-Q (ראה ציור).
 מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.

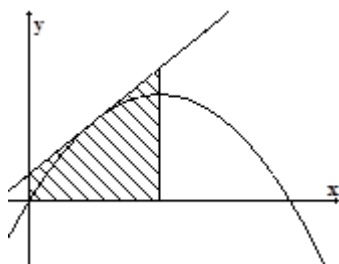


30 נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$. על ציר ה- x נתונה הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).
 מצא על גרף הפונקציה נקודה M, כך שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי.

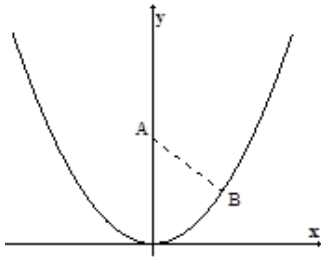
31 מצא על הישר $f(x) = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(0, 1)$.



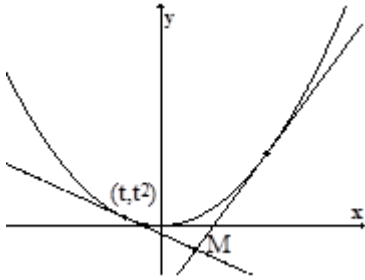
32 בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = \sqrt{36 - 6x}$.
 מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- x , כמתואר בציור.
 מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



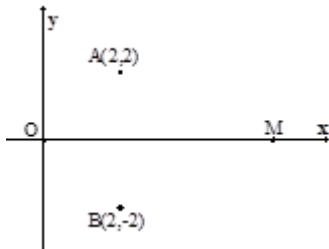
33 דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ יהיה מקסימלי?
 (השטח המקווקו שבציור) יהיה מינימלי?



- 34** נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי $a > 0.5$ (ראה ציור).
 א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B, שעבורה המרחק AB הוא מינימלי.
 ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי הוא 2.



- 35** נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה. המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).
 א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t .
 ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה M עם קודקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



- 36** במערכת צירים נתונות הנקודות $A(2, 2)$ ו- $B(2, -2)$. ראשית הצירים היא בנקודה O. M היא נקודה על ציר ה- x בתחום $x > 0$. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה M, כדי שהסכום: $OM + MA + MB$ יהיה מינימלי?

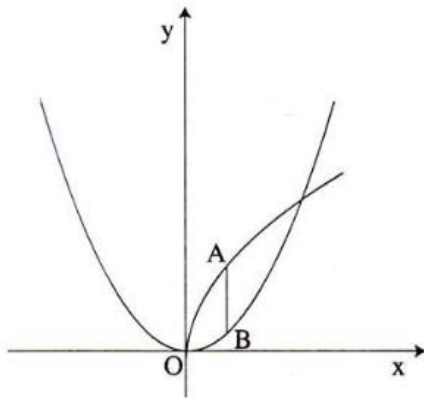
תשובות סופיות:

- (1) $AE = 1.7_{cm}$
- (2) א. $x(30-x)$. ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$
- (3) $x = 3.75_{cm}$ (4) $AC = BC = 4_{cm}$
- (5) $AB = 2\sqrt{32}_{cm}$ (6) $AB = 6$ ס"מ , $BC = 24$ ס"מ
- (7) אורך: 40 ס"מ רוחב: 15 ס"מ
- (8) א. $S = x^2 - 6x + 18$. ב. 1. $x = 3$. ב. 2. 9 סמ"ר
- (9) $AM = 5/\sqrt{2}$ (10) בסיס קטן $R =$
- (11) $4\sqrt{5}_{cm}$ (12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר. (13) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
- (14) $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}$ (15) 4 ס"מ. (16) 4 ס"מ.
- (17) צלע הבסיס: 5 ס"מ. גובה: 2.5 ס"מ. (18) 120 ס"מ.
- (19) א. $x = \frac{1}{12}a, y = \frac{1}{6}a$. ב. $x = y = \frac{1}{9}a$
- (20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$ (21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק.
- (22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ. (24) 403.1 סמ"ק.
- (25) א. $A(3,6)$. ב. $(5,0), (0,0)$
- (26) $CD = 2\sqrt{3}$ (27) א. $A(1,8)$. ב. 32.
- (28) א. $AB = 4$. ב. $S_{\Delta AOB} = 16$
- (29) $PQ = 4$ (30) $M(4,2)$ (31) $(1.5, 0.5)$
- (32) 8 (33) $(0.5, 0.75)$ (34) א. $B(\sqrt{(2a-1)/2}, (2a-1)/2)$. ב. 4.25
- (35) א. $y = 2t \cdot x - t^2$. ב. $t = -3/37$ (36) $M(0.845, 0)$

תרגול מבגרויות:

(1) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{8}x^2$

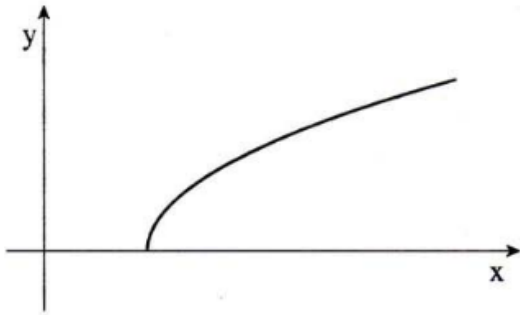
$g(x) = \sqrt{2x}$



הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך ש-AB מקביל לציר ה-y, והנקודות נמצאות בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים של הפונקציות (ראה ציור).

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B שעבורן אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

ב. עבור האורך המקסימלי של הקטע AB, חשב את שטח המשולש ABO (O - ראשית הציירים).



(2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-5}$

הנקודה B היא הקדקוד של פרבולה

שמשוואתה $y = x^2 - 16x + 64$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$,

שמרחקה מהנקודה B הוא מינימלי.

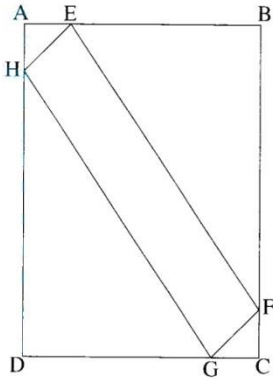
(3) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא על גרף הפונקציה $f(x)$ נקודה שהמכפלה של שיעור ה-x שלה בשיעור ה-y שלה היא מינימלית.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

היעזר בתשובותיך לסעיף א ולסעיף ב, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



- 4) במלבן ABCD אורך הצלע AD הוא 10 ס"מ, ואורך הצלע AB הוא a ס"מ. הנקודות E, F, G, H נמצאות על צלעות המלבן כך ש- $AE = AH = CF = CG = x$ (ראה ציור) א. (1) הבע באמצעות a , ו- x את סכום השטחים של המשולש BEF והמשולש AEH. (2) הבע באמצעות a את הערך של x שעבורו שטח המרובע EFGH הוא מקסימלי. ב. כאשר שטח המרובע EFGH הוא מקסימלי, אורך הקטע DH הוא 6 ס"מ. מצא את הערך של a .

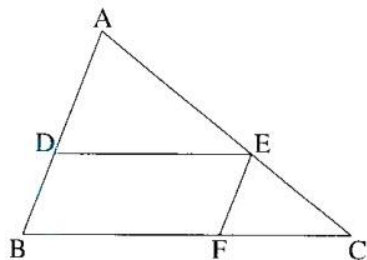
- 5) במשולש ישר-זווית סכום הניצבים הוא 20 ס"מ. א. מבין כל המשולשים המקיימים תנאי זה, מצא את אורכי הניצבים במשולש שבו אורך התיכון ליתר הוא מינימלי. ב. מצא את אורכי התיכונים לניצבים במשולש שאת הניצבים שלו מצאת בסעיף א.

- 6) משאית נוסעת 100 ק"מ במהירות קבועה של x קמ"ש. א. הבע באמצעות x את מספר שעות הנסיעה של המשאית.

עלות הנסיעה של המשאית היא פונקציה של המהירות שלה. העלות של שעת נסיעה אחת במהירות x היא $\left(16 + \frac{x^2}{400}\right)$ שקלים.

- ב. (1) מה צריך להיות הערך של x כדי שעלות הנסיעה של המשאית תהיה מינימלית. (2) חשב את העלות המינימלית של הנסיעה.

- 7) נתונה מקבילית DEFB שאורכי צלעותיה הם (ס"מ): $DE = 90, BD = 80$.

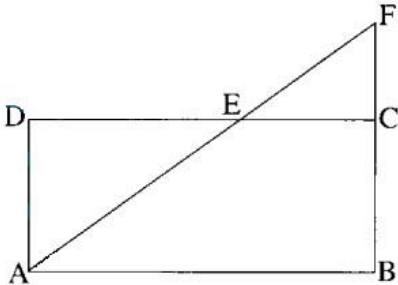


- נקודה A נמצאת על המשך הצלע BD ונקודה C נמצאת על המשך הצלע BF כך שהישר AC עובר דרך קודקוד E (ראה ציור). א. נסמן $AD = x$ היעזר בדמיון משולשים, והבע באמצעות x את אורך הקטע FC.

- ב. מצא את x שעבורו סכום הצלעות AB ו-BC הוא מינימלי. ג. מצא את הסכום המינימלי של הצלעות AB ו-BC.

8) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. מבין כל המלבנים ששטחם k סמ"ר, הבע באמצעות k את צלעות המלבן שהיקפו מינימלי.
 ב. נתון כי קוטר המעגל החוסם את המלבן שהיקפו מינימלי, הוא 8 ס"מ. מצא את הערך של k .



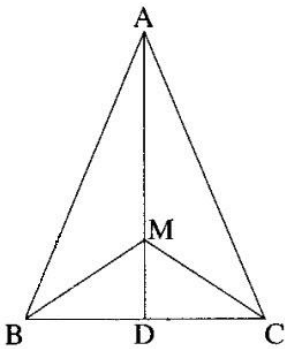
9) נתון מלבן ABCD שאורכי צלעותיו הם :

$$AB = 9 \text{ ס"מ}, AD = 4 \text{ ס"מ}$$

הנקודה E נמצאת על הצלע CD (בין C ל-D) ההמשך של AE חותך את המשך הצלע BC בנקודה F (ראה ציור).

א. הוכח $\triangle ADE \sim \triangle FCE$

- ב. סמן $DE = x$, ומצא מה צריך להיות האורך של DE כדי שהסכום השטחים של המשולשים ADE ו-FCE יהיה מינימלי. בתשובתך תוכל להשאיר שורש.



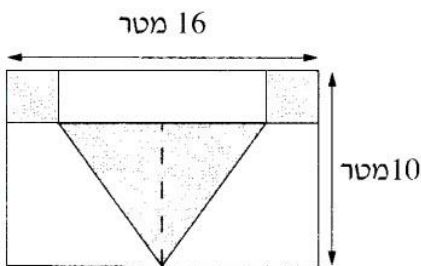
10) נתון משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$)

שבו אורך הגובה AD לבסיס BC הוא 12 ס"מ, ואורך הבסיס BC הוא 10 ס"מ. M היא נקודה כלשהי על הגובה AD. נסמן $MD = x$.

א. מצא עבור איזה ערך של x

סכום הקטעים $AM + MB + MC$ הוא מינימלי. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

- ב. חשב את גודל הזווית BMC עבור הערך של x שמצאת בסעיף א.



11) אורך של קיר בצורת מלבן הוא 16 מטר,

והגובה של הקיר הוא 10 מטר.

רוצים לצפות בקרמיקה חלק מהקיר. החלק שרוצים לצפות כולל:

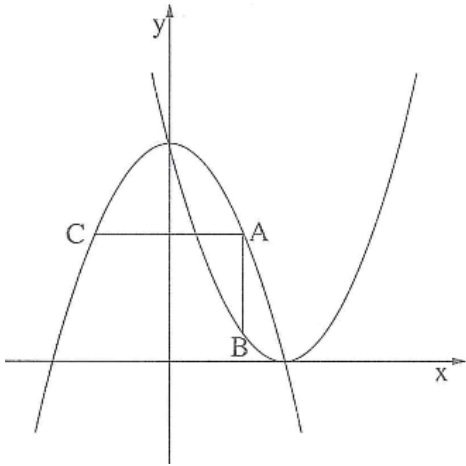
- שני ריבועים זהים בפינות המלבן.
- משולש שווה שוקיים שבסיסו מקביל לצלע המלבן (השטחים האפורים בציור).

סמן ב- x את האורך של צלע הריבוע, וענה על סעיפים א-ג.

א. הבע באמצעות x את הגובה לבסיס המשולש שווה-שוקיים.

ב. מה צריך להיות x , כדי שסכום השטחים שרוצים לצפות בקרמיקה יהיה מינימלי?

ג. עבור ה- x שמצאת בסעיף ב, חשב כמה אחוזים משטח הקיר מהווה החלק שרוצים לצפות בקרמיקה.



12) בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = -x^2 + 9 \quad \text{ו-} \quad g(x) = (x-3)^2 - 1$$

נקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה $f(x)$. מנקודה A העבירו שני ישרים:

ישר אחד, המקביל לציר ה-y וחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B, וישר אחר,

המקביל לציר ה-x וחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C. (ראה ציור).

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.

א. הבע באמצעות t את השיעורים של הנקודות A, B ו-C.

ב. מצא את הערך של t שעבורו שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $A(1.58, 1.78)$, $B(1.58, 0.314)$, $AB = 1.466$ יח"א, $S_{ABO} = 1.164$ יח"ש"ב.

2) $(7, 3)$.

3) א. $x > 1$ ב. $(2, 1)$ ג. סקיצה בצד.

4) א. (1) $\frac{2x^2 - 10x - ax + 10a}{2}$ (2) $x = 2.5 + \frac{1}{4}a$ ב. $a = 6$.

5) א. 10 ס"מ, 10 ס"מ. ב. 11.18 ס"מ, 11.18 ס"מ.

6) א. $\frac{100}{x}$ ב. (1) 80, (2) 40 שקלים.

7) א. $\frac{3600}{x}$ ב. 60 ס"מ ג. 250 ס"מ.

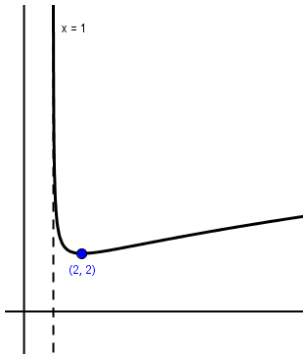
8) א. \sqrt{k} ס"מ, \sqrt{k} ס"מ. ב. $k = 32$.

9) ב. $\sqrt{40.5}$.

10) א. $x = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2.887$ ב. 120° .

11) א. $10 - x$ ב. $x = 3$ ג. 33.125%.

12) א. $A(t, -t^2 + 9)$, $B(t, (t-3)^2)$, $C(-t, -t^2 + 9)$ ב. $t = 2$.



פרק 14 - חשבון אינטגרלי:

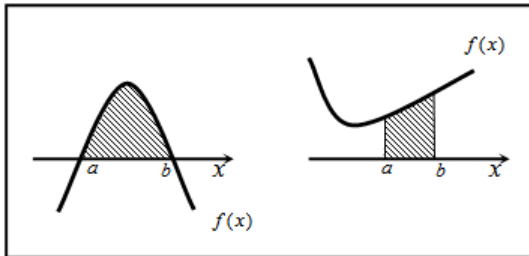
הגדרה וחוקים יסודיים:

כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

עבור מקדם קבוע a נקבל: $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$.

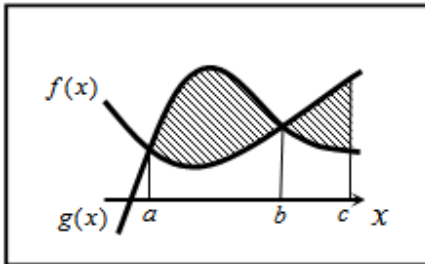
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל:

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים כך שגרף אחד כולו מעל השני:

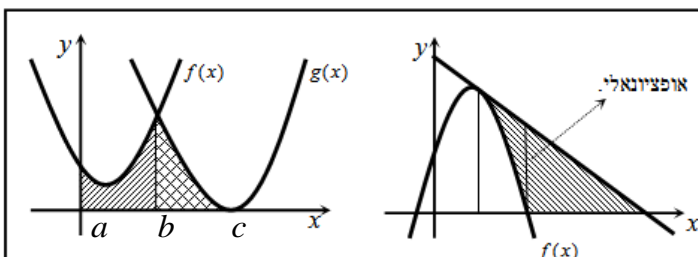


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

שאלות יסודיות – חישובי אינטגרלים:

(1) מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\int x^3 dx = \text{א.} \quad \int 12x^5 dx = \text{ב.}$$

$$\int x^4 dx = \text{ג.} \quad \int 2x^3 dx = \text{ד.}$$

$$\int \frac{2}{3}x^5 dx = \text{ה.} \quad \int 7dx = \text{ו.}$$

$$\int \left(\frac{5}{6}x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx = \text{ז.} \quad \int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx = \text{ח.}$$

(2) מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\int x^{-3} dx = \text{א.} \quad \int \frac{1}{x^3} dx = \text{ב.}$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx = \text{ג.} \quad \int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx = \text{ד.}$$

(3) מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \text{א.} \quad \int \sqrt{x} dx = \text{ב.}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \text{ג.} \quad \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx = \text{ד.}$$

(4) מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\int (5x-1)^3 dx = \text{א.} \quad \int 3(2-7x)^4 dx = \text{ב.} \quad \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx = \text{ג.}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx = \text{ד.} \quad \int \sqrt{ax+b} dx = \text{ה.}$$

שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה:

(5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(-1, 2)$.

(6) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצא את הפונקציה.

7) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x^2 - 8x + 2$. נתון: $f(-2) = 1$.
א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

8) נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x) = 9x^2 - 4$.
ערך הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

9) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 3$. לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

10) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -6x - 5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.

ג. מצא את משוואת המשיק.

11) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x - 4$.

הישר $y = 2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

12) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x) = 8x - 6$.

א. מצא את $f'(x)$ אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = 2$.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא $2/3$.

13) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x) = 2x - 3$.

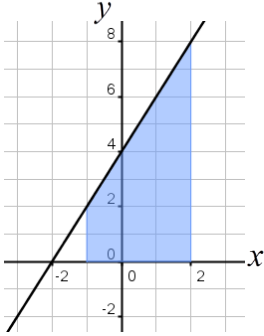
א. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 4. מצא את $f'(x)$.

ב. ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצא את $f(x)$.

האינטגרל המסוים:

(14) בסרטון זה מוסבר האינטגרל המסוים.

חשב את האינטגרל המסוים הבא: $\int_{-2}^1 (x^2 - 6x + 1) dx$



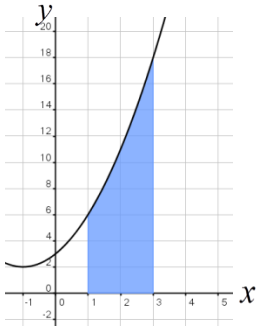
חישובי שטחים – פונקציה פולינומית:

(15) בסרטון זה מוסבר כיצד להשתמש באינטגרל המסוים כדי לחשב שטחים.

נתונה הפונקציה: $y = 2x + 4$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת הישר,

ציר ה- x והישרים $x = -1$ ו- $x = 2$.



(16) חשב את השטח המוגבל בין גרף

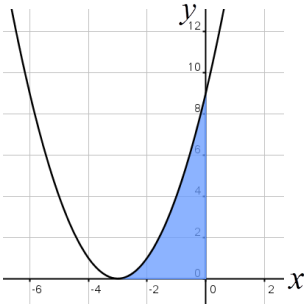
הפונקציה: $f(x) = x^2 + 2x + 3$, ציר ה- x

והישרים $x = 1$ ו- $x = 3$.

(17) נתונה הפונקציה $y = (x + 3)^2$

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לצירים.



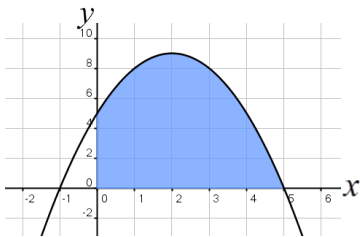
(18) נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 4x + 5$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה

עם ציר ה- x .

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

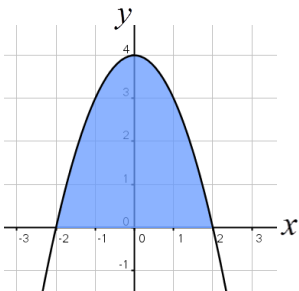
ציר ה- x וציר ה- y .



(19) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4$

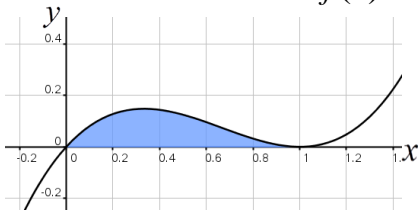
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לציר ה- x .



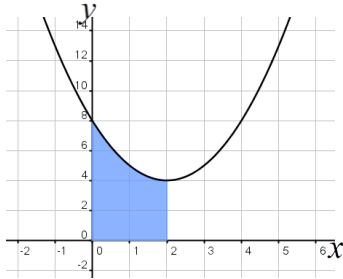
20 מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

וציר ה- x כמתואר באיור:



21 נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4x + 8$.

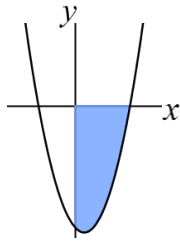
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים וקדקוד הפרבולה.



22 בסרטון זה מוסבר כיצד לחשב שטח שמתחת לציר ה- x .

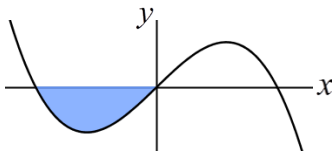
נתונה הפונקציה $y = x^2 - x - 6$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת לפונקציה ולצירים שברביע הרביעי.



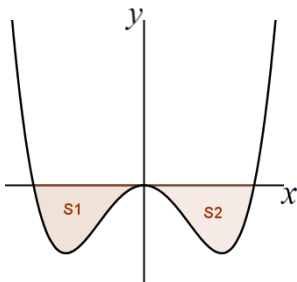
23 נתונה הפונקציה $f(x) = x(4 - x^2)$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- x שברביע השלישי.



24 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$.

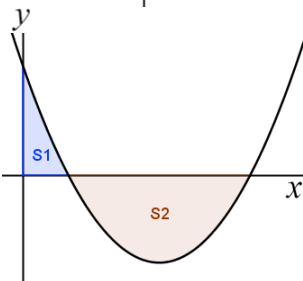
חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- x .

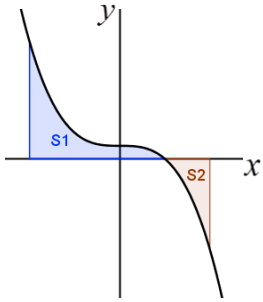


25 חשב את האינטגרל המסוים של

הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$ בין 0 ל-5.

האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1 + S_2$? אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.

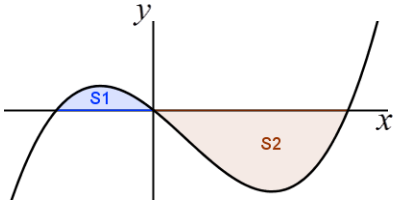




26 א. חשב את ערך האינטגרל הבא: $\int_{-2}^2 (-x^3 + 1) dx$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 + 1$.

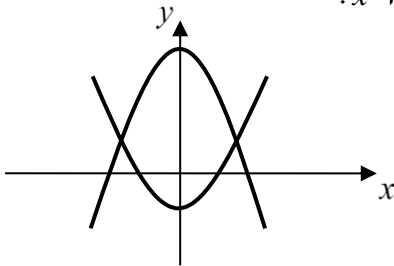
מעבירים ישרים: $x = 2$ ו- $x = -2$ כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 כמתואר באיור. חשב את סכום השטחים: $S_1 + S_2$ והסבר מדוע תוצאת החישוב שונה מסעיף א'.



27 נתונה הפונקציה: $y = x^3 - x^2 - 2x$.

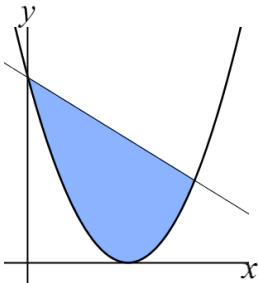
יוצרים את השטחים S_1 ו- S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה- x כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .



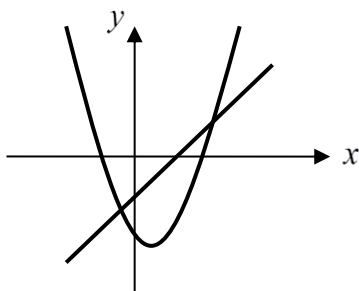
28 נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



29 נתונות הפונקציות: $y = -x + 9$; $y = (x - 3)^2$.

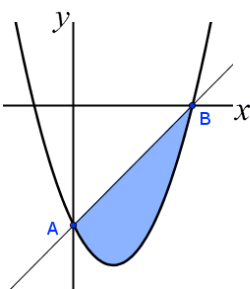
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



30 נתונות הפונקציות הבאות:

$f(x) = x^2 - 4x - 12$, $g(x) = x - 6$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.

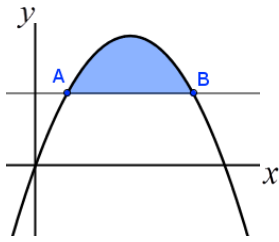


31 נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 - 6x - 9$.

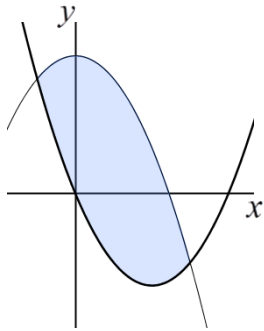
א. מצא נקודות חיתוך של הפונקציה

עם הצירים (נסמן ב- A ו- B).

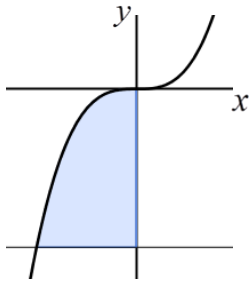
ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AB.



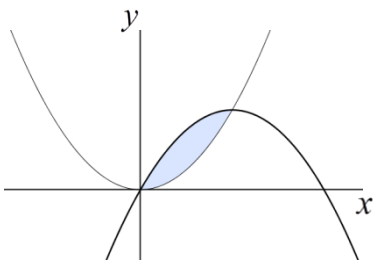
(32) נתונה הפרבולה: $y = -x^2 + 6x$ והישר $y = 5$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה לישר.



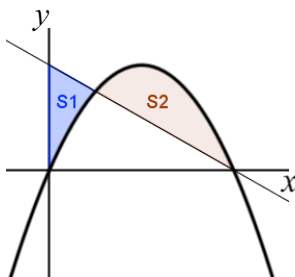
(33) חשב את השטח המוגבל בין גרפים של הפונקציות: $y = -x^2 + 6$; $y = x^2 - 4x$.



(34) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר $y = -8$ וציר ה- y כמתואר באיור.



(35) מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה: $y = x^2$ לבין גרף הפונקציה: $y = 2x - x^2$.



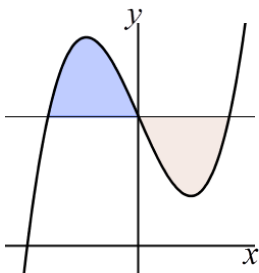
(36) נתונות הפונקציות הבאות:

$$g(x) = -x + 4; f(x) = -x^2 + 4x$$

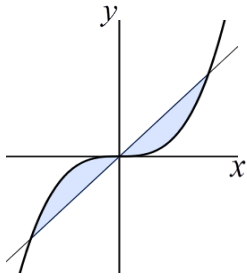
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y ב- S_1 , ואת המשך השטח הכלוא בין הגרפים ב- S_2 כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

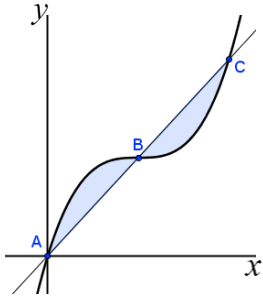
ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



(37) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x + 5$ והישר $y = 5$.
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.



38) נתונות הפונקציות: $y = x^3$; $y = x$.
חשב את השטח המוגבל ביניהן.



39) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
הישר AC חותך את גרף הפונקציה
בנקודות הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

40) הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ נחתכות ב-2 נקודות.

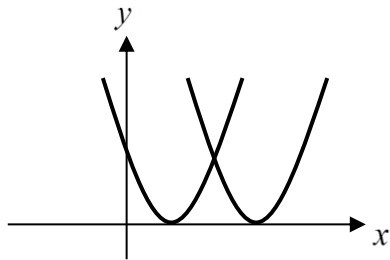
- א. מצא את נקודות החיתוך.
ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.

41) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ו- $g(x) = x + 2$.

- א. סרטט את הפונקציות במערכת צירים אחת.
ב. מצא את השטח המוגבל בין הגרפים והצירים.

42) חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = x$.

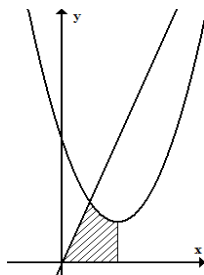
43) חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ לציר ה- x .



44) נתונות שתי פונקציות:

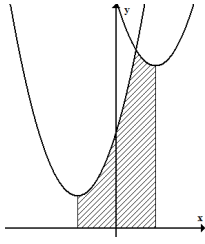
$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 6x + 9$$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות
ובין ציר ה- x .

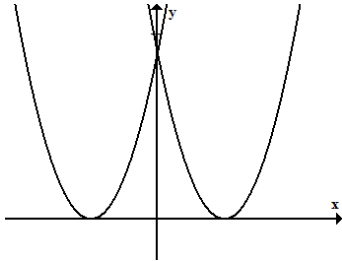


45) הפונקציות המתוארות בשרטוט הן: $y = 3x$; $y = x^2 - 4x + 6$.

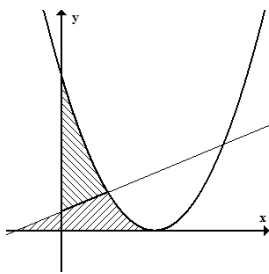
- א. מצא את קדקוד הפרבולה.
ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.
ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.



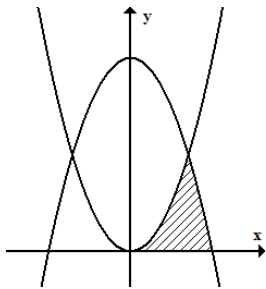
- 46** נתונות הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 14$, $y = x^2 + 4x + 6$.
- מצא את שיעורי ה- x של קדקודי הפרבולות.
 - חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
 - חשב את השטח המסומן בשרטוט.



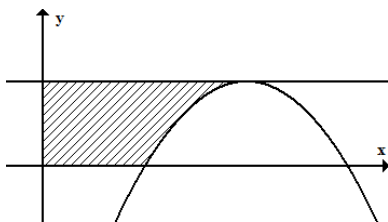
- 47** נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = (x+3)^2$.
- חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x .



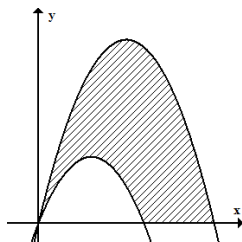
- 48** נתונות שתי הפונקציות: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = (x-2)^2$.
- מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x .
 - מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y .



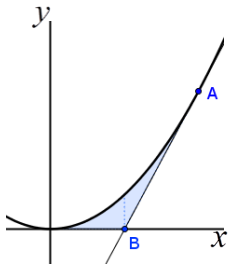
- 49** נתונות הפונקציות: $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.
- חשב את השטח המוגבל על ידי שתי הפונקציות וציר ה- x ברביע הראשון.



- 50** נתונה הפרבולה: $y = -x^2 + 4x - 3$.
- מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מקדקוד הפרבולה.
- מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
 - מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר והצירים.



- 51** נתונות הפרבולות הבאות:
- $f(x) = -x^2 + 5x$, $g(x) = -x^2 + 3x$
- חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x .

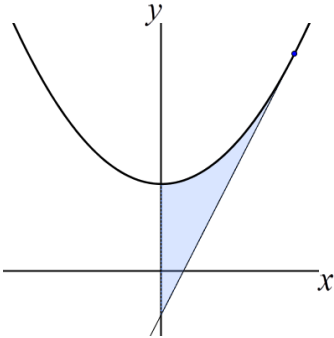


(52) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1, 2)$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B .

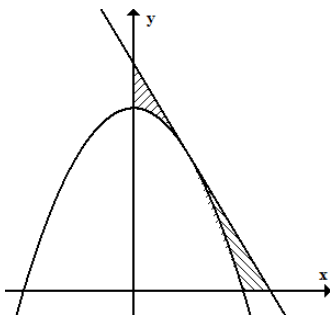
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



(53) נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 + 2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 5)$.

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר y .



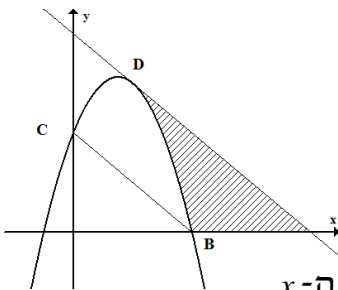
(54) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4$

בנקודה $(1, 3)$ העבירו משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- y .

ג. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



(55) משוואת הפרבולה היא: $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

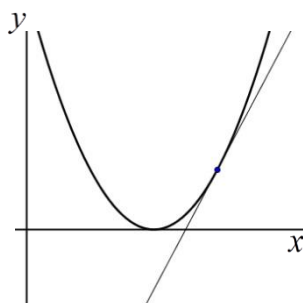
הנקודות $C(0, 2)$, $B(2, 0)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה

עם הצירים. המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x .

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y .



(56) נתונה הפונקציה: $y = (x-4)^2$.

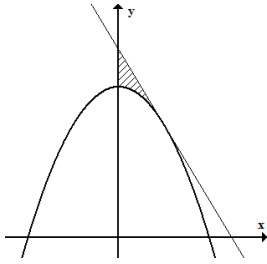
מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה שבה: $x = 6$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

שאלות עם פרמטר:



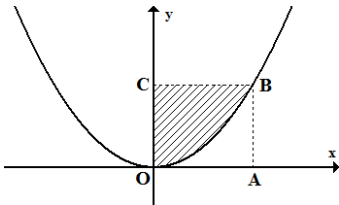
(57) נתונה הפרבולה: $y = ax^2 + 8$.

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x = 2$ הוא -2 .

א. חשב את a .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק,

הפרבולה וציר y .



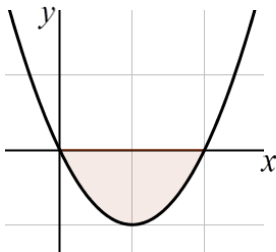
(58) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y = ax^2$, (a פרמטר).

המרובע ABCD הוא ריבוע.

הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בשרטוט.

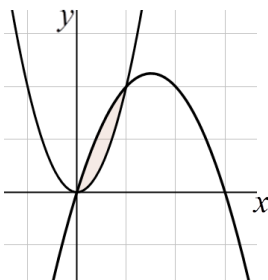


(59) הפונקציה: $y = ax^2 + bx$, (a, b פרמטרים, $a > 0$) חותכת

את ציר ה- x בנקודות $(0,0)$ ו- $(2,0)$.

חשב את ערכי הפרמטרים a, b אם ידוע כי השטח

המוגבל ע"י גרף הפונקציה וציר ה- x הוא 8 יחידות שטח.

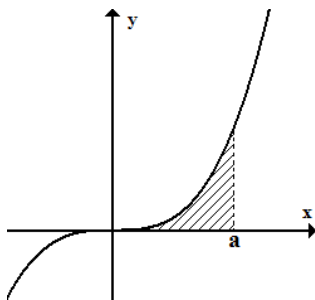


(60) הפונקציות $y = 2x^2$ ו- $y = ax^2 + bx$ ($a < 0$) נחתכות

בנקודות: $(0,0)$ ו- $(1,2)$. ידוע כי השטח הכלוא

בין הגרפים של שתי הפונקציות הוא 0.5 יחידות שטח.

מצא את ערכי הפרמטרים a, b .



(61) נתונה הפונקציה $y = x^3$.

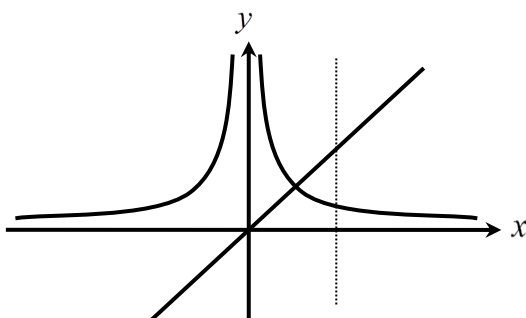
מעבירים אנך לציר ה- x : $x = a$ (a פרמטר חיובי) כך שנוצר

שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- x .

א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציור.

ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל- a^2 .

חישובי שטחים – פונקציה רציונאלית:

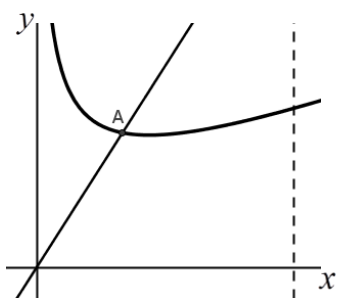


(62) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$.

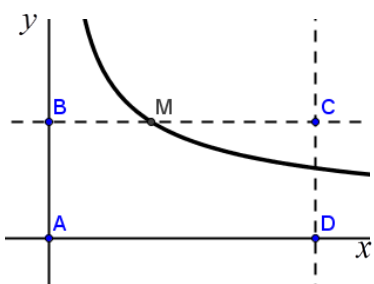
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

חישובי שטחים – פונקצית שורש:

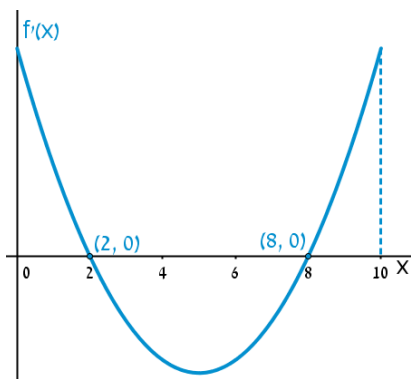


- 63) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x$. מעבירים ישר: $y = 4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.
- מצא את שיעורי הנקודה A.
 - חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y = 4x$, ציר ה- x ואנך לציר ה- x : $x = 4$.

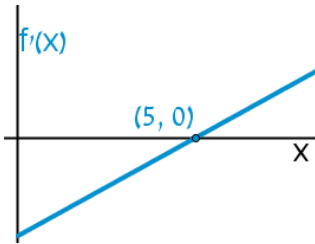


- 64) באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x) = \frac{9}{\sqrt{2x-1}}$. מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x = 13$ ו- $y = 3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור. הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.
- מצא את שיעורי הנקודה M.
 - מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים ב- S_1 ואת שטח המלבן ב- S_2 . הראה כי: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{13}$.

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

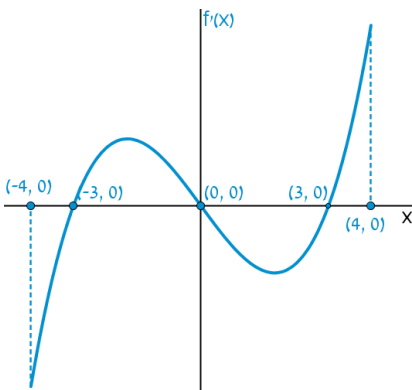


- 65) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל אם: $f(0) = -4$, $f(2) = 6$, $f(5) = 0$ וכן: $f(10) > 0$.
 - חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x = 2$.



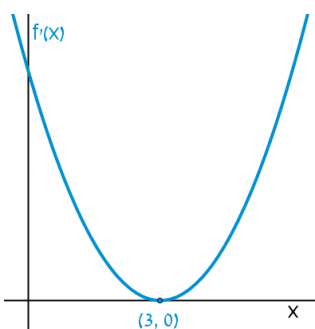
66) לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
 הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד
 והיא $(5, 0)$.

- א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.
- ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא -2 .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.
- ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



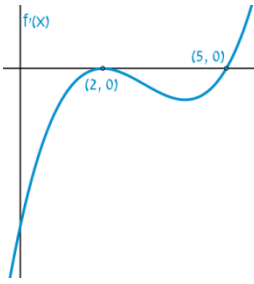
67) בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 4$.

- א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
- ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגן.
- ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3) = f(3) = m$. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות m).
- ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x ברביעים הראשון והשלישי הוא 40.5 יח"ש. מצא את m .



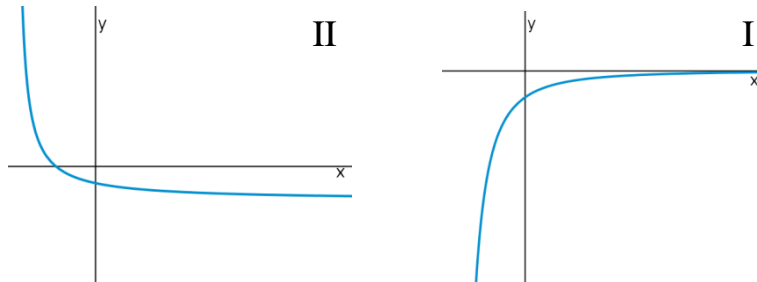
68) הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא:

- א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.



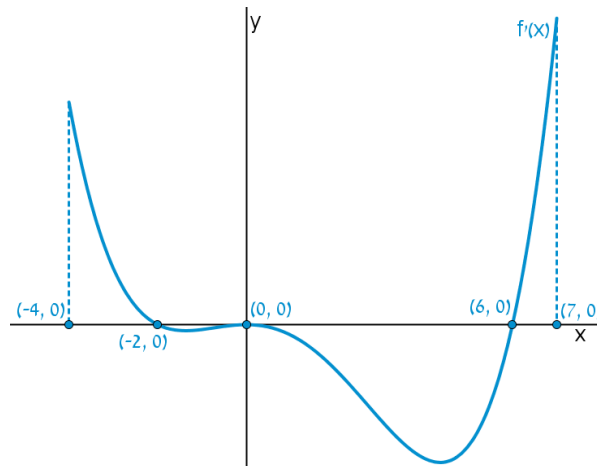
- 69 באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$:
 ידוע כי הנקודות $A(5, -4.75)$, $B(2, 2)$ ו- $C(0, 14)$ נמצאות על $f(x)$.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 5$.

70 באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



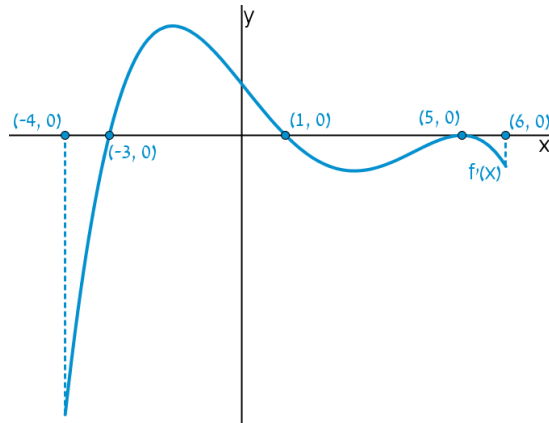
- זוהי איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.
- נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$. מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

71 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא :



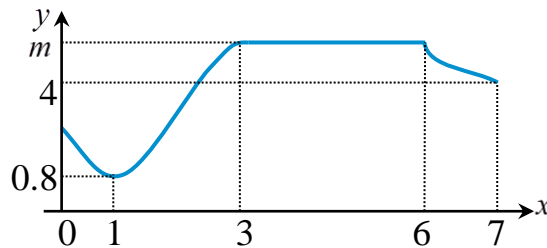
- סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$ לפי הנתונים :
 $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

72 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא :



- א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 6$ עבור הנתונים:
 $f(-3) = -356\frac{2}{5}$, $f(1) = 36\frac{2}{15}$, $f(5) = -83\frac{1}{3}$.
- ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- x בתחום: $-3 \leq x \leq 5$.

73 בצויר שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < 7$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות:

- א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-6 מתקיים:
- $f'(x) > 0$
 - $f'(x) = 0$
 - $f'(x) < 0$
- ב. נתון כי: $\int_3^6 m dx = 15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה- y . מצא את $f(5)$.
- ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 < x < 3$.
- ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x בתחום $1 < x < 3$.

תשובות סופיות:

(1) א. $\frac{x^4}{4} + c$. ב. $2x^6 + c$. ג. $\frac{x^5}{5} + c$. ד. $\frac{x^4}{2} + c$. ה. $\frac{x^6}{9} + c$. ו. $7x + c$. ז.

א. $\frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c$. ב. $\frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c$. ג.

(2) א. $-\frac{x^{-2}}{2} + c$. ב. $-\frac{1}{2x^2} + c$. ג. $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c$. ד. $2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$. ז.

(3) א. $\frac{x^{1.5}}{1.5} + c$. ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$. ג. $2\sqrt{x} + c$. ד. $8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c$. ז.

(4) א. $\frac{(5x-1)^4}{20} + c$. ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35} + c$. ג. $-\frac{3}{6x+5} + c$. ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c$. ז.

ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$. (5) $f(x) = x^3 - 7x + 5$ (6) $f(x) = x^2 - 6x + 14$.

(7) א. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3}$. ב. $y = -5x + 27$. ז.

(8) א. $y = 5x - 2$. ב. $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$. ג. $(0, -2)$, $(0.4, 0)$. ז.

(9) א. $x = 0$. ב. $f(x) = x^2 - 3x + 7$. ז.

(10) א. $x = -1$. ב. $f(x) = -3x^2 - 5x - 8$. ג. $y = x - 5$. ד. $f(x) = 1.5x^2 - 4x + 11$. ז.

(12) א. $f'(x) = 4x^2 - 6x - 4$. ב. $f(x) = \frac{4x^3}{3} - 3x^2 - 4x - 10$. ז.

(13) א. $f'(x) = x^2 - 3x + 6$. ב. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{6}$. ז.

(14) 15 יחיש. (15) 15 יחיש. (16) $22\frac{2}{3}$ יחיש. (17) $(-3, 0)$. ב. 9 יחיש.

(18) א. $(-1, 0)$, $(5, 0)$. ב. $33\frac{1}{3}$ יחיש. (19) א. $(-2, 0)$, $(2, 0)$. ב. $10\frac{2}{3}$.

(20) $\frac{1}{12}$ יחיש. (21) $10\frac{2}{3}$ יחיש. (22) 13.5 יחיש. (23) 4 יחיש. (24) $4\frac{4}{15}$ יחיש.

(25) א. $-8\frac{1}{3}$. ב. 13 . א. (26) 4 . ב. 9.5 יחיש. (27) א. $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$. ב. $3\frac{1}{12}$ יחיש.

(28) $21\frac{1}{3}$ יחיש. (29) $20\frac{5}{6}$ יחיש. (30) $57\frac{1}{6}$ יחיש. $S =$

(31) א. $A(0, -9)$, $B(3, 0)$. ב. 13.5 יחיש.

(32) $10\frac{2}{3}$ יחיש. (33) $21\frac{1}{3}$ יחיש. (34) 12 יחיש. (35) $\frac{1}{3}$ יחיש.

(36) א. $(1, 3)$, $(4, 0)$. ב. $2\frac{5}{11}$. (37) א. $(-2, 5)$, $(0, 5)$, $(2, 5)$. ב. 8 יחיש.

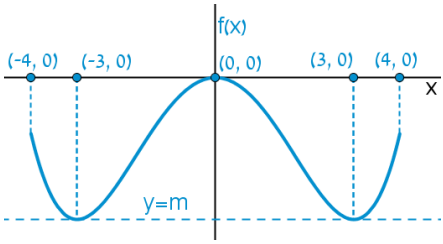
- (38) $\frac{1}{2}$ יח"ש. (39) $\frac{1}{2}$ יח"ש. (40) א. (1,1), (0,0) ב. $\frac{1}{3}$ יח"ש. (41) $7\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (42) 0.5 יח"ש. (43) 8 יח"ש. (44) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (45) א. (2,2) ב. (1,3) ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (46) א. $x=2, x=-2$ ב. (1,11) ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש. (47) 18 יח"ש.
- (48) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש. (49) $4\frac{5}{12}$ יח"ש.
- (50) א. (2,1) ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש (51) $16\frac{1}{3}$ יח"ש. (52) $\frac{1}{6}$ יח"ש. (53) 1 יח"ש.
- (54) א. $y=-2x+5$ ב. $\frac{1}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{7}{12}$ יח"ש.
- (55) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (56) א. $y=4x-20$ ב. $\frac{2}{3}$ יח"ש. (57) א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש.
- (58) $a=\frac{1}{2}, a=2\frac{2}{3}$ יח"ש. (59) $a=6, b=-12$ (60) $a=-1, b=3$ (61) א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$.
- (62) 1 יח"ש S . (63) א. A(1,4) ב. 15.5 יח"ש. (64) א. M(5,3).

הערה: סרטוטי סקיצות לשאלות הבאות מופיעות בסוף התשובות.

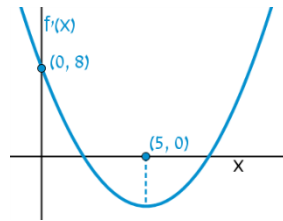
- (65) ב. 10 יח"ש.
- (66) א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$.
ג. $\min(5, -2)$. ה. 10 יח"ש.
- (67) א. עולה: $3 < x \leq 4, -3 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 3, -4 \leq x < -3$.
ב. $x_{\min} = -3, x_{\max} = 0, x_{\min} = 3$. ד. $m = -8$.
- (68) א. לא. הנקודה (3,0) היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ג. 5 יח"ש.
- (69) א. $\min(5, 0)$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$. ד. 10 יח"ש.
- (70) א. $f(x): \Pi, f'(x): I$ ב. 1 יח"ש.
- (71) ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (72) ב. 512 יח"ש.
- (73) א. $f'(x) > 0: 1 < x < 3; f'(x) = 0: x = 1, 3 < x < 6; f'(x) < 0: 6 < x < 7, 0 < x < 1$.
ב. $f(5) = 5, m = 5$. ד. 4.2 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

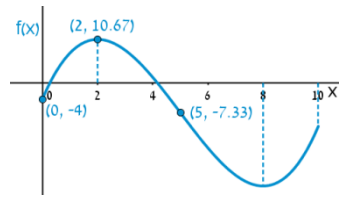
(67)



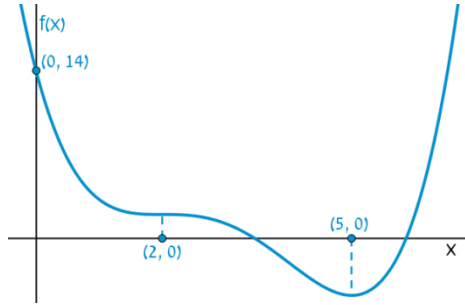
(66)



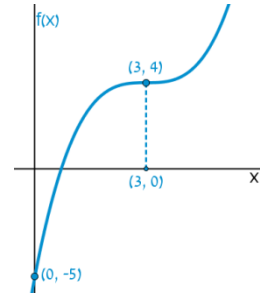
(65)



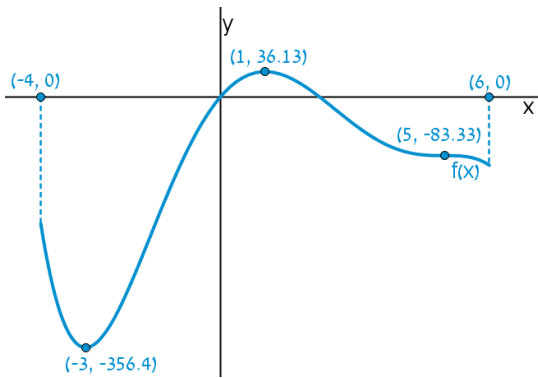
(69)



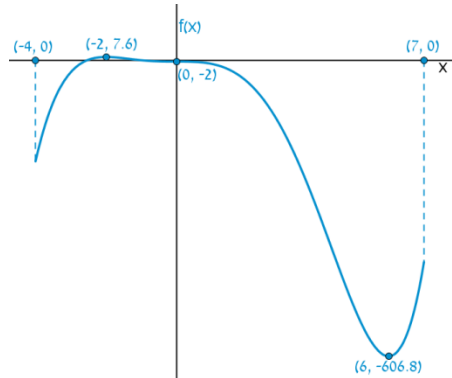
(68)



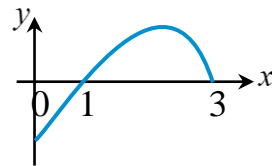
(72)



(71)



(73)



תרגול נוסף - חשבון אינטגרלי:

*הערה: לשאלות בחוץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

מציאת פונקציה קדומה:

(1) נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{3x-1}{x}$ ונתונה הנגזרת של

הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = kx^2 + 3x$ (k פרמטר).

ידוע ששיפוע המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ זהה לשיפוע

המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -4$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע שהפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = 1$.

(2) נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = kx + 2$, פרמטר k .

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את הפונקציה $g(x) = \frac{6x-1}{x}$ בנקודה שבה $y = 5$

וכי שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלהן הוא $m = 4$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

(3) הפונקציה $f(x)$ משיקה לפונקציה: $g(x) = \frac{4x-1}{x}$.

בנקודת ההשקה העבירו משיק שמשוואתו $y = x + 2$.

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x$.

א. מצא את נקודת ההשקה.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

(4) נתונה הנגזרת של הפונקציה: $f(x) = ax^2 - 5x + b$, פרמטרים a, b .

לפונקציה יש קיצון בנקודה שבה $x = 1$. ידוע ששיפוע המשיק לגרף

הפונקציה $g(x) = \frac{3x-16}{x}$ בנקודה שבה $x = 2$ זהה לשיפוע המשיק של גרף

הפונקציה $f(x)$ באותה נקודה.

א. מצא את a ואת b .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים.

ג. הראה שאין לפונקציה $f(x)$ עוד נקודות חיתוך עם ציר ה- x מלבד $(0,0)$.

5) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = kx + 7\frac{3}{4}$, פרמטר k . ידוע כי

לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x) = \frac{4x+4}{x}$ יש משיק משותף בנקודה שבה $x=4$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את ערך הפרמטר k .

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

6) נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = ax^2 + 3x$, פרמטר a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ היא $y = -3x + 8.5$.

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. האם יש לגרף הפונקציה עוד משיקים בעלי שיפוע זהה למשיק זה?
אם כן – מצא אותם, אם לא, נמק.

7) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = ax^3 + bx$, פרמטרים a, b .

ידוע כי משוואת המשיק לפונקציה באחת מנקודות החיתוך שלה עם

ציר ה- x היא: $y = 16x - 32$. כמו כן מתקיים גם: $f'(1) = -4$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x^2 + kx - 3$, פרמטר k .

ידוע כי ערך הנגזרת בנקודה שבה $x=1$ הוא -4 .

כמו כן הישר $y=4$ חותך את גרף הפונקציה בנקודת החיתוך של עם ציר ה- y .

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. האם הישר $y=4$ חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן, מהן?

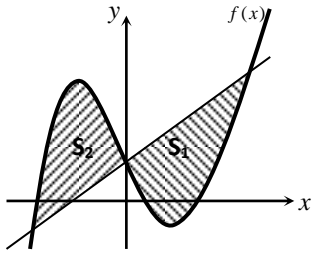
9) הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא: $f''(x) = 12x$.

לפונקציה יש נקודת קיצון על ציר ה- x שבה $x=2$.

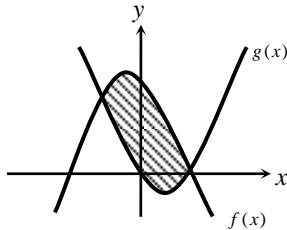
א. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון?

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

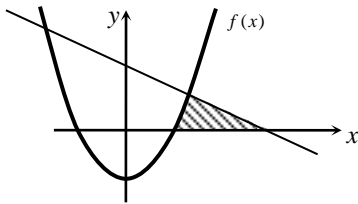
חישובי שטחים (ללא מציאת פונקציה קדומה):



- (10)** לפניך הגרפים של הפונקציות:
 $y = 13x + 1$, $f(x) = x^3 - 12x + 1$
 הוכח: $S_1 = S_2$.



- (11)** לפניך נתונות שתי הפונקציות הבאות:
 $g(x) = 3x^2 - 12x$, $f(x) = -1.5x^2 - 3x + 36$
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
 ב. חשב את השטח הנוצר בין שתי הפונקציות.

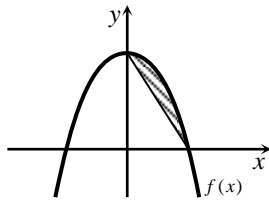


- (12)** נתונות הפונקציה: $f(x) = x^2 - 16$ והישר: $y = -x + 14$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים ברביע הראשון.

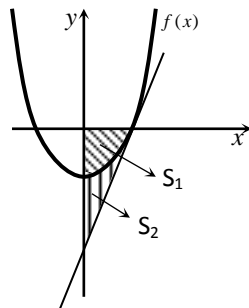
- (13)** נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 + 4x$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. הוכח שציר ה- x מחלק את השטח הכלוא בינו לבין הפונקציה לשני חלקים שווים.

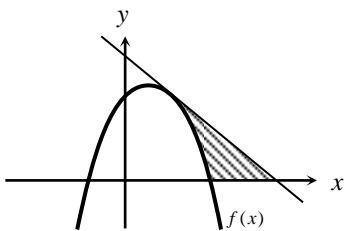
- (14)** לגרף הפונקציה: $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 8$ מעבירים ישר העובר דרך נקודות



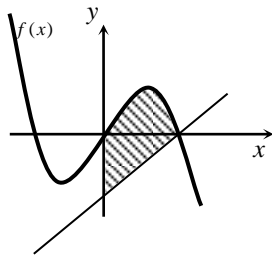
- החיתוך של הפונקציה עם הצירים ושיפועו שלילי (ראה איור).
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ב. מצא את משוואת הישר.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישר.



- (15)** לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 - 3x - 4$ מעבירים משיק בעל שיפוע חיובי דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x כמתואר באיור.
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. חשב את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$ המסומנים באיור.



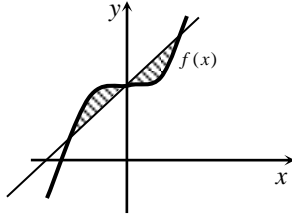
- (16)** לגרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ מעבירים משיק בנקודה שבה: $x = 2$ (ראה איור).
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



17 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה: $f(x) = 4x - x^3$

והישר: $y = 4x - 8$.

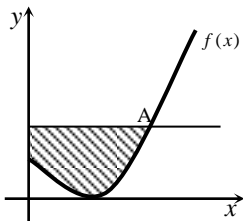
- א. מצא את נקודת החיתוך בין שני הגרפים.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר וציר ה- y .



18 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה: $f(x) = x^3 + 8$

והישר: $y = x + 8$.

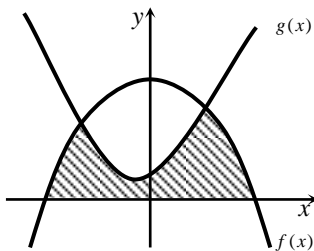
- א. מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שתי הפונקציות



19 הישר $y = 4$ חותך את גרף הפונקציה: $f(x) = (x-1)^2$

בנקודה A שברביע הראשון.

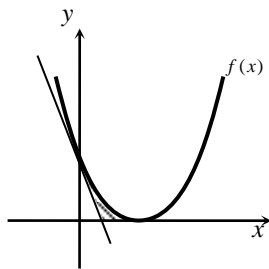
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- y (המסומן).



20 באיור שלפניך מתוארות הפונקציות:

$$f(x) = 16 - x^2 \quad \text{ו-} \quad g(x) = x^2 + 2x + 4$$

- א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים לציר ה- x .



21 נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-2)^2$

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.

- א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).

22 נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 10x$. הישר: $y = 9$ חותך את

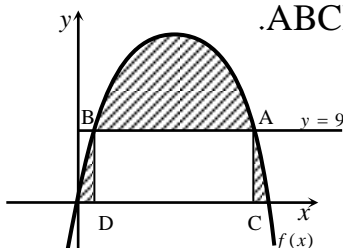
גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B כמתואר באיור.

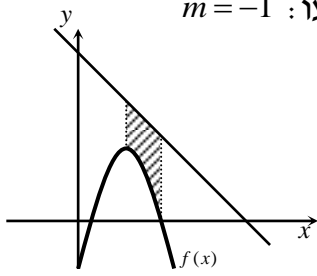
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

א. מצא את נקודות החיתוך של הישר $y = 9$ עם

גרף הפונקציה $f(x)$.

- ב. מצא את שטח המלבן ABCD.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).





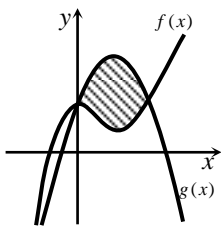
(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. מעבירים ישר ששיפועו: $m = -1$

וחותך את ציר ה- x שנקודה שבה: $x = 8$. מישר זה מורידים אנך לגרף הפונקציה לנקודת המקסימום שלה ומעלים אנך מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי הישר וגרף הפונקציה.



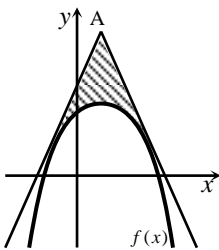
(24) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ ו- $g(x) = -2x^2 + bx + 2$,

(b פרמטר). הפונקציות נחתכות בנקודה שבה: $x = 2$.

א. מצא את ערך הפרמטר b .

ב. מצא את שאר נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות (השטח המתואר באיור).



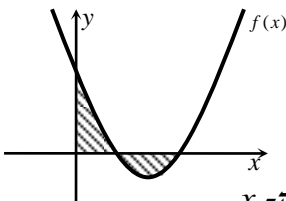
(25) לגרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 4x + 21$ מעבירים משיקים בנקודות

שבהן: $y = 9$ כמתואר באיור. משיקים אלו נחתכים בנקודה A .

א. כתוב את משוואות המשיקים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיקים לגרף הפונקציה (השטח המסומן).

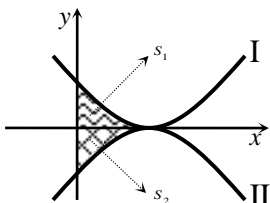


(26) א. חשב את האינטגרל הבא: $\int_0^6 (x^2 - 8x + 12) dx$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- y וציר ה- x .

ג. הסבר מדוע התוצאה שקיבלת אינה תואמת את זו של סעיף א'.



(27) נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$

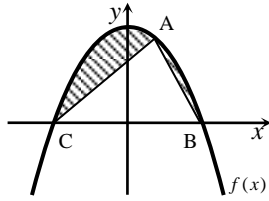
כמתואר באיור.

א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

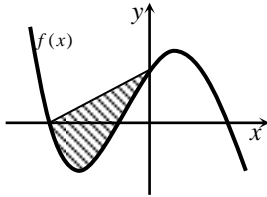
ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים

ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.

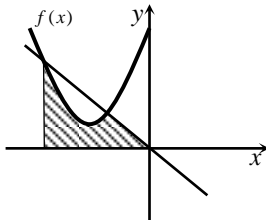
הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



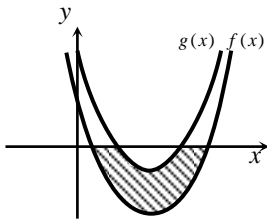
- (28) נתונה הפונקציה: $f(x) = 9 - x^2$. מהנקודה $A(1,8)$ שעל הגרף הפונקציה מעבירים ישרים לנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ב- B ו- C כך שנוצר המשולש ABC .**
- מצא את שיעורי הנקודות B ו- C .
 - חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה למשולש ABC (השטח המסומן).



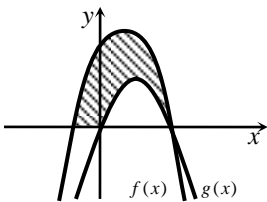
- (29) נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 18x + 40$.**
- ידוע כי לפונקציה יש נקודת חיתוך עם ציר ה- x שבה $x = -5$. מנקודה זו מעבירים ישר החותך את הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y (ראה איור).
 - כתוב את משוואת הישר.
 - מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישר (השטח המסומן).



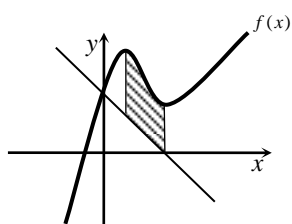
- (30) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 6x + 12$.**
- ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4$ כמתואר באיור.
 - מצא את משוואת הישר.
 - מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
 - מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



- (31) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 7x + 10$ ו- $g(x) = x^2 - 7x + 12$.**
- מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות עם ציר ה- x ?
 - חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x (השטח המסומן).



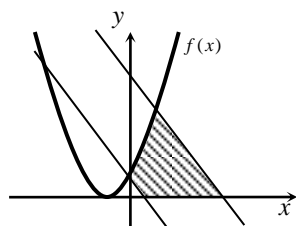
- (32) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x) = -x^2 + 2x + k$ ו- $g(x) = 4x - x^2$.**
- ידוע כי אחת מנקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- x היא זהה ואינה ראשית הצירים.
 - מצא את ערך הפרמטר k .
 - חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים של הפונקציות וציר ה- x .



33 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$. מהנקודה $(3, 0)$

שעל ציר ה- x מעבירים ישר החותך את גרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y כמתואר באיור הסמוך.

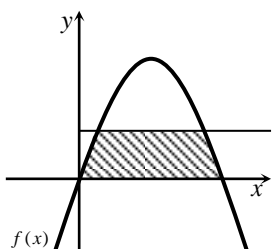
- מצא את משוואת הישר.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר שמצאת בסעיף א' ואנכים לציר ה- x מנקודות הקיצון.



34 באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x) = (x+1)^2$.

מנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y מעבירים ישר l_1 ששיפועו הוא $m = -2$. כמו כן מעבירים ישר נוסף l_2 המקביל לישר l_1 וחותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -5$.

- מצא את משוואות הישרים l_1 ו- l_2 .
- מצא את שאר נקודות החיתוך של הישרים הנ"ל עם הפונקציה.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישרים וציר ה- x (השטח המסומן).



35 נתונה הפונקציה: $f(x) = kx - x^2$, פרמטר k .

הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x = 9$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (המסומן).

חישובי שטחים (כולל מציאת פונקציה קדומה):

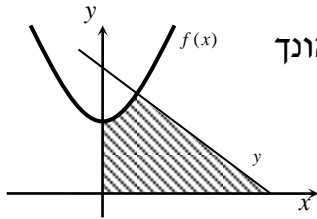
36 נתונה הנגזרת: $f'(x) = 6x$.

ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 5$.

- מצא את הפונקציה $f(x)$.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- x .

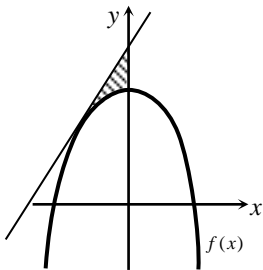
37 לגרף הפונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x) = -x^2 + x + 2$ מעבירים משיק מנקודת המקסימום שלה. ידוע שמשיק זה חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודה והיא $(-2.5, 3)$.

- א. מצא את נקודת המקסימום.
- ב. מצא את הפונקציה.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה למשיק (עגל לשתי ספרות אחרי הנקודה).



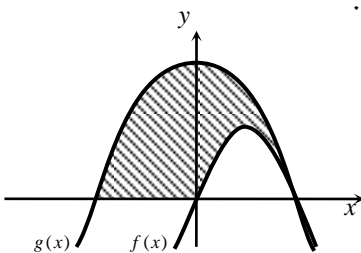
38 הנגזרת של פרבולה מרחפת $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x$. מהנקודה $(2, 10)$ שעל גרף הפרבולה מעבירים ישר y המאונך למשיק שם (נורמל) (ראה איור).
 א. מצא את משוואת הפרבולה.
 ב. מצא את משוואת הישר y .
 ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה, הישר והצירים.

39 נתונה הנגזרת: $f'(x) = -2x + 3$. ידוע שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- y בנקודה שבה: $y = 4$.
 א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לצירים.



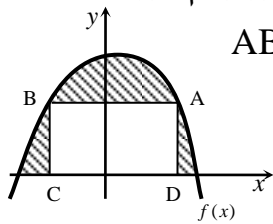
40 משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = -2$ היא: $y = x + 13$. הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = -4x - 7$.
 א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- y (ראה איור).

41 הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא: $f''(x) = 4$. לפונקציה יש נקודת מינימום $(1, -8)$.
 א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- x .



42 באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $f'(x) = 4 - 2x$, $g'(x) = -2x + 1$. ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
 א. מצא את הפונקציות.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- x .

43 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x) = 3 - 2x$.



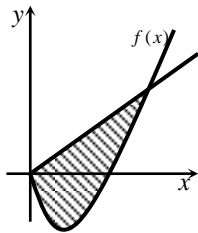
ישר AB שמשוואתו היא $y = 6$ חותך בנקודות A ו- B את גרף הפונקציה.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן $ABCD$.

שטחו 30 יחידות. ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .



44 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y = 2x$.

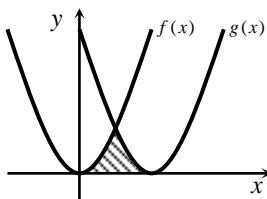
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 6$ וידוע הישר חותך

את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לישר.



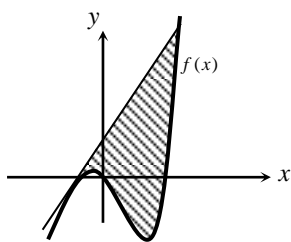
45 באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x) = x^2$ את גרף

הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 2$. הנגזרת של

הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים לציר ה- x (המסומן).



46 נתונה הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. משיק ששיפועו 15 משיק

לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y = -20$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15?

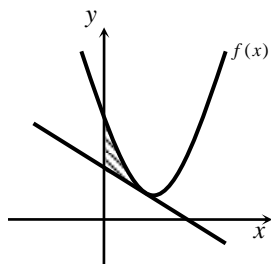
אם כן, מצא אותם.

ג. 1. הראה שהנקודה שבה $x = 7$ משותפת למשיק שמצאת

בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

2. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה למשיק שמצאת

בסעיף הקודם (ראה איור).



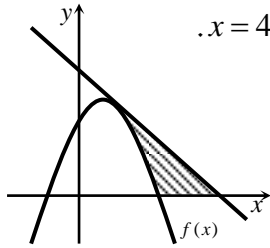
47 משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 2$

היא: $y = -x + 3$. נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = x - 3$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין המשיק לגרף

הפונקציה (ראה איור).

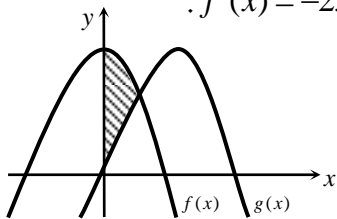


(48) הישר $y = -x + 16$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 4$.

נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = -x + 3$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (ראה איור).

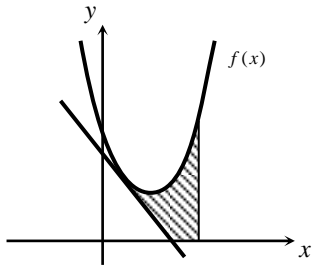


(49) הנגזרות של הגרפים $f(x)$ ו- $g(x)$ הן: $f'(x) = -2x$, $g'(x) = 10 - 2x$.

הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה $(2.5, 18.75)$.

א. מצא את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ב. היעזר באיור וחשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- y .

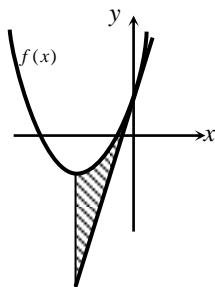


(50) הישר $y = -2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה

שבה: $x = 1$. נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = 2x - 4$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר: $x = 3$. (ראה איור)

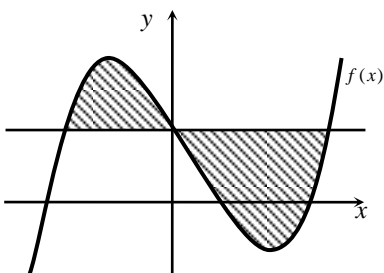


(51) הנגזרת של הפרבולה היא: $f'(x) = 2x + 6$.

ידוע שהפרבולה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 5$. מנקודה זו מעבירים משיק לגרף הפרבולה (ראה איור).

א. מצא את $f(x)$.

ב. חשב את השטח מוגבל בין גרף הפרבולה, המשיק וישר היוצא מנקודת הקיצון של הפרבולה (ראה איור).



(52) נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$.

הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ על

ציר ה- y .

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר לפונקציה (ראה איור).

תשובות סופיות:

- (1) א. $k=1$. ב. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1.5x^2 + \frac{1}{6}$. נ. $k=2$. ב. $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
- (3) א. $(1,3)$. ב. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}$. נ. $a=3, b=2$. ב. $f(x) = x^3 - 2.5x^2 + 2x$.
- (5) א. $y = -0.25x + 6$. ב. $k = -2$. ג. $f(x) = -x^2 + 7\frac{3}{4}x - 10$.
- (6) א. $a = -6$. ב. $f(x) = -2x^3 + 1.5x^2 + 6$. ג. $y = -3x + 5\frac{1}{8}$. כן .
- (7) א. $a = 4, b = -8$. ב. $f(x) = x^4 - 4x^2$.
- (8) א. $k = -4$. ב. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$. ג. $(-1,4)$, $(3,4)$.
- (9) א. כן . ב. $f(x) = 2x^3 - 24x + 32$. נ. $(-2,36)$, $(4,0)$. ב. $S = 162$ יח"ש .
- (12) א. $(-6,20)$, $(5,9)$. ב. $S = 44\frac{5}{6}$. נ. $(-2,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$.
- (14) א. $(-4,0)$, $(4,0)$, $(0,8)$. ב. $y = -2x + 8$. ג. $S = 5\frac{1}{3}$ יח"ש .
- (15) א. $y = 5x - 20$. ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{8}$.
- (16) א. $y = -2x + 7$. ב. $\frac{7}{12}$ יח"ש . נ. $(2,0)$. ב. $S = 12$ יח"ש .
- (18) א. $(-1,7)$, $(0,8)$, $(1,9)$. ב. $S = \frac{1}{2}$. נ. $S = 9$ יח"ש .
- (20) א. $(-3,7)$, $(2,12)$. ב. $S = 43\frac{2}{3}$. נ. $y = -4x + 4$. ג. $(1,0)$. ב. $S = \frac{2}{3}$ יח"ש .
- (22) א. $(1,9)$, $(9,9)$. ב. $S_{ABCD} = 72$. ג. $S = 94\frac{2}{3}$.
- (23) א. $y = -x + 8$. ב. $Max(3,4)$. ג. $S = 2\frac{2}{3}$.
- (24) א. $b = 4$. ב. $(-2,-14)$, $(0,2)$. ג. $S = 4$ יח"ש .
- (25) א. $y = 8x + 25$, $y = -8x + 57$. ב. $A(2,41)$. ג. $S = 42\frac{2}{3}$ יח"ש .
- (26) א. 0 . ב. $S = 21\frac{1}{3}$. ג. האינטגרל של סעיף א' מכיל ערכים חיוביים ושליליים יחדיו .
פעולת האינטגרל מחסרת בין השניים ומכוון שהגדלים החיוביים והשליליים שווים בערך מוחלט (וזאת ניתן לראות לפי החישוב של סעיף ב') התקבל הסכום 0 .
- (27) א. $I = f(x)$, $II = g(x)$. נ. $(3,0)$, $C(-3,0)$. ב. $S = 12$.
- (29) א. $y = 8x + 40$. ב. $S = 93\frac{3}{4}$. נ. $y = -x$. ב. $(-3,3)$. ג. $S = 7\frac{5}{6}$.

$$.S = 25\frac{1}{3} \text{ ב. } .k = 8 \text{ א. (32) } .S = 4\frac{1}{3} \text{ ב. } (2,0), (3,0), (4,0), (5,0) \text{ א. (31)}$$

$$.S = 8 \text{ ג. } .Max(1,7), .Min(3,3) \text{ ב. } .y = 3 - x \text{ א. (33)}$$

$$.S = 6\frac{1}{12} \text{ ג. } (1,4), (-4,9) \text{ ב. } .y_2 = -2x + 6, .y_1 = -2x + 1 \text{ א. (34)}$$

$$.S = 500 \text{ ב. } .f(x) = 3x^2 - 75 \text{ א. (36) } .S = 81\frac{1}{3} \text{ ג. } (1,9) \text{ ב. } .k = 10 \text{ א. (35)}$$

(37) א. (2,3). משיק בנקודת המקסימום מקביל לציר ה- x ולכן משוואתו תהיה מהסוג $y = k$. מאחר שהנקודה הנוספת היא (-2.5,3) ניתן להבין

שמשוואת המשיק היא $y = 3$ ולכן נקודת המקסימום תהיה (2,3).

$$.S = 11\frac{25}{64} \approx 11.391 \text{ ג. } .f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{3} \text{ ב.}$$

$$.S = 214\frac{2}{3} \text{ ג. } .4y + x = 42 \text{ ב. } .f(x) = x^2 + 6 \text{ א. (38)}$$

$$.S = 20\frac{5}{6} \text{ ב. } .f(x) = -x^2 + 3x + 4 \text{ א. (39)}$$

$$.S = 21\frac{1}{3} \text{ ב. } .f(x) = 2x^2 - 4x - 6 \text{ א. (41) } .S = 5\frac{1}{3} \text{ ב. } .f(x) = -2x^2 - 7x + 5 \text{ א. (40)}$$

$$.S = 46.5 \text{ ב. } .f(x) = 4x - x^2, .g(x) = -x^2 + x + 12 \text{ א. (42)}$$

$$.S = 85\frac{1}{3} \text{ ג. } (0,0) \text{ ב. } .f(x) = x^2 - 6x \text{ א. (44) } .S = 27\frac{1}{6} \text{ ב. } .f(x) = -x^2 + 3x + 10 \text{ א. (43)}$$

$$.S = 5\frac{1}{3} \text{ ב. } .g(x) = (x-4)^2 \text{ א. (45)}$$

$$.S = 546.75 \text{ ג. } .y = 15x + 28 \text{ ב. } .f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \text{ א. (46)}$$

$$.S = 1\frac{1}{3} \text{ ב. } .f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \text{ א. (47)}$$

$$.S = 42\frac{2}{3} \text{ ב. } .f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8 \text{ א. (48)}$$

$$.S = 31\frac{1}{4} \text{ ב. } .f(x) = 25 - x^2, .g(x) = 10x - x^2 \text{ א. (49)}$$

$$.S = 2\frac{5}{12} \text{ ב. } .f(x) = x^2 - 4x + 6 \text{ א. (50)}$$

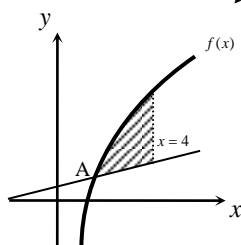
$$.S = 9 \text{ ב. } .f(x) = x^2 + 6x + 5 \text{ א. (51)}$$

$$.S = 189\frac{1}{3} \text{ ב. } .f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 5 \text{ א. (52)}$$

תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:

***הערה: לשאלות בחוץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.**

(1) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{12}{x^4} + 3$.



ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הנמצאת ברביע הראשון היא: $y = 15x - 16$.

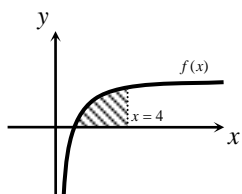
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

מעבירים ישר $y = 2.75x$ החותך את גרף הפונקציה

בנקודה A הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

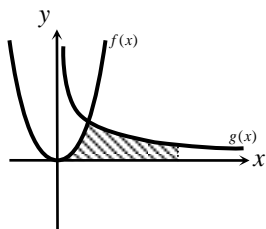
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישרים: $y = 2.75x$ ו- $x = 4$ (המקווקו).



(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 - \frac{16}{x^3}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x = 4$.



(3) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ בתחום: $x > 0$, (a פרמטר).

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה

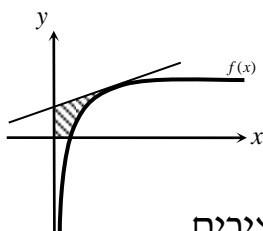
הנמצאת על הישר: $y = 4x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x = 4$.

(4) א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{27}{x^2} + 3x + 1$ עבור: $x = 1$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק והישר: $x = 4$.



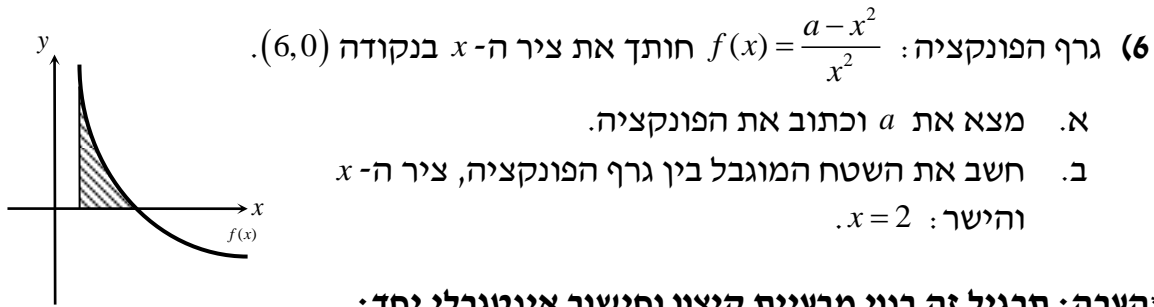
(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8 - \frac{a}{x^3}$ בתחום: $x > 0$, (a פרמטר).

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

שבה: $x = 1$ היא: $y = 3x + 4$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

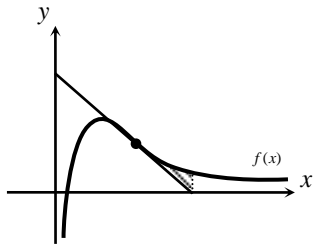
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק והצירים.



(6) גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.

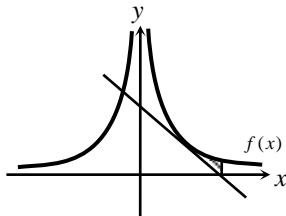
- מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x=2$.

*הערה: תרגיל זה בנוי מבעיית קיצון וחישוב אינטגרלי יחד:



(7) א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

- מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.
- באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- x היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .



(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a+x^2}{x^2}$ (a פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x=a$ הוא: $-\frac{2}{9}$.

- מצא את ערך הפרמטר a .
- כתב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=a$.
- היעזר בסרטוט שבצד וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- x מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

(9) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 4 + \frac{6}{x^4}$. ידוע כי משוואת המשיק לגרף

הפונקציה בנקודה הנמצאת ברביע הראשון היא: $y = 10x - 6$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

מעבירים את הפונקציה: $g(x) = -64x^2 + 4x + 2$. הגרפים נחתכים בנקודה A.

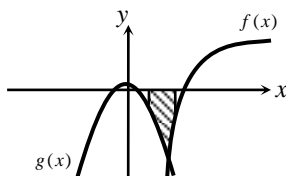
ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה $f(x)$ שלילי עבור $x = 0.7$ וכי

גרף הפונקציה $g(x)$ שלילי עבור: $x = 0.25$.

ד. היעזר בסקיצה שבצד וחשב את השטח הכלוא בין

שני הגרפים, ציר ה- x והישרים: $x = 0.7$ ו- $x = 0.25$.

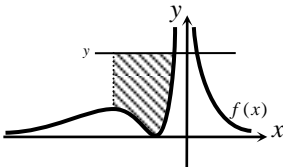


10) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}$.

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. כתוב את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x היוצא מנקודת המקסימום של הפונקציה.

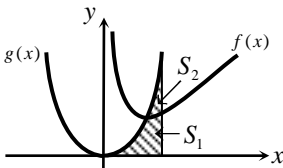
11) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^4}$.

- א. הוכח כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודת הקיצון שלו.
- ב. כתוב את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מעבירים את הישר: $y = \frac{4}{81}$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A ברביע השני.



- ג. מצא את שיעורי הנקודה A.
- ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לישר מנקודת המקסימום של הפונקציה.

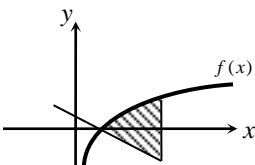
12) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{4}{x^2} + x + 1$.



- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ב. מעבירים פרבולה: $g(x) = Ax^2$ (A פרמטר) דרך נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את ערך הפרמטר A.
- ד. מעבירים אנך לציר ה- x : $x = 3$, כך שנוצרים השטחים: S_1 שבין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ וציר ה- x .
- ה. S_2 שבין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ והאנך.

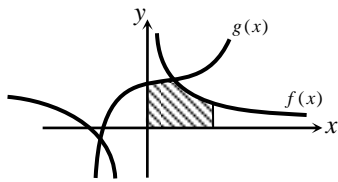
חשב את יחס השטחים: $\frac{S_2}{S_1}$.

13) נתונה הפונקציה: $f(x) = k - \frac{80}{x^4}$ (k פרמטר). גרף הפונקציה



- ח. חותך את ציר ה- x בשתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 4 יחידות.
- א. מצא את k.
- ב. כתוב את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x ברביע הראשון.
- ג. היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הנורמל והישר: $x = 4$.

14) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{162}{3x^3} + 2$, $g(x) = 6x^3 + 50$.



- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
- היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות, הצירים והאנך: $x = 2$.

15) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{a}{x^3}$, $g(x) = 2x$, a (פרמטר).

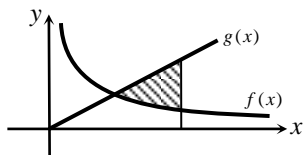
ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = -2$.

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. האם הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. מעבירים אנך $x = k$ (חיובי) החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S .

היעזר באיור שלפניך ומצא את k עבורו מתקיים: $S = 2\frac{7}{9}$.



16) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = a - \frac{3}{x^3}$, a (פרמטר). מעבירים לגרף הפונקציה

משיק מנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- x . מסמנים נקודה A על המשיק ונקודה B על גרף הפונקציה ומעבירים את הישר AB.

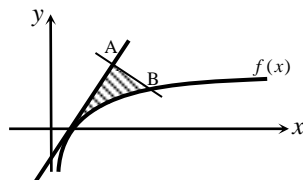
א. מצא את ערך הפרמטר a אם ידוע כי לפונקציה $f(x)$

יש אסימפטוטה אופקית: $y = 3$.

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. ידוע כי: $x_A = 2$, $x_B = 3$.

היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק והישר AB.



17) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{4x^3 + kx + 1}{x^3}$, k (פרמטר)

ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון שבה: $x = -0.5$.

א. מצא את ערך הפרמטר k וקבע את סוג הקיצון.

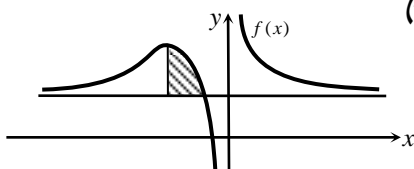
ב. הוכח כי לגרף הפונקציה אין נקודות קיצון נוספות.

ג. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

ד. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה והאסימפטוטה האופקית שלו.

מעבירים אנך לאסימפטוטה דרך נקודת הקיצון.

חשב את השטח הנוצר באופן זה.



תשובות סופיות:

1 א. $f(x) = -\frac{4}{x^3} + 3x$ ב. $A(2, 5.5)$ ג. $S = 1.125$

2 א. $(2, 0)$ ב. $S = 2.5$

3 א. $a = 32$, $(2, 8)$ ב. $S = 13\frac{1}{3}$

4 א. $y = -51x + 82$ ב. $S = 182.25$

5 א. $a = 1$, $f(x) = 8 - \frac{1}{x^3}$ ב. $S = 3$

6 א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$ ב. $S = 8$

7 א. $y = -x + 2$ ב. $S = \frac{1}{8}$

8 א. $a = 3$ ב. $y = -\frac{2}{9}x + 2$ ג. $S = 2\frac{2}{3}$

9 א. $y = 4x - \frac{2}{x^3} + 2$ ב. $A(0.5, -12)$ ד. $S = 2.537$

10 א. $\min(1, 0)$, $\max\left(2, \frac{1}{16}\right)$ ב. $x = 0$, $y = 0$ ג. סקיצה למטה. ד. $S = \frac{1}{24}$

11 א. $\min(-2, 0)$, $\max\left(-4, \frac{1}{64}\right)$ ג. $\left(-1.5, \frac{4}{81}\right)$ ד. $S = \frac{125}{1296} = 0.0964$

12 א. $\min(2, 4)$ ב. $A = 1$ ג. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{13}{41}$

13 א. $k = 5$ ב. $y = -0.1x + 0.2$ ג. $S = \frac{437}{60} = 7.283$

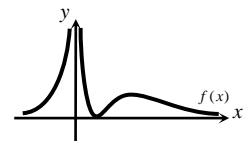
14 א. $(1, 56)$, $(-2, -4)$ ב. $S = 73.75$

15 א. $a = 32$ ב. כן - $(2, 4)$ ג. $k = 3$

16 א. $a = 3$ ב. $y = 9x - 9$ ג. $S = 5\frac{7}{9}$

17 א. $k = 3$ ג. $y = 4$ ד. $S = 0.5$

סקיצה לשאלה 10:



תרגילים העוסקים בפונקציה אי-רציונאלית:

***הערה: לשאלות בחוץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.**

(1) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x}} - 2x$, k פרמטר.

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 4$ הוא: $m = -7.75$.
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה משיק לה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(2) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = kx - \frac{1}{\sqrt{x}}$, k פרמטר.

- נתונה הפונקציה: $g(x) = 2x^2 - 9x - 4$. ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה: $x = 3$ מקביל למשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 1$.
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי היא חותכת את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה: $y = 77$.

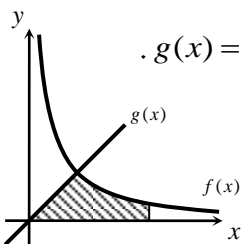
(3) א. מצא על גרף הפונקציה: $g(x) = 2\sqrt{x}$ נקודה שבה שיעורי ה- x וה- y זהים.

ב. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

- ידוע כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את הפונקציה $g(x)$ בנקודה שמצאת בסעיף הקודם. מצא את הפונקציה $f(x)$.
- ג. האם הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים בנקודות נוספות? אם כן, מצא אותן.

(4) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + k$, k פרמטר.

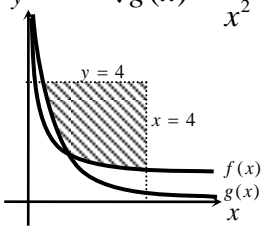
- ידוע כי גרף הפונקציה עולה בתחום: $0 < x < 4$ ויורד בתחום: $x > 4$.
- מצא את ערך הפרמטר k .
 - מצא את הפונקציה אם ידוע כי ערכה המרבי הוא: 8.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .



(5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.

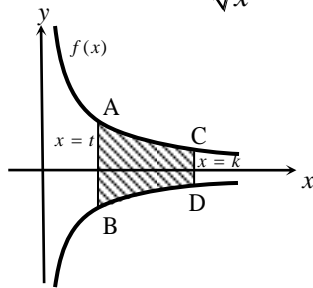
- מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x = 9$.

6 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

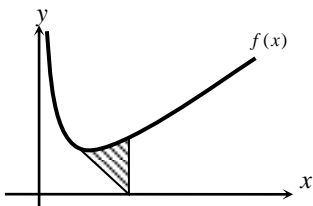


- ב. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ג. מעבירים את הישרים: $x=4$ ו- $y=4$ כך שנוצר ריבוע.
 1. חשב את השטח הכלוא בין הישרים הנ"ל והגרפים של שתי הפונקציות.
 2. חשב את היחס בין השטח שמצאת בסעיף הקודם לשטח הריבוע.

7 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.



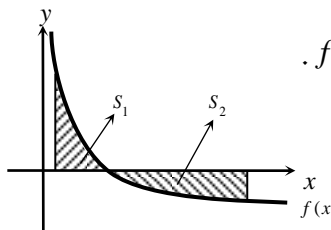
- מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי: $AB = 2CD$.
 א. הראה כי: $k = 4t$.
 ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים: $x=k$ ו- $x=t$ הוא: $S=12$. מצא את k .



8 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

- א. מצא את נקודת המינימום שלה.
 מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה: $(2,0)$ שעל ציר ה- x .
 ב. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- x היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

9 א. מצא לאיזה ערך של a יתקיים: $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.



ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

- מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=1$ ו- $x=13$ כך שנוצרים השטחים: S_1 ו- S_2 .
 מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. 1. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך $x=1$, (S_1) .
 2. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח: S_2 .
 נמק את טענתך.

(10) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

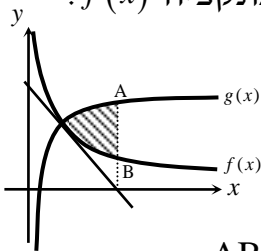
1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 3. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m = \frac{17}{16}$.
מצא את נקודת ההשקה.
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

(11) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{64k}{\sqrt{x}}$; $g(x) = kx$ (k פרמטר).

- א. הבע באמצעות k את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות.
- ב. ידוע כי השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות, ציר ה- x והאנך $x = 25$ הוא 1024. מצא את k .

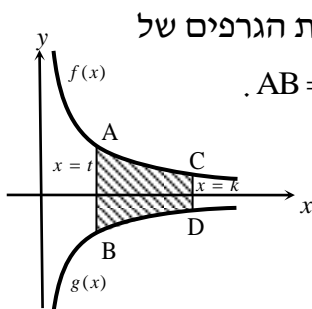
(12) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $g(x) = \frac{9}{16} - \frac{1}{x^2}$

ברביע הראשון. מנקודת החיתוך של הגרפים מעבירים משיק לפונקציה $f(x)$.



- א. הראה כי הגרפים נחתכים בנקודה שבה: $x = 4$.
- ב. כתוב את משוואת המשיק.
- ג. מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x מעלים אנך החותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישר AB.

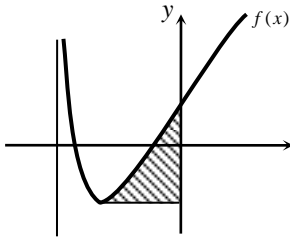
(13) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$; $g(x) = -\frac{5}{\sqrt{x}}$



מעבירים שני ישרים: $x = k$ ו- $x = t$ ($k > t$) אשר חותכים את הגרפים של

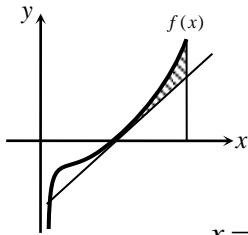
הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי: $AB = 3CD$.

- א. הראה כי: $k = 9t$.
- ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים: $x = t$ ו- $x = k$ הוא: $S = 80$. מצא את k .



14) נתונה הפונקציה: $f(x) = 16x + \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$

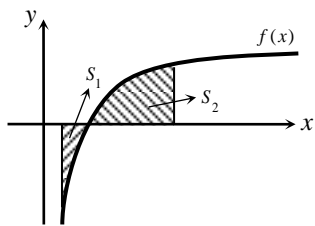
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. מעבירים אנך לציר ה- y ומנקודת הקיצון. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- y .



15) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 - \frac{32}{\sqrt{x}}$

- א. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק והאנך $x=9$ כמתואר באיור שלפניך.

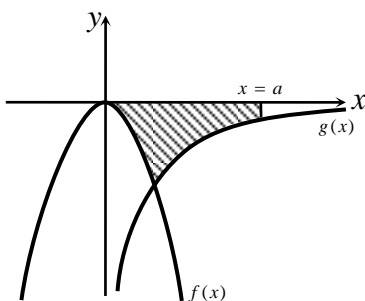
16) א. מצא עבור איזה ערך של a יתקיים: $\int_3^a \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2x-5}}\right) dx = 0$, ($a > 3$ פרמטר).



באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2x-5}}$

- מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=3$ ו- $x=7$ כך שנוצרים השטחים: S_1 ו- S_2 .
- ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. 1. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך $x=3$, (S_1).
- 2. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח S_2 . נמק את טענתך.

17) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = -6x^2$ ו- $g(x) = \frac{-6}{\sqrt{x}}$



- ברביע הרביעי. מעבירים ישר $x=a$, (a פרמטר) החותך את גרף הפונקציה $g(x)$ ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר (השטח המסומן).
- ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=14$.
- מצא את ערך הפרמטר a .

18) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x\sqrt{x+k}}{\sqrt{x}}$, k פרמטר.

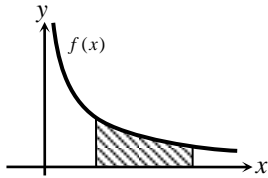
עבור: $x=1$ מתקיים כי: $f^2(1) = 676$.

- מצא את ערך הפרמטר k אם ידוע כי ידוע כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- חשב את השטח כלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך: $x=36$.

19) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{k}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}$, k פרמטר.

א. הוכח כי גרף הפונקציה לא חותך את הצירים לכל ערך של k .

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.



מעבירים את האנכים: $x=4$, $x=8$ כך שנוצר השטח המסומן. ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנכים וציר ה- x שווה ל: $42\sqrt{2} - 44$. מצא את k .

20) הנגזרת של פונקציה: $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x-5}}$. ידוע כי גרף הפונקציה חותך

את ציר ה- x בנקודה הנמצאת על הישר: $18y - 12x = -10$.

א. מצא את הפונקציה: $f(x)$.

מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = (f(x))^2 + f'(x)$. ענה על השאלות הבאות:

- כתוב את הפונקציה $g(x)$ בצורה מפורשת.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה- x והאנכים: $x=1$ ו- $x=5$.

תשובות סופיות:

(1) א. $k=1$ ב. $f(x)=\sqrt{x}-x^2+14$

(2) א. $k=4$ ב. $f(x)=2x^2-2\sqrt{x}-79$

(3) א. $(4,4)$ ב. $f(x)=x-3\sqrt{x}+6$ ג. כן - $(9,6)$

(4) א. $k=-2$ ב. $f(x)=8\sqrt{x}-2x$ ג. $(0,0)$, $(16,0)$

(5) א. $(4,8)$ ב. $S=48$

(6) א. $(1,1)$ ב. 1. $S=11$ 2. $\frac{11}{16}$

(7) ב. $k=4$

(8) א. $Min(0.5,1.5)$ ב. $S=1.75$

(9) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. 1. $S_1=2$ 2. לפי $\int_1^{13} \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ נקבל

כי: $S_2 = |-S_1| = 2$ ולכן: $S_1 + S_2 = 0$

(10) א. 1. $x > 0$ 2. $(4,0)$ 3. הנגזרת היא: $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16,14)$

ג. $S=88$

(11) א. $(16,16k)$ ב. $k=4$ (12) ב. $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$ ג. $S = 8\frac{1}{3} - 4\sqrt{3} \approx 1.405$

(13) ב. $k=36$ (14) א. $x > -0.5$ ב. $\min(-0.375, -2)$ ג. $S = \frac{5}{8}$

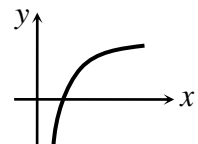
(15) ב. $y = 10x - 40$ ג. $S = 32\frac{2}{3}$

(16) א. $a=7$ ב. $(4.5,0)$ ג. 1. $S_1 = \frac{1}{2}$ 2. $S_2 = \frac{1}{2}$ (17) א. $a=4$

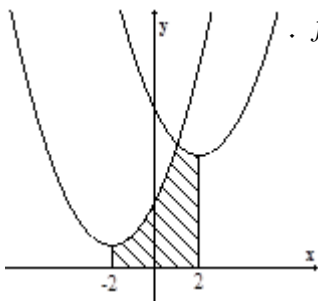
(18) א. $k=-27$ ב. $(9,0)$ ג. סקיצה למטה. ד. $S=445.5$

(19) ב. $k=10$ (20) א. $f(x) = \sqrt{6x-5}$ ב. $g(x) = 6x - 5 + \frac{3}{\sqrt{6x-5}}$ ג. $S=56$

סקיצה לשאלה 18:

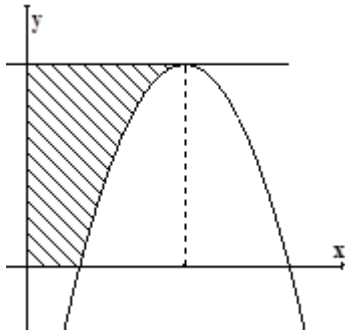


תרגול מבגרויות של 3 יחידות:



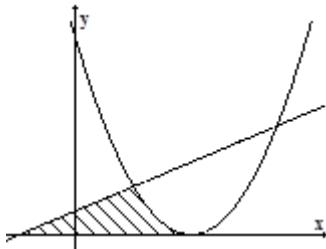
1) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 + 4x + 6$, $g(x) = x^2 - 4x + 14$.

- מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
- מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- x והישרים $x = 2$ ו- $x = -2$. (השטח המקווקו בציור).



2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$ (ראה ציור).

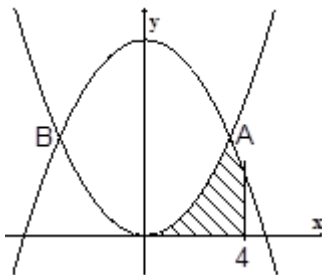
- מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה.
- מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום שלה?
- מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק בנקודת המקסימום, הצירים וגרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).



3) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$ ונתון

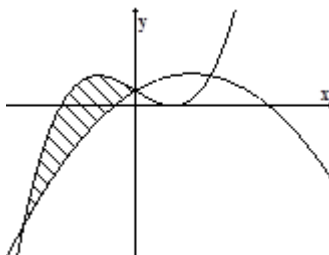
הישר $y = 0.5x + 0.5$ (ראה ציור).

- מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המקווקו בציור).



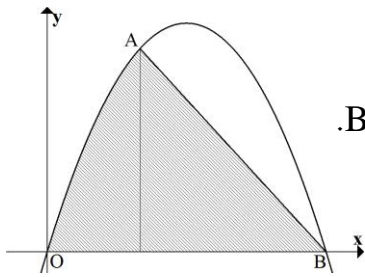
4) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 18$.

- הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-B. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.
- חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- x והישר $x = 4$.



5) נתונות שתי פונקציות: $y = -x^2 + 3x + 2$, $y = x^3 - 3x + 2$.

- מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.
- מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, השטח המקווקו בציור.



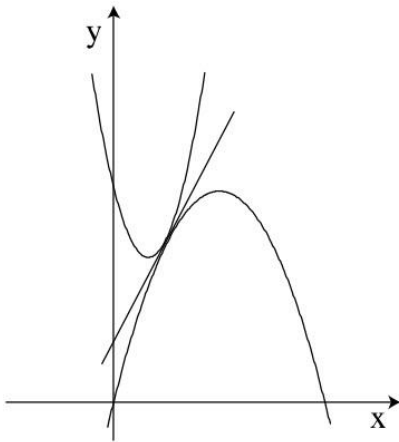
- 6 נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax$.
 הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2, 8)$ (ראה ציור).
 א. מצא את ערך הפרמטר a .
 ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה $O(0, 0)$ ובנקודה B .
 מצא את שיעורי הנקודה B .
 ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המיתר AB וציר ה- x .

תשובות סופיות:

- 1 א. $(1, 11)$ ב. $25\frac{1}{3}$ יח"ש. 2 א. $(3, 4)$ ב. $y = 4$ ג. $6\frac{2}{3}$ יח"ש. 3 $1\frac{1}{3}$ יח"ש.
 4 א. $x = \pm 3$ ב. $14\frac{2}{3}$ יח"ש. 5 א. $x = 0, 2, -3$ ב. 15.75 יח"ש.
 6 א. $a = 6$ ב. $B(6, 0)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.

תרגול מבגרויות:

*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.



1) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = 3x^2 - 4x + c$

$g(x) = -x^2 + bx$

b ו c הם פרמטרים.

ישר משיק לגרפים של שתי הפונקציות בנקודה

המשותפת לשניהם שבה $x = 1$, (ראה ציור).

א. מצא את הערך של b .

ב. מצא את הערך של c .

הצב את הערך של b ואת הערך של c שמצאת בסעיף א, וענה על הסעיפים ב ו- ג.

ב. מצא את משוואת המשיק המשותף לשני הגרפים.

ג. S_1 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק המשותף

ועל ידי ציר ה- y . S_2 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי

המשיק המשותף, ועל ידי ציר ה- y . מצא את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

2) בציוור מוצגת סקיצה של הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$

a הוא פרמטר.

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של

הפונקציה $f(x)$, והוכח שאחת מהן היא

מקסימום והאחרת היא מינימום.

ב. נתון כי הישר $y = -8x + 14$ עובר דרך נקודת

המינימום של הפונקציה $f(x)$.

מצא את הערך של הפרמטר a .

ג. מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך

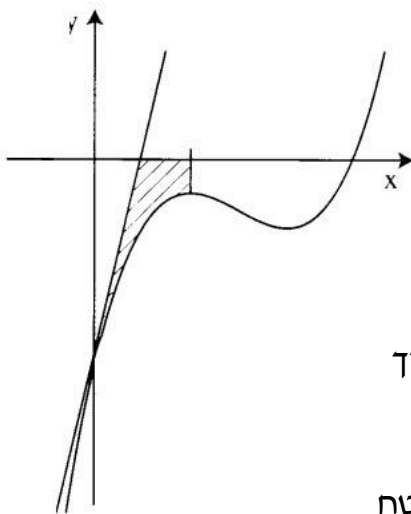
של הגרף עם ציר ה- y , ומעבירים אנך לציר ה- x דרך

נקודת המקסימום של הפונקציה.

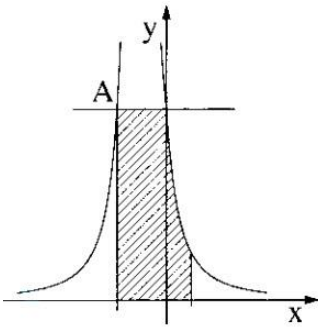
הצב את הערך של a שמצאת בסעיף ב, וחשב את השטח

המוגבל על ידי המשיק, על ידי האנך, על ידי גרף

הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הציר ה- x (השטח המקווקו בציוור).



3) בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$



- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ג. דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y העבירו ישר המקביל לציר ה- x . הישר חותך את גרף הפונקציה בנקודה נוספת, A (ראה ציור).
- (1) מצא את השיעורים של הנקודה A .
- (2) דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה- x . מצא את השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי הישר המקביל, על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישר $x = \frac{1}{2}$ ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

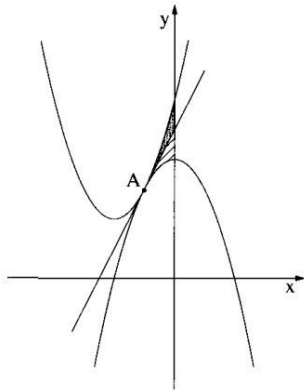
4) בציור שלפניך מוצגות שתי פרבולות:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6, g(x) = -x^2 + c$$

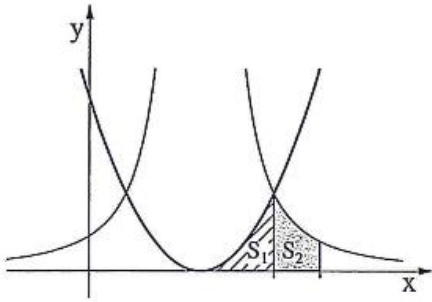
c הוא פרמטר.

הפרבולות משיקות זו לזו בנקודה A .

דרך נקודה A העבירו משיק המשותף לשתי הפרבולות (ראה ציור).



- א. (1) סמן ב- t את שיעור ה- x של נקודה A , והבע באמצעות t את השיפוע של המשיק המשותף. הבע בשני אופנים.
- (2) מצא את השיעורים של נקודה A .
- (3) מצא את ערך הפרמטר c .
- ב. המשיק המשותף מחלק את השטח, המוגבל על ידי שתי הפרבולות ועל ידי ציר ה- y , לשני שטחים (השטח האפור והשטח המקווקו בציור). הצב את הערך של הפרמטר c שמצאת, והראה כי שני השטחים שווים זה לזה.



5) בציור שלפניך מוצגים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = (x-a)^2, \quad g(x) = \frac{16}{(x-a)^2}$$

a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים

של הפונקציה $g(x)$ (הבע באמצעות a במידת הצורך).

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות היא הנקודה שבה $x = a + 2$.

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי

הישר $x = a + 2$ (השטח המקווקו בציור).

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי

הישרים $x = a + 2$, $x = a + 3$ (השטח האפור בציור).

ב. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

6) בציור מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 4$.

הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית

הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי הצירים (השטח המקווקו בציור).

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 4$ (השטח האפור בציור)

א. (1) נתון: $f(0) = 0$, $S_1 = 4$. חשב את $f(2)$.

(2) נתון גם: $S_2 = 4$. חשב את $f(4)$.

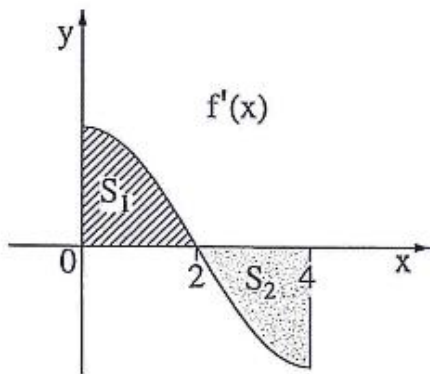
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון

הפנימית של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון,

וקבע את סוגה. נמק.

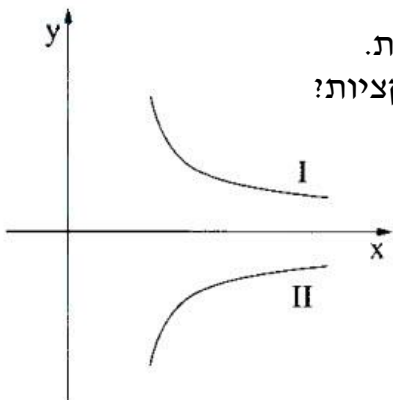
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

בתחום הנתון.



7) הגרפים I ו-II שבציור הם של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-3}}, g(x) = -\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$$



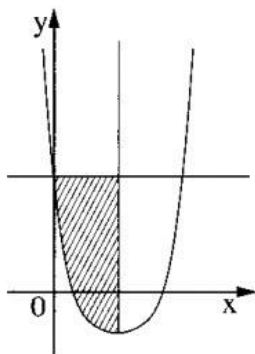
א. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.
 (2) מהי האסימפטוטה האנכית של כל אחת מהפונקציות?

ב. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$, ואיזה גרף הוא של הפונקציה $g(x)$? נמק.

ג. הישר $y=2$ חותך את הגרף I בנקודה A.

הישר $y=-2$ חותך את הגרף II בנקודה B.

מצא את השטח המוגבל על ידי הישר AB, על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, ועל ידי הישר $x=3$.



8) נתונה הפונקציה $f(x) = (2x-2)^4 - 3$.

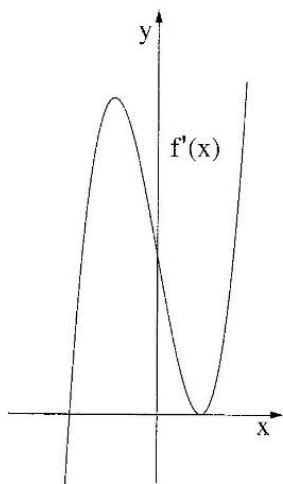
דרך נקודת המינימום של הפונקציה העבירו ישר המאונך לציר ה- x ,

ודרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y העבירו ישר המקביל לציר ה- x (ראה ציור).

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את משוואת האנך ואת משוואת המקביל.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי האנך ועל ידי המקביל, השטח המקווקו בציור.



9) $f(x)$ היא פונקציה שמוגדרת לכל x .

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עובר דרך

הנקודות: $(1,0), (-2,0)$.

א. (1) על פי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$

(2) מהו שיעור ה- x של נקודת הקיצון של

הפונקציה $f(x)$ ומהו סוג הקיצון? נמק.

(3) נתון כי פונקציית הנגזרת היא: $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$.

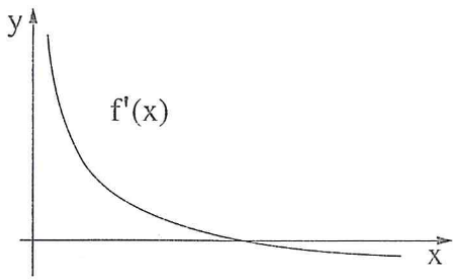
שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא -10 .

מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השיעורים של הנקודות שבהן שיפוע המשיק

לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 0 .

10) בציור שלפניך מוצג גרף של פונקציית הנגזרת: $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 1$, $x > 0$.



א. מצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה- x .

ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה. נמק.

ג. ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הפנימית של $f(x)$ היא 0. מצא את $f(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x=4$, על ידי הישר $x=25$, ועל ידי ציר ה- x .

תשובות סופיות:

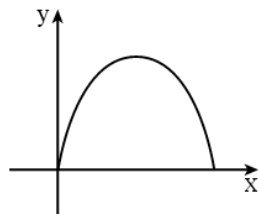
1) א. (1) $b=4$ (2) $c=4$ ב. $y=2x+1$ ג. $\frac{S_1}{S_2} = 3$

2) א. $x_{\max} = 1, x_{\min} = 2$ ב. $a=6$ ג. 1

3) א. $x \neq -\frac{1}{2}$ ב. $x = -\frac{1}{2}, y=0$ ג. (1) $(-1, 4)$ (2) 5

4) א. (1) $-2t, 2t+4$ (2) $A(-1, 3)$ (3) $c=4$

5) א. $y=0, x=a$ ב. $\frac{S_1}{S_2} = 1$



6) א. (1) 4 (2) 0 ב. $\max(2, 4)$ ג. סקיצה בצד.

7) א. (1) $f(x): x > 1.5, g(x): x > 1.5$ (2) $f(x): x = 1.5, g(x): x = 1.5$

ב. $I - f(x), II - g(x)$ ג. 2.928

8) א. כל x ב. $y=13, x=1$ ג. 12.8

9) א. (1) עלייה: $x > -2$, ירידה: $x < -2$ (2) $x_{\min} = -2$ (3) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 14$

ב. $(-2, -10), (1, 17)$

10) א. $x=16$ ב. $x_{\max} = 16$ ג. $f(x) = 8\sqrt{x} - x - 16$ ד. 5

נספח 1 – דף ההוראות הרשמי לשאלון 804:

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ג, 2013

מספר השאלון: 314, 035804

נספח: דפי נוסחאות ל-4 יחידות לימוד

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות
- פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
- פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
- סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.
- ב ה צ ל ח ה !**

נספח 2 – עקרונות מנחים לבדיקת בחינות הבגרות:

מטרת מסמך זה היא להביא לידיעת המורים את השגיאות השכיחות ואת אופן הערכתן בבדיקת השאלות בבחינת הבגרות. במסמך נרשום כמה אחוזים מורידים על שגיאות רק במקרים כלליים שאינם תלויים בשאלה ספציפית, בשאר המקרים רק נתאר את השגיאה.

עקרונות כלליים

- שאלות בבחינה ייבדקו על פי סדר הופעתן בלבד. נבחן חייב לציין איזה חלק מהבחינה הוא טיוטה. כל שאלה שנבחן התחיל לפתור ולא מחק, לא רשם "טיוטה" או לא רשם "לא לבדוק", תיבדק לפי סדר הופעתה ולא יתקבל ערעור בעניין זה.
- החלטה על מספר נקודות שמורידים על טעות תלויה באופי השגיאה, ביכולת לבדוק את המשך השאלה, ברמת הקושי שנוצרה עקב השגיאה וכדומה. בכל מקרה, אם נבחן טעה טעות גסה (ראה בהמשך דוגמאות), יקבל נקודות רק לסעיפים שאינם קשורים בטעות זו. למשל, קבלת הסתברות גדולה מ-1 ושימוש בתוצאה זו גם בהמשך השאלה יגרום לפסילת כל השאלה, אך אם בהמשך הנבחן אינו משתמש בתוצאה זו הרי שרק עבור הסעיף השגוי לא יינתנו נקודות.
- ניקוד סעיפי השאלות בבחינת הבגרות אינו מתחלק שווה בשווה בין הסעיפים אלא תלוי ברמת המורכבות של הסעיף, ברמת הקושי של הסעיף יחסית לסעיפים אחרים.
- נבחן שביצע פעולה לא חוקית במהלך הפתרון ייקנס גם אם קיבל תשובה נכונה. למשל: חילק ב- x את המשוואה $x^2 - x = 0$ ללא ציון $x \neq 0$, ייקנס גם אם פתרון הבעיה הוא $x=1$ בלבד.
- נבחן שהעתיק בצורה שגויה מהשאלון ביטוי או נתון, ייקנס בצורה משמעותית אם שינה את רמת הקושי של השאלה.
- נבחן שהניח הנחה שגויה, המפשטת את כל השאלה, לא יקבל נקודות לשאלה זו.
- נבחן שרשם ישירות תשובה, בלי לרשום את הדרך, לא יקבל נקודות לסעיף גם במקרים שהתשובה מתקבלת בחישוב פשוט. ייתכן שהוא יוחשד בהעתקה (פרט למקרים פשוטים של פתרון משוואה ריבועית).
- בכל מקרה רלוונטי על הנבחן לסמן יחידות מידה בתשובה. למשל, בזוויות יש לסמן מעלות ליד המספר, אחרת מדובר במידת הזווית ברדיאנים.
- על טעות ברישום סדר האיברים בזוג סדור מורידים 5%.

- על טעות חשבונית מורידים בין 5% ל- 15% (תלוי באופי השגיאה).
- בשאלה מילולית מכל סוג תלמיד חייב להגדיר את המשתנים באופן ברור (מילולי) ולרשום בסוף תשובה מילולית.
- אם נבחן לא פסל תוצאות שיש לפסול, ייקנס בהתאם לאופי הטעות.
- נבחן שפתר שאלה המנוסחת באופן כללי, עבור מקרה פרטי, לא יקבל ניקוד לשאלה. לדוגמה: במקום פרמטר נבחן הציב מספר קבוע ופתר את השאלה למקרה זה.
- מותר להגיע לתשובה על ידי ניסוי וטעייה, בתנאי שהנבחן מראה את כל הניסיונות, ובתנאי שלא צוין שעל הנבחן לפתור את השאלה על סמך סעיפים קודמים. אם נבחן לא מראה את כל הניסיונות הוא עשוי להיחשד בהעתקה.
- בסעיפים בהם נרשם "נמק", יש לנמק באמצעים מקובלים כגון באופן אלגברי ו/או באופן מילולי. ללא נימוק, הנבחן לא יקבל נקודות לסעיף זה.
- שימוש בטכניקות או בידע שאינו חלק מתוכנית הלימודים חייב הסבר של הנבחן, שיכלול את מהות הטכניקה ומדוע אפשר להשתמש בה במקום שבו השתמש. לא מספיק לרשום ביטויים כגון: "שיטת הקרוס", "מכפלה ווקטורית", "משפט גרין" ועוד. נבחן שלא ייתן הסבר משכנע, לא יקבל נקודות בסעיף זה.
- **עצם השימוש בנוסחאות או בטכניקות שאינן בתוכנית הלימודים איננו פסול ובתנאי שהנבחן יראה הבנה בתהליכים אלה.**
- הנחיות חשובות בנוגע לשעתוק:
 - יש לשלוח למרב"ד שתי מחברות: מחברת המקור והמחברת המשועתקת.
 - המחברת המשועתקת חייבת להיות זהה למקור.
 - סדר השאלות ותוכן חייב להיות זהה למקור.
 - אם אין התאמה מלאה בין מחברת המקור לבין המחברת המשועתקת, הנבחן ייחשד באי שמירה על טוהר הבחינות והבחינה תטופל בהליך המקובל למחברות חשודות בהעתקה.

דגשים בהתאם לנושאי הלימוד

1. שאלות מילוליות

- על הנבחן להגדיר את הנעלמים ולרשום תשובה סופית ברורה.
- אם נבחן טעה ביחידות מידה כגון ביחידות זמן, ביחידות מרחק וכד', ההורדה היא משמעותית.
- אם נבחן תרגם מושגים כגון "גדול ב" או "קטן ב" בצורה שגויה, ההורדה היא משמעותית.
- נבחן שבנה טבלה מסודרת ומלאה ולא המשיך בתהליך הפתרון, יקבל ציון חלקי בלבד.

2. אינדוקציה מתמטית

- אם נבחן לא רשם נכון את הנחת האינדוקציה או לא רשם נכון את מה שצריך להוכיח, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- נבחן שרשם בהנחת האינדוקציה "נניח לכל n טבעי", נקנס ב- 20%.
- חובה לרשום משפט סיכום.

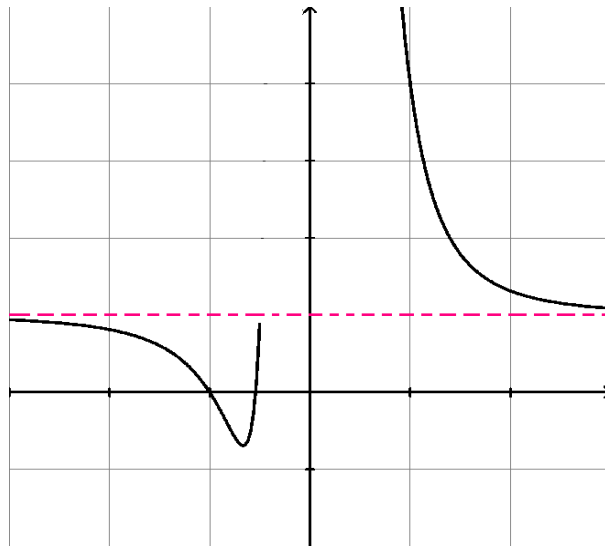
3. אלגברה

- בסדרות מותר לרשום את כל איברי הסדרה הרלוונטיים וכך להגיע לתשובה, אך אם שגה בדרך פתרון זו בחישוב אחד האיברים או בסכומם לא יקבל נקודות לסעיף.
- בשאלת גידול ודעיכה אם נבחן פתר לפי גדילה במקום דעיכה או להפך לא יקבל נקודות לשאלה.
- נבחן שטעה בחוקי חזקות לא יקבל נקודות על הסעיף ועל סעיפים הנובעים ממנו (למשל, רשם $(5^3)^x = 15^x$, $3 \cdot 5^x = 15^x$).
- אם נבחן השתמש בחוקי לוגריתמים באופן שגוי, לא יקבל נקודות על הסעיף (למשל, רשם כי לוגריתם של מכפלה שווה למכפלת הלוגריתמים או כל טעות דומה).

4. חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- אם נבחן מציב במקום פרמטר ערך מסוים קבוע, במקום שבו היה עליו להביע פתרונות באמצעות הפרמטר, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- נבחן שטעה בחישוב תחום ההגדרה ובעקבות שגיאה זו הפתרון השתנה בצורה משמעותית, ייקנס לא רק בסעיף תחום ההגדרה אלא גם בסעיפים נוספים בהם טעות זו הקלה על הפתרון.
- למשל: אם בשל טעות בתחום ההגדרה התקבלה פונקציה ללא אסימפטוטה אנכית, וכתוצאה מכך השתנה גרף הפונקציה באופן משמעותי, הנבחן ייקנס גם בסעיפים נוספים בהתאם לשאלה.
- נבחן שקיבל תוצאות שאינן מתיישבות עם הנתון בשאלה, ייקנס בכל הסעיפים המושפעים מתשובתו.
- למשל: אם נתון בשאלה כי לפונקציה יש נקודת קיצון ובעקבות טעות בתחום ההגדרה קיבל הנבחן כי לפונקציה אין נקודות קיצון, במקרה זה ייקנס הנבחן על תחומי עליה וירידה וכד'.
- נבחן שציין תחום הגדרה ולא התייחס לנקודות אי הגדרה, לא יקבל נקודות על תחום ההגדרה וכן על הסעיפים הקשורים.
- נבחן שרשם בתחום ההגדרה אי שוויון חזק במקום אי שוויון חלש או להפך, לא יקבל נקודות לסעיף זה.
- בחקירה של פונקציה טריגונומטרית אין להשאיר את התשובה במעלות.
- אם בגזירה של פונקציה מורכבת נבחן לא התייחס לפונקציה הפנימית, במרבית המקרים מפסיקים לבדוק את הסעיף ולפעמים אפילו את השאלה כולה (אם הפתרון בנוי על הגזירה). החלטה על מספר נקודות שמורידים על הטעות תלויה באופי השגיאה, ביכולת לבדוק את המשך השאלה, ברמת הקושי שנוצרה ועוד. **בכל מקרה, אם נבחן טעה טעות גסה בנגזרת, יקבל נקודות רק לסעיפים שאינם קשורים לנגזרת**
- אם נבחן שרטט אסימפטוטות לא נכונות, או שרטט גרף מחוץ לתחום ההגדרה, או שרטט גרף החותך את ציר ה-x בצורה שגויה, או חותך אסימפטוטה אנכית, לא יקבל נקודות לסעיף.

לדוגמה, טעות נפוצה בשרטוט גרפים עם אסימפטוטות:



- אם בפונקציית מנה, נבחן כפל את הפונקציה במכנה, ו"קיבל" פונקציה ללא מכנה (למשל, פולינום), לא יקבל נקודות לכל השאלה.
- בבדיקת סוג הקיצון של פונקציית מנה, נבחן חייב להסביר מדוע מספיק לגזור את המונה בלבד. אין לרשום את נגזרת המונה כנגזרת השנייה של הפונקציה.
- כאשר לפונקציה אין נקודות קיצון בתחום מסוים, על הנבחן לנמק את העלייה/הירידה של הפונקציה בתחום זה.
- בפונקציות בעלות תחום סגור יש להתייחס לקצות התחום בעת רישום נקודות קיצון.
- נבחן שגה בפתרון של אי שוויון, לא יקבל נקודות לסעיף זה ולסעיפים הקשורים.
- במציאת פונקציה קדומה:

- אם הטעות היא רק ברמה של מקדם קבוע, מורידים נקודות רק על הפונקציה הקדומה וממשיכים לבדוק על פי השגיאה.
- בכל מקרה אחר של טעות, מפסיקים לבדוק את הסעיף הרלוונטי.
- במקרה שנבחן טעה טעות גסה במציאת הפונקציה הקדומה, לא יקבל נקודות על הסעיף ועל סעיפים הנובעים ממנו

$$\text{(למשל רשם: } \int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} \text{)}$$

- נבחן שלא רשם בכתובת האינטגרל dx , לא רשם סוגריים במקום הנכון וכדומה, ייקנס ב- 5%.

- בעת חישוב האינטגרל חייבים לרשום את הצבת הגבולות בפונקציה הקדומה.
- נבחן שטעה בזיהוי השטח הנדרש בשאלה וחישוב שטח אחר מהמבוקש, יקבל נקודות רק עבור מציאת הפונקציה הקדומה.
- בחשבון אינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות על הנבחן לעבוד ברדיאנים, אחרת לא יקבל ניקוד עבור החישוב.
- נבחן שקיבל שטח שלילי ורשם בשרשרת השוויונות ערך מוחלט רק על התוצאה הסופית יקבל נקודות רק עבור מציאת הפונקציה הקדומה.
- אם השאיר את תוצאת השטח כמספר שלילי לא יקבל נקודות לסעיף זה.
- אם במציאת נפח גוף סיבוב נבחן רשם ריבוע ההפרש של פונקציות במקום הפרש הריבועים, מפסיקים לבדוק את הסעיף הרלוונטי.
- אם נבחן שכח לרשום π במציאת נפח גוף סיבוב, מורידים 10%.

5. בעיות ערך קיצון

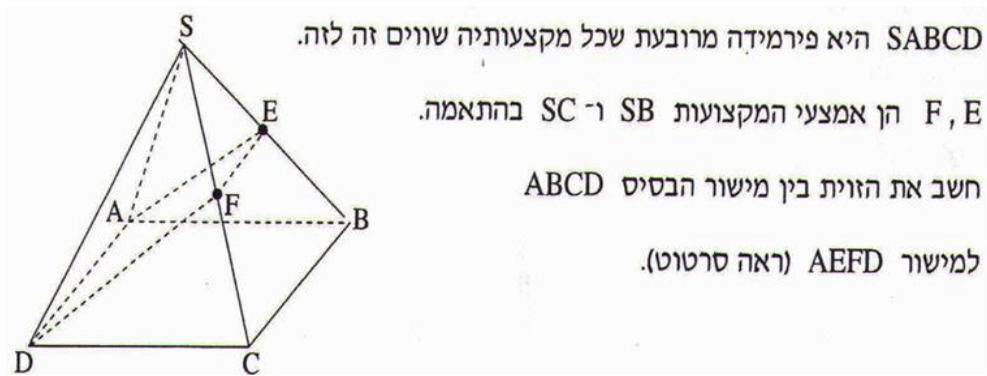
- בניית הפונקציה הנכונה מהווה כ- 50% מהשאלה.
- אם יש טעות חמורה בגזירה, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- אי בדיקת מינימום/מקסימום גורמת להורדה של עד 10%.
- נבחן ששגה משמעותית בבניית הפונקציה, לא יקבל נקודות לכל השאלה.

6. טריגונומטריה במישור ובמרחב

- נבחן שהשתמש בזוויות טריגונומטריות שגויות, לא יקבל ניקוד על הסעיף.
- נבחן שהשתמש במשפט הסינוסים עם רדיוס של מעגל שאיננו חוסם את המשולש שעבורו השתמש במשפט, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- מפסיקים לבדוק תשובה שבה הפתרון מבוסס על הנחת יסוד שגויה. למשל, שימוש בשיקול גיאומטרי שגוי כגון: תיכון הוא חוצה זווית....
- אין להשאיר תשובה מהצורה $\sin(90^\circ - \alpha)$ או $\cos(\pi - \alpha)$ וכד'.
- בטריגונומטריה במישור ובמרחב, נבחן חייב לרשום באיזה משולש הוא מבצע תהליך. אם לא רשם את המשולש ולא ברור לאיזה משולש הכוונה, הוא לא יקבל נקודות לסעיף.
- נבחן שטעה בפונקציה טריגונומטרית או במשפט הסינוסים, או במשפט הקוסינוסים, לא יקבל נקודות לסעיף.
- אם נבחן שגה בזיהוי של זווית במרחב מפסיקים לבדוק את השאלה.

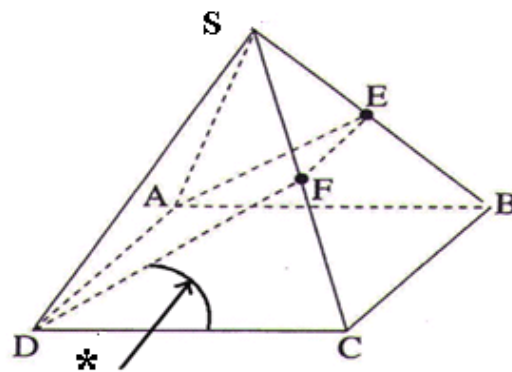
במקרים רבים בחירת הזווית נעשית על ידי גישה אינטואיטיבית ולא על פי הגדרה ומכך נובעות מרבית הטעויות, בפרט אם יש צורך לזהות זווית במקרים פחות סטנדרטיים.

לדוגמה: מועד ב' מיוחד תשס"ז



טעות נפוצה בפתרון שאלה זו, היא זיהוי שגוי של הזווית המסומנת

בשרטוט ב- (*).



7. סטטיסטיקה והסתברות

- נבחן שרשם עץ מלא ונכון ולא המשיך, יקבל נקודות עבור העץ.
- נבחן שחישב מקרים אפשריים וחיבר ביניהם ושכח מקרה אחד יקבל, בדרך כלל, חלק מנקודות הסעיף. אם שכח יותר ממקרה אחד לא יקבל נקודות על הסעיף.
- נבחן שקיבל הסתברות גדולה מ-1 או הסתברות שלילית לא יקבל נקודות על הסעיף. השתמש בכך גם בהמשך לא יקבל נקודות לשאלה כולה.
- על הנבחן להגדיר בבירור את המאורעות ולפרט את כל תהליך הפתרון כולל הצבות.
- כדי לקבל נקודות לפתרון שאלה בהתפלגות נורמלית יש למלא במחברת את הגרף בשלמות (המשתנה והאחוזים), או לחילופין להסביר כל סעיף בנפרד. תשובה סופית בלבד לא תזכה בנקודות.

8. גיאומטריה המישור

- יש לנמק כל שלב גיאומטרי על ידי ציטוט משפט מתאים.
כל נימוק חסר ייקנס ב-10%.
- מותר להשתמש רק במשפטים הנמצאים ברשימת המשפטים שפורסמה באתר המפמ"ר. שימוש בטענה שאיננה נמצאת ברשימת המשפטים מחייבת הוכחה. היעדר הוכחה במקרה כזה ייחשב כדילוג על שלבים בהוכחה.

9. גיאומטריה אנליטית

- לא יתקבל פתרון על פי שרטוט בלבד.

10. וקטורים

- אם נבחן צמצם וקטורים במכפלה סקלרית, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- אם נבחן חילק וקטור בווקטור, הנבחן ייקנס גם אם לטעות אין השפעה על הפתרון.
- נבחן שלא סימן ווקטורים בצורה תקנית ייקנס.

11. מספרים מרוכבים

- טיפול שגוי של נבחן בערך המוחלט של מספר מרוכב, מביא להפסקת הבדיקה.

אירמה ג'ן

מפמ"ר מתמטיקה

נספח 3 – משפטים בגאומטריה:

המשפטים:

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180° .
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.
3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה צלעות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180° .
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה ז.ז.צ.
18. משפט חפיפה ז.צ.ז.
19. משפט חפיפה צ.צ.צ.
20. משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים.
21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו.
22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות אז שני הישרים מקבילים.

24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.

25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי אז :

א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.

ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.

ג. סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180° .

26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.

27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.

28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.

30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.

31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.

32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.

34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.

35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.

36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

37. אלכסוני המלבן שווים זה לזה.

38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

39. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

40. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.

41. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

42. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

43. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

44. בטרפז , ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה.

45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 2:1.

(החלק הקרוב לקדקוד הוא פי 2 מהחלק האחר).

47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.

48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית אז היא נמצאת על חוצה הזווית.
49. שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.
51. כל נקודה, הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
52. כל נקודה, הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
56. ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180° .
57. מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.
58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.
60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.
61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.
62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.
64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.
66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.
67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.

70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.
71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר שוות זו לזו.
73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).
74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.
75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.
76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.
77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.
79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.
80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.
82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו.
84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.
86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
87. משולש בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה הוא משולש ישר זווית.
88. אם במשולש ישר זווית, זווית חדה של 30° , אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.
89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30° .
90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים.
91. משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.

92. משפט הפוך למשפט תאלס : שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים.

93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה) הוא חוצה את זווית המשולש שדרך קודקודה הוא עובר.

95. חוצה זווית חיצונית במשולש, שאינו מקביל לצלע המשולש, מחלק את הצלע שמול הזווית הצמודה לה חלוקה חיצונית ביחס של שתי הצלעות הכולאות את הזווית הפנימית הצמודה לה.

96. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה חיצונית כיחס הצלעות האחרות (בהתאמה) הוא חוצה את הזווית החיצונית שדרך קודקודה הוא עובר.

97. משפט דמיון ז.ז.צ.

98. משפט דמיון ז.ז.

99. משפט דמיון צ.צ.צ.

100. במשולשים דומים :

א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.

ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.

ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.

ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.

ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

101. הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

102. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $180^\circ(n-2)$.

נספח 5 - דפי נוסחאות ל-4 יחידות לימוד:

נוסחאון מתמטיקה

4 יחידות לימוד

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \qquad \text{אלגברה:}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{השורשים:} \quad ; \quad (a \neq 0) ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{משוואה ריבועית:}$$

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	סדרות:
$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	כלל נסיגה:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	איבר n-י:
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	סכום:
$S = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{סכום אינסופי:}$	$S_n = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1)d]}{2}$	

חזקות: $(b \neq 0 \ a \neq 0)$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad ; \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

גדילה ודעיכה:

$$\text{שעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן t הוא q.} \qquad M_t = M_0 \cdot q^t$$

$$\log_a(a^b) = b \quad ; \quad a^{\log_a b} = b \quad ; \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad : (a, b, c > 0 ; a, b \neq 1) \quad \text{לוגריתמים:}$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad ; \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad ; \quad \log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$$

גאומטרייה אנליטית: שיפוע, m , של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m , העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי נקודת האמצע $M(x_M, y_M)$ של קטע שקצותיו $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הם :

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שני ישרים, בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם $m_1 \cdot m_2 = -1$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) , ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

הסתברות:

נוסחת ברנולי – ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n ניסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות

להצלחה היא p : $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

הסתברות מותנית : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; נוסחת בייס : $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

טריגונומטרייה:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad ; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad ; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

משפט הסינוסים : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ (R – רדיוס המעגל החוסם)

משפט הקוסינוסים : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ (γ היא הזווית הכלואה בין a ל- b)

אורך קשת של α רדיאנים : $\ell = \alpha R$ שטח גזרה של α רדיאנים : $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$

שטח משולש : $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל- c)

גופים במרחב:

מנסרה ישרה וגליל ישר: נפח: $V = B \cdot h$ (B – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

שטח מעטפת: $M = P \cdot h$ (P – היקף הבסיס, h – גובה הגוף)

פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R \ell$ (R – רדיוס העיגול, ℓ – הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

נגזרות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad (x^t)' = tx^{t-1} \quad (t \text{ ממשי})$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad ; \quad (\cos x)' = -\sin x \quad ; \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad ; \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad ; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{נגזרת של } \underline{\text{מנת}} \text{ פונקציות:}$$

נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$

כאשר $u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית)

ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית).

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad ; \quad (t \neq -1, t \text{ ממשי}) \int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad \underline{\text{אינטגרלים:}}$$

אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ אז: $\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + C$

נספח 6 - דף נוסחאות מורחב ל-4 יחידות לימוד:

נוסחאון מורחב במתמטיקה

4 יחידות לימוד

השימוש בדפי נוסחאות מורחבים הוא רק למי שקיבל לכך אישור מתאים.

אלגברה:

פונקציה ריבועית: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ; ערך ה- x של קדקוד הפרבולה: $x = \frac{-b}{2a}$

גאומטרייה אנליטית: מעגל שמרכזו בראשית הצירים, ורדיוסו R : $x^2 + y^2 = R^2$

חזקות: ($y \neq 0$ $a \neq 0$) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

טריגונומטריה:

שטח עיגול והיקפו: $P = 2\pi R$ $S = \pi R^2$

זהויות בסיסיות: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות:

$$(\sqrt{mx+b})' = \frac{m}{2\sqrt{mx+b}}$$

$$\left(\frac{1}{mx+b}\right)' = \frac{-1 \cdot m}{(mx+b)^2}$$

אינטגרלים:

$$\int (mx+b)^t dx = \frac{1}{t+1} \cdot \frac{(mx+b)^{t+1}}{m} + C \quad (t \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{(mx+b)^2} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{-1}{(mx+b)} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{mx+b}} dx = \frac{2}{m} \cdot \sqrt{mx+b} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos(mx+b) dx = \frac{1}{m} \sin(mx+b) + C$$

$$\int \sin(mx+b) dx = -\frac{1}{m} \cos(mx+b) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^{mx+b} dx = \frac{1}{m} e^{mx+b} + C$$

$$\int a^{mx+b} dx = \frac{a^{mx+b}}{m \cdot \ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{mx+b} dx = \frac{1}{m} \ln|mx+b| + C$$

מתמטיקה 4 יחידות שאפון 805

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תלמידים יקרים

ספר תרגילים זה הוא פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד על פי תכנית הלימודים של משרד החינוך. כל פרק פותח בסיכום ההגדרות, המשפטים והמתכונים הקשורים לנושא הפרק, לאחריו מופיעה טבלת הסרטונים באתר ולבסוף קובץ תרגילים. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.



תוכן העניינים:

7.....	פרק 1 – סדרות:
7	סדרה חשבונית:
11.....	תשובות סופיות:
12	סדרה הנדסית:
15.....	תשובות סופיות:
16	סדרות מעורבות:
16.....	תשובות סופיות:
17	סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:
19.....	תשובות סופיות:
20	סדרות כלליות וסדרות נסיגה:
22.....	תשובות סופיות:
23	תירגול נוסף:
23.....	סדרה חשבונית:
24.....	סדרה הנדסית:
25.....	סדרות מעורבות:
27.....	סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:
28.....	סדרות כלליות וסדרות נסיגה:
29.....	תשובות סופיות:
31	תרגול מבגרויות:
34.....	תשובות סופיות:
35.....	פרק 2 - טריגונומטריה במרחב:
35	הגדרות יסודיות:
36.....	שאלות יסודיות – סימון זוויות במרחב:
37	התיבה והקובייה:
37.....	תיבה שבסיסה ריבוע:
39.....	תיבה שבסיסה מלבן:
42.....	קובייה:
43	מנסרה ישרה:
44.....	מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:
45.....	מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:
45.....	מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:
47	פירמידה ישרה:
48.....	פירמידה שבסיסה ריבוע:
49.....	פירמידה שבסיסה מלבן:
54.....	פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

54	פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים :
55	פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית :
55	תשובות סופיות :
58	תירגול נוסף :
58	תיבה :
60	מנסרה ישרה :
62	פירמידה :
65	תשובות סופיות :
66	תרגול מבגריות :
70	תשובות סופיות :
71	פרק 3 – חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות ולוגריתמיות :
71	חוקי חזקות :
72	משוואות מעריכיות :
73	משוואות לוגריתמיות :
77	אי-שוויונים מעריכיים :
77	אי-שוויונים לוגריתמיים :
78	תירגול נוסף :
78	חזרה על חוקי חזקות ושורשים :
80	תשובות סופיות :
81	משוואות מעריכיות :
83	אי-שוויונים מעריכיים :
84	ממשוואות מעריכיות עם משתנה שאינו במעריך :
84	משוואות מעריכיות המתקבלות תוך כדי פתרון בעיות גדילה ודעיכה :
85	תשובות סופיות :
86	הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות :
88	תשובות סופיות :
90	חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות :
95	תשובות סופיות :
96	מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות :
98	תשובות סופיות :
99	אי-שוויונים לוגריתמים :
99	תשובות סופיות :
100	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים ולוגריתמים נוספים :
101	תשובות סופיות :
102	פרק 4 - בעיות גדילה ודעיכה :
102	שאלות חישוב יסודיות :
103	שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית :

103	שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית :
105	שאלות העוסקות במציאת קצב הגידול/הדעיכה או אחוז הגידול/הדעיכה :
106	שאלות העוסקות במציאת הזמן :
106	שאלות שונות :
107	תשובות סופיות :
108	תירגול נוסף :
114	תשובות סופיות :
115	תרגול מבגריות :
115	תשובות סופיות :
116	פרק 5 – משוואות טריגונומטריות :
116	הגדרות :
118	שאלות :
122	תשובות סופיות :
124	פרק 6 – חשבון דיפרנציאלי :
124	פונקציות טריגונומטריות :
124	הגדרות כלליות :
126	שאלות :
132	תשובות סופיות :
135	תירגול נוסף :
136	מעבר בין מעלות לרדיאנים :
138	נגזרות טריגונומטריות :
139	שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :
142	שאלות עם פרמטרים – שימושי הנגזרת :
144	חקירות פונקציה טריגונומטרית :
152	תשובות סופיות :
157	פונקציות מעריכיות :
157	הגדרות כלליות :
159	שאלות :
163	תשובות סופיות :
166	תירגול נוסף :
171	תשובות סופיות :
173	פונקציות לוגריתמיות :
173	הגדרות כלליות :
174	שאלות :
179	תשובות סופיות :
182	תירגול נוסף :
187	תשובות סופיות :

189	פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:
189	הגדרות כלליות:
190	שאלות:
192	תשובות סופיות:
193	תירגול נוסף:
197	תשובות סופיות:
199	פרק 7 – חשבון אינטגרלי:
199	פונקציות טריגונומטריות:
199	שאלות:
202	תירגול נוסף:
205	תשובות סופיות:
206	פונקציות מעריכיות:
206	שאלות:
209	תירגול נוסף:
214	תשובות סופיות:
215	פונקציות לוגריתמיות:
215	שאלות:
217	תירגול נוסף:
222	תשובות סופיות:
223	פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:
223	שאלות:
224	תירגול נוסף:
228	תשובות סופיות:
229	תרגול מבגרויות – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:
245	תשובות סופיות:
248	סרטטים לשאלות:
250	נספח 1 – דף ההוראות הרשמי לשאלון 805:
251	נספח 2 – עקרונות מנחים לבדיקת בחינות הבגרות:

הערות:

1. בסוף כל נושא נוספו שאלות מתוך בחינות ברמת הבגרות.
2. הסקיצות בשאלות החקירה מופיעות בצורה מרוכזת בסוף דפי התשובות.
3. לכל פרק ישנם סרטוני תיאוריה ותרגול מלאים ומפורטים באתר, למעט החלקים "תירגול נוסף" ופרקי התרגול מבגרויות שמופיעים בסוף הספר.
4. קישור לחוברת הבחינות: <http://www.gool.co.il/misc/exams-804-805-lachman.pdf>

פרק 1 – סדרות:

סדרה חשבונית:

1. נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

2. כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

3. נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה

הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות:

- 1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- 2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- 3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4\frac{1}{2}, 7, 9\frac{1}{2}, 12, 14\frac{1}{2}, \dots, 49\frac{1}{2}$.
- 4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- 5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$.

11) נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \dots$.

כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

12) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

13) נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \dots$.

כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

14) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 13, 22, 31, \dots$. בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 9, 14, 19, \dots, 599$.

מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

16) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

17) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

18) נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

19) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd = 60$.

20) בסדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה

פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

כמה איברים יש בסדרה?

שאלות מבחינות:

21) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

- מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
- מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
- מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

22) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

- מצא את x .
 - מצא את הפרש הסדרה.
 - ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .
 - האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.
- מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

23) בסדרה חשבונית a_n , a_1 , a_2 , a_3 ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים

וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5 = 0$.

ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את: a_1 ואת d .

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.

מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

24) נתונים שני טורים חשבוניים: $150, 144, 138, \dots$ ו- $90, 93, 96, \dots$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

- מצא את מספר האיברים שבכל טור.
- מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

25) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.

הוכח את הטענות הבאות:

א. 1. $a_1 = -4d$

2. $S_9 = 0$

האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

ב. מצא את a_1 ואת d .

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

26) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה

הוא d_2 . ידוע כי: $d_1 = -2d_2$. סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n - d_1$.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} .

מצא את a_1 ואת b_1 .

27) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

ההצעה הראשונה: לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

ההצעה השנייה: לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם. ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

28) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

- א. הוכח כי $dn = 66$.
- ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.
- ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

תשובות סופיות:

- 1) $a_{43} = -235$ (2) $d = 4, a_1 = -5$ (3) 20 איברים (4) 48 איברים (5) 15 קפיצות.
- 6) 58 מספרים (7) 31 איברים חיוביים (8) $x = 1, x = 4$ (9) $a_{10} = 59$.
- 10) $S_{14} = 413$ (11) 21 איברים. (12) 16 דקות (13) 37 איברים. (14) 3647.
- 15) 23920 (16) א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
- 17) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$ (18) זוגיים: $S = 135$ אי-זוגיים: $S = 99$
- 20) 29 איברים. (21) א. $d = -6, a_1 = 50$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$.
- 22) א. 1. $x = -50$ 2. $d = 11$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$.
- 23) ב. $d = -3, a_1 = 12$ ג. $b_5 = -3$ (24) א. $n = 81$ ב. $n = 16$.
- 25) ב. $d = 2, a_1 = -8$ ג. $n = 36$ (26) א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$.
- 27) א. 12 לפי הראשונה ו-8 לפי השנייה ב. 45000 ₪.
- 28) ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$.

סדרה הנדסית:

1. נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

2. כלל נסיגה של סדרה הנדסית:

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

3. נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה

$$\text{הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י: } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

שאלות:

(1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

(2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$

(3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

(4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

(5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6, x+4, 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \dots$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$.

בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

15) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

16) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

17) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

שאלות מבחינות:

18) א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
 ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
 ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

19) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה: תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה... המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
 ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
 ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם הצעת השר?

20) המספרים: $3-2x$, $9-x$, $13-x$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את x .
 ב. 1. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
 2. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
 ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.
 מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

(21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים. א. מצא את מנת הסדרה.

- ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
 ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

(22) נתונה הסדרה הבאה: $a_n : 4, 12, 36, \dots$

מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
 ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.
 ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

תשובות סופיות:

- (1) $a_9 = 729$ (2) $n = 7$ (3) $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$ (4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$
 (5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$ (6) 5 דקות. (7) $x = 11 \rightarrow q = 3, x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}$
 (8) $a_8 = 384$ (9) $S_9 = 2555$ (10) 5 דקות. (11) $n = 12$ (12) $q = 2$ (13) $n = 6$
 (14) אי-זוגיים: $S = 595$ זוגיים: $S = 1190$ (15) $q = 4$ (16) $\frac{q+1}{q}$ (17) $a_1 = \frac{3}{8}$
 (18) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5, a_6 ד. $a_{25} = 16,777,216$

- ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים. ג. הסדרה שתקבל לפי הצעת השר היא: $4, 16, 64, \dots, 2^{24}$ וסכומה: 22,369,620. כדאי למלך לקבל את הצעת בתו.
 (20) א. $x = 14$ ב. 1. $a_n = 5^{n-1}$ 2. a_6, a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$
 (21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$ ד. $q = 3$ א. b_5, b_6

סדרות מעורבות:

שאלות מבחינות:

- (1) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה. האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.
- מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.
 - מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום: 60.
 - מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

- (2) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: a_1, a_2, a_3, \dots וסדרה הנדסית: b_1, b_2, b_3, \dots . ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.
- מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.
 - נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.
 - בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

- (1) א. 8, 10, 12. ב. 5. ג. 6. (2) א. $q = -2$. ג. $a_1 = 2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

1. הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

2. נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$. S = \frac{a_1}{1-q} \text{ : מתקבל הכלל הבא}$$

3. סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

• כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית

$$. S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ : אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה}$$

• כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית

מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$. S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \text{ : באופן הבא}$$

שאלות:

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה $62\frac{1}{2}$. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

- 5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$.
- א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
- ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32. מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

שאלות מבחינות:

- 6) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות

האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .

ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .

- 7) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .

בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא:

$$a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$$

א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים

ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים

בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.

בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים

הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים

הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.

ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי.

מצא את האיבר a_n .

8) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , ($0 < q < 1$).

נגדיר את הסכומים הבאים:

$$1. V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$$

$$2. T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10}, \dots$$

$$T = 6V \text{ כפי:}$$

א. מצא את מנת הסדרה q .

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות

האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים

במקומות האי-זוגיים הוא $\frac{1}{3} \cdot 1365$.

9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , ($q \neq 0, |q| < 1$).

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$, $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}, \dots$

$$V = 0.3T \text{ כפי:}$$

א. מצא את מנת הסדרה q .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים

ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

$$1) S = 18 \quad 2) a_1 = 24 \quad 3) a_1 = 50, q = \frac{1}{5} \text{ או } a_1 = 12\frac{1}{2}, q = \frac{4}{5} \quad 4) S = 18\frac{2}{3}$$

$$5) \text{ ב. } a_1 = 16, q = \frac{1}{3} \quad \text{א. } q = 0.6 \quad \text{ב. } \frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$$

$$\text{ג. } S_{(a_n)} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1(1+q)}{(1+q)(1-q)} = \frac{a_1 + a_2}{1-q^2} = \frac{b_1}{1-q^2} = S_{(b_n)} \quad \text{ד. } a_1 = 200$$

$$7) \text{ א. } \frac{S_{n(s)}}{S_{n(o)}} = a_1 \quad \text{ב. } q = 0.5, a_5 = 20 \quad \text{א. } q = \frac{1}{2} \quad \text{ב. פי 5. ג. } a_1 = 1024$$

$$9) \text{ א. } q = \frac{1}{3} \quad \text{ב. } a_1 = -16 \quad \text{ג. } S = 288$$

סדרות כלליות וסדרות נסיגה:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.
ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12} .
ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k .
הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30} .
ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 113.
ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את t עבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

- (4) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 6n - 2$. מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.
א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
ב. חשב את b_1 .

- (5) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = 3a_n + 4$. מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.
א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1 .

שאלות מבחינות:

6) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.

- א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
- ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.
- ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
- ד. חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$.

7) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$.

- א. 1. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .
2. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.
- ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$.
- חשב את הסכום הבא: $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$.
- ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

8) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.

- א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
- ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
- ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

9) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$.

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.
- ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.
- ג. חשב את הסכום הבא: $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$.

10) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$.

מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
- ב. חשב את האיבר b_5 .
- ג. חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$.

11) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$

תשובות סופיות:

1) א. $a_3 = -22$ ב. $a_{12} = 5, a_{14} = 33$ ג. $a_{30} = k - 49, a_{32} = k + 51$ ד. a_{72}, a_{73}

ה. ההפרש בין שני איברים סמוכים נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = 2n - 11$

כאשר נשווה את הפרש זה ל-62 נקבל כי: $n = 36.5$ אשר לא ייתכן.

מכאן שלא קיימים שני איברים סמוכים בסדרה שהפרשם הוא 62.

2) $a_{k+2} = 74 + 4k$ (3) $t = -33$ (4) $d = 6$ א. $b_1 = 4$ (5) א. $q = 3$ ב. $a_1 = 0$

6) א. $a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7$ ג. $S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n$ ד. $S_{9(o)} = 117$

7) א. 1. $a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4$ 2. a_4 ב. $S_{6-11} = 265458$ ג. $a_1 = 5$

8) א. $a_1 = k, a_2 = 11 - k, a_3 = k + 8, a_4 = 19 - k$ ב. 8 ג. 830

9) א. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2.5$ ב. $b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^* = -4086.74$

10) א. $b_{n+1} = 3b_n$ ב. $b_5 = 648$ ג. $S = 1594320$

11) א. $d = 2\frac{2}{3}$ ב. $S_{11(p)} = 267\frac{2}{3}$

תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.

סדרה חשבונית:

- (1) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $39-2x$, $6x-3$, x^2+3 .
- מצא את x . (הבחן בין שני מקרים).
 - מה יהיה הפרש הסדרה עבור הערך הקטן של x שמצאת בסעיף הקודם?
 - מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
 - ידוע כי: $S_{22} = 0$. מצא את a_1 .
- (2) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול ב-80 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- הוכח: $a_{n+1} = a_1 + 80$.
נתון גם כי סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול ב-1600 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה.
 - מצא את מספר האיברים בסדרה.
- (3) בסדרה חשבונית סכום שלושת האיברים הראשונים גדול פי 4 מהאיבר העומד במקום ה-19.
- הוכח: $a_{70} = 0$.
נתון כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-4, ה-5 וה-6 הוא 195.
 - מצא את a_1 ואת d .
 - מצא בסדרה איבר שערכו שווה למיקומו הסידורי.
 - מצא כמה איברים יש לחבר החל מהאיבר השלישי כך שסכומם יהיה אפס.
- (4) בסדרה חשבונית נתון כי האיברים ה-4 וה-8 הם מספרים נגדיים.
- הוכח כי: $a_6 = 0$.
סכום האיברים בסדרה עד ל- a_6 הוא -45.
 - מצא את a_1 ואת d .
 - חשב כמה איברים יש לחבר החל מהאיבר השלישי כדי לקבל את הסכום 27.
- (5) שני גופים הנמצאים במרחק של 110 ק"מ זה מזה נעים אחד לקראת השני. גוף א' עובר בכל שעה מרחק הגדול בק"מ אחד מהמרחק שעבר בשעה שלפניה. הגוף השני מתקדם בקצב קבוע. לאחר 5 שעות נפגשו שני הגופים.
- הוכח כי בשעה הראשונה עברו שני הגופים יחד מרחק של 20 ק"מ.
המרחק שעובר הגוף השני בכל שעה הוא 8 ק"מ.
 - חשב את המרחק שעבר גוף א' עד שנפגשו שני הגופים.
 - חשב את הזמן שלקח לגוף ב' להגיע לנקודת ההתחלה של גוף א'.

- 6) אדם מלווה מחברו סכום של 75000 ₪. החבר נתן לו שתי הצעות להחזרת ההלוואה: הצעה ראשונה: להחזיר 3000 ₪ בחודש הראשון ובכל חודש נוסף להוסיף עוד 1000 ₪ על הסכום שקדם לו. הצעה שנייה: להתחיל להחזיר רק בחודש החמישי ולתת סכום ראשוני של 8000 ₪ ולאחר מכן להוסיף סכום קבוע בכל חודש על הסכום הקודם. לפי שתי ההצעות המלווה יקבל את מלוא הסכום לאחר אותו פרק זמן. א. כמה חודשים יצטרך להחזיר הלווה לפי ההצעה הראשונה? ב. בכמה שקלים יהיה ההפרש מחודש לחודש לפי ההצעה השנייה?

סדרה הנדסית:

- 7) המספרים: $x+4$, $x-8$, $x-14$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית. א. מצא את מנת הסדרה. ב. מהו מיקומו בסדרה של האיבר 3072? ג. בסדרה יש 15 איברים. חשב את סכום כל האיברים בסדרה שאחרי האיבר 3072.

- 8) בסדרה הנדסית שבה 10 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 2 מסכום כל האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים. א. מצא את מנת הסדרה. ב. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הוא 14762.

- 9) א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת הסדרה.

- בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל איברי הסדרה גדול פי 1.5 מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים. האיבר השביעי בסדרה זו הוא 384. ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה זו. ג. 1. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו. 2. האם קיים איבר בסדרה שערכו הוא 3000? הראה חישוב מתאים.

- 10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ שמנתה היא q . בונים בסדרה חדשה b_n ע"י כך שמחברים לכל איבר את האיבר שבא אחריו באופן הבא: $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_2 + a_3$, $b_3 = a_3 + a_4$, \dots , $b_n = a_n + a_{n+1}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומנתה זהה למנת הסדרה a_n .
 ב. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא גודל התלוי במנת הסדרות ומצא אותו.

ידוע כי סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n קטן פי 3 מסכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n . האיבר השלישי של הסדרה b_n גדול ב-8 מהאיבר הרביעי של הסדרה a_n .
 ג. כתוב נוסחה לאיבר הכללי של הסדרה b_n .

11) אדם המלווה מהבנק סכום כסף של 25,000 ₪ מקבל שתי הצעות להחזר ההלוואה. הצעה ראשונה: שלם בחודש הראשון 100 ₪ ובכל חודש הגדל את הסכום פי 2 ביחס לחודש הקודם לו במשך 8 חודשים. הצעה שנייה: שלם החל מהחודש החמישי מזמן לקיחת ההלוואה כך שבכל חודש הקטן את הסכום פי 2 ביחס לחודש הקודם לו. הבנק לוקח ריבית על ההלוואה לפי כל אחת מההצעות וידוע כי לאחר 8 חודשים מזמן לקיחת ההלוואה יסיים האדם להחזיר את הסכום הנדרש לפי כל אחת מההצעות.
 א. מהי הריבית שלוקח הבנק לפי ההצעה הראשונה?
 ב. כמה צריך האדם להחזיר בחודש החמישי ללקיחת ההלוואה לפי ההצעה השנייה אם ידוע כי הבנק לוקח בהצעה זו ריבית של 5,000 ₪?

12) בית דפוס שהוקם עתה ומתפתח במשך הזמן, מגדיל את תפוקת הוצאת הספרים שלו מדי חודש. ידוע כי בחודש השישי מאז הקמתו הדפיס בית הדפוס 16,000 ספרים וכי בכל ששת החודשים הראשונים להקמתו הדפיס בית הדפוס מספר כולל של 31,500 ספרים.
 א. כמה ספרים הדפיס בית הדפוס בחמשת חודשיו הראשונים?
 ידוע כי סכום הספרים שהדפיס בית הדפוס בחמשת חודשיו הראשונים גדול פי 31 מכמות הספרים שהדפיס בחודש הראשון שלו.
 ב. פי כמה מגדיל בית הדפוס את תפוקתו מדי חודש?
 ג. לאחר כמה חודשים בית הדפוס ידפיס בתפוקה של מעל לחצי מיליון ספרים בחודש?

סדרות מעורבות:

13) שלושה מספרים מהווים שלושה איברים ראשונים בסדרה הנדסית וסכומם הוא 21. המספר הראשון, סכום שני המספרים הראשונים וסכום המספר הראשון והשלישי מהווים שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.
 א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.
 ב. מחברים את 10 האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית המקורית. ידוע כי סכום זה גדול ב-1482 מסכום n האיברים הראשונים של הסדרה החשבונית שהתקבלה. מצא את n .

14) נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ שהפרשה הוא d . האיברים העומדים במקומות הראשון, השני והשישי מהווים סדרה הנדסית.

א. הוכח כי: $d = 3a_1$.

ב. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

ידוע כי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית הוא 21845.

ג. מצא את סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית.

15) נתונה הסדרה: a_1, a_2, a_3, a_4 . ידוע כי a_1, a_2, a_3 היא סדרה חשבונית

והסדרה a_2, a_3, a_4 היא סדרה הנדסית עולה.

סכום האיבר הראשון והשלישי הוא 10 וסכום האיבר הראשון והרביעי הוא 20.

א. מצא את האיבר a_2 .

ב. מצא את האיבר a_1 .

ג. 1. מצא את האיבר השישי בסדרה ההנדסית (המתחילה באיבר a_2).

2. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית כדי לקבל סכום הקטן

ב-20 מערך האיבר השישי בסדרה ההנדסית שמצאת.

16) נתונה סדרת המספרים: a_1, a_2, a_3, a_4 .

ידוע כי המספרים: a_1, a_2, a_3 מהווים סדרה חשבונית והמספרים: a_2, a_3, a_4

מהווים סדרה הנדסית. סכום האיברים הראשון והשלישי הוא 8 וסכום האיברים

השני והרביעי הוא 20.

א. מצא את a_2 .

ב. מצא את מנת הסדרה ההנדסית המקיימת: $a_1 = a_4$.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה ההנדסית החל מאיברה

הראשון a_2 כדי לקבל את הסכום 340-.

ד. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר

הראשון כדי לקבל את הסכום 380-.

17) נתונה הסדרה החשבונית הבאה: $102, 96, 90, \dots$ שכל איבריה חיוביים.

א. 1. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה שערכו אפס.

2. כמה איברים יש בסדרה?

3. חשב את סכום כל איברי הסדרה.

בונים סדרה הנדסית עולה ובה האיבר הראשון שווה לאיבר האחרון של הסדרה

החשבונית. האיבר החמישי בסדרה זו שווה לאיבר השני בסדרה החשבונית.

ב. מצא את מיקומם הסידורי של שלושת האיברים האמצעיים של הסדרה

ההנדסית בסדרה החשבונית.

מחסרים מהסדרה החשבונית את כל האיברים של הסדרה ההנדסית.

ג. חשב את סכום כל איברי הסדרה החשבונית שנשארו.

18) בין המספרים 3 ו-48 הכניסו שלושה מספרים נוספים כך שנוצרה סדרה הנדסית שאינה עולה.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

בונים סדרה חשבונית ובה האיבר הראשון שווה בערכו לאיבר הרביעי של הסדרה ההנדסית הנתונה. ידוע כי סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה שווה לסכום 13 האיברים הראשונים בה. האיבר העומד במקום ה-14 הוא חיובי.

ב. מצא את הפרש הסדרה החשבונית.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית כדי שסכומם יהיה אפס.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

19) בסדרה הנדסית ידוע כי סכום שני האיברים הראשונים הוא 4000 וסכום שני האיברים הבאים אחריהם הוא 250.

א. הוכח כי הסדרה היא הנדסית יורדת.

ב. חשב את סכום הסדרה.

מחברים n איברים ראשונים וידוע כי היחס בין סכומם לסכום הסדרה הוא $\frac{255}{256}$.

ג. כמה איברים יש לחבר?

20) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q וכל איבריה חיוביים. בונים סדרה חדשה b_n ע"י כך שמכפילים כל שני איברים סמוכים

בסדרה הנתונה: $b_1 = a_1 a_2, b_2 = a_2 a_3, b_3 = a_3 a_4, \dots$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

ב. הוכח כי היחס בין סכום הסדרה b_n ובין סכום כל איברי הסדרה a_n

כאשר מעלים אותם בריבוע שווה למנת הסדרה הנתונה.

ג. ידוע כי $b_1 = 2700$ וכי סכום הסדרה b_n הוא 3037.5.

מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה a_n .

21) נתונות שתי סדרה הנדסיות אינסופיות יורדות שמנתן היא q , $(0 < q < 0.5)$:

סדרה ראשונה: a_1, a_2, a_3, \dots שסכומה הוא 864,

וסדרה שנייה: b_1, b_2, b_3, \dots שסכומה הוא 792.

ידוע כי האיבר השני בסדרה הראשונה גדול ב-10 מהאיבר השני בסדרה השנייה.

א. מצא את מנת הסדרות.

בונים את הסדרה c_n ע"י שילוב של שתי הסדרות הנתונות באופן הבא:

$$c_1 = a_1^2 - b_1, c_2 = a_2^2 - b_2, c_3 = a_3^2 - b_3, \dots, c_n = a_n^2 - b_n$$

ב. חשב את סכום הסדרה c_n .

22) נתונה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה הוא 546.75.
 האיבר השני בסדרה הוא -243.
 א. מצא את מנת הסדרה.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

- ב. חשב את סכום הסדרה החדשה.
 ג. מצא מאיזה איבר יש להתחיל לחבר את כל איברי הסדרה החדשה כדי לקבל את הסכום 13.5.

23) א. הוכח כי בסדרה הנדסית אינסופית יורדת היחס בין סכום הסדרה בריבוע ובין סכום ריבועי כל איברי הסדרה תלוי רק במנת הסדרה.

בסדרה הנדסית נתונה ידוע כי היחס בין סכום הסדרה בריבוע ובין סכום ריבועי כל איברי הסדרה הוא 0.6.

סכום כל איברי הסדרה החל מהאיבר החמישי הוא 2.4.

- ב. מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.
 ג. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

סדרות כלליות וסדרות נסיגה:

24) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = k, a_{n+1} = 5n - 5 - a_n$.

- א. הוכח כי הסדרה בנויה משתי סדרות חשבוניות.
 האחת - סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים והשנייה - סדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
 ב. כתוב נוסחה לסכום $2n$ האיברים הראשונים של הסדרה.

ידוע כי סכום 7 האיברים הראשונים של הסדרה הוא 48.

- ג. מצא את k . (הדרכה: כתוב את הסכום באופן הבא: $S_6 + a_7 = 48$ והעזר בסעיפים הקודמים למציאת a_7 ולאחר מכן a_1).

25) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה הבא: $a_1 = k, a_{n+1} = \frac{6^n}{3a_n}$.

- א. הראה כי סדרת כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים וסדרת כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הן סדרות הנדסיות.
 סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה הוא 129.
 ב. מצא את שני הערכים האפשריים של k .

מחליפים הסימנים של כל שני איברים סמוכים לסירוגין באופן הבא:

$$a_1, a_2, -a_3, -a_4, a_5, a_6, -a_7, -a_8, \dots$$

- ג. עבור ערך הקטן של k שמצאת כתוב נוסחה לסכום $2n$ האיברים הראשונים.

26 סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n לפי הכלל: $b_n = \frac{3a_n + 3}{a_n}$.

א. כתוב כלל נסיגה לסדרה b_n .

ב. כתוב נוסחה ל- n האיברים הראשונים של הסדרה b_n .

ג. חשב את הסכום: $b_6 - b_7 + b_8 - b_9 + b_{10} - b_{11}$.

תשובות סופיות:

1 א. 1. $x = 6, 8$ 2. $d = -6$ ב. $a_n = -3$ ג. $a_1 = 63$ 2 ב. $2n = 40$

3 ב. $d = -1, a_1 = 69$ ג. $a_{35} = 35$ ד. $n = 135$ 4 ב. $d = 3, a_1 = -15$ ג. $n = 9$

5 ב. $S = 70$ ג. 13 שעות ו-45 דקות. 6 א. 10 חודשים. ב. $d = 1800$

7 א. $q = 2$ ב. $n = 10$ ג. $S = 190464$ 8 א. $q = 3$ ב. $a_1 = 2$

9 א. $\frac{S_{n(p)}}{S_{2n}} = \frac{\frac{a_1 q (q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}}{\frac{a_1 (q^{2n} - 1)}{q - 1}} = \frac{q}{q + 1}$ ב. $a_1 = 6$ ג. $a_n = 3 \cdot 2^n$ 2 לא

10 א. $q = \frac{a_1 q^n (1 + q)}{a_1 q^{n-1} (1 + q)} = \frac{a_1 q^n + a_1 q^{n+1}}{a_1 q^{n-1} + a_1 q^n} = \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

ב. $b_n = 3 \cdot 2^n$ ג. $\frac{S_{(a_n)^n}}{S_{(b_n)^n}} = \frac{\frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}}{\frac{(a_1 + a_2)(q^n - 1)}{q - 1}} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{1 + q}$

11 א. 500 ₪ ב. 16,000 ₪ 12 א. 15,500 ספרים. ב. פי 2. ג. לאחר 10 חודשים.

13 א. $q = 2$ ב. $n = 23$ 14 ב. $q = 4$ ג. $S_6 = 51$

15 א. $a_2 = 5$ ב. $a_1 = 0$ ג. $a_7 = 160$ 2 8 א. $a_2 = 4$ ב. $q = -2$ ג. 8 ד. 10

17 א. 1. $a_{18} = 0$ 2. $n = 17$ 3. $S_{17} = 918$ ב. $a_{10} = 48, a_{14} = 24, a_{16} = 12$ ג. $S_{12}^* = 732$

18 א. $q = -2$ ב. $d = 2$ ג. 25 19 א. $q = 0.25$ ב. $S = 4266 \frac{2}{3}$ ג. $n = 4$

20 א. $q^2 = \frac{a_1 q^{n+1}}{a_1 q^{n-1}} = \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ג. $a_1 = 90$ א. $q = \frac{1}{6}$ ב. $S = 532419 \frac{3}{7}$

22 א. $q = -\frac{1}{3}$ ב. $S = 1093.5$ ג. a_5

$$. S = -204.8 .\lambda \quad a_1 = 768 , q = -0.25 .\beth \quad \frac{S^2}{S^*} = \frac{\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2}{\frac{a_1^2}{1-q^2}} = \frac{\frac{a_1^2}{(1-q)^2}}{\frac{a_1^2}{(1-q)(1+q)}} = \frac{1+q}{1-q} .\aleph \quad \mathbf{(23)}$$

$$. S_{2n} = \frac{3-3(-6)^n}{7} .\lambda \quad k_{1,2} = 1, 2 .\beth \quad \mathbf{(25)} \quad . k = 3 .\lambda \quad S_{2n} = 5n^2 - 5n .\beth \quad \mathbf{(24)}$$

$$. S = -265356 .\lambda \quad S_n = 3^{n+1} - 3 .\beth \quad b_{n+1} = 3b_n .\aleph \quad \mathbf{(26)}$$

תרגול מבגרויות:

*הערה: לשאלות בחוץ זה אין פתרון בסרטונים.

- (1) נתונות שתי סדרות: סדרה אחת חשבונית וסדרה אחת הנדסית. בכל סדרה האיבר הראשון הוא 9. האיבר השני בסדרה החשבונית גדול ב-2 מהאיבר השני בסדרה ההנדסית. האיבר השלישי זהה בשתי הסדרות. מצא את האיבר השני בכל אחת מהסדרות (מצא את כל הפתרונות).
- (2) הסכום של סדרה הנדסית אין-סופית יורדת גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות הזוגיים.
- א. מצא את מנת הסדרה.
ב. מצא פי כמה גדול הסכום של הסדרה הנתונה מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.
- (3) נתונה סדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים. הסכום של האיבר השלישי והאיבר הרביעי בסדרה גדול פי 20 מהאיבר החמישי.
- א. מצא את מנת הסדרה.
ב. נתון כי האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא $a_1 = 4096$. בין האיבר a_4 ובין האיבר a_5 בסדרה הנתונה מכניסים מספר איברים. האיברים שהוכנסו והאיברים a_4 ו- a_5 מהווים יחד סדרה חשבונית שסכומה 3880. מצא את ההפרש של הסדרה החשבונית.
- (4) שני רוכבי אופנוע נמצאים במרחק 1110 ק"מ זה מזה, ורוכבים זה לקראת זה. בשעה הראשונה עבר הרוכב הראשון מרחק של 50 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 5 ק"מ יותר מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. הרוכב השני יצא לדרך 3 שעות אחרי הרוכב הראשון. בשעה הראשונה הוא עבר 90 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 4 ק"מ פחות מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. חשב כעבור כמה שעות מרגע היציאה של הרוכב הראשון ייפגשו שני הרוכבים.
- (5) נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:
$$\begin{cases} a_1 = k \\ a_{n+1} = 3a_n - 8 \end{cases} \quad (k \neq 4).$$
$$b_n \text{ היא סדרה המוגדרת לכל } n \text{ טבעי על ידי הכלל: } b_n = 2a_n - 8.$$

א. הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.
ב. נתון כי $b_5 = 324$. מצא את הערך של k .
ג. נתון גם כי סכום n האיברים הראשוניים בסדרה b_n הוא 13,120. מצא את n .

6 נתונות שתי סדרות a_n ו- b_n , המוגדרות לכל n טבעי לפי הכללים הבאים:

$$a_{n+1} = 3a_n + 5, \quad b_n = a_n + 2.5$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה ($a_n \neq -2.5$).

נתון גם כי $b_1 = 2$.

ב. הבע באמצעות n את a_n .

ג. (1) הבע באמצעות n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n .

(2) הבע באמצעות n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n .

7 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

האיבר הראשון של הסדרה הוא 2.5.

האיבר במקום ה-33 בסדרה גדול ב-80 מהאיבר במקום ה-17 בסדרה.

מהסדרה הנתונה לקחו כל איבר שלישי כך שהתקבלה סדרה חשבונית חדשה:

$$a_3, a_6, a_9, \dots, a_n$$

א. מצא את הפרש הסדרה החדשה.

ב. סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 3100.

(1) מצא את מספר האיברים בסדרה החדשה.

(2) מהו מספר האיברים בסדרה המקורית? נמק.

8 ראובן משחק עם חבריו בגולות. כל משתתף מכניס בתורו גולות למשחק.

הזוכה בתור שלו, מקבל מספר גולות הגדול פי 6 ממספר הגולות שהכניס באותו

תור למשחק. המפסיד בתור שלו, מפסיד את כל הגולות שהכניס באותו תור

למשחק (ולא מקבל שום גולה). ראובן הכניס בתור הראשון שלו 3 גולות, והפסיד.

הוא המשיך לשחק, ובכל תור הכניס 2 גולות יותר משהכניס בתור הקודם שלו.

ראובן שיחק בסך הכל n תורים. בכל תור הוא הפסיד ורק בתור האחרון הוא זכה.

א. הבע באמצעות n את מספר הגולות שראובן קיבל בתור האחרון.

בתור האחרון קיבל ראובן מספר גולות הגדול ב-6 ממספר כל הגולות שהכניס

למשחק ב- n התורים ששיחק.

ב. (1) הבע באמצעות n את מספר כל הגולות שהכניס ראובן

למשחק ב- n התורים ששיחק.

(2) כמה תורים שיחק ראובן?

9 נתונה סדרה חשבונית עולה : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

$$\text{נתון : } a_1 \cdot a_4 = (a_2)^2$$

א. הראה כי האיבר הראשון בסדרה חשבונית שווה להפרש הסדרה.

ב. (1) שלושת האיברים a_4, a_6, a_9 בסדרה החשבונית הנתונה מהווים סדרה הנדסית.

(a_4 הוא האיבר הראשון בסדרה ההנדסית.)

מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

(2) סכום שלושת האיברים שבתת-סעיף ב(1) הוא 133.

מצא את הפרש הסדרה החשבונית הנתונה.

(3) סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה מקיים : $S_n > 11,977$.

מצא את n הקטן ביותר המקיים אי-שוויון זה.

10 אדם קיבל שתי הצעות לקניית שואב אבק בתשלומים חודשיים, הצעה I והצעה II.

בשתי ההצעות היה לשואב האבק אותו המחיר.

הצעה I : התשלום הראשון הוא 180 שקלים,

וכל תשלום נוסף גדול ב-15 שקלים מהתשלום שקדם לו.

הצעה II : התשלום הראשון הוא 195 שקלים,

וכל תשלום נוסף קטן ב-15 שקלים מהתשלום שקדם לו.

מספר התשלומים בהצעה II היה גדול ב-2 ממספר התשלומים שבהצעה I.

א. מצא את מספר התשלומים בהצעה II.

ב. מצא את המחיר של שואב האבק.

$$11 \text{ נתונה סדרה המוגדרת לכל } n \text{ טבעי על ידי הכלל : } \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + 9 \end{cases}$$

b_n היא סדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל : $b_n = a_n + 3$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. מצא את סכום 4 האיברים הראשונים בסדרה b_n .

ג. בסדרה b_n סכום 4 האיברים הראשונים קטן ב-43,350 מסכום k האיברים

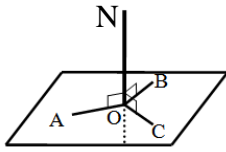
העוקבים שאחרי האיבר הרביעי. מצא את k .

תשובות סופיות:

- (1) סדרה חשבונית: 17 או 5. סדרה הנדסית 15 או 3.
- (2) א. $q = \frac{1}{3}$ ב. פי $\frac{1}{3}$.
- (3) א. $q = \frac{1}{4}$ ב. $d = -\frac{1}{2}$.
- (4) 9 שעות.
- (5) ב. $k = 6$ ג. $n = 8$.
- (6) א. $q = 3$ ב. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2.5$ ג. (1) $3^n - 1$ (2) $3^n - 1 - 2.5n$.
- (7) א. $d = 15$ ב. (1) 20 איברים. (2) 60 איברים.
- (8) א. $12n + 6$ ב. (1) $n^2 + 2n$ (2) 10.
- (9) ב. (1) $q = 1.5$ (2) $d = 7$ (3) $n = 59$.
- (10) א. 7 תשלומים. ב. 1050 שקלים.
- (11) ב. 170 ג. 4.

פרק 2 - טריגונומטריה במרחב:

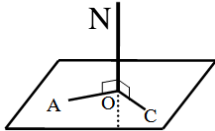
הגדרות יסודיות:



הגדרה: ישר המאונך לכל הישרים במישור העוברים

דרך עקבו נקרא אנך למישור.

באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO, BO, CO שעל המישור.



משפט: אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים

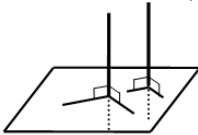
דרך עקבו אזי הוא מאונך למישור כולו.

באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO, CO שעל המישור

ולכן מאונך למישור כולו.

משפט: בכל נקודה במישור אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

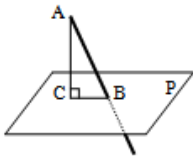
משפט: מנקודה שמחוץ למישור אפשר להוריד אנך אחד בלבד למישור זה.



משפט: שני אנכים למישור אחד הם מקבילים.

באיור הסמוך ניתן לראות כי שני אנכים הם מקבילים.

הגדרה: ישר החותך מישור ואינו מאונך למישור זה נקרא משופע למישור.



הקטע המחבר את עקב האנך עם עקב המשופע נקרא היטל

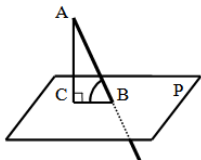
המשופע על המישור.

באיור הסמוך הקטע AC הוא אנך למישור P, AB הוא משופע למישור

ו-BC הוא היטל המשופע.

הגדרה: אורך אנך המורד מנקודה שמחוץ למישור אל המישור נקרא

מרחק הנקודה מהמישור.



הגדרה: זווית בין ישר ומישור היא הזווית שבין הישר (המשופע)

ובין היטלו של הישר על המישור.

באיור הסמוך הזווית שבין הישר המשופע AB לבין המישור P היא: $\angle ABC$.

הגדרה: שני מישורים שאינם נחתכים נקראים מישורים מקבילים.

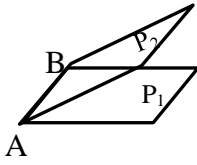
הגדרה: אורך האנך המורד מנקודה שעל פני מישור אחד אל מישור המקביל לו

נקרא המרחק בין המישורים.

הגדרה: שני מישורים נחתכים יוצרים צורה גיאומטרית הנקראת פינה.

ישר החיתוך של שני המישורים נקרא מקצוע, והמישורים היוצרים

את הפינה נקראים פאות.

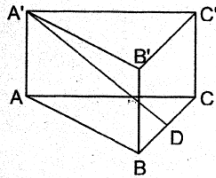


באיור הסמוך הקטע AB הוא ישר החיתוך של שני המישורים P_1 ו- P_2 הנקרא מקצוע.

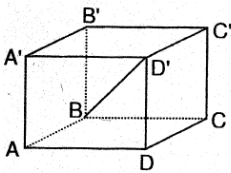
הצורות הסגורות של המישורים נקראות פאות וכל הצורה נקראת פינה.

שאלות יסודיות – סימון זוויות במרחב:

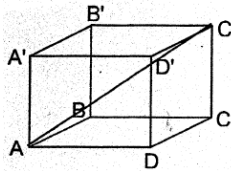
הערה: הגדרות מדויקות של הצורות המרחביות תופענה בהמשך הפרק.



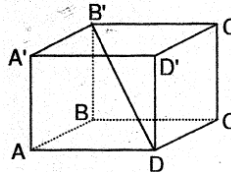
(1) במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) הנקודה D היא אמצע המקצוע BC. סמן את הזווית בין הישר $A'D$ לבין הבסיס ABC.



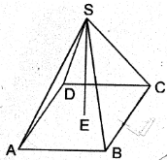
(2) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. סמן את הזווית בין האלכסון $B'D'$ לבין הבסיס ABCD.



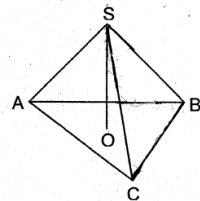
(3) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה איור). סמן את הזווית בין האלכסון $A'C'$ לבין הפאה $D'C'CD$.



(4) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. סמן את הזווית בין:
 א. האלכסון $B'D$ לבין הפאה $B'C'CB$.
 ב. האלכסון $B'D$ לבין הפאה $D'C'CD$.



(5) $SABCD$ היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן (ראה איור). סמן את הזווית בין המקצוע SB לבין הבסיס ABCD.



(6) $SABC$ היא פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). סמן את הזווית בין המקצוע SA לבין הבסיס ABC.

תשובות סופיות:

- (1) $\sphericalangle A'DA$ (2) $\sphericalangle D'BD$ (3) $\sphericalangle AC'D$ (4) א. $\sphericalangle DBC'$ ב. $\sphericalangle B'DC'$ (5) $\sphericalangle SBE$ (6) $\sphericalangle SAO$.

התיבה והקובייה:

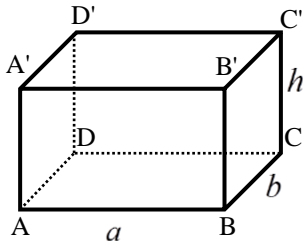
הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב (ABCD ו-A'B'C'D')

הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי (AA', BB', CC', DD')

נקרא גובה התיבה. המקצועות הצדדיים שווים זה לזה

ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.



נוסחאות:

תיאור מילולי	הנוסחה
שטח בסיס התיבה	$S = a \cdot b$
נפח התיבה	$V = a \cdot b \cdot h$
שטח מעטפת התיבה	$M = 2h(a + b)$
שטח פנים	$P = 2h(a + b) + 2ab$
אלכסון ראשי בתיבה	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$

1. תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסה הם ריבועים.

מתקיים: $a = b$ בכל הנוסחאות.

2. קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע

הבסיס, דהיינו: $a = b = h$ אזי התיבה נקראת קובייה.

תיבה שבסיסה ריבוע:

1) בתיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה ריבוע, אורך אלכסון הבסיס AC הוא 15.2 ס"מ.

אורך המקצוע הצדדי AA' הוא 10 ס"מ.

א. חשב אורך מקצוע הבסיס.

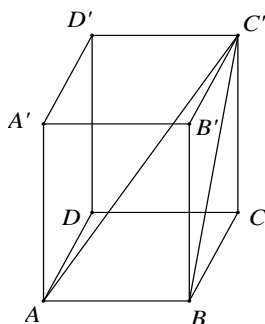
ב. חשב נפח התיבה ושטח הפנים.

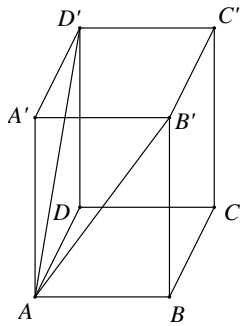
ג. חשב את BC', אלכסון הפאה BB'C'C, ואת

אלכסון התיבה AC'.

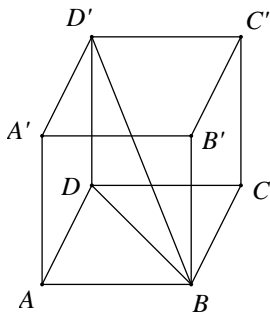
ד. חשב את זווית AC'B, שבין האלכסון BC'

בפאה BB'C'C לבין אלכסון התיבה AC'.

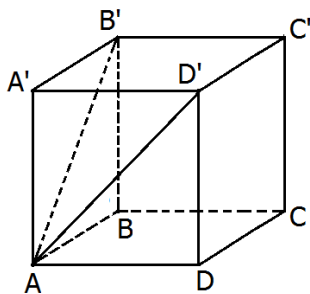




- (2) נתונה תיבה $ABCD A' B' C' D'$ שבסיסה $ABCD$ ריבוע. אורך האלכסון AD' של הפאה הצדדית $ADD'A'$ הוא 16.8 ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני האלכסונים AD' ו- AB' היא בת 58° .
- חשב את אורך אלכסון הבסיס, $B'D'$.
 - חשב את אורך מקצוע הבסיס AB .
 - חשב את גובה התיבה AA' .
 - חשב את נפח התיבה.



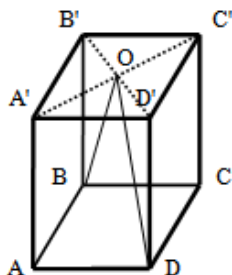
- (3) נתונה תיבה $ABCD A' B' C' D'$ שבסיסה $ABCD$ ריבוע. אורך אלכסון הבסיס BD הוא 16 ס"מ ונפח התיבה הוא 1408 סמ"ק. חשב:
- גובה התיבה DD' .
 - הזווית שבין אלכסון התיבה BD' לבסיס $ABCD$.
 - אורך מקצוע הבסיס AB .



- (4) בתיבה $ABCD A' B' C' D'$, שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית הוא 10 ס"מ. הזווית שבין אלכסוני הפאות הצדדיות היא בת 48° .
- חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון $B'D'$.
 - חשב את שטח הבסיס של התיבה.

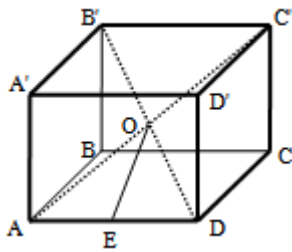
שאלות מבחינות:

- (5) בתיבה ריבועית $ABCD A' B' C' D'$ מעבירים את האלכסונים $B'D'$ ו- $A'C'$ במישור הבסיס העליון. האלכסונים נפגשים בנקודה O כך שנוצר המשולש BOD . נתון כי: $\angle BOD = 23^\circ$ וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס"מ.



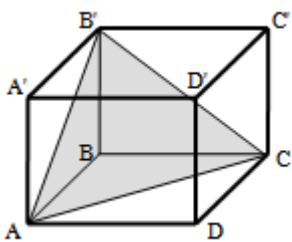
- חשב את היקף המשולש BOD .
- חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע OD של המשולש BOD ומישור הפאה $AA'D'D$.

6) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים AC' ו- $B'D'$. האלכסונים נחתכים בנקודה O שבתוך התיבה.



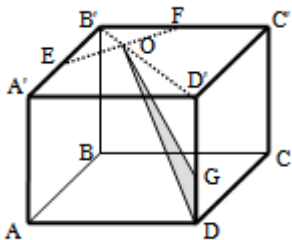
מהנקודה O מעבירים את הקטע OE כך ש- E היא אמצע המקצוע AD . ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס"מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס"מ.
 א. מצא את אורך גובה התיבה.
 ב. מצא את אורך הקטע OE .

7) בתיבה ריבועית וישרה $ABCD A'B'C'D'$ מסמנים את אורך הגובה ב- h .



מעבירים את הקטעים AB' , AC ו- $B'C$ כך שנוצר המשולש $AB'C$ כמתואר באיור. הזווית הנוצרת בין אנך לצלע AC במשולש $AB'C$ ומישור הבסיס $ABCD$ היא α .
 א. הבע באמצעות h ו- α את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
 ב. הבע באמצעות h ו- α את נפח התיבה.

8) בתיבה הריבועית $ABCD A'B'C'D'$ שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון $B'D'$. הנקודות E ו- F נמצאות על אמצעי המקצועות $A'B'$ ו- $B'C'$ כך שהקטע EF חותך את האלכסון $B'D'$ בנקודה O .



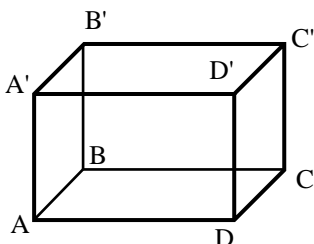
מקצים נקודה נוספת - G - הנמצאת על הגובה DD' כך ש- $DG = a$. מעבירים את הקטעים GO ו- DO כך שנוצר המשולש DOG . אורך מקצוע הבסיס הוא k וגובה התיבה הוא h .

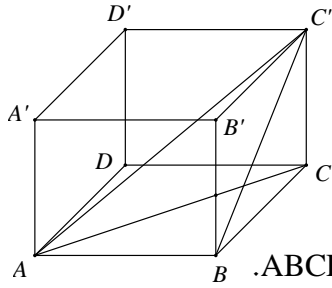
א. הבע באמצעות k ו- a את שטח המשולש DOG .

ב. מצא את היחס: $\frac{a}{h}$ עבורו מתקיים: $S_{DOG} = S_{D'OG}$.

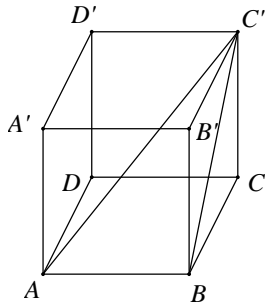
תיבה שבסיסה מלבן:

9) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $AA' = 7$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ. חשב את אורך האלכסון BD' ואת הזווית בינו לבין בסיס התיבה.

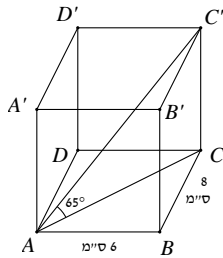




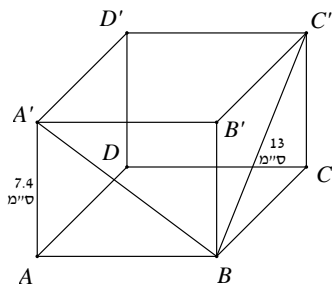
- 10** בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם :
 $AB = 12$ ס"מ , $BC = 5$ ס"מ . הזווית בין BC אלכסון הפאה $BB'C'C$, לבסיס $ABCD$ היא 40° .
 א. חשב את גובה התיבה CC' .
 ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס, AC .
 ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה AC' לבסיס $ABCD$.
 ד. חשב את אורך אלכסון התיבה AC' .
 ה. חשב את נפח התיבה.
 ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.



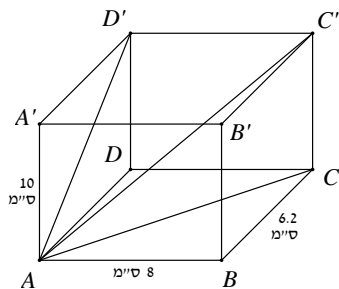
- 11** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.
 אורך צלע הבסיס : $AB = 9$ ס"מ .
 אלכסון הפאה $BB'C'C$ הוא : $BC' = 15$ ס"מ .
 חשב את הזווית בין BC' , אלכסון הפאה $BB'C'C$, לאלכסון התיבה AC' .



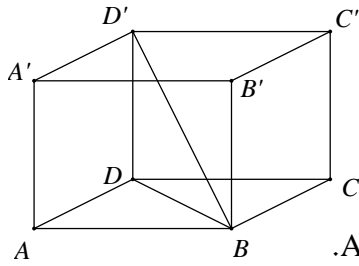
- 12** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$, בה מתקיים :
 $AB = 6$ ס"מ , $AD = 8$ ס"מ .
 הזווית בין אלכסון התיבה AC' לבסיס $ABCD$ היא בת 65° .
 א. חשב את גובה התיבה CC' .
 ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.



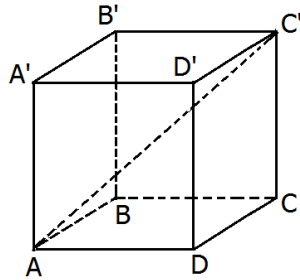
- 13** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן. גובה התיבה AA' הוא 7.4 ס"מ .
 אורך אלכסון הפאה $BC' = 13$ ס"מ .
 הזווית בין אלכסון הפאה $A'B$ לבסיס $ABCD$ היא בת 37° .
 א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.
 ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.



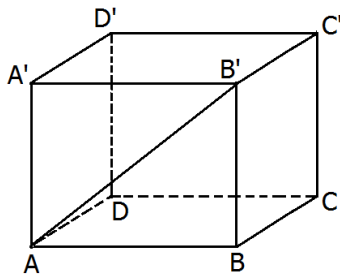
- 14** בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון :
 $AA' = 10$ ס"מ , $AB = 8$ ס"מ , $BC = 6.2$ ס"מ .
 א. אלכסון הבסיס : AC , אלכסון הפאה : AD' ואלכסון התיבה : AC' .
 ב. חשב את הזווית בין AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$, לאלכסון התיבה AC' : $\angle D'AC'$.
 ג. חשב את נפח התיבה ושטח המעטפת.



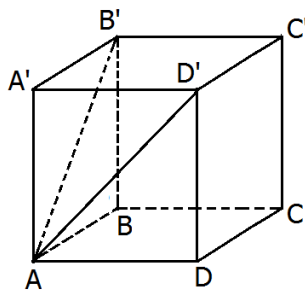
- 15** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. $AB = 12$ ס"מ. אורך אלכסון הבסיס BD הוא 15 ס"מ. נפח התיבה הוא 864 סמ"ק. חשב את:
- רוחב הבסיס של התיבה, BC .
 - גובה התיבה, AA' .
 - הזווית בין אלכסון התיבה BD' לבסיסה $ABCD$.



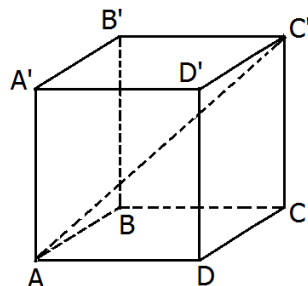
- 16** בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה ציור), נתון:
- $AD = 12$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ, $CC' = 14$ ס"מ.
- חשב את האורך של אלכסון הבסיס, AC .
 - חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה AC' לבין הבסיס $ABCD$.
 - חשב את שטח המעטפת של התיבה.
 - חשב את שטח הפנים של התיבה.



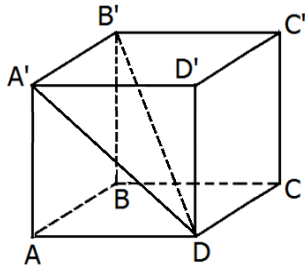
- 17** בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה ציור) נתון:
- $AB = 12$ ס"מ, $AD = 10$ ס"מ. הזווית שבין אלכסון הפאה AB' לבין הבסיס $ABCD$ היא 35° .
- חשב את גובה התיבה BB' .
 - חשב את AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$.
 - חשב את הזווית שבין AD' לבין הבסיס $ABCD$.



- 18** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן (ראה ציור). אורך גובה התיבה AA' הוא 10 ס"מ.
- אורך AB' , אלכסון הפאה $ABB'A'$ הוא 14 ס"מ. חשב את אורך המקצוע AB .
 - הזווית שבין AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$, לבין הבסיס $ABCD$ היא 40° . חשב את נפח התיבה.
 - חשב את שטח מעטפת התיבה.



- 19** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבה $AB = 10$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ (ראה ציור). הזווית שבין אלכסון התיבה, AC' , לבין הבסיס $ABCD$ היא 38° .
- חשב את אלכסון הבסיס.
 - חשב את גובה התיבה.
 - חשב את שטח פני התיבה.

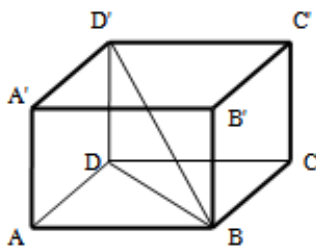


- 20) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראו סרטוט) שבה: 10 ס"מ $AB =$, 12 ס"מ $AD =$, 8 ס"מ $AA' =$.
- א. חשב את אורך $A'D$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.
- ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה $B'D$.

שאלות מבחינות:

21) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן.

מעבירים את האלכסונים BD ו- BD' כך שמתקיים: $\angle DBD' = \angle ABD = \alpha$.



אורך האלכסון BD יסומן ב- a .

א. הבע באמצעות a ו- α את:

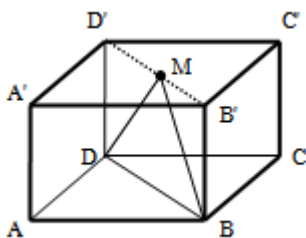
1. אורך התיבה AB .

2. רוחב התיבה AD .

3. גובה התיבה AA' .

ב. מצא את α אם ידוע כי נפח התיבה הוא $0.64a^3$.

22) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסון $B'D'$ בבסיס העליון. מאמצע האלכסון M מעבירים את הקטעים DM ו- BM כך שנוצר המשולש ישר הזווית BMD , ($\angle BMD = 90^\circ$).



אורך מקצוע הבסיס AB הוא $5a$ ואורך

הקטע DM הוא $4a$.

א. הבע באמצעות a את אורך המקצוע AD .

ב. מעבירים את הקטע AM . חשב את זווית MAD .

ג. מצא את a אם ידוע כי שטח המשולש MAD

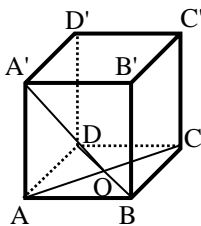
הוא 125 סמ"ר (עגל למספר שלם).

קובייה:

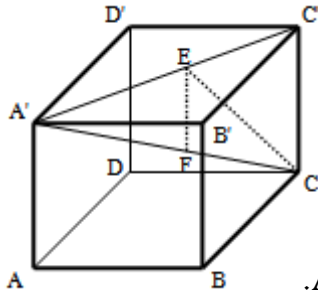
23) בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ אורך המקצוע הוא 8 ס"מ.

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון.

מצא את הזווית שבין OA' לפאה $ABB'A'$.

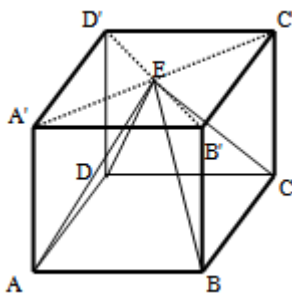


שאלות מבחינות:



24) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. מעבירים את האלכסון $A'C'$ בבסיס העליון. מהנקודה E שעל האלכסון $A'C'$ מותחים את הקטע CE השווה באורכו לקטע $A'E$. כמו כן מורידים גובה EF ממישור הבסיס העליון $A'B'C'D'$. הנקודה F נמצאת על האלכסון הראשי $A'C'$. נסמן: $\sphericalangle ACE = \alpha$, $AF = m$. הבע באמצעות α ו- m את נפח הקובייה.

25) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. מעבירים את האלכסונים $A'C'$ ו- $B'D'$ בבסיס העליון ומסמנים ב- E את פגישתם. מהנקודה E מעבירים את



הקטעים AE, BE, CE, DE ו- DE .
 כך שנוצרת הצורה המרחבית $ABCDE$.
 א. איזו צורה היא $ABCDE$? נמק.
 ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הקטע AE ומישור הפאה $AA'D'D$.
 ג. חשב את הנפח הכלוא בתוך הקובייה ומחוץ לצורה $ABCDE$ אם ידוע כי שטח הפנים של הקובייה הוא 384 סמ"ר.

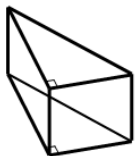
מנסרה ישרה:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מצולעים זהים המקבילים זה לזה במרחב. המקצועות הצדדיים המתברים את קדקודי הבסיסים המתאימים נקראים גובהי המנסרה. כל גובה במנסרה ישרה מאונך למישורי הבסיס העליון והתחתון.

במסגרת שאלון 805 נעסוק במנסרות הבאות:

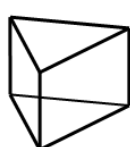
מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית



מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים



מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות



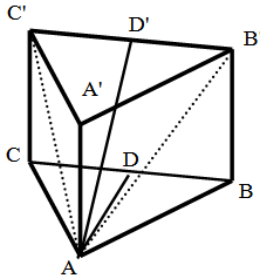
- א. מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- ב. מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- ג. מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.

הערה: התיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרות ישרות שבסיסן מלבן וריבוע בהתאמה.

מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:

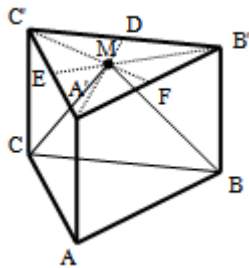
שאלות מבחינות:

26) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים AB' ו- AC' כך שנוצר המשולש



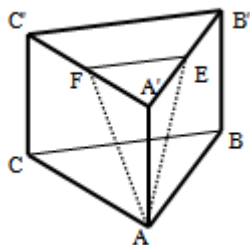
$AB'C'$. הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש ABC והאנך לצלע $B'C'$ במשולש $A'B'C'$ היא 40° . אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ.
 א. חשב את שטח המשולש $A'B'C'$.
 ב. חשב את נפח המנסרה.

27) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים



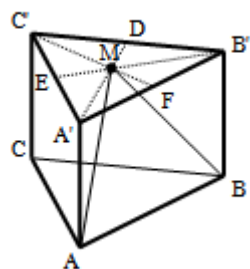
בבסיס העליון $A'B'C'$ את התיכונים $A'D$, $B'E$ ו- $C'F$, אשר נחתכים בנקודה M . מהנקודה M מעבירים את הקטעים MC ו- MB כך שנוצר המשולש MCB . גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה. חשב את הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש MCB למישור הבסיס ABC .

28) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי המקצועות AB' ו- $A'C'$. מעבירים את הקטעים AE ו- AF , כך שנוצר המשולש AEF . אורך מקצוע הבסיס של המנסרה הוא 10 ס"מ וגובה המנסרה הוא 12 ס"מ.



א. חשב את אורכי הצלעות של המשולש AEF .
 ב. חשב את הזווית שבין גובה המנסרה AA' למישור המשולש AEF .

29) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון $A'B'C'$ את התיכונים $A'D$, $B'E$ ו- $C'F$ אשר נחתכים ב- M . מהנקודה M מעבירים את הקטעים MA ו- MB כך שנוצר המשולש MAB . גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה ויסומן ב- $2a$.



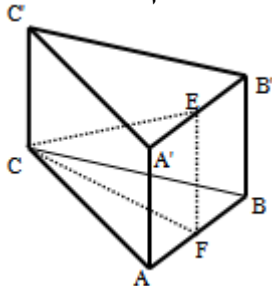
א. הבע באמצעות a את אורך הקטע MA .
 ב. חשב את הזווית שבין הקטע MA ומישור הבסיס ABC .
 ג. חשב את הזווית שבין הגובה למקצוע AB במישור MAB לבין מישור הבסיס ABC .
 ד. חשב את הזווית שבין MA והפאה $AA'B'B$.
 ה. הבע באמצעות a את שטח הפנים של המנסרה.

מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

שאלות מבחינות:

30) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABC A'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה

שוקיים ($AC = BC$). מאמצעי המקצועות $A'B'$ ו- AB מעבירים את הקטע EF .



ידוע כי אורך מקצוע הבסיס AB הוא k ס"מ והוא קטן

פי 2 מאורך שוק הבסיס AC . נסמן: $\angle FCE = \alpha$.

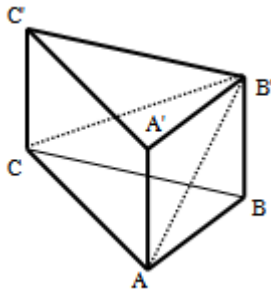
א. הבע באמצעות k ו- α את נפח המנסרה.

ב. חשב את נפח המנסרה אם ידוע כי: $2EF = CE$,

וכי שטח הבסיס ABC הוא $\sqrt{15}$ סמ"ר.

31) במנסרה משולשת וישרה $ABC A'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים

($AC = BC$) מעבירים את האלכסונים AB' ו- CB' כך שנוצר המשולש $AB'C$.



ידוע כי הזווית שבין אנך למקצוע AC במשולש ABC

ואנך למקצוע AC במשולש $AB'C$ היא 45°

(האנכים נפגשים על המקצוע AC בנקודה E). זוויות

הבסיס ABC הן: $\angle CAB = \angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$.

גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.

א. מצא את אורך המקצוע AC .

ב. חשב את הזווית שבין האלכסון CB' למישור הבסיס.

מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:

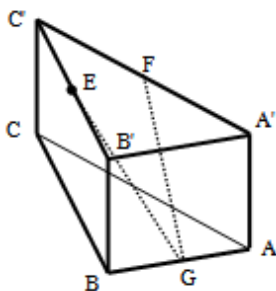
שאלות מבחינות:

32) במנסרה $ABC A'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$)

הנקודות E, F, G הן בהתאמה אמצעי המקצועות $A'C', B'C', AB$ ו- $AB = 5t$,

$BC = 12t$. מסמנים את מידות הבסיס ABC : $\angle ABC = 90^\circ$.

הזווית שבין הקטע GE למישור הבסיס ABC היא: 36.86° .



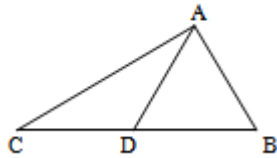
א. הבע באמצעות t את גובה המנסרה.

ב. חשב את הזווית שבין הקטע GF

ולמישור הבסיס ABC .

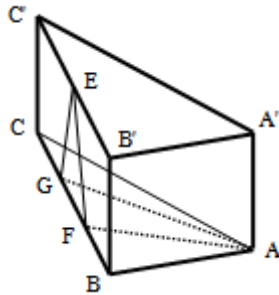
ג. מצא את t אם ידוע כי אורך הקטע GF

הוא: $\sqrt{3825}$ ס"מ.



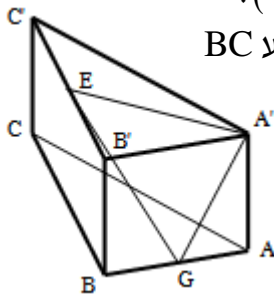
- 33 א. הוכח את הטענה : תיכון במשולש חוצה אותו לשני משולשים שווי שטח.
 כלומר, הקטע AD הוא תיכון במשולש ABC.
 הראה כי : $S_{ABD} = S_{ACD}$.

במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) הנקודות F ו-G מחלקות את מקצוע הבסיס BC לשלושה חלקים שווים. הנקודה E היא אמצע המקצוע $B'C'$. ידוע כי אורך הקטע EF הוא 10 ס"מ ואורך המקצוע BC הוא 24 ס"מ. שטח המשולש AFG הוא 40 סמ"ר.



- ב. איזה משולש הוא המשולש EFG? מצא את זוויותיו.
 ג. מצא את גובה המנסרה.
 ד. היעזר בטענה שהוכחת בסעיף א' ומצא את אורך המקצוע AB. (רמז : התבונן במשולש ABF ומצא את הצלע AB באמצעות שטחו).
 ה. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.

34 לפניך מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).



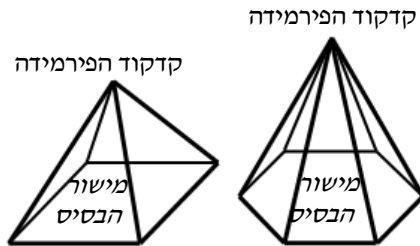
- ידוע כי הפאה הצדדית $AA'B'B$ היא ריבוע וכי אורך המקצוע BC גדול פי 3 מ-AB. הנקודות E ו-G נמצאות על אמצעי המקצועות $B'C'$ ו-AB בהתאמה.
 מעבירים את הקטעים $A'E$, $A'G$ ו-GE.
 א. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הבסיס.
 ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הפאה $AA'B'B$.
 ג. נתון כי : $\angle EGA' = 69^\circ$. חשב את זווית $EA'G$.

פירמידה ישרה:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה. בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.

במסגרת שאלון 805 נעסוק בפירמידות הישרות הבאות:

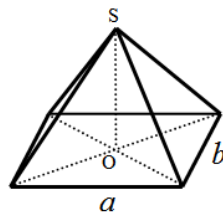
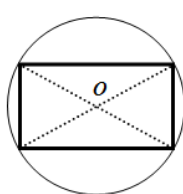


- פירמידה שבסיסה מלבן.
- פירמידה שבסיסה ריבוע.
- פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.

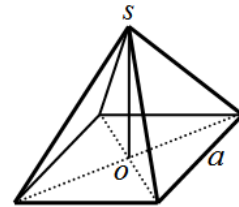
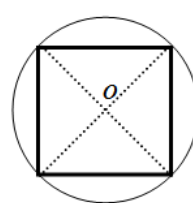
הגדרה: גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

משפט: בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

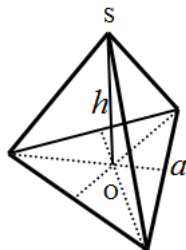
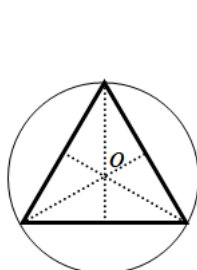
באיורים הבאים מופיע חתך מישורי של בסיסי הפירמידות ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



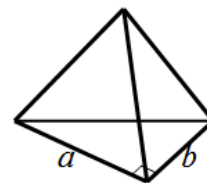
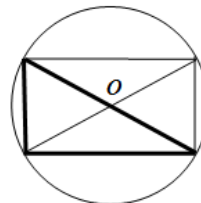
תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.



תיאור פירמידה שבסיסה ריבוע. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הריבוע.



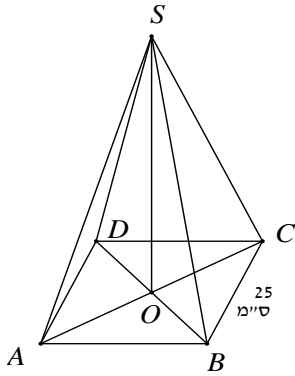
תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).



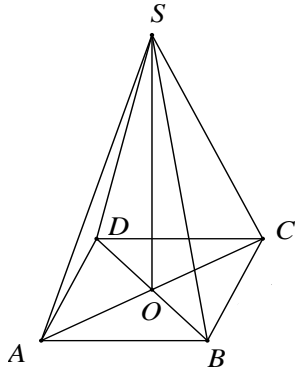
תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית. ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

נפח פירמידה: נפח פירמידה ששטח בסיסה הוא S וגובהה h הוא: $V = \frac{S \cdot h}{3}$.

פירמידה שבסיסה ריבוע:



- 35) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע) $SABCD$. אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ. הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת 35° .
- חשב את אלכסון הבסיס.
 - חשב את גובה הפירמידה.
 - סמן נקודה E כאמצע BC וחשב את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.

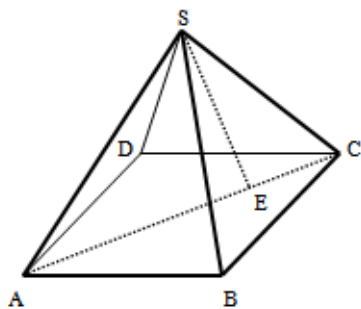


- 36) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת $SABCD$. אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ. אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.
- חשב אורך גובה של פאה צדדית.
 - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
 - חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

שאלות מבחינות:

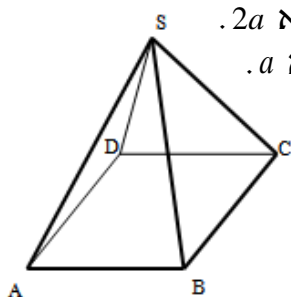
- 37) נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע a . אורך מקצועות הפירמידה הוא $3a$. מעבירים את האלכסון AC ועליו מסמנים את הנקודה E

$$\left(\frac{CE}{AE} = \frac{1}{3}\right) \quad 1:3$$



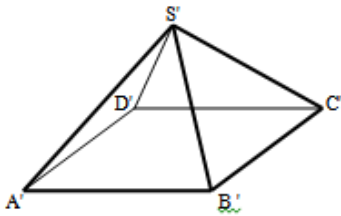
- מהקדקוד S מעבירים את הקטע SE .
- הבע באמצעות a את גובה הפירמידה.
 - חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע SE לגובה הפירמידה.
 - מצא את a אם ידוע כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא: $\sqrt{560}$ סמ"ר.

- 38) נתונות שתי פירמידות ריבועיות ישרות: $SABCD$ ו- $S'A'B'C'D'$.



- אורך מקצוע הבסיס בפירמידה הראשונה הוא a וגובהה הוא $2a$.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה השנייה הוא $2a$ וגובהה הוא a .

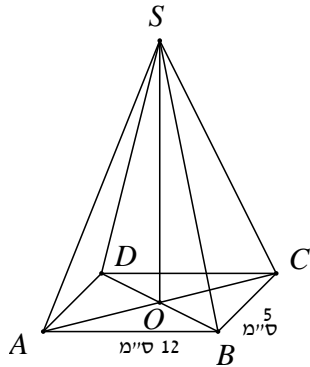
- קבע לאיזו פירמידה יש נפח גדול יותר.
- כעת משנים את הגובה של כל פירמידה כך שנפחן יהיה זהה והוא: a^3 . מצא את יחס בין המקצוע



הצדדי של הפירמידה $SABCD$ למקצוע הצדדי של הפירמידה $S'A'B'C'D'$.

- ג. דנה טוענת כי מאחר שנפח שתי הפירמידות זהה, הרי גם שטח הפנים שלהן זהה. האם דנה צודקת? הוכח את טענתך באמצעות חישוב מתאים.

פירמידה שבסיסה מלבן:



(39) נתונה פירמידה מרובעת וישרה $SABCD$

שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם:

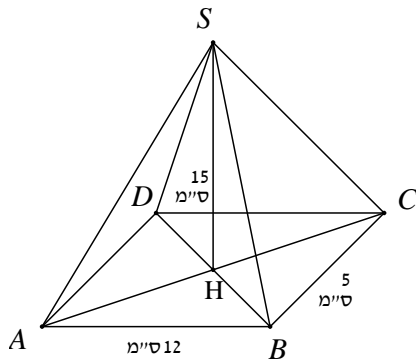
$AB = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ. אורך גובה הפירמידה

הוא: $SO = 15$ ס"מ.

א. חשב את נפח הפירמידה.

ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס.

ג. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



(40) נתונה פירמידה מרובעת ישרה $SABCD$

שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם:

$AB = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ. אורך גובה הפירמידה

הוא: $SH = 15$ ס"מ.

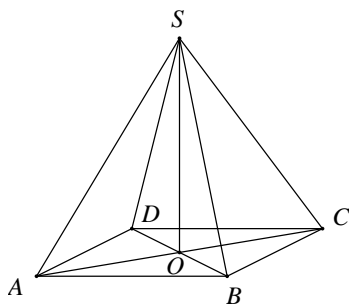
א. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC .

ב. חשב את גובה הפאה הצדדית ABS .

ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

ד. הנקודה E היא אמצע BC .

חשב את הזווית שבין SE לבסיס $ABCD$.



(41) נתונה פירמידה ישרה ומרובעת

שבסיסה $ABCD$ הוא מלבן.

נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס"מ.

גובה הפירמידה SO הוא 12 ס"מ.

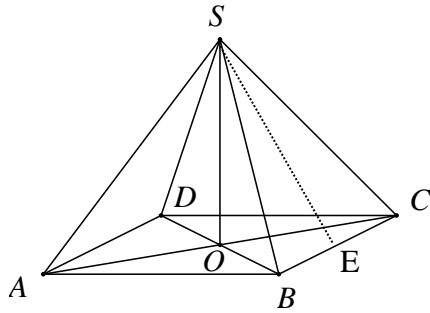
א. חשב את אורך המקצוע הצדדי.

ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

ג. נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא 40° .

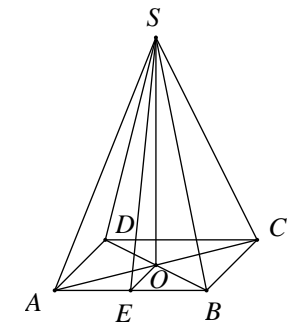
חשב את אורך מקצוע הבסיס BC .

ד. חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.

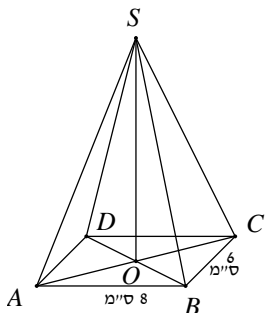


- 42** נתונה פירמידה $SABCD$, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. E אמצע BC . $AB = 16$ ס"מ. גובה הפירמידה: $SO = 10$ ס"מ.
- חשב את הזווית שבין הקטע SE לבסיס הפירמידה $ABCD$.
 - חשב את מקצוע BC אם נתון כי נפח הפירמידה הוא 480 סמ"ק.
 - סמן ב- F את אמצע המקצוע AB . חשב את הזווית שבין SF לבסיס הפירמידה.

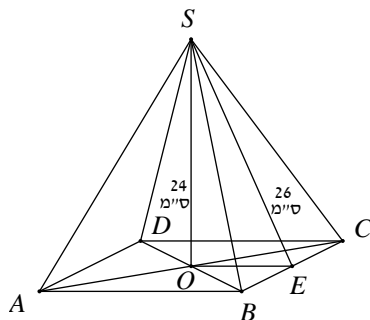
- 43** נתונה פירמידה $SABCD$ שבסיסה מלבן. זווית הראש של פאה צדדית SAB היא 56° . אורך מקצוע הבסיס AB שווה ל- 12 ס"מ.
- חשב את אורך הגובה SE של הפאה SAB .
 - חשב את אורך המקצוע הצדדי SA .
 - נתון כי אורך המקצוע AD הוא 8 ס"מ. חשב את גובה הפירמידה.
 - חשב את נפח הפירמידה.
 - חשב את הזווית בין הקטע SE לבסיס הפירמידה.
 - חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



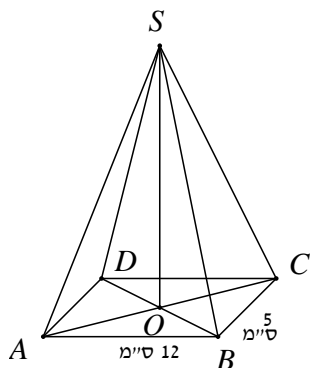
- 44** נתונה פירמידה $SABCD$ מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. אורך המקצוע AB הוא 15 ס"מ. הגובה SE של הפאה הצדדית SAB הוא 20 ס"מ. גובה הפירמידה SO הוא 18 ס"מ.
- חשב את אורך מקצוע הבסיס AD .
 - חשב את גובה הפאה הצדדית SBC .
 - חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.



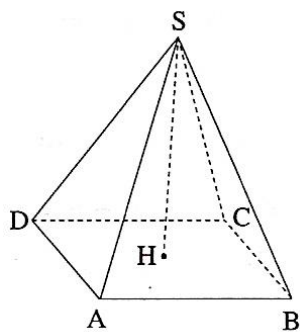
- 45** נתונה פירמידה ישרה $SABCD$. הבסיס $ABCD$ הוא מלבן שבו: $AB = 8$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ. אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.
- חשב את הזווית $\angle CSA$.
 - חשב את הזווית $\angle CSB$.
 - חשב את נפח הפירמידה.



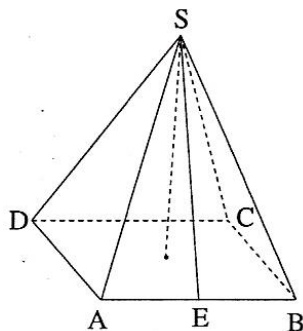
- 46) נתונה פירמידה $SABCD$ מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. גובה הפירמידה שווה ל-24 ס"מ. הגובה SE בפאה הצדדית SBC שווה ל-26 ס"מ. חשב את:
- אורך המקצוע AB .
 - הזווית בין הקטע SE לבסיס $ABCD$.
 - נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק. חשב את אורך המקצוע BC .



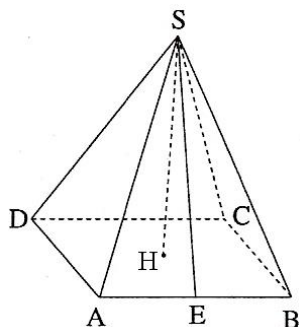
- 47) נתונה פירמידה מרובעת וישרה $SABCD$. בסיס הפירמידה הוא מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: $BC = 5$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ. זווית הראש של פאה צדדית SBC היא: 42° .
- חשב אורך מקצוע צדדי.
 - חשב את שטח הפאה SBC .
 - חשב את גובה הפירמידה, SO .



- 48) הבסיס $ABCD$ של פירמידה ישרה ומרובעת $SABCD$ הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $SH = 12$ ס"מ, $AB = 25$ ס"מ, $AD = 17$ ס"מ.
- חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.
 - חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.
 - חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה.

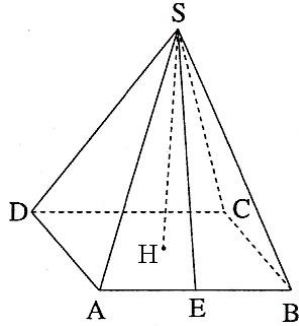


- 49) הבסיס $ABCD$ של פירמידה ישרה ומרובעת $SABCD$ הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ. הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 22$ ס"מ.
- חשב את גובה הפירמידה.
 - חשב את נפח הפירמידה.
 - חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.

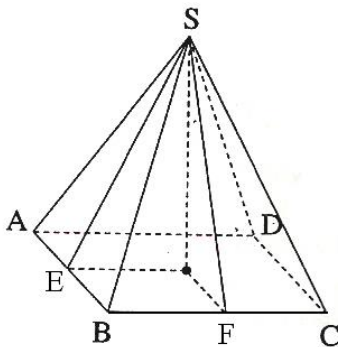


- 50) הבסיס $ABCD$ של פירמידה ישרה ומרובעת $SABCD$ הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AD = 16$ ס"מ, $AB = 17$ ס"מ. הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.

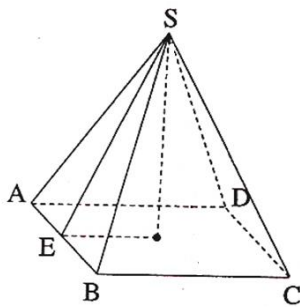
- א. חשב את גובה הפירמידה.
 ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
 ג. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.



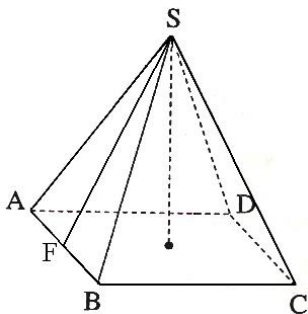
- 51) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AB = 20$ ס"מ, $SH = 8$ ס"מ. הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.
 א. חשבו את האורך AD.
 ב. חשב את אורך DH.
 ג. חשב את נפח הפירמידה.



- 52) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AB = 15$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ. E היא האמצע של AB. הזווית שבין הישר SE לבסיס היא 55° .
 א. חשב את גובה הפירמידה.
 ב. F היא האמצע של BC. חשב את זווית שבין הישר SF לבין בסיס הפירמידה.
 ג. חשב את גובה הפאה הצדדית SAB.
 ד. חשב את שטח הפאה SAB.

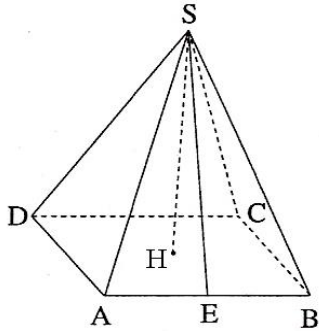


- 53) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ. הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 22$ ס"מ.
 א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.
 ב. חשב את מקצוע הבסיס BC.
 ג. חשב את מקצוע הבסיס AB, אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.



- 54) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ. זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא 38° .

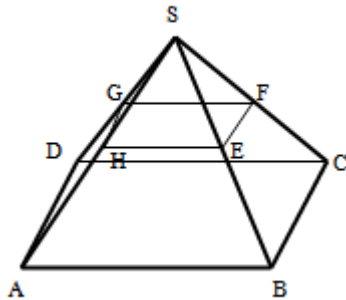
- א. חשב את הגובה של הפאה הצדדית SAB.
 ב. חשב את הזווית שבין SF לבין בסיס הפירמידה.
 ג. חשב את גובה הפירמידה.



- 55) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ. זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא 38° .
 א. חשב את גובה הפאה SAB.
 ב. חשב את גובה הפירמידה.
 ג. חשב את זווית הראש של הפאה SAD.

שאלות מבחינות:

- 56) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מאמצעי המקצועות הצדדיים

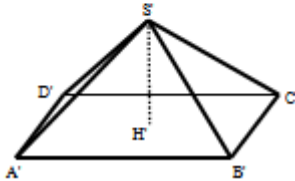
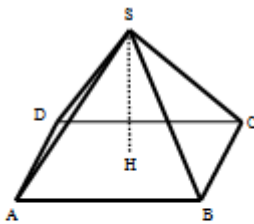


- מעבירים קטעים כך שנוצר המלבן EFGH. ידוע כי שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר וכי אורך האלכסון שלו הוא 10 ס"מ. הזווית HSF היא 50° .

- א. מצא את מידות הבסיס ABCD.
 ב. מצא את גובה הפירמידה.
 ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

- 57) נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן: האחת- SABCD

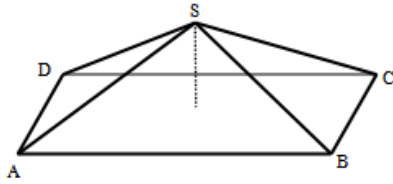
- והשנייה – S'A'B'C'D'. הקטעים SH ו-S'H' הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות. ידוע כי: $AB = 2k$, $BC = k$, $HS = 3k$ וכי: $AB' = 3k$, $B'C' = k$, $HS' = 2k$.



- א. לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות. נמק.
 1. לשתי הפירמידות אותו שטח פנים.
 2. לשתי הפירמידות אותו הנפח.
 3. בשתי הפירמידות הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה שווה.
 4. אורך מקצוע צדדי בפירמידה SABCD גדול יותר מאורך מקצוע צדדי בפירמידה S'A'B'C'D'.
 ב. מצא את הערך של k בעבורו סכום הנפחים של שתי הפירמידות יהיה שווה לנפחה של קובייה בעלת אורך מקצוע של 4 ס"מ.

58) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.

ידוע כי מקצוע הבסיס BC שווה באורכו לגובה הפירמידה ויסומן ב- t .
 כמו כן נתון כי אלכסון הבסיס AC גדול פי 4 מהמקצוע BC.



- א. הבע באמצעות t את אורך המקצוע AB.
- ב. הורד גובה SH למקצוע BC במישור הפאה SBC וחשב את הזווית הנוצרת בינו לבין מישור הבסיס ABCD.

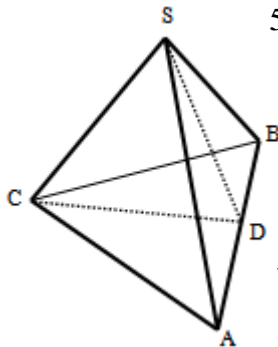
- ג. חשב את הזווית שבין שני מקצועות צדדיים שאינם סמוכים.
- ד. מסמנים את פגישת התיכונים בפאה SBC ב-N. מעבירים קטע היוצא מנקודת פגישת האלכסונים במישור הבסיס ABCD לנקודה N. חשב את הזווית שהוא יוצר עם הבסיס.

פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

שאלה מבחינה:

59) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות.

מעבירים את הגובה SD בפאה הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC. זווית הבסיס של פאה צדדית במנסרה היא 50° ושטח המעטפת הוא 89.38 סמ"ר.



- א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.
- ב. מצא את גובה המנסרה.
- ג. חשב את הזווית SDC.
- ד. חשב את הזווית שבין המקצוע SC לבסיס הפירמידה.

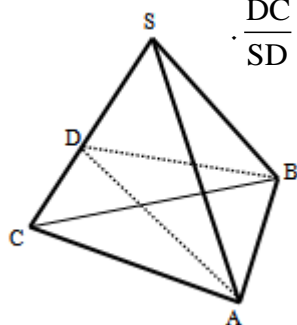
פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

שאלה מבחינה:

60) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$).

מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו-SBC כך שהזווית הנוצרת בין הגבהים אלו היא $\angle ADB = 42^\circ$. ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ.

הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC ביחס: $\frac{DC}{SD} = \frac{2}{3}$.



- א. חשב את אורך הגובה AD.
- ב. חשב את זווית הראש בפאה SAC.
- ג. חשב את שטח משולש הבסיס ABC.

פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:

שאלה מבחינה:

61) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

בפירמידה זו מעבירים גובה SD בפאה הצדדית SBC כך שנוצר המשולש SAD.

ידוע כי משולש זה הוא שווה שוקיים ובו נסמן: $SA = AD = 2m$.

הזווית הנוצרת בין הגובה SD והקטע AD תסומן ב- $\alpha = \angle SDA$.

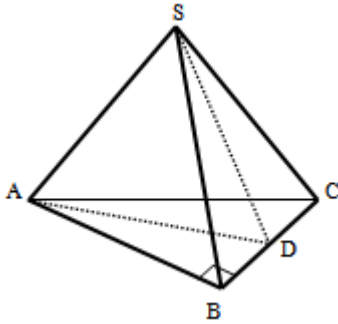
א. הראה כי הגובה SD בפאה SBC שווה באורכו

למקצוע הבסיס AB.

ב. מה ניתן לומר על המשולשים SAB ו-SAD

במקרה זה?

ג. הבע באמצעות m, α את גובה הפירמידה.



תשובות סופיות:

1) א. 10.748 ס"מ. ב. 1155.2 סמ"ק V , 660.959 סמ"ר S .

ג. 14.68 ס"מ, 18.19 ס"מ. ד. $\angle AC'B = 36.21^\circ$.

2) א. 16.29 ס"מ. ב. 11.518 ס"מ. ג. 12.23 ס"מ. ד. 1622.485 סמ"ק V .

3) א. 11 ס"מ. ב. 34.51° . ג. 11.313 ס"מ. (4) א. 8.13 ס"מ. ב. 33.09 סמ"ר.

5) א. 51 ס"מ. ב. 8.1° . (6) א. 4 ס"מ. 4.47 ס"מ. (7) א. $\frac{h\sqrt{2}}{\tan \alpha}$. ב. $\frac{2h^3}{\tan^2 \alpha}$.

8) א. $S_{\text{DOG}} = \frac{3ka}{4\sqrt{2}}$. ב. $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$. (9) $BD' = 16.031$ ס"מ, $\angle D'BD = 25.8^\circ$.

10) א. $CC' = 4.195$ ס"מ. ב. $AC = 13$ ס"מ. ג. 17.886° . ד. $AC' = 13.66$ ס"מ.

ה. 251.7 סמ"ק V . ו. 142.63 סמ"ר M . (11) $\angle AC'B = 30.96^\circ$.

12) א. $CC' = 21.44$ ס"מ. ב. 1029.36 סמ"ק V , 696.46 סמ"ר P .

13) א. $AB = 9.82$ ס"מ, $BC = 10.688$ ס"מ. ב. 303.5184 סמ"ר M , 513.43 סמ"ר P .

14) א. $AC = 10.121$ ס"מ, $AD' = 11.766$ ס"מ, $AC' = 14.227$ ס"מ. ב. 34.22° .

ג. 496 סמ"ק V , 284 סמ"ר M . (15) א. $BC = 9$ ס"מ. ב. $h = 8$ ס"מ. ג. 28.072° .

16) א. $AC = 14.42$ ס"מ. ב. 44.15° . ג. 560 סמ"ר. ד. 752 סמ"ר.

17) א. $BB' = 8.4$ ס"מ. ב. $AD' = 13.06$ ס"מ. ג. 40.03° .

18) א. $AB = 9.8$ ס"מ. ב. 1,167.9 סמ"ק V . ג. 434.4 סמ"ר.

19) א. 15.62 ס"מ. ב. $h = 12.2$ ס"מ. ג. 776.8 סמ"ר P .

20) א. $A'D = 14.42$ ס"מ. ב. $B'D = 17.55$ ס"מ.

21) א. 1. $a \cos \alpha$. 2. $a \sin \alpha$. 3. $a \tan \alpha$. ב. 53.13° .

22) א. $a\sqrt{7}$. ב. 70.6° . ג. $a = 5$. (23) 24.095° . (24) $(m \sin 2\alpha \cos \alpha)^3$.

- (25) א. הצורה היא פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע. ב. 24.1° ג. $341\frac{1}{3}$ סמ"ק.
- (26) א. 160.68 סמ"ר. ב. 2250 סמ"ק. (27) 73.89° .
- (28) א. 13 ס"מ, 13 ס"מ, 5 ס"מ. ב. 19.84° .
- (29) א. $MA = 2.3a$ ב. 60° ג. 73.9° ד. 14.47° ה. $P = 15.46a^2$.
- (30) א. $V = \frac{15k^3 \tan \alpha}{8}$ ב. $\frac{15}{\sqrt{3}}$ סמ"ק. (31) א. 10 ס"מ. ב. 26.56° .
- (32) א. $4.875t$ ב. 39.1° ג. $t = 8$.
- (33) ב. משולש שווה שוקיים. $66.42^\circ, 47.15^\circ$ ג. $\sqrt{84}$ ס"מ. ד. 10 ס"מ.
- ה. $60\sqrt{84}$ סמ"ר. (34) א. $\angle EGH = 32.31^\circ$ ב. $\angle B'GE = 53.3^\circ$ ג. $\angle GAE = 75.6^\circ$.
- (35) א. 35.36 ס"מ ב. $h = 12.378$ ס"מ ג. 44.72° .
- (36) א. 19.079 ס"מ ב. 601.89 ס"מ ג. 64.896° .
- (37) א. $a\sqrt{8.5}$ ב. 6.9° ג. $a = 2$. (38) א. $V_{S_{ABCD}} = \frac{2}{3}a^3 > V_{S_{A'B'C'D'}} = \frac{4}{3}a^3$ ב. פי $4\sqrt{\frac{19}{82}}$.
- ג. דנה טועה $P_{S_{A'B'C'D'}} = 9a^2 \neq P_{S_{ABCD}} \approx 7a^2$.
- (39) א. 300 סמ"ק ב. 13 ס"מ ג. 66.57° .
- (40) א. 16.155 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. 263.26 סמ"ר ד. 68.2° .
- (41) א. 13 ס"מ ב. 67.38° ג. $BC = 8.89$ ס"מ ד. $AB = 4.579$ ס"מ, $V = 162.83$ סמ"ק.
- (42) א. 51.34° ב. 9 ס"מ ג. 65.77° .
- (43) א. 11.284 ס"מ ב. $SE = 12.78$ ס"מ ג. $h = 10.551$ ס"מ ד. $V = 337.632$ סמ"ק.
- ה. 69.24° ו. 55.65° .
- (44) א. 17.435 ס"מ ב. $AD = 19.5$ ס"מ ג. 640 סמ"ר.
- (45) א. 34.21° ב. 20.328° ג. 260 סמ"ק.
- (46) א. 20 ס"מ ב. $AB = 67.38^\circ$ ג. 15 ס"מ.
- (47) א. 6.976 ס"מ ב. 16.282 סמ"ר ג. $S_{\Delta SBC} = 2.533$ ס"מ.
- (48) א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג. 38.44° .
- (49) א. 20.68 ס"מ ב. 2,068.2 סמ"ק ג. 70.07° .
- (50) א. 8.94 ס"מ ב. 14.7 ס"מ ג. 37.45° .
- (51) א. $AD = 17.89$ ב. $DH = 13.42$ ס"מ ג. 954.1 סמ"ק.
- (52) א. 14.28 ס"מ ב. $h = 62.29^\circ$ ג. 17.43 ס"מ ד. 130.7 סמ"ר.
- (53) א. 50.6° ב. 27.93 ס"מ ג. 6.32 ס"מ.
- (54) א. 29.04 ס"מ ב. 75.03° ג. 28.05 ס"מ.
- (55) א. 29.04 ס"מ ב. 28.05 ס"מ ג. 28.27° .
- (56) א. 12 ס"מ ו-16 ס"מ. ב. 21.44 ס"מ. ג. 823 סמ"ר.

(57) א. 1. נכון. הנפח הוא: $V = 2k^3$.

2. לא נכון. הזוויות המתקבלות הן: 51.67° , 69.56° .

3. נכון. מתקבל: $k\sqrt{10.25} > k\sqrt{6.5}$. ב. $k = \sqrt[3]{16}$.

(58) א. $AB = t\sqrt{15}$. ב. $\angle SHM = 27.31^\circ$. ג. $\angle ASC = 126.86^\circ$. ד. $\angle NMH = 14.47^\circ$.

(59) א. 10 ס"מ. ב. 5.21 ס"מ. ג. 61° . ד. 42° .

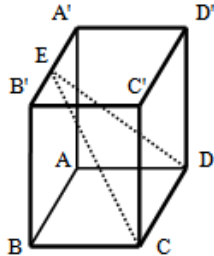
(60) א. 11.16 ס"מ. ב. 53.13° . ג. 47.27 סמ"ר.

(61) א. $SD = AB = 4m \cos \alpha$. ב. המשולשים חופפים. ג. $2\sqrt{3}m \cos \alpha$.

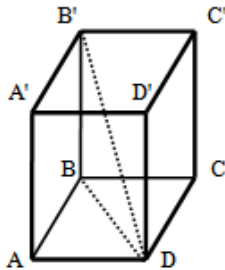
תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.

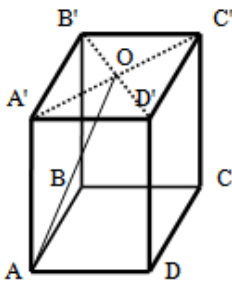
תיבה:



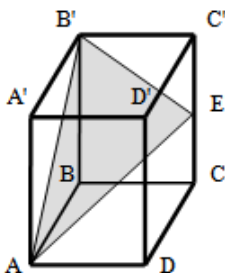
- (1) בסיס התיבה $ABCD A'B'C'D'$ הוא ריבוע שאורך צלעו 10 ס"מ. גובה התיבה הוא 24 ס"מ. הנקודה E נמצאת על אמצע המקצוע $A'B'$ וממנה מעבירים את הקטעים CE ו-DE.
- חשב את אורך הקטע CE.
 - חשב את זווית CED.
 - מורידים גובה EF במישור המשולש CDE. חשב את הזווית שהוא יוצר עם מישור הבסיס ABCD.



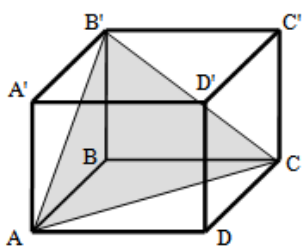
- (2) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסון BD' . הזווית שבין אלכסון התיבה לבסיס התיבה ABCD היא 56° . ידוע כי אורך אלכסון התיבה BD' הוא 24 ס"מ.
- חשב את גובה התיבה.
 - מצא את אורך בסיס הריבוע ABCD.
 - חשב את נפח התיבה.



- (3) בתיבה ריבועית $ABDCA'B'C'D'$ מעבירים אלכסונים בבסיס העליון $A'B'C'D'$. האלכסונים נפגשים בנקודה O וממנה מעבירים את הקטע AO שאורכו 10 ס"מ. אורך גובה התיבה הוא 8 ס"מ.
- חשב את הזווית שבין הקטע AO למישור הבסיס ABCD.
 - חשב את אורך צלע הבסיס.
 - חשב את נפח התיבה.

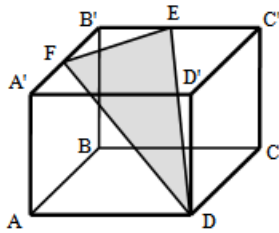


- (4) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מקצים נקודה E באמצע הגובה CC' . מעבירים את הקטעים AE ו- $AB'E$. כמתואר. ידוע כי שטח הפנים של התיבה הוא 264 סמ"ר וסכום כל מקצועותיה הוא 80 ס"מ. חשב את היקף המשולש $AB'E$.



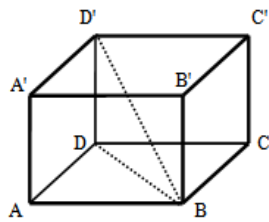
- (5) בתיבה ריבועית $ABCD A'B'C'D'$ ידוע כי גובה התיבה גדול פי 2 ממקצוע הבסיס. מעבירים את הקטעים AB' ו- AC . כך שנוצר המשולש $AB'C$ כמתואר באיור. שטח המשולש $AB'C$ הוא 24 סמ"ר.
- חשב את הזווית הנוצרת בין הצלע AB' של המשולש ומישור הבסיס ABCD.
 - מצא את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
 - חשב את נפח התיבה.

6 נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה הוא ריבוע. מקצים נקודות E ו-F על אמצעי המקצועות $A'B'$ ו- $B'C'$ בהתאמה כך שנוצר המשולש EDF.



אורך גובה התיבה הוא 12 ס"מ והזווית הנוצרת בין הקטע FD להיטלו על מישור הבסיס ABCD היא 50° .
 א. מצא את האורך של מקצוע הבסיס בתיבה.
 ב. מצא את הזווית הנוצרת בין הקטע FD להיטלו על הפאה הצדדית $AA'D'D$.

7 נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן. רוחב המלבן גדול



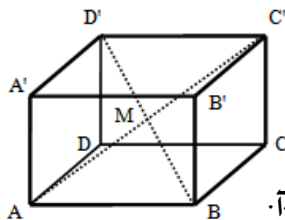
פי 2 מאורכו ושווה לגובה המלבן $(2AD = 2AA' = AB)$.

מעבירים את האלכסון BD בבסיס ABCD ואת אלכסון התיבה BD' .

א. חשב את הזווית שבין האלכסון BD' למישור הבסיס ABCD.

ב. מצא את שטח המעטפת של התיבה אם ידוע כי נפחה הוא 432 סמ"ק.

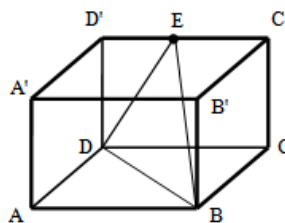
8 בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסונים AC' ו- BD' הנחתכים בנקודה M. ידוע כי המשולש AMB הוא ישר זווית $(\sphericalangle AMB = 90^\circ)$. אורך אלכסון התיבה הוא $2a$ וגובה התיבה שווה באורכו למקצוע הבסיס הקטן BC.



א. הבע באמצעות a את אורכי מקצועות הבסיס.
 ב. מצא את הזווית שבין אלכסון התיבה BD' לבין הפאה הצדדית $ADD'A'$.

ג. מצא את a אם ידוע כי נפח התיבה הוא $27\sqrt{2}$ סמ"ק.

9 בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מקצים נקודה E באמצע המקצוע $C'D'$. מהנקודה E מעבירים את הקטעים BE ו-DE כך שנוצר המשולש BED. מסמנים את אורכי מקצועות התיבה: $AB = 3a$, $AD = 2a$. ידוע כי גובה התיבה שווה באורכו למקצוע הבסיס AD.

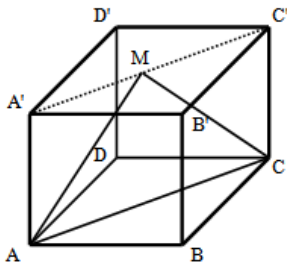


א. מצא את הזווית הנוצרת בין הצלע BE למישור הפאה הצדדית $BB'C'C$.

ב. הבע באמצעות a את היקף המשולש BDE.

ג. מצא את a אם ידוע כי היקף המשולש BDE קטן ב-14 ס"מ מהיקף הבסיס ABCD.

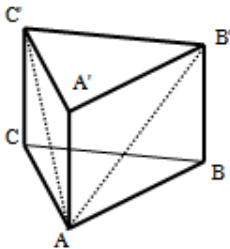
10) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. מעבירים את האלכסון בבסיס העליון $A'C'$ ומקצים נקודה M באמצעו. מהנקודה M מעבירים את הקטעים AM ו- CM כך שנוצר המשולש AMC . נתון: $AM = 6$ ס"מ, $\angle AMC = 120^\circ$.



- הסבר מדוע המשולש AMC הוא שווה שוקיים.
- חשב את אורך הגובה של הקובייה.
- חשב את נפח הקובייה.

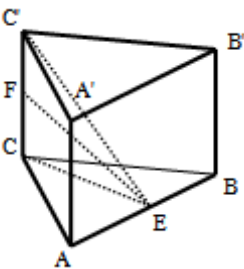
מנסרה ישרה:

11) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים AB' ו- AC' ואת הקטע AD (אמצע $B'C'$). הזווית שבין AD למישור הבסיס ABC היא 40° . אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ.



- חשב את אורך מקצוע בסיס המנסרה.
- חשב את הזווית הנוצרת בין האלכסון AB' למישור הבסיס ABC .
- חשב את הזווית בין האלכסונים AB' ו- AC' .
- חשב את שטח המשולש $AB'C'$.
- חשב את נפח המנסרה.

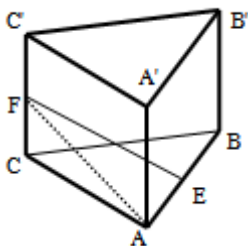
12) במנסרה ישרה ומשולשת $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מסמנים את אמצע מקצוע הבסיס AB בנקודה E וממנה מעבירים את הקטעים CE ו- $C'E$, כך ש- FE הוא חוצה זווית במשולש CEC' . זווית FEC' תסומן ב- α . מקצוע הבסיס של המנסרה הוא k .



- הבע באמצעות k ו- α את גובה המנסרה.
- הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש FEC' .
- נתון: $k = 6$, $\alpha = 30^\circ$. חשב את נפח המנסרה.

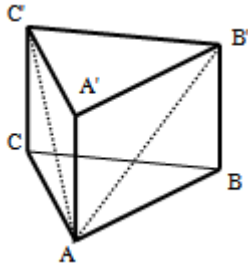
13) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מסמנים את אמצעי המקצועות AB ו- CC' בנקודות E ו- F בהתאמה.

ידוע כי גובה המנסרה שווה למקצוע הבסיס ומסומן ב- $2x$. אורך הקטע FE הוא 16 ס"מ והזווית EAF היא 63.434° .



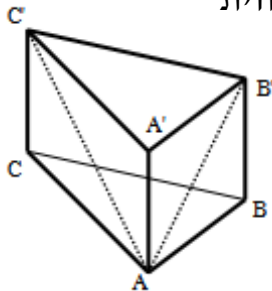
- הבע באמצעות x את אורך הקטע AF ממשולש AEF .
- מצא את x (עגל למספר שלם).
- (רמז: השתמש במשפט פיתגורס במשולש ACF).
- חשב את נפח המנסרה.

14) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את אלכסוני הפאות AB' ו- AC' ומסמנים: $\angle B'AC' = 2\alpha$.



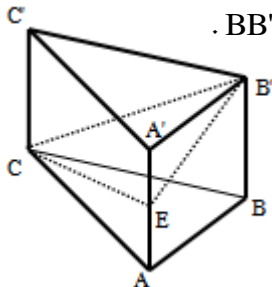
- אורך כל אלכסון הוא k .
- הבע באמצעות k ו- α את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.
 - הבע באמצעות k ו- α את אורך גובה המנסרה.
 - הבע באמצעות k ו- α את נפח המנסרה.
 - חשב את נפח המנסרה כאשר: $k = 5$, $\alpha = 15^\circ$.

15) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$) אורך המקצוע AC הוא 8 ס"מ. ידוע כי זווית הראש ACB היא בת 20° וכי גובה המנסרה הוא 4 ס"מ. מעבירים את האלכסונים AC' ו- AB' .



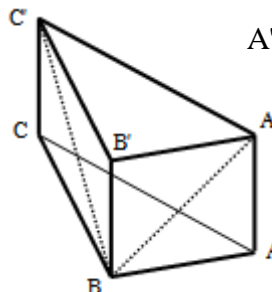
- חשב את אורכי האלכסונים AC' ו- AB' .
- חשב את הזוויות שבין האלכסונים AC' ו- AB' למישור הבסיס ABC .
- חשב את הזווית בין האלכסונים AC' ו- AB' .
- חשב את נפח המנסרה.

16) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). מאמצע הגובה AA' מעבירים את הקטעים CE ו- $B'E$, כך שנוצר המשולש CEB' . נתון: $BB' = 2t$, $AC = 5t$, $\angle ACB = 40^\circ$.



- חשב את הזוויות הנוצרות בין כל אחת מצלעות המשולש CEB' למישור הבסיס ABC .
- חשב את היקף המשולש CEB' .

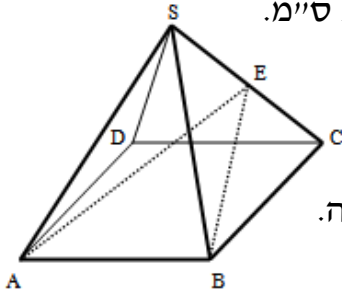
17) במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) מעבירים את האלכסונים $A'B$ ו- BC' כך שנוצר המשולש $A'BC'$. ידוע כי: $BC' = 15.6$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ וכי: $AB + BC = 22.4$ ס"מ.



- מצא את גובה המנסרה AA' .
- חשב את הזווית שבין האלכסון BC' למישור הבסיס ABC .
- חשב את נפח המנסרה.

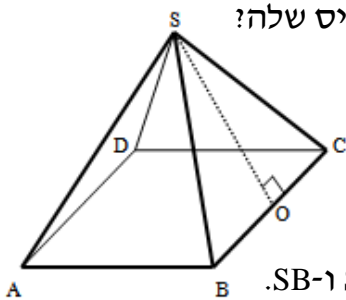
פירמידה:

18 נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע. מידות גובה הפירמידה ומקצוע הפירמידה הצדדי הם בהתאמה: 14 ס"מ ו-18 ס"מ.



- חשב את אורך מקצוע הבסיס.
- חשב את נפח הפירמידה.
- חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
- חשב את זווית הראש של פאה צדדית בפירמידה.
- חשב את הזווית שבין המקצועות SB ו- SD .

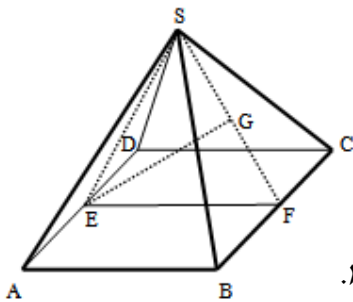
19 בפירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע מעבירים את הגובה SO למקצוע הבסיס BC בפאה הצדדית SBC וידוע כי הזווית שהוא יוצר עם מישור הבסיס $ABCD$ היא: 75° .



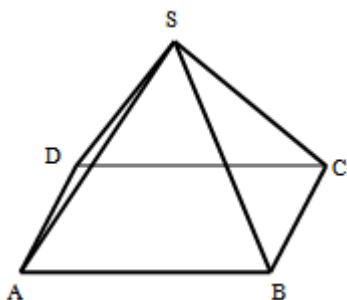
א. פי כמה גדול גובה הפירמידה מאורך מקצוע הבסיס שלה?

- ידוע כי גובה הפירמידה הוא 18.66 ס"מ.
- חשב את הזווית הנוצרת בין גובה הפירמידה ובין אחד המקצועות הצדדיים.
- חשב את זווית הראש של אחת הפאות הצדדיות.
- חשב את הזווית הנוצרת שבין שני המקצועות SD ו- SB .

20 נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע. מאמצעי המקצועות AD ו- BC מעבירים את הקטע EF ויוצרים את המשולש SEF . הנקודה G נמצאת על אמצע SF וידוע כי המשולש SEF הוא שווה צלעות. מסמנים: $GE = k$.



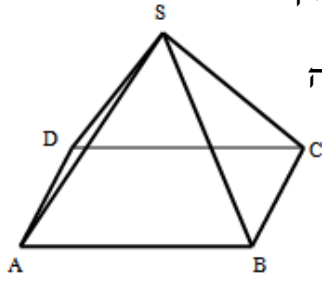
- הבע באמצעות k את נפח הפירמידה.
- חשב את זווית הבסיס של פאה צדדית.
- חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה.
- מעבירים את הקטעים BE ו- BG כך שנוצר המשולש BEG . ידוע כי היקפו הוא: 28.17 ס"מ. מצא את k .



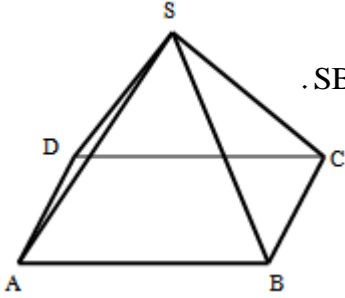
21 נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה מלבן.

ידוע כי: $BC = 8$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ.

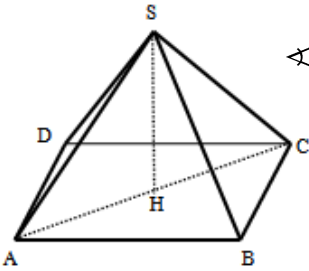
- הזווית שבין המקצוע SB ומישור הבסיס היא: 60° .
- חשב את האורך של אלכסון בסיס הפירמידה.
- חשב את אורך גובה הפירמידה.
- חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
- חשב את נפח הפירמידה.



- 22) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. ידוע כי אורך המקצוע AB של המלבן הגדול פי 2 מאורך המקצוע BC. הזווית הנוצרת בין מקצוע צדדי למישור בסיס הפירמידה היא 60° . נפח הפירמידה הוא: $72\sqrt{15}$ סמ"ק.
- מצא את מידות בסיס הפירמידה (AB ו-BC).
 - חשב את זווית הראש של הפאה הצדדית SAB.
 - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

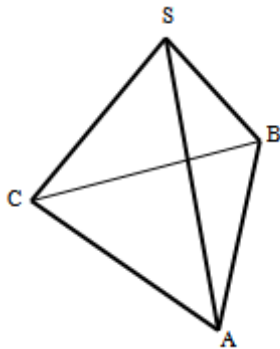


- 23) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מקצועות הפירמידה מקיימים: $SB = 3k$, $AB = 2k$, $BC = k$.
- מצא את זוויות הבסיס של הפאות SAB ו-SBC.
 - הבע באמצעות k את גובה הפירמידה.
 - מצא את k בעבורו נפח הפירמידה יהיה שווה ל-232 סמ"ק.



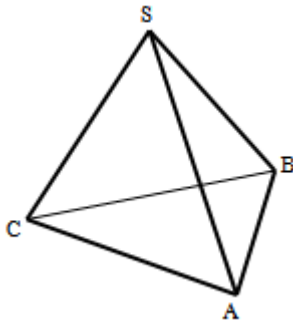
- 24) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מעבירים את האלכסון AC ומורידים את הגובה SH. אורך מקצוע צדדי הוא k ומסמנים את הזווית: $\angle ACB = \alpha$. וכן זווית הראש של הפאה SBC היא: 2α .
- הבע באמצעות k ו- α את מידות הבסיס ABCD.
 - הבע באמצעות k ו- α את גובה הפירמידה.
 - מצא את α אם ידוע כי אורך גובה הפירמידה שווה למחצית מאורך האלכסון AC.

- 25) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. ידוע כי אורך מקצוע הבסיס שלה הוא 12 ס"מ וכי אורך מקצוע צדדי שלה הוא 14 ס"מ.



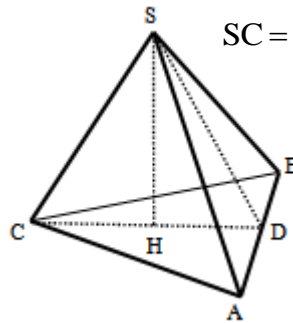
- חשב את שטח בסיס הפירמידה ABC.
- חשב את גובה הפירמידה.
- חשב את נפח הפירמידה.
- חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
- חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי למישור הבסיס ABC בפירמידה.

- 26) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). ידוע כי משולש הפאה SAC הוא שווה צלעות שאורך צלעו היא 16 ס"מ. זווית הראש של הפאה SAB היא: 30° .



- א. מצא את אורך המקצוע AB.
- ב. חשב את הזוויות שבין המקצוע SC למישור הבסיס ABC.
- ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
- ד. חשב את נפח הפירמידה.

27 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$).

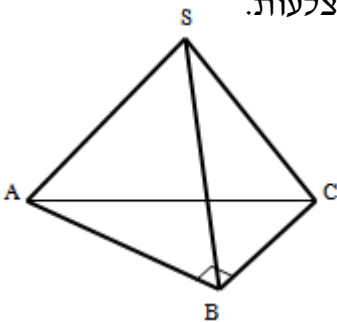


מורידים גובה SD בפאה הצדדית SAB ואת גובה הפירמידה SH. ידוע כי המשולש SCD הוא שווה שוקיים שבו: $SC = CD = 12$ ס"מ ו- $\angle SCD = 50^\circ$.

- א. מצא את אורך גובה הפירמידה.
- ב. מצא את אורך המקצוע AB.
- ג. חשב את הזווית שבין המקצועות AS ו- CS.
- ד. חשב את הזווית שבין המקצועות AS ו- BS.

28 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

ידוע כי אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא 8 ס"מ וכי שטח משולש הבסיס הוא 24 סמ"ר. הפאה הצדדית SAB היא משולש שווה צלעות.

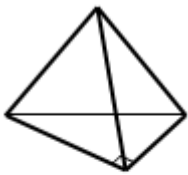


- א. מצא את מידות מקצועות הבסיס.
- ב. חשב את אורך גובה הפירמידה.
- ג. חשב את הזווית שבין המקצוע SB למישור הבסיס ABC.

29 לפניך שתי הצורות המרחביות הבאות:

1. פירמידה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית בעל מקצועות ניצבים במידות a , $2a$ וגובה $2a$.

2. פירמידה ישרה שבסיסה מלבן במידות a , $2a$ וגובה $2a$.



א. לפניך מספר טענות, קבע אלו מהן נכונות ואלו שגויות ונמק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים.

1. הנפח של פירמידה 2 גדול פי 2 מהנפח של פירמידה 1.

2. הזווית שיוצר גובה הפירמידה עם כל אחד מהמקצועות הצדדיים בשתי הפירמידות שווה.

3. שטח המעטפת של פירמידה 2 גדול פי 2 משטח המעטפת של פירמידה 1.



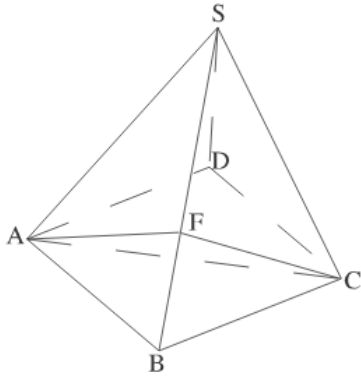
ב. הבע באמצעות a את אורך מקצוע קובייה שנפחה שווה לסכום הנפחים של פירמידות 1 ו-2.

תשובות סופיות:

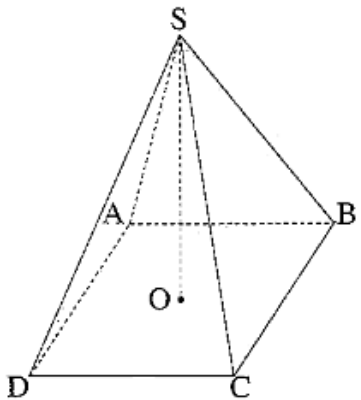
- (1) א. 26.476 ס"מ. ב. 21.771° . ג. 67.38° .
- (2) א. 19.8 ס"מ. ב. 9.48 ס"מ. ג. 1791.22 סמ"ק.
- (3) א. 53.13° . ב. 8.48 ס"מ. ג. 576 סמ"ק.
- (4) 26.6 ס"מ או 27.6 ס"מ.
- (5) א. 63.43° . ב. 4 ס"מ. ג. 128 סמ"ק.
- (6) א. 9 ס"מ. ב. 16.7° .
- (7) א. 24.1° . ב. 216 סמ"ר.
- (8) א. $a, a\sqrt{2}$. ב. 45° . ג. $a = 3$.
- (9) א. 27.9° . ב. $9.3a$. ג. $a = 20$.
- (10) א. הקטעים AM ו-CM שווים וזאת ניתן לראות בשני המשולשים AMO ו-CMO כאשר O אמצע האלכסון AC. ב. 3 ס"מ. ג. 27 סמ"ק.
- (11) א. 19.26 ס"מ. ב. 36° . ג. 47.71° . ד. 160.68 סמ"ר. ה. 2250 סמ"ק.
- (12) א. $0.5k\sqrt{3}\tan 2\alpha$. ב. $\frac{3k^2}{8}(\tan 2\alpha - \tan \alpha)$. ג. $81\sqrt{3}$ סמ"ק.
- (13) א. $\sqrt{x^2 + 256}$. ב. $x = 8$. ג. $1024\sqrt{3}$ סמ"ק.
- (14) א. (1) $2k\sin\alpha$ (2) $k\sqrt{1-4\sin^2\alpha}$ (3) $k^3\sin^2\alpha\sqrt{3}\sqrt{1-4\sin^2\alpha}$. ב. 12.4 סמ"ק.
- (15) א. 4.87, $\sqrt{80}$. ב. 55.21° , 26.56° . ג. 76.14° . ד. 43.77 סמ"ק.
- (16) א. 21.8° , 16.29° , 11.3° . ב. $14.04t$.
- (17) א. 6 ס"מ. ב. 22.61° . ג. 345.6 סמ"ק.
- (18) א. 16 ס"מ. ב. 1194.66 סמ"ק. ג. 772 סמ"ר. ד. 52.7° . ה. 77.88° .
- (19) א. פי 1.86. ב. 20.75° . ג. 29° . ד. 41.5° .
- (20) א. $\frac{4k^3}{9}$. ב. 63.43° . ג. 50.76° . ד. $k = 10$.
- (21) א. $\sqrt{208}$ ס"מ. ב. 12.48 ס"מ. ג. 364.23 סמ"ר. ד. 399.36 סמ"ק.
- (22) א. 12 ס"מ, 6 ס"מ. ב. 53.13° . ג. 294.46 סמ"ר.
- (23) א. 80.4° , 70.52° . ב. $k\sqrt{7.75}$. ג. $k = 5$.
- (24) א. $2k\sin\alpha$, $2k\sin\alpha\tan\alpha$. ב. $k\sqrt{1-\tan^2\alpha}$. ג. $\alpha = 35.26^\circ$.
- (25) א. $36\sqrt{3}$ סמ"ר. ב. $\sqrt{148}$ ס"מ. ג. $24\sqrt{111}$ סמ"ק. ד. 290 סמ"ר. ה. 60.33° .
- (26) א. 8.28 ס"מ. ב. 58.82° . ג. 285.7 סמ"ר. ד. 292 סמ"ק.
- (27) א. 9.19 ס"מ. ב. 12.83 ס"מ. ג. 69° . ד. 64.6° .
- (28) א. $10 \times 8 \times 6$ ס"מ. ב. $\sqrt{39}$ ס"מ. ג. 51.31° .
- (29) א. 1. הטענה נכונה. 2. הטענה נכונה. 3. הטענה אינה נכונה. ב. $a\sqrt{2}$.

תרגול מבגרויות:

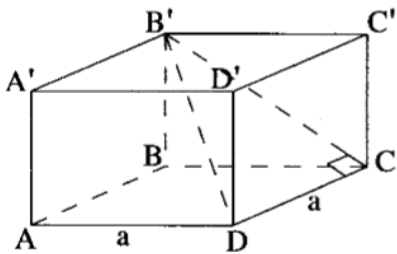
*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.



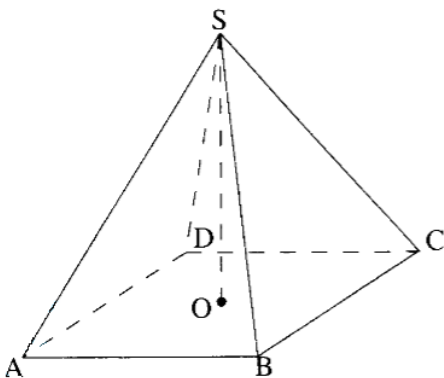
- (1) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע (ראה ציור). אורך צלע הריבוע הוא 10 ס"מ, ואורך מקצוע צדדי של הפירמידה הוא 13 ס"מ.
 א. חשב את הגובה AF למקצוע SB בפאה SAB.
 ב. חשב את זווית AFC.



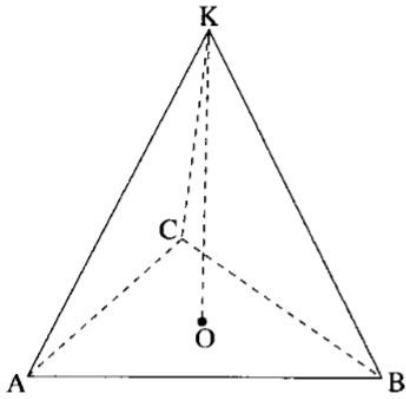
- (2) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע (ראה ציור). האורך של צלע הבסיס ABCD הוא 10 ס"מ וגם גובה הפירמידה הוא 10 ס"מ.
 א. (1) מצא את הזווית בין הפאה של הפירמידה לבסיס הפירמידה.
 (2) מצא את הזווית בין הגובה לצלע BC בפאה CSB ובין הגובה לצלע AD בפאה SAD.
 ב. מצא את הזווית בין שני מקצועות צדדיים סכומים.



- (3) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה ABCD הוא ריבוע שצלעו a (ראה ציור). נתון כי שטח המשולש DCB' שווה ל- $0.6a^2$.
 א. הבע באמצעות a את האורך של CB'.
 ב. מצא את גודל הזווית בין DB' למישור ABCD.
 ג. מצא את גודל הזווית בין B'C והבסיס העליון.

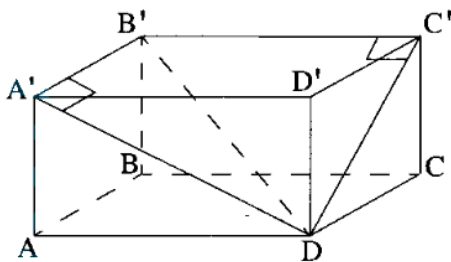


- (4) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע. גובה הפירמידה שווה באורכו לאלכסון הבסיס של הפירמידה ($SO = AC$).
 א. חשב את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי ובין מישור הבסיס של הפירמידה.
 נתון גם כי $AC = 7$ ס"מ.
 ב. חשב את האורך של צלע הבסיס.
 ג. חשב את גודל הזווית שבין SB ובין AB.



5 נתונה פירמידה ישרה KABC שבסיסה משולש שווה צלעות. אורך צלע הבסיס הוא a . גובה הפירמידה KO שווה באורכו לצלע הבסיס (ראה ציור).

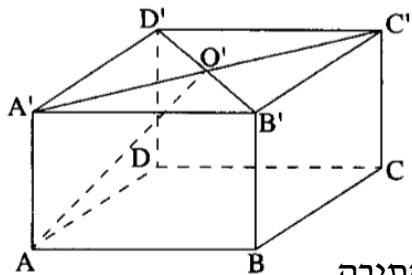
- א. הבע באמצעות a את האורך של AO.
- ב. מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי של הפירמידה ובין בסיסה.
- ג. נתון כי נפח הפירמידה הוא $18\sqrt{3}$. מצא את הערך של a .



6 בתיבה ABCDA'B'C'D' אורך האלכסון B'D' הוא a . האלכסון B'D' יוצר זווית של 60° עם המקצוע A'B', ויוצר זווית של 50° עם הפאה DCC'D'.

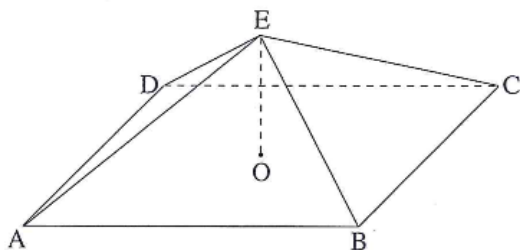
- א. הבע באמצעות a את האורך:
 - (1) של הצלע A'B'
 - (2) של הצלע B'C'
 - (3) של האלכסון BD.

ב. הבע באמצעות a את נפח התיבה ABCDA'B'C'D'.



7 נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה הוא ריבוע. אלכסוני הבסיס A'B'C'D' נפגשים בנקודה O' (ראה ציור). נתון: אורך צלע הבסיס הוא a , הזווית בין AO' לבסיס ABCD היא 42° .

- א. הבע באמצעות a את נפח התיבה.
- ב. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה ובין בסיס התיבה.

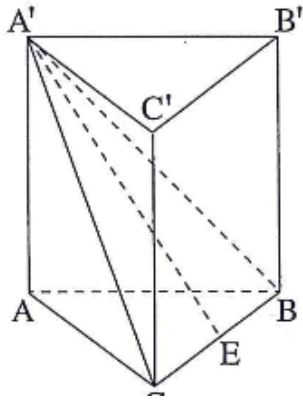


8 נתונה פירמידה ישרה EABCD

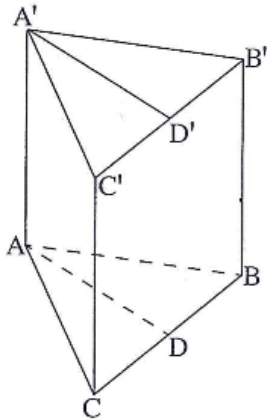
שבסיסה ABCD הוא מלבן (ראה ציור). הזווית בין מקצוע צדדי של הפירמידה לבסיס היא 30° .

הזווית AOB בין אלכסוני הבסיס היא 120° . גובה הפירמידה הוא 10 ס"מ.

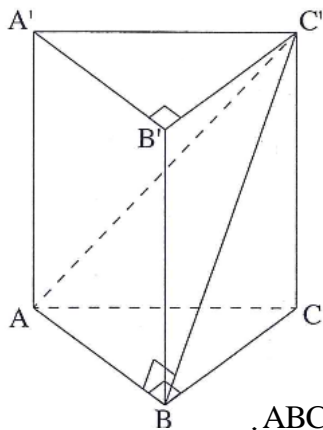
- א. חשב את אורך המקצוע BC.
- ב. חשב את הזווית בין הגובה ל-BC בפאה EBC ובין בסיס הפירמידה.



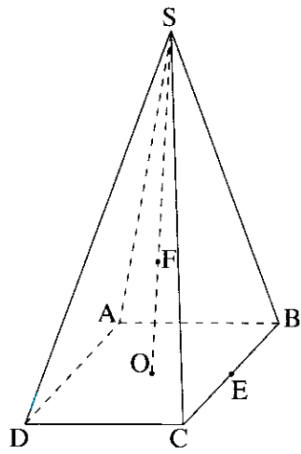
- 9 נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הם משולשים שווי צלעות (ראה ציור).
 $A'E$ הוא הגובה ל- BC במשולש $A'BC$.
 הזווית בין $A'E$ ובין מישור הבסיס ABC היא α .
 גובה המנסרה הוא h .
 א. הבע באמצעות h ו- α את אורך צלע הבסיס של המנסרה.
 ב. אם נתון כי $\alpha = 30^\circ$, מצא את גודל הזווית שבין AC' למישור ABC .



- 10 במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הבסיסים הם משולשים שווי שוקיים ($AB=AC$).
 AD הוא גובה לצלע BC , ו- $A'D'$ הוא גובה לצלע $B'C'$ (ראה ציור).
 נתון: $\angle BAC = 64^\circ$, $BC = 26$ ס"מ, נפח המנסרה הוא 8112 סמ"ק.
 א. חשב את גובה המנסרה.
 ב. חשב את הזווית שבין האלכסון AB' ובין בסיס המנסרה ABC .
 ג. חשב את $\angle A'D'$.



- 11 הבסיס של מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים (ראה ציור).
 נתון: $\angle ABC' = 90^\circ$, $AB = BC = a$ ס"מ,
 הזווית בין האלכסון AC' לפאה $BCC'B'$ היא α .
 א. הבע באמצעות a ו- α את נפח המנסרה.
 נתון גם כי גובה המנסרה הוא $2a$.
 ב. מצא את α .
 ג. מצא את גודל הזווית שבין האלכסון AC' לבסיס ABC .



12) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה

ריבוע וגובהה SO.

הנקודה E היא אמצע הצלע BC (ראה ציור).

הזווית בין לבסיס הפירמידה היא 75° .

אורך צלע הבסיס הוא a.

א. (1) הבע באמצעות a את האורך של SE.

(2) הבע באמצעות a את שטח המעטפת של

הפירמידה SABCD.

ב. הנקודה F נמצאת על הגובה SO כך ש- $FO = \frac{1}{3}SO$.

בפירמידה הישרה FABCD חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

13) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD.

האורך של צלע הריבוע הוא a ס"מ.

גובה הפירמידה, SO, שווה לאלכסון הבסיס AC (ראה ציור).

א. חשב את הזווית שבין SC

למישור הבסיס של הפירמידה.

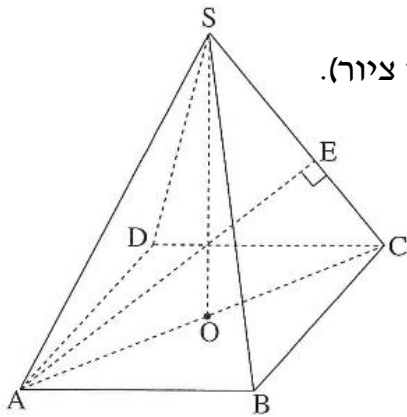
ב. מקדקוד A העבירו אנך למקצוע SC.

האנך חותך את המקצוע בנקודה E (ראה ציור).

הבע באמצעות a את אורך הקטע CE.

ג. נתון ששטח המשולש AEC הוא 40 סמ"ר.

חשב את a.



14) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן ABCD.

SO הוא גובה הפירמידה (ראה ציור).

SK הוא גובה למקצוע CD בפאה SCD.

נתון: $SK = 16$ ס"מ.

הזווית בין SK למישור הבסיס היא 68° .

א. חשב את אורך המקצוע BC.

ב. נתון גם: $CD = 10$ ס"מ.

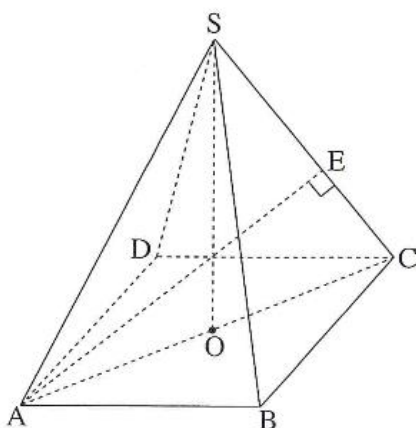
(1) חשב את הזווית CSD.

(2) ציין זווית אחרת בין שני מקצועות של

הפירמידה, השווה בגודלה לזווית CSD.

ג. SL הוא גובה למקצוע AB בפאה SAB.

מצא את הזווית שבין SK ובין SL.



תשובות סופיות:

- (1) א. 9.23 ס"מ. ב. 100° .
- (2) א. (1) 63.64° (2) 53.13° ב. 48.18° .
- (3) א. $1.2a$ ב. 25.13° ג. 33.56° .
- (4) א. 63.43° ב. 4.95 ס"מ ג. 71.57° .
- (5) א. $0.577a$ ב. 60° ג. $a=6$.
- (6) א. (1) $0.5a$ (2) $0.766a$ (3) $0.9148a$ ב. $0.1547a^3$.
- (7) א. $0.637a^3$ ב. 24.24° .
- (8) א. 17.32 ס"מ ב. 33.69° .
- (9) א. $\frac{2h}{\sqrt{3} \tan \alpha}$ ב. 26.57° .
- (10) א. 30 ס"מ ב. 50.73° ג. 34.74° .
- (11) א. $\frac{a^3 \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}}{2 \cdot \tan \alpha}$ ב. 24.09° ג. 54.74° .
- (12) א. (1) $1.932a$ (2) $3.864a^2$ ב. 41.336° .
- (13) א. 63.43° ב. $0.6326a$ ג. $a=10$.
- (14) א. 11.99 ס"מ. ב. (1) 34.71° (2) ASB. ג. 44° .

פרק 3 – חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות ולוגריתמיות:

חוקי חזקות:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^0 = 1 & .1 & a^1 = a & .2 & a^n \cdot a^m = a^{n+m} & .3 \\
 \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 \\
 \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9
 \end{array}$$

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 & \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} & .2 & \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} & .3 \\
 \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b} & .4 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6
 \end{array}$$

שאלות יסודיות – חוקי חזקות ושורשים:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} & .ב \\
 2^3 + 2^5 & .ד \\
 \frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} & .א \\
 \frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5} & .ג
 \end{array}$$

2) פשט את הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} & .ב \\
 \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} & .ד \\
 \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} & .א \\
 \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} & .ג
 \end{array}$$

3) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

4) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

א. $3\sqrt{2}$	ב. $5\sqrt{3}$	ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$
ד. $2\sqrt[3]{3}$	ה. $x\sqrt{x}$	

5) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

א. $\sqrt{12}$	ב. $\sqrt{48}$	ג. $\sqrt{63}$
ד. $\sqrt[3]{54}$	ה. $\sqrt{x^5}$	

משוואות מעריכיות:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות יסודיות – משוואות מעריכיות:

פתור את המשוואות הבאות :

$3^{5x-3} = 3^{3x+7}$ (6)	$2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x$ (7)	$(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$ (8)
---------------------------	--	--

$3^x = 5^x$ (11)	$\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$ (10)	$\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$ (9)
------------------	--	--

$2^x + 2^x = 16$ (14)	$e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$ (13)	$5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2x}{3}-2}$ (12)
-----------------------	--	---

$2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$ (17)	$5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$ (16)	$e^x + 2e^x = 3e^4$ (15)
--	------------------------------------	--------------------------

$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ (20)	$e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1$ (19)	$5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$ (18)
-------------------------------------	--	---

$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$ (23)	$6^x - 4 \cdot 6^x + 3 = 0$ (22)	$5 \cdot 25^x - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$ (21)
--	----------------------------------	--

$e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$ (26)	$e^{2x} + e^x - 2 = 0$ (25)	$\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$ (24)
------------------------------------	-----------------------------	---

תשובות סופיות:

- (1 א. 2. ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40 (2 א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$ (3 $\sqrt{2}$.
- (4 א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.
- (5 א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$ (6 $x=5$ (7 $x=1$.
- (8 $x=1$ (9 $x=-2$ (10 $x=-\frac{1}{2}$ (11 $x=0$ (12 $x=3$ (13 $x=1, \frac{1}{6}$ (14 $x=3$.
- (15 $x=4$ (16 $x=4$ (17 $x=1$ (18 $x=-2$ (19 $x=-1$ (20 $x=1, 2$.
- (21 $x=\pm 1$ (22 $x=0$ (23 $x=0, 1$ (24 $x=1, -\frac{1}{2}$ (25 $x=0$ (26 $x=\pm 1$.

משוואות לוגריתמיות:

1. הגדרת הלוגריתם: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.
לוגריתם על בסיס a של b מוגדר כחזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b . ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.
נפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

2. דוגמאות כלליות:

- $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$
- $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$
- $10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$
- $\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow \log_{16} 4 = 0.5$
- $5^{-2} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2$
- $6^0 = 1 \Leftrightarrow \log_6 1 = 0$

3. חוקי יסוד בלוגריתמים:

$$\log_a a = 1 \quad \text{א.} \quad \log_a 1 = 0 \quad \text{ב.}$$

4. חוקי הלוגריתמים:

$$\text{א. מכפלה לסכום: } \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\text{ב. מנה להפרש: } \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\text{ג. מקדם למעריך: } \log_a b^n = n \log_a b$$

5. חזקה לוגריתמית: $a^{\log_a x} = x$.

6. מעבר מבסיס לבסיס: $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$, כאשר: $b > 0$; $a, m \neq 1$; $a, m > 0$.

7. לוגריתם על בסיס e נקרא הלוגריתם הטבעי ומסומן: $\log_e x = \ln x$.

שאלות יסודיות – חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

ז. $\ln x = 2$ ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$ ב. $2\log 2 + \log 25$

ג. $\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3\log_3 6 - (2 + \log_3 12)}$

(5) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$ ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

6 נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$.

7 חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$ ג. $e^{\ln 3}$ ד. $e^{2 \ln 3}$.

8 נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$ ב. $\log_2 \sqrt{30}$ ג. $\log_5 22.5$.

9 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$ ב. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

ג. $\log_5 (\log_2 (x^2 - 7)) = 0$ ד. $\log_5 (25^x - 20) = x$

10 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$ ב. $\log_5 (4x - 3) = \log_5 7$

ג. $2 \log_2 (2x - 2) - \log_2 (16 - x) = \log_2 (x - 1) + 1$

11 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבת t וקבלת משוואה ריבועית):

א. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$ ב. $3 \ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\log_4 x + \log_x 4 = 2.5$ ד. $\log x \cdot \log_x (10x) = 2$

ה. $\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2)$

12 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה):

א. $x^{\log_3 x} = 81$ ב. $x^{\log_5 x} = \frac{25}{x}$

ג. $x^{\ln x} = e^6 x$ ד. $x^{\frac{\log_2 x - 6}{4}} = \frac{4}{x}$

ה. $\frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)}$ ו. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

13) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (בסיסים שונים):

א. $2^x = 5$ ב. $5^x = 8$ ג. $e^x = 2$
 ד. $e^x = \frac{1}{2}$ ה. $e^x = -1$

תשובות סופיות:

(1) א. 5. ב. 3. ג. $\frac{1}{2}$. ד. $\frac{2}{3}$. ה. -2. ו. 4. ז. -1.5. ח. -1.5. ט. -4. י. 2. יא. 2. יב. -1.5. יג. -1.5.

(3) א. $x = \frac{1}{2}$. ב. $x = 65,536$. ג. $x = 27$. ד. $x = 4$. ה. $x = 5$. ו. $x = 4$. ז. $x = e^2$.

(4) א. 2. ב. 2. ג. 3. ד. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. ה. $x = 1 - a$. ו. $3a + 1$. ז. $a + 1$. ח. $4a$. ט. 5. י. $a + 1$. יא. $3a + 1$. יב. $1 - a$.

(6) א. $2a + b$. ב. $2 + a + b$. ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$. ד. 9. ה. 8. ו. 25. ז. 3. ח. 9.

(8) א. $2b + \frac{1}{a}$. ב. $\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{ab}{2}$. ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$.

(9) א. $x = 3$. ב. $x = 3$. ג. $x = \pm 3$. ד. $x = 1$.

(10) א. $x = 0$. ב. $x = 2.5$. ג. $x = 6$.

(11) א. $x = 4, \frac{1}{2}$. ב. $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$. ג. $x = 16, 2$. ד. $x = \frac{1}{100}, 10$. ה. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$.

(12) א. $x = 9, \frac{1}{9}$. ב. $x = \frac{1}{25}, 5$. ג. $x = e^3, \frac{1}{e^2}$. ד. $x = 16, \frac{1}{4}$. ה. $x = 3$. ו. $x = \sqrt{e}, e$.

(13) א. $x = 2.322$. ב. $x = 1.292$. ג. $x = 0.693$. ד. $x = -0.693$. ה. אין פתרון.

אי שוויונים מעריכיים:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1} & \text{(2)} & 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & \text{(1)} \\ e^x > 3 & \text{(4)} & e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & \text{(3)} \\ 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & \text{(6)} & \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & \text{(5)} \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & \text{(8)} & e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 & \text{(7)} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{l} x < \frac{2}{3} \text{ (1)} \quad x \leq -1, 1\frac{1}{4} \leq x \text{ (2)} \quad 0 \leq x < 1 \text{ (3)} \quad x > \ln 3 \text{ (4)} \quad x \leq \frac{1}{8} \text{ (5)} \\ 0 < x < 1 \text{ (6)} \quad x < 0, \ln 4 < x \text{ (7)} \quad x = 0 \text{ (8)} \end{array}$$

אי-שוויונים לוגריתמיים:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \log_6(x^2 - 5x) < 1 & \text{(2)} & \log_2 x < \log_2(5x - 20) & \text{(1)} \\ \log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x) & \text{(4)} & \log_3 x > \log_9(15 - 2x) & \text{(3)} \\ \ln x < 3 & \text{(6)} & \ln x \geq \ln(x^2 - 12) & \text{(5)} \\ \frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} & \text{(8)} & \ln^2 x - 6 \ln x < 7 & \text{(7)} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{l} x > 5 \text{ (1)} \quad -1 < x < 0, 5 < x < 6 \text{ (2)} \quad 3 < x < 7\frac{1}{2} \text{ (3)} \quad -3 \leq x < \frac{1}{3} \text{ (4)} \quad 2\sqrt{3} < x \leq 4 \text{ (5)} \\ 0 < x < e^3 \text{ (6)} \quad \frac{1}{e} < x < e^7 \text{ (7)} \quad \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \text{ (8)} \quad \text{וגם } x \neq 1 \end{array}$$

תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.

חזרה על חוקי חזקות ושורשים:

פשט את הביטויים הבאים לפי הכללים: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a^n a^m = a^{n+m}$:

$a^{12} a^2 a^4 a^3$ (3)	$a^4 a^5 a^9$ (2)	$a^2 a^6$ (1)
$\frac{a^3 a^8}{a^4}$ (6)	$\frac{a^{16}}{a^7}$ (5)	$\frac{a^8}{a^3}$ (4)
$\frac{a^2 b^3 a^8 b^{12}}{a^7 b^9}$ (9)	$\frac{b^{10} b^{12}}{b^2 b^6 b^7}$ (8)	$\frac{b^2 b^7 b^3}{b^5 b^4}$ (7)
$3^2 3^3 3^4$ (12)	$2^6 2^2$ (11)	$\frac{a^{16} b^4 a^{10} b^8 a^6 b^{12}}{a^3 b^5 a^2 b^2 a^4}$ (10)
$\frac{2^{12} 5^{13} 3^6}{2^9 3^6 5^{12}}$ (15)	$\frac{2^{17} 3^5}{2^{14} 3^4}$ (14)	$\frac{3^{16}}{3^{14}}$ (13)
	$\frac{3^{19} 5^{24} 5^6}{5^{30} 3^{18}}$ (17)	$\frac{4^6 7^4 7^3}{7^6 4^4 4^3}$ (16)

פשט את הביטויים הבאים לפי הכלל: $(a^n)^m = a^{nm}$:

$(a^3)^3 (a^7)^2$ (20)	$(a^6)^4$ (19)	$(a^2)^6$ (18)
$\frac{(a^2)^8 (a^4)^6}{(a^6)^2 (a^2)^3}$ (23)	$\frac{a^2 (a^8)^2}{a^{14}}$ (22)	$\left(\frac{a^{13}}{a^4}\right)^5$ (21)
$\frac{(a^2)^4 (b^6)^5 a^{12}}{a^{23} b^{28}}$ (26)	$\frac{(3^5)^3 3^2}{(3^3)^2 3^4}$ (25)	$\frac{(2^3)^4}{2^2 2^9}$ (24)
$\frac{(2^4)^5 (3^5)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ (29)	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ (28)	$\frac{a^{20} (a^3)^4 (b^5)^6}{a^{30} b^{15} (b^3)^5}$ (27)
		$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$ (30)

פשט את הבאים לפי הכללים : $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a^4 b^8)^4$ (33)	$(a^6 b^3)^2$ (32)	$(a^2 b)^3$ (31)
$\left(\frac{a^3 b^7}{b^4}\right)^2$ (36)	$\left(\frac{a^8}{b^2}\right)^4$ (35)	$\left(\frac{a^5}{b^4}\right)^3$ (34)
$\left(\frac{a^2 a^7 b^9}{b^3 a^6 b^4}\right)^{30}$ (39)	$\left(\frac{a^6 b^{10}}{a^3 b^4 b^5}\right)^{12}$ (38)	$\left(\frac{a^4 b^{10}}{a^3 b^8}\right)^{20}$ (37)
$\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 \cdot 5^7}\right)^2$ (42)	$\left(\frac{2^{40} 3^{20}}{3^{18} 2^{39}}\right)^3$ (41)	$\left(\frac{(a^2)^3 b^{20}}{a^5 (b^2)^7}\right)^3$ (40)
		$\left(\frac{3^5 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2$ (43)

פשט את הבאים לפי הכללים : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

$6^0 \cdot 3^{-3}$ (46)	2^{-3} (45)	3^{-2} (44)
$\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}$ (49)	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ (48)	-2^{-4} (47)
$\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$ (52)	$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ (51)	$\left(-\frac{4}{7}\right)^{-2}$ (50)
$\left(\frac{a^4}{b^3}\right)^{-4}$ (55)	$(ab)^{-2}$ (54)	$\left(\frac{2^4 3^3}{32^2}\right)^{-3}$ (53)
$\left(\frac{a^{24} b^{25}}{(a^3)^6 (b^2)^2 b^{20}}\right)^{-1}$ (58)	$\left(\frac{(a^2)^4 a^3 b^{12} b^4}{a^{11} b^{15}}\right)^{-5}$ (57)	$\left(\frac{a^4 a^2 b^6}{ab^6}\right)^{-3}$ (56)

59) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שורשים) :

ג. $\sqrt[3]{8}$	ב. $-\sqrt{25}$	א. $\sqrt{49}$
ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$	ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$	ד. $-\sqrt[7]{128}$
ט. $\sqrt[4]{-25^2}$	ח. $\sqrt[4]{-16}$	ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$
יב. $(\sqrt[5]{-32})^3$	יא. $\sqrt[6]{-8^4}$	י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$	טו .	$\sqrt[6]{(-1000)^2}$	יד .	$(\sqrt[3]{-1000})^2$	יג .
$\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$	יח .	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$	יז .	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$	טז .
$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	כא .	$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$	כ .	$\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{8}$	יט .

60) הכנס לתוך השורש את המקדם שלפניו :

$\frac{\sqrt{75}}{5}$	ד .	$\frac{\sqrt{24}}{2}$	ג .	$3\sqrt{6}$	ב .	$5\sqrt{2}$	א .
$\frac{2\sqrt[3]{20}}{5}$	ח .	$4\sqrt[5]{3}$	ז .	$3\sqrt[4]{7}$	ו .	$\frac{4\sqrt[3]{300}}{10}$	ה .

61) הוצא מתוך השורש את השלם הגדול ביותר :

$\sqrt{90}$	ד .	$\sqrt{320}$	ג .	$\sqrt{50}$	ב .	$\sqrt{40}$	א .
$\sqrt[5]{160}$	ח .	$\sqrt[3]{56}$	ז .	$\sqrt[3]{108}$	ו .	$\sqrt{250}$	ה .
				$\sqrt[4]{162}$	י .	$\sqrt[5]{972}$	ט .

62) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

$\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}$	ד .	$\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$	ג .	$32^{\frac{3}{5}}$	ב .	$8^{\frac{2}{3}}$	א .
		$16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$	ז .	$343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$	ו .	$81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$	ה .

תשובות סופיות:

- 256 (11 $a^{23}b^{17}$ (10 a^3b^6 (9 b^7 (8 b^3 (7 a^7 (6 a^9 (5 a^5 (4 a^{21} (3 a^{18} (2 a^8 (1
 a^4 (22 a^{45} (21 a^{23} (20 a^{24} (19 a^{12} (18 3 (17 $7/4$ (16 40 (15 24 (14 9 (13 3^9 (12
 $a^{12}b^6$ (32 a^6b^3 (31 3^5 (30 1 (29 3 (28 a^2 (27 $\frac{b^2}{a^3}$ (26 3^7 (25 2 (24 a^{22} (23
 a^3b^{18} (40 $a^{90}b^{60}$ (39 $a^{36}b^{12}$ (38 $a^{20}b^{40}$ (37 a^6b^6 (36 $\frac{a^{32}}{b^8}$ (35 $\frac{a^{15}}{b^{12}}$ (34 $a^{16}b^{32}$ (33
 $\frac{25}{36}$ (49 3 (48 $-\frac{1}{16}$ (47 $\frac{1}{27}$ (46 $\frac{1}{8}$ (45 $\frac{1}{9}$ (44 $\frac{64}{729}$ (43 225 (42 5832 (41

$$\frac{1}{a^6 b} \quad (58) \quad \frac{1}{b^5} \quad (57) \quad \frac{1}{a^{15}} \quad (56) \quad \frac{b^{12}}{a^{16}} \quad (55) \quad \frac{1}{a^2 b^2} \quad (54) \quad \frac{1}{6^6} \quad (53) \quad \frac{25}{16} \quad (52) \quad -\frac{27}{8} \quad (51) \quad \frac{49}{16} \quad (50)$$

(59) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16 ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. ± 5 יא. ϕ יב. -8
 יג. 100 יד. 10 טו. 6 טז. 8 יז. 20 יח. 3 יט. 2 כ. 6 כא. 3.

$$(60) \quad \sqrt{50} \quad \text{ב.} \quad \sqrt{54} \quad \text{ג.} \quad \sqrt{6} \quad \text{ד.} \quad \sqrt{3} \quad \text{ה.} \quad \sqrt{48} \quad \text{ו.} \quad \sqrt[4]{567} \quad \text{ז.} \quad \sqrt[5]{3072} \quad \text{ח.} \quad \sqrt[3]{\frac{32}{25}}$$

$$(61) \quad \text{א.} \quad 2\sqrt{10} \quad \text{ב.} \quad 5\sqrt{2} \quad \text{ג.} \quad 8\sqrt{5} \quad \text{ד.} \quad 3\sqrt{10} \quad \text{ה.} \quad 5\sqrt{10} \quad \text{ו.} \quad 3\sqrt[3]{4} \quad \text{ז.} \quad 2\sqrt[3]{7} \quad \text{ח.} \quad 2\sqrt[5]{5} \quad \text{ט.} \quad 3\sqrt[5]{4}$$

$$(62) \quad \text{א.} \quad 4 \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{8} \quad \text{ג.} \quad 125 \quad \text{ד.} \quad \frac{32}{243} \quad \text{ה.} \quad \frac{27}{4} \quad \text{ו.} \quad \frac{10}{49} \quad \text{ז.} \quad \frac{1}{2}$$

משוואות מעריכיות:

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

$$\begin{array}{lll} 25 \cdot 5^{x^2+x} = 5^x & (12) & 100^x = 10000^{x+1} & (7) & 2^x = 32 & (1) \\ 4^{x^2} = 2^{x+1} & (13) & 6^{x^2-4} = 1 & (8) & 3^{2x} = 27 & (2) \\ \frac{3^{x^2}}{3^{6(x+1)}} = 3 & (14) & (3^x \cdot 27)^4 = 9 & (9) & 5^x \cdot 25^{x-1} = 625 & (3) \\ 10^x (10^x)^x = 100 & (15) & (5^{2x} \cdot 125^{x-3})^3 = \frac{1}{25} & (10) & (4^{x-1})^2 = 8 & (4) \\ \frac{(3^x)^{3x}}{27} = \frac{3^x}{3} & (16) & (2^{x^2})^4 \cdot 8^x = 2 & (11) & 3^x \cdot 81^{x+2} = 9^{2x-1} & (5) \\ & & & & 32^{\frac{x}{3}+5} = 4^{\frac{x}{2}-1} & (6) \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

$$\begin{array}{lll} 8 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = 27 & (25) & 16 \cdot (2^{3x+5} \cdot 8^{x+5})^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+8} & (21) & 3^x = \frac{1}{27} & (17) \\ 4 \left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} \left(\frac{7}{2}\right)^{3-x} = 49 & (26) & \frac{2^x}{8^{3x-2}} \left(\frac{4^{3-x}}{2^{x-4}}\right)^2 = \frac{1}{4} & (22) & \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot 8^x & (18) \\ 27 \left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2+9x} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+7} = 125 & (27) & \left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = \frac{4}{25} & (23) & 27^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} & (19) \\ 49 \left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2+x} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{4-6x} = 25 & (28) & 27 \left(\frac{3}{2}\right)^{4x+1} = 8 & (24) & \frac{8}{32^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} & (20) \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי שורשים):

תזכורת: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\begin{array}{lll} \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{5^x} = 25 & \text{(41)} & \sqrt[3]{8^x} \cdot (2 \cdot 32^x) = \sqrt[5]{1024} & \text{(35)} & \sqrt{3^{x+2}} = 81 & \text{(29)} \\ 27 \cdot \sqrt[3]{81} = 3^x & \text{(42)} & \sqrt[5]{256} = \frac{\sqrt{2^x}}{4 \cdot 8^x} & \text{(36)} & (\sqrt{5^x})^3 = 125 & \text{(30)} \\ 100 \cdot \sqrt[3]{10^{x^2-3}} = 10,000 & \text{(43)} & \left(\frac{1}{9}\right)^x \sqrt{3 \cdot \sqrt[5]{27^x}} = 1 & \text{(37)} & 2^{2x-1} \cdot \sqrt{4^x \cdot 64} = 256 & \text{(31)} \\ 9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt[3]{3} & \text{(44)} & \sqrt{10^{2x+1}} = 1000 \cdot \sqrt[3]{10^x} & \text{(38)} & (9\sqrt{27})^x \cdot 3^{x+2} = \frac{1}{9} & \text{(32)} \\ \sqrt{32} \cdot 2^{x^2+4x} = \sqrt{\frac{1}{8}} & \text{(45)} & 81 \cdot \sqrt[8]{3^x} = 27^{x+9} & \text{(39)} & \frac{125 \cdot 5^{x+1}}{\sqrt{25^x}} = \frac{\sqrt{5}}{5^{3-x}} & \text{(33)} \\ \sqrt[x]{2 \cdot \sqrt[x]{\frac{4}{\sqrt[3]{8}}}} = 1 & \text{(46)} & \sqrt{5^{4x+3}} = \frac{\sqrt[4]{25^{x-2}}}{125} & \left(\frac{1}{49}\right)^x = \sqrt{7 \cdot 343^x \cdot \sqrt{7^x}} & \text{(34)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

$$\begin{array}{lll} 3^x \cdot 2^x = \sqrt{729} \cdot 10^3 \cdot 5^{-x} & \text{(53)} & 3^{x+2} \cdot 20 = 405 \cdot 2^x & \text{(50)} & 2^x \cdot 5^x = 1000 & \text{(47)} \\ 7^{x^2-1} \cdot 10^{x^2+4} = 7 \cdot 10^6 & \text{(54)} & 5 \cdot 3^{x+4} = 2187 \cdot 5^{x-2} & \text{(51)} & 4 \cdot 3^x \cdot 2^x = 144 & \text{(48)} \\ \sqrt[3]{3^{x-1} \cdot 2^{x-2} \cdot 5^{x-3}} = 0.02 & \text{(55)} & 2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392 & \text{(52)} & 5^{x+1} \cdot 3^{x-2} = 125 & \text{(49)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחיסור):

$$\begin{array}{lll} (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 3.75 & \text{(70)} & 3^{x+2} - 3^{x-2} = 240 & \text{(63)} & 3^x + 3^x = 18 & \text{(56)} \\ 3^{2-x} + 3^{1-x} = 4 & \text{(71)} & 2^{x+3} + 2^{x-1} = \frac{17}{16} & \text{(64)} & 5^x + 6 \cdot 5^x = 875 & \text{(57)} \\ 25^{2-x} - 5^{1-2x} = 124 & \text{(72)} & 3^{x-2} - 3^{x-3} = 54 & \text{(65)} & 2^x + 4 \cdot 2^x = 80 & \text{(58)} \\ 3^{3x+1} + 2178 = 27^{x+2} & \text{(73)} & 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 245 & \text{(66)} & 7 \cdot 10^x - 10^x = 600 & \text{(59)} \\ 468 - 6^x = 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} & \text{(74)} & 5^{3x+2} + 3 \cdot 125^x = 28 & \text{(67)} & 7 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = \frac{5}{27} & \text{(60)} \\ 8^{x+2} \cdot 3^{x-1} + 410 \frac{2}{3} = 4^{x+\frac{1}{2}} \cdot 6^{x+3} & \text{(75)} & 2^{2x-1} + 4^{x+2} = 66 & \text{(68)} & 8^x + 8^{x+2} = 1040 & \text{(61)} \\ 10^{x+1} \cdot 2^{x-1} + 6 \cdot 10^3 = 5^{x+1} \cdot 4^{x+1} & \text{(76)} & 16^{\frac{x}{2}} - 4^{2x-\frac{1}{2}} = 14 & \text{(69)} & 2^x + 2^{x+5} = 1056 & \text{(62)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחסור):

$$\begin{array}{lll} \frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3 & \text{(90)} & 36^{-x} - 7 \cdot 6^{-x} + 6 = 0 & \text{(84)} & 2^{x+2} + 2^{-x} = 8.5 & \text{(77)} \\ \frac{8}{9^x+4} + 3 = -\frac{77}{81^x-16} & \text{(91)} & 16^{x+2} + 96 \cdot 4^{x-1} = 1 & \text{(85)} & 3^x - 3^{2-x} = 8 & \text{(78)} \\ \frac{3^{x+2}}{3^{2x}+3^x-2} - \frac{6}{3^x+2} = \frac{3^x}{3^x-1} & \text{(92)} & 2 \cdot 2^{4x+1} + 3 \cdot 4^x = 1 & \text{(86)} & 5^x + 5^{2-x} = 26 & \text{(79)} \\ \frac{25 \cdot 2^x - 68}{2^x - 2} = \frac{5 \cdot 2^{x+2} + 82}{2^x + 3} & \text{(93)} & 4^{1.5x+1} + 3 \cdot 2^{6x-3} = 56 & \text{(87)} & 7^{x+4} + 7^{-x} = 350 & \text{(80)} \\ & & 2^{\frac{2}{3}x+3} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} = -1 & \text{(88)} & 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0 & \text{(81)} \\ & & \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x-2} - 26 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}x} = 3 & \text{(89)} & 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0 & \text{(82)} \\ & & & & 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0 & \text{(83)} \end{array}$$

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} 2^{x+1} + 3^{y+1} = 17 \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 3^y = 21 \end{cases} & \text{(100)} & \begin{cases} 2^{x+3y} = 8 \\ 3^{2x+7y} = 81 \end{cases} & \text{(97)} & \begin{cases} y = x+1 \\ 3^x + 3^y = 36 \end{cases} & \text{(94)} \\ \begin{cases} 3^x - 7^y = 20 \\ 9^x - 3 \cdot 49^y = 582 \end{cases} & \text{(101)} & \begin{cases} 7^{3x-7y} = 7 \\ 2^{2x-12y} = 256 \end{cases} & \text{(98)} & \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} & \text{(95)} \\ \begin{cases} 2^x + 5^y = 29 \\ 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^y = 1298 \end{cases} & \text{(102)} & \begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = -1 \end{cases} & \text{(99)} & \begin{cases} 2x - 1 = y \\ 4 \cdot 3^x - 3^{y+2} = -15 \end{cases} & \text{(96)} \end{array}$$

אי-שוויונים מעריכיים:

פתור את אי-השוויונים המעריכיים הבאים:

תזכורת: אם: $a > 1$ אז: $a^x > a^y \Rightarrow x > y$ ואם: $0 < a < 1$ אז: $a^x > a^y \Rightarrow x < y$.

$$\begin{array}{ll} 3^{x-2} > 27 & \text{(104)} & 2^x < 16 & \text{(103)} \\ 5^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x & \text{(106)} & 16^x < 8^{x+1} & \text{(105)} \\ 2 \cdot 16^{x^2} \cdot 32^x > 1 & \text{(108)} & 27^x \cdot 3^{x^2} > 3^{x+3} & \text{(107)} \\ 0.3^{6x-1} < 0.3^{13-x} & \text{(110)} & 64^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 1024 & \text{(109)} \\ \left(\frac{1}{32}\right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2x} & \text{(112)} & 0.6^{x+1} \geq 0.6^{x^2-1} & \text{(111)} \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{625}\right)^x < 5^{x^2} \quad (114)$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2} \cdot \sqrt{27^{x+1}} \geq 3 \quad (113)$$

$$27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{3x-1} < 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} \quad (116)$$

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{x^2-1} \geq 1000^{1-x} \quad (115)$$

$$81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+3x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} < 16 \quad (118)$$

$$4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-1} < 5 \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^x \quad (117)$$

$$\frac{1}{9} \leq 3^{x+2} \leq 27 \quad (120)$$

$$125 \cdot \sqrt[3]{5^x} > \sqrt[3]{5^{8x^2}} \quad (119)$$

$$1 \leq 125 \cdot 5^x \leq 5^{x^2+1} \quad (122)$$

$$1 \leq 4^{2x-1} \cdot 2^{x-1} \leq 128 \quad (121)$$

$$0 < 25^x \cdot 5^{x^3} < 5 \cdot \sqrt{625^x} \quad (124)$$

$$0 < 8^x \cdot 2^{x^2} < 16 \quad (123)$$

$$9^x - \frac{10}{9} \cdot 3^{x+2} + 9 < 0 \quad (126)$$

$$16^x - 4^x - 12 > 0 \quad (125)$$

$$2^x \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{16}{x-6}} \geq 5^x \quad (128)$$

$$2^x - 3 \cdot 2^{4-x} > 2 \quad (127)$$

$$\frac{2x-5}{7^{x-2}} < 343 \quad (129)$$

ממשוואות מעריכיות עם משתנה שאינו במעריך:

פתור את המשוואות הבאות:

$$xe^x + x = 0 \quad (132)$$

$$2x = xe^x \quad (131)$$

$$xe^x = ex \quad (130)$$

$$xe^x = \frac{x}{\sqrt{e}} \quad (135)$$

$$xe^x = \frac{x}{e} \quad (134)$$

$$xe^x = \sqrt{e} \cdot x \quad (133)$$

$$2x + xe^x = 0 \quad (138)$$

$$xe^x = \frac{x}{e^2} \quad (137)$$

$$xe^x = \sqrt[3]{e} \cdot x \quad (136)$$

$$e^x = xe^x \quad (141)$$

$$xe^x = 2e^x \quad (140)$$

$$\frac{x}{3} = xe^x \quad (139)$$

$$2xe^x + e^x = 0 \quad (142)$$

משוואות מעריכיות המתקבלות תוך כדי פתרון בעיות גדילה ודעיכה:

פתור את המשוואות הבאות:

$$4 \cdot 1.04^x = 9 \cdot 1.03^x \quad (144)$$

$$5 \cdot 1.2^x = 7 \cdot 1.1^x \quad (143)$$

$$8 \cdot 1.3^x = 9 \cdot 1.07^x \quad (146)$$

$$3 \cdot 1.06^x = 2 \cdot 1.08^x \quad (145)$$

תשובות סופיות:

- $1\frac{2}{3}$ (10 -2.5 (9 ± 2 (8 -2 (7 -40.5 (6 -10 (5 1.75 (4 2 (3 1.5 (2 5 (1
 -0.5 (18 -3 (17 1, $-\frac{2}{3}$ (16 1, -2 (15 7, -1 (14 -0.5, 1 (13 אין פתרון (12 -1, $\frac{1}{4}$ (11
 $\frac{1}{2}$, -4 (27 $\cdot \frac{2}{3}$ (26 אין פתרון (25 -1 (24 $\frac{2}{3}$ (23 2 (22 -4 (21 2 (20 0.8 (19
 $\frac{5}{17}$ (37 -1.44 (36 $\frac{1}{6}$ (35 $-\frac{2}{15}$ (34 6.5 (33 $-\frac{8}{9}$ (32 2 (31 2 (30 6 (29 $\frac{2}{3}$, -3 (28
 1, -3 (46 -2 (45 אין פתרון (44 3, -1 (43 4, -1 (42 -2 (41 $-\frac{2}{3}$ (40 -8 (39 3.75 (38
 2 (59 4 (58 3 (57 2 (56 1 (55 $\pm\sqrt{2}$ (54 3 (53 2 (52 3 (51 2 (50 2 (49 2 (48 3 (47
 $\frac{1}{2}$ (72 1 (71 0 (70 $\frac{1}{2}$ (69 .1 (68 0 (67 $\frac{1}{4}$ (66 6 (65 -3 (64 3 (63 5 (62 $\frac{4}{3}$ (61 -3 (60
 .2,3 (82 3 (81 -3, -1 (80 2, 0 (79 2 (78 1, -3 (77 2 (76 0 (75 2 (74 $\frac{1}{3}$ (73
 $-\frac{1}{2}$ (91 1 (90 -4 (89 -6, -3 (88 1 (87 -1 (86 -2.5 (85 -1, 0 (84 -2, 1 (83
 (1,1) (99 (-2,-1) (98 (9,-2) (97 (1,1) (96 (2,1) (95 (2,3) (94 3 (93 1 (92
 $x < 4$ (103 (2,2), (4.26,1.418) (102 (3,1), (3.182,1.318) (101 (2,1) (100
 $x < -1, x > -0.25$ (108 $x < -3, x > 1$ (107 $x \leq 0.25$ (106 $x < 3$ (105 $x > 5$ (104
 $-\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ (113 $x \leq \frac{1}{9}$ (112 $x \leq -1, x \geq 2$ (111 $x > 2$ (110 $x > 2$ (109
 $x < -4, x > \frac{1}{2}$ (118 $x > -1.5$ (117 $x > 1$ (116 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ (115 $x < -4, x > 0$ (114
 $-3 \leq x \leq -1, x \geq 2$ (122 $\frac{3}{5} \leq x \leq 2$ (121 $-4 \leq x \leq 1$ (120 $-1 < x < \frac{9}{8}$ (119
 $x < 6$ (128 $x > 3$ (127 $0 < x < 2$ (126 $x > 1$ (125 $x < 1$ (124 $-4 < x < 1$ (123
 -1,0 (134 0,0.5 (133 0 (132 0,0.693 (131 0,1 (130 $x < 1, x > 2$ (129
 -0.5 (142 1 (141 2 (140 -1.099,0 (139 0 (138 -2,0 (137 $\frac{1}{3}, 0$ (136 -0.5,0 (135
 .0.605 (146 21.69 (145 83.93 (144 3.87 (143

הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות:

חשב את ערכי הלוגריתמים הבאים :

תזכורת: הגדרת הלוגריתם: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (כאשר: $a > 0, a \neq 1, b > 0$).

- | | | |
|--|--|---|
| $\log_5 5$ (3) | $\log_3 81$ (2) | $\log_2 8$ (1) |
| $\log_{125} 5$ (6) | $\log_{32} 8$ (5) | $\log_9 243$ (4) |
| $\log_{\frac{1}{2}} 16$ (9) | $\log_{32} 64$ (8) | $\log_{49} 7$ (7) |
| $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$ (12) | $\log_{\frac{1}{25}} 625$ (11) | $\log_{\frac{1}{3}} 27$ (10) |
| $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} 9$ (15) | $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125}$ (14) | $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ (13) |
| $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3}$ (18) | $\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{343}$ (17) | $\log_{\sqrt[5]{5}} 125$ (16) |
| $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{25}}} \sqrt[5]{125}$ (21) | $\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \sqrt[3]{81}$ (20) | $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{128}$ (19) |
| $\log_{0.01} \frac{10}{\sqrt[4]{1000}}$ (24) | $\log \frac{\sqrt[5]{100}}{\sqrt{10}}$ (23) | $\log \frac{\sqrt{10}}{1000}$ (22) |

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות :

- | | | |
|---|---------------------------------|----------------------------------|
| $\log_6 x = 1$ (27) | $\log_2 x = 5$ (26) | $\log_3 x = 2$ (25) |
| $\log_7 x = 0$ (30) | $\log_4 x = -2$ (29) | $\log_3 x = -3$ (28) |
| $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3}$ (33) | $\log_{\frac{3}{5}} x = 4$ (32) | $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ (31) |
| $\log_{\sqrt{5}} x + 2 = 0$ (36) | $7 \log_{128} x - 3 = 0$ (35) | $4 \log_9 x - 2 = 0$ (34) |

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות :

- | | | |
|----------------------|-----------------------|----------------------|
| $\log_x 25 = 2$ (39) | $\log_x 6 = -1$ (38) | $\log_x 3 = 1$ (37) |
| $\log_x 64 = 3$ (42) | $\log_x 625 = 4$ (41) | $\log_x 64 = 2$ (40) |

$$\log_x \frac{1}{81} = 4 \quad \text{(45)}$$

$$\log_x \frac{4}{9} = -2 \quad \text{(44)}$$

$$\log_x \frac{1}{8} = 3 \quad \text{(43)}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם):

$$\log_5(6-7x) = 3 \quad \text{(48)} \quad \log_2(x+5) = 4 \quad \text{(47)} \quad \log_5(x+1) = 1 \quad \text{(46)}$$

$$\log_{64}(x+3) = \frac{1}{3} \quad \text{(51)} \quad \log_4(4x+1) = \frac{1}{2} \quad \text{(50)} \quad \log_6(3x-2) = 0 \quad \text{(49)}$$

$$\log_{0.2}(2x+1) = -2 \quad \text{(54)} \quad \log_{\sqrt{3}}(7x+2) = 2 \quad \text{(53)} \quad \log_{\sqrt{5}}(3x+1) = 4 \quad \text{(52)}$$

$$\log_3\left(x^2 - \frac{2}{9}x\right) = -3 \quad \text{(57)} \quad \log_6(13x-x^2) = 2 \quad \text{(56)} \quad \log_4(10x-x^2) = 2 \quad \text{(55)}$$

$$\log_3(x-2x^2+28) = 3 \quad \text{(60)} \quad \log_2(x^2-6x+13) = 3 \quad \text{(59)} \quad \log_2(x^2-6x+10) = 1 \quad \text{(58)}$$

$$\log_7(x^4-80) = 0 \quad \text{(63)} \quad \log_3(x^3-44) = 4 \quad \text{(62)} \quad \log_4(x^3-11) = 2 \quad \text{(61)}$$

$$\log_2 \frac{x^2-5}{x} = 2 \quad \text{(66)} \quad \log_3 \frac{20x+68}{5x+2} = 2 \quad \text{(65)} \quad \log_4 \frac{3x-1}{x+2} = 1 \quad \text{(64)}$$

$$\log_x(2x^2-6x+5) = 2 \quad \text{(69)} \quad \log_x(3x^2-5x+3) = 2 \quad \text{(68)} \quad \log_x(2x^2-9x) = 2 \quad \text{(67)}$$

$$\log_{x+2}(4x+5) = 2 \quad \text{(72)} \quad \log_x(2x^2+x-6) = 2 \quad \text{(71)} \quad \log_x(4x^2-3x) = 2 \quad \text{(70)}$$

$$\log_{\sqrt{x+1}}(x^2-x-2) = 2 \quad \text{(75)} \quad \log_{\sqrt{x}}\left(\frac{8}{x}\right) = 4 \quad \text{(74)} \quad \log_{x-3}(3x-11) = 2 \quad \text{(73)}$$

$$\log_{\sqrt{x^2+3}}(4+3x+3x^2) = 2 \quad \text{(78)} \quad \log_{\sqrt{x+3}}(x+5) = 4 \quad \text{(77)} \quad \log_4(10x-x^2) = 2 \quad \text{(76)}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם מספר פעמים):

$$2\log_9(\log_5(2x-1)) = 1 \quad \text{(80)} \quad \log_3(\log_2 x) = 1 \quad \text{(79)}$$

$$\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(x^2-7.5x)) = -\frac{1}{2} \quad \text{(82)} \quad \log_2(\log_3(x+3)+30) = 5 \quad \text{(81)}$$

$$\log_{25}(2-5^{x+2}) = x+2 \quad \text{(84)} \quad \log_2\left(\log_{0.25}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right) = -1 \quad \text{(83)}$$

$$\log_5\left(4+\log_6\left(3+\log_4(x^2+15)\right)\right) = 1 \quad \text{(86)} \quad \log_5\left(\log_3\left(\log_3(5x^2+7)\right)\right) = 0 \quad \text{(85)}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\begin{aligned} \log_3(5 \cdot 2^x + 1) &= 4 \quad (88) & \log_2(5^x + 3) &= 7 \quad (87) \\ \log_5(5^x + 120) - x &= 2 \quad (90) & \log_2(12 - 2^x) &= x + 1 \quad (89) \\ \log_9(10 \cdot 3^x - 9) &= x \quad (92) & \log_4(5 \cdot 2^{x+1} - 16) &= x \quad (91) \\ \log_4(17 - 4^x) + x &= 2 \quad (94) & \log_5(30 - 5^x) + x &= 3 \quad (93) \\ \log_2(5 \cdot 2^{x+1} - 1) &= 2x + 4 \quad (96) & \log_5(49 \cdot 5^x - 120) &= 2x + 1 \quad (95) \\ 3\log_2\left(9 \cdot 2^{\frac{x}{3}+1} - 1\right) &= 15 + 2x \quad (98) & \log_8(3 - 23 \cdot 8^{3x}) &= 6x + 1 \quad (97) \end{aligned}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות:

הדרכה: היעזר בהצבה של: $\log_a x = t$, פתור משוואה עבור t והחזר את ההצבה למציאת x עפ"י הגדרת הלוגריתם.

$$\begin{aligned} (\log_2 x)^2 + 2 \cdot \log_2 x - 15 &= 0 \quad (100) & (\log_3 x)^2 &= 16 \quad (99) \\ \log_7 x - \frac{6}{\log_7 x} &= 1 \quad (102) & 2 \cdot (\log_4 x)^2 - 5 \cdot \log_4 x &= 3 \quad (101) \\ \frac{5 \cdot \log_{64} x - 1}{(\log_{64} x)^2} &= 6 \quad (104) & \frac{12}{\log_3 x + 1} - \frac{2}{\log_3 x} &= 3 \quad (103) \\ \sqrt{\log_{16} x} + \sqrt{\log_{16} x + 2} &= 2 \quad (106) & \log_3 x + \sqrt{\log_3 x} &= 2 \quad (105) \\ & & (\log_3 x)^2 - \sqrt{(\log_3 x)^2 + 27} &= 3 \quad (107) \end{aligned}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{aligned} 1.5 \quad (12) \quad -2 \quad (11) \quad -3 \quad (10) \quad -4 \quad (9) \quad \frac{6}{5} \quad (8) \quad \frac{1}{2} \quad (7) \quad \frac{1}{3} \quad (6) \quad 0.6 \quad (5) \quad 2.5 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad 3 \quad (1) \\ -2.5 \quad (22) \quad -0.9 \quad (21) \quad -\frac{8}{9} \quad (20) \quad -\frac{7}{15} \quad (19) \quad -\frac{1}{12} \quad (18) \quad -9 \quad (17) \quad .9 \quad (16) \quad 6 \quad (15) \quad -3 \quad (14) \quad -2 \quad (13) \\ 0.5 \quad (33) \quad \frac{81}{625} \quad (32) \quad 9 \quad (31) \quad 1 \quad (30) \quad \cdot \frac{1}{16} \quad (29) \quad \frac{1}{27} \quad (28) \quad 6 \quad (27) \quad 32 \quad (26) \quad 9 \quad (25) \quad -\frac{1}{8} \quad (24) \quad -0.1 \quad (23) \\ \frac{1}{3} \quad (45) \quad 1.5 \quad (44) \quad \frac{1}{2} \quad (43) \quad 4 \quad (42) \quad 5 \quad (41) \quad 8 \quad (40) \quad 5 \quad (39) \quad \frac{1}{6} \quad (38) \quad 3 \quad (37) \quad 0.2 \quad (36) \quad 8 \quad (35) \quad 3 \quad (34) \end{aligned}$$

4,9 (56 2,8 (55 12 (54 $\frac{1}{7}$ (53 8 (52 1 (51 0.25 (50 1 (49 -17 (48 11 (47 4 (46
 -1,5 (66 2 (65 -9 (64 ± 3 (63 5 (62 3 (61 $1, -\frac{1}{2}$ (60 1,5 (59 4,2 (58 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$ (57
 -1 (77 8,2 (76 3 (75 2 (74 5 (73 1 (72 2 (71 אין פתרון (70 5 (69 1.5 (68 9 (67
 ± 7 (86 ± 2 (85 -2 (84 $\pm \frac{1}{2}$ (83 -6,13.5 (82 6 (81 63 (80 8 (79 $-1, -\frac{1}{2}$ (78
 -3,-1 (96 0.974,1 (95 2,0 (94 1,2 (93 2,0 (92 1,3 (91 1 (90 2 (89 4 (88 3 (87
 $\sqrt[3]{3}, 9$ (103 $\frac{1}{49}, 343$ (102 $\frac{1}{2}, 64$ (101 $\frac{1}{32}, 8$ (100 $\frac{1}{81}, 81$ (99 -12,-3 (98 $-\frac{1}{3}$ (97
 $\cdot \frac{1}{27}, 27$ (107 2 (106 3 (105 4,8 (104

חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

תזכורת – חוקי הלוגריתמים:

$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$	$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$	$\log_a (x)^n = n \cdot \log_a x$
--	--	-----------------------------------

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | | |
|--|---|------------------------------------|
| $\log_2 10 + \log_2 6.4$ (3) | $\log_8 4 + \log_8 16$ (2) | $\log_3 6 + \log_3 1.5$ (1) |
| $\log_2 768 - \log_2 6$ (6) | $\log_4 192 - \log_4 3$ (5) | $\log_5 150 - \log_5 6$ (4) |
| $\log_{0.25} 80 - \log_{0.25} 5$ (9) | $\log_{0.2} 2 - \log_{0.2} 10$ (8) | $\log_{81} 120 - \log_{81} 40$ (7) |
| $3\log_3 6 + \log_3 3.375$ (12) | $\log_4 1.6 + 2\log_4 \sqrt{10}$ (11) | $2\log_6 2 + \log_6 9$ (10) |
| $\log_4 24 + \log_4 5 - \log_4 10 - \log_4 3$ (14) | $\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 4$ (13) | |
| $\log_6 10 - \log_6 5 - \log_6 288 + \log_6 4$ (16) | $\log_5 50 + \log_5 20 - \log_5 2 - \log_5 4$ (15) | |
| $\frac{1}{2} \left(\log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{2} + \log_{\frac{1}{5}} 2 \right) + \log_{\frac{1}{5}} 10 - \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{5}} 8$ (18) | $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 25 + 2 \log_{\sqrt{3}} 2 - \log_{\sqrt{3}} 60$ (17) | |
| $-\frac{1}{4} \log_{\sqrt{7}} 81 + 2 \log_{\sqrt{7}} 6 - \log_{\sqrt{7}} 84$ (20) | $\frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 3 + \frac{3}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 4$ (19) | |

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

טיפ: הפוך את המספרים השלמים לביטוי לוגריתמי לפי: $k = \log_a a^k$ וחבר אותם לביטויים הנוספים לפי חוקי הלוגריתמים.

דוגמא: נהפוך את 3 לביטוי לוגריתמי על בסיס של 2: $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$.

- | | | |
|--|---|---|
| $\frac{\log_7 4 + \log_7 8}{\log_7 2}$ (23) | $\frac{\log_4 125}{\log_4 5}$ (22) | $\frac{\log_3 16}{\log_3 8}$ (21) |
| $\frac{\log_7 5 + \log_7 3 - 4}{\log_7 225 - \log_7 256}$ (26) | $\frac{\log_2 5 - \log_2 2 + 1}{\log_2 200 - 3}$ (25) | $\frac{\log_3 6 + 2}{\log_3 108 - \log_3 2}$ (24) |
| $\frac{2 - 2\log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2\log_3 18}$ (29) | $\frac{\log_4 18 - \log_4 2 + \log_4 36}{2\log_4 6 - 3\log_4 8 + 4}$ (28) | $\frac{2 - 3\log 5 + \log 50}{1 + \log 128 - 5\log 2}$ (27) |

חשב את ערכי הביטויים הבאים (הלוגריתם לפי בסיס 10):

$$\frac{\log 8}{\log \sqrt{8}} \quad (32)$$

$$\frac{\log 8}{\log 16} \quad (31)$$

$$\frac{\log 27}{\log 9} \quad (30)$$

$$\frac{\log 36 + 0.5 \log 6}{\log 12 - \log 2} \quad (35)$$

$$\frac{\log 72 - \log 8}{\log \sqrt{27}} \quad (34)$$

$$\frac{\log 24 - \log 3}{\log 2} \quad (33)$$

$$\frac{1 + \log 5}{\log 2 + 2 \log 5} \quad (36)$$

(37) הוכח את נכונות השוויוניים הבאים (לפי בסיס 10):

$$\frac{\log 125 - 1 + \log 2}{\log 5 + 1 - \log 2} = 1 \quad \text{א.}$$

$$\frac{2 - \log 25 + 2 \log 8}{\log \sqrt[3]{16}} = 6 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{\log 9 + 2 \log 5 + \log 4}{\log 10 - \log 2 + \log 6} = 2 \quad \text{ג.}$$

פתור את המשוואות הבאות (איחוד ביטויים באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\log_{15} x + \log_{15} (x-2) = 1 \quad (39)$$

$$\log_4 x + \log_4 (x-6) = 2 \quad (38)$$

$$\log_{35} (x-8) + \log_{35} (x-6) = 1 \quad (41)$$

$$\log_2 x + \log_2 (x-3) = 2 \quad (40)$$

$$\log_3 (x+105) - \log_3 (x+1) = 3 \quad (43)$$

$$\log_2 (x+14) - \log_2 x = 3 \quad (42)$$

$$\log_2 (2x+8) = 2 + \log_2 (5-x) \quad (45)$$

$$\log_2 (3x+4) - \log_2 (x-2) = 1 \quad (44)$$

$$\log_2 (11x+4) - \log_2 (2x+1) = \log_2 (2x+3) \quad (47)$$

$$\log_3 (x^2 + 11) = 1 + \log_3 (2x+1) \quad (46)$$

$$\log_5 (30x+9) - \log_5 (4x+5) = \log_5 (3x+2) \quad (48)$$

$$2 \log_5 (x+1) = \log_5 (2x+3.5) + \log_5 x \quad (49)$$

$$\log_2 (x-4) + \log_2 (x+2) - \log_2 (x-3) = 3 \quad (50)$$

$$\frac{\log_7 (12x-35)}{2 \log_7 x} = 1 \quad (51)$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם וקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_2(5^x + 19) = 3 + \log_2(8 - 5^x) \quad (53) \qquad \log_3(2^x + 2) - \log_3(2^x - 14) = 2 \quad (52)$$

$$\log_3(25^x + 8) - 2 = x \log_3 5 \quad (55) \qquad 1 + (x + 2) \log_3 2 = \log_3(4^x + 32) \quad (54)$$

$$x \log_2 4 = \log_2(2^x + 28) + x - 3 \quad (57) \qquad \log_3(9^{x+3} - 1) = x + 5 + \log_3(3^{x+3} - 1) \quad (56)$$

פתור את המשוואות הבאות (פתיחה באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\log_4(16x) \cdot \log_4(64x) = 12 \quad (59) \qquad \log_3 x \cdot \log_3(3x) = 6 \quad (58)$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{8} = -2 \quad (61) \qquad \log_2(32x) \cdot \log_2(128x) = 48 \quad (60)$$

$$\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = \log_4(4x) \quad (63) \qquad \log_3\left(\frac{27}{x}\right) \cdot \log_3(81x) = 10 \quad (62)$$

$$(\log_3 3x)^2 = \log_3 3x^2 + 1 \quad (65) \qquad \log_2 x^2 \cdot \log_2(8x) = \log_2\left(\frac{16}{x}\right) \quad (64)$$

$$\log_3(27x^3) \cdot \log_3(3x^2) = \log_3\left(\frac{81}{x}\right) + 3 \quad (67) \qquad (\log_5 25x)^2 = \log_5 25x^2 + 1 \quad (66)$$

$$2 \log_5 x \cdot \log_5\left(\frac{125}{x^2}\right) = 2 \quad (69) \qquad \log_2\left(\frac{x^3}{2}\right) \cdot \log_2(32x^2) = \log_2\left(\frac{x}{128}\right) + 2 \quad (68)$$

$$\frac{\log_7\left(\frac{343}{x^2}\right)}{(\log_7 x)^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad (71) \qquad \log_5 x^2 \cdot \log_5\left(\frac{125}{x^2}\right) = 2 \quad (70)$$

תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים:

(72) נתון: $\log_2 7 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log_2 14$

ב. $\log_2 49$

(73) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 125$

ב. $\log_3 0.2$

(74) נתון: $\log_{24} 6 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log_{24} 2$

ב. $\log_{24} 3$

(75) נתון: $\log 4 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log 16$

ב. $\log 2$

ג. $\log 8$

(76) נתון: $\log_3 6 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 30$

ב. $\log_3 1.2$

ג. $\log_3 150$

(77) נתון: $\log_4 3 = a$, $\log_4 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_4 0.12$

ב. $\log_4 2.4$

(78) נתון: $\log_7 8 = a$, $\log_7 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_7 40$

ב. $\log_7 320$

(79) נתון: $\log_5 3 = a$, $\log_5 2 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_5 \sqrt{6}$

ב. $\log_5 \sqrt[3]{72}$

(80) נתון: $\log_8 10 = a$, $\log_8 3 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_8 \sqrt{0.03}$

ב. $\log_8 \sqrt[5]{\frac{10}{27}}$

(81) נתון: $\log_3 7 = a$, $\log_3 8 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 \frac{64}{343}$

ב. $\log_3 \sqrt[4]{\frac{49}{512}}$

חשב את ערכי הביטויים הבאים באמצעות הנוסחה : $a^{\log_a b} = b$:

- $2^{2\log_2 3}$ (86) $10^{\log 2}$ (85) $0.24^{\log_{0.24} 6}$ (84) $5^{\log_5 12}$ (83) $2^{\log_2 3}$ (82)
 $32^{\log_2 3}$ (91) $8^{\log_2 3}$ (90) $27^{\log_3 2}$ (89) $9^{\log_3 4}$ (88) $3^{3\log_3 4}$ (87)
 $\sqrt[3]{5^{\log_5 64}}$ (96) $\sqrt[5]{8^{\log_2 243}}$ (95) $\sqrt{3^{\log_3 16}}$ (94) $\sqrt{6^{\log_{36} 4}}$ (93) $125^{-\log_5 3}$ (92)
 $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\sqrt{49}} 81}$ (101) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{9}} 4}$ (100) $5^{\log_{125} 8}$ (99) $64^{\log_2 5}$ (98) $3^{\log_9 2}$ (97)
 $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$ (106) $\sqrt{27^{1+\log_3 2}}$ (105) $\frac{\log_4 9}{4}$ (104) $3^{2-\log_3 6}$ (103) $5^{1+\log_5 2}$ (102)

תשובות סופיות:

- 1 (14) 3 (13) 6 (12) 2 (11) 2 (10) -2 (9) 1 (8) $\frac{1}{4}$ (7) 7 (6) 3 (5) 2 (4) 6 (3) 2 (2) 2 (1)
 0.5 (25) 1 (24) 5 (23) 3 (22) $\frac{4}{3}$ (21) -2 (20) 10.5 (19) -1.5 (18) -2 (17) -2 (16) 3 (15)
 .1 (36) .2.5 (35) $\frac{4}{3}$ (34) .3 (33) .2 (32) .0.75 (31) 1.5 (30) 0.5 (29) 2 (28) 1 (27) 0.5 (26)
 -0.25, 1 (47) 2,4 (46) 2 (45) אין פתרון (44) 3 (43) 2 (42) 13 (41) 4 (40) 5 (39) 8 (38)
 .1 (56) 1.292, 0 (55) 2,3 (54) 1 (53) 4 (52) 5,7 (51) 8 (50) 0.5 (49) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ (48)
 $\sqrt{2}$, $\frac{1}{16}$ (64) 2 (63) $\frac{1}{9}$ (62) 2,4 (61) 2, $\frac{1}{2^{13}}$ (60) 4, $\frac{1}{4^6}$ (59) 9, $\frac{1}{27}$ (58) 2 (57)
 49, 7^6 (71) ± 5 , $\pm \sqrt{5}$ (70) $\sqrt{5}$ (69) 1, $\frac{1}{4}$ (68) $\frac{1}{9}$ (67) 0.2 (66) $\frac{1}{3}$, 3 (65)
 1.5a .ג 0.5a .ב 2a .א (75) $\frac{3a-1}{2}$.ב $\frac{1-a}{2}$.א (74) -a .ב 3a .א (73) 2a .ב a+1 .א (72)
 2a+b .ב a+b .א (78) a+1-b .ב a-2b .א (77) a+2b .ג a-b .ב a+b .א (76)
 3 (82) $\frac{2a-3b}{4}$.ב 2b-3a .א (81) $\frac{a-3b}{5}$.ב $\frac{b-2a}{2}$.א (80) $b+\frac{2}{3}a$.ב $\frac{a+b}{2}$.א (79)
 $\frac{1}{27}$ (92) 243 (91) 27 (90) 8 (89) 16 (88) 64 (87) 9 (86) 2 (85) 6 (84) 12 (83)
 $\frac{1}{81}$ (101) 0.25 (100) 2 (99) 5^6 (98) $\sqrt{2}$ (97) 4 (96) 27 (95) 4 (94) $\sqrt[4]{4}$ (93)
 $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$ (106) $\sqrt{216}$ (105) 3 (104) 1.5 (103) 10 (102)

מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

תזכורת: $a, m > 0 \neq 1, b > 0$, $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$

$$\begin{array}{ll} \log_2 5 \cdot \log_{25} 4 & \text{(2)} & \log_3 6 \cdot \log_6 3 & \text{(1)} \\ \log_{0.1} 5 \cdot \log_{25} 100 & \text{(4)} & \log_{27} 4 \cdot \log_2 3 & \text{(3)} \\ \log_5 8 \cdot \log_7 25 \cdot \log_2 49 & \text{(6)} & \log_{\sqrt{3}} 7 \cdot \log_{\sqrt{343}} 9 & \text{(5)} \\ \log_{81} 49 \cdot \log_{32} 3 \cdot \log_7 2 & \text{(8)} & \log_4 169 \cdot \log_9 64 \cdot \log_{13} 243 & \text{(7)} \end{array}$$

הוכח את השוויונים שלפניך:

$$\begin{array}{ll} \log_6 \frac{1}{8} \cdot \log_2 6 = -3 & \text{(10)} & \log_7 25 \cdot \log_5 7 = 2 & \text{(9)} \\ \log_3 8 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 = 3 & \text{(12)} & \log_4 25 \cdot \log_5 4 = 2 & \text{(11)} \\ \log_{16} 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 25 = 1 & \text{(14)} & \log_3 5 \cdot \log_5 8 + \log_3 2 \cdot \log_2 5 = \log_3 40 & \text{(13)} \\ \log_a b \cdot \log_c a + \log_b a \cdot \log_c b = \log_c ab & \text{(16)} & \log_2 25 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{81} 2 = 1 & \text{(15)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \log_{81} x + \log_3 x = 5 & \text{(18)} & \log_2 x + \log_8 x = 4 & \text{(17)} \\ \log_3 x + 3 \log_{27} x^2 = 3 & \text{(20)} & 5 \log_5 x - \log_{\frac{1}{25}} x = 11 & \text{(19)} \\ \log_5 x \cdot \log_{125} x = 3 & \text{(22)} & \log_2 x^3 + 4 \log_{16} x = 8 & \text{(21)} \\ \log_3 (81x) \cdot \log_{27} \left(\frac{x}{9} \right) = \frac{7}{3} & \text{(24)} & \log_2 (8x) \cdot \log_{16} x = 7 & \text{(23)} \\ \log_x 2 + \log_2 x = 2 & \text{(26)} & \log_2 (32x^2) \cdot \log_8 \left(\frac{4}{x^3} \right) = -12 & \text{(25)} \\ 4 \cdot \log_x 5 = 3 + 2 \cdot \log_{25} x & \text{(28)} & \log_x 3 - 6 \log_{27} x = 1 & \text{(27)} \\ \log_6 (16x - 3) \cdot \log_{x\sqrt{5}} 6 = 2 & \text{(30)} & \log_3 (6 - x) \cdot \log_x 3 = 2 & \text{(29)} \\ \log_2 (4x) + \log_{8x} 4 = 3.5 & \text{(32)} & \log_5 x = 4.5 + \log_{5x} 125 & \text{(31)} \end{array}$$

$$\log_x (27x) \cdot \log_{81x} \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5} = 0 \quad (34)$$

$$3 \cdot \log_{\sqrt{x}} (6x) - \log_{36} x = 4 \quad (36)$$

$$\log_x 4 + 3 \log_{4x} 16 = 4 \quad (33)$$

$$2 \log_{4x} 8 \cdot \log_{\frac{x}{2}} (16x) = 9 \quad (35)$$

$$\log_x 5 \cdot \log_{5x} (5x^2) = 2 \cdot \log_{25x} 5 \quad (37)$$

תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים:

(38) נתון: $\log_2 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_5 2$

ב. $\log_4 5$

ג. $\log_{16} 5$

(39) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32} 36$

ג. $\log_{216} 96$

(40) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 15$

ב. $\log_{15} 3$

ג. $\log_9 25$

(41) נתון: $\log 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log 80$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{80} 2000$

(42) נתון: $\log_5 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{36} 30$

ב. $\log_{216} 180$

ג. $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{125}$

(43) נתון: $\log 2 = 0.3$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{\sqrt{2}} 100$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{\frac{1}{4}} 5$

(44) א. הוכח כי לכל $a, b > 0 \neq 1$ מתקיימת הטענה הבאה: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

ב. נתון: $\log_a 5 = b$. הוכח כי מתקיים: $\log_a b = \frac{b}{\log_b 5}$.

ג. נתון: $2 \cdot \log_3 a \cdot \log_{(b+c)} 3 = 1$.

הוכח כי לכל: $a, b, c > 0 \neq 1$ מתקיים: $a^2 = b + c$.

פתור את המשוואות הבאות (הוצאת לוג משני אגפים):

(47) $x^{1+\log_3 x} = 729$

(46) $x^{\log_3 x} = 3$

(45) $x^{\log_2 x} = 16$

(50) $x^{9-3\log_2 x} = \frac{x}{8}$

(49) $x^{2\log_3 x + 8} = 81x$

(48) $x^{3\log_5 x + 2} = 5$

תשובות סופיות:

1 (1 2 1 3) $\frac{2}{3}$ (4 -1 (5 $\frac{2}{3}$ (6 12 (7 15 (8 0.1 (17 8 (18 81 (19 25 (20 3

(21 4 (22 125, $\frac{1}{125}$ (23 16, $\frac{1}{128}$ (24 27, $\frac{1}{243}$ (25 4, 0.07 (26 2, $\sqrt{3}$ (27 $\frac{1}{3}$,

(28 5, $\frac{1}{625}$ (29 2 (30 3, 0.2 (31 5⁵, $\frac{1}{5\sqrt{5}}$ (32 2, $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (33 4 (34 3

(35 4, $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ (36 6⁶, $\frac{1}{36}$ (37 $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ (38 $\frac{1}{a}$. א. ב. $\frac{a}{2}$. ג. $\frac{a}{4}$ (39 $2a-1$. א. ב. $0.8a$

ג. $\frac{a+2}{3a}$ (40 $a+1$. א. ב. $\frac{1}{a+1}$. ג. a (41 $3a+1$. א. ב. $\frac{2a+1}{3a}$. ג. $\frac{a+3}{3a+1}$

(42) א. $\frac{a+1}{2a}$. ב. $\frac{2a+1}{3a}$. ג. $-\frac{1.5}{a}$ (43) א. $13\frac{1}{3}$. ב. $1\frac{7}{9}$. ג. $-\frac{1}{6}$ (45) 4, 0.25 (46) $\frac{1}{3}$, 3

(47) $\frac{1}{27}$, 9 (48) $\frac{1}{5}$, $\sqrt[3]{5}$ (49) $\frac{1}{81}$, $\sqrt{3}$ (50) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 8.

אי-שוויונים לוגריתמיים:

פתור את אי-השוויוניים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \log_5(x-2) \leq 1 & \text{(2)} & \log_4(x-3) < 0 & \text{(1)} \\ \log(x+4) \geq \log(10-2x) & \text{(4)} & \log_{0.5}(3-x) < -2 & \text{(3)} \\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2+3) > \log_{\frac{1}{3}}(x+5) & \text{(6)} & \log_2(x+2) < \log_2(2x-3) & \text{(5)} \\ \log_2(x^2-3x)-2 > 0 & \text{(8)} & \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{1}{2}x\right) > 1 & \text{(7)} \\ \log_4 \frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{2} & \text{(10)} & \log_2\left(x^2-\frac{9}{16}\right) < 0 & \text{(9)} \\ \log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 > 0 & \text{(12)} & \log_2 \frac{x-5}{x+2} \geq 1 & \text{(11)} \\ \ln(16-2x) \leq \ln(4x+4) & \text{(14)} & \ln(x^2-9) \geq \ln(-8x) & \text{(13)} \\ \ln(x) \leq 1 & \text{(16)} & \ln(x) \leq 0 & \text{(15)} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{l} -1 < x < 2 \text{ (6)} \quad x > 5 \text{ (5)} \quad 2 \leq x < 5 \text{ (4)} \quad x < -1 \text{ (3)} \quad 2 < x \leq 7 \text{ (2)} \quad 3 < x < 4 \text{ (1)} \\ -\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4} \text{ (9)} \quad x < -1, x > 4 \text{ (8)} \quad -\frac{1}{2} < x < 0, \frac{1}{2} < x < 1 \text{ (7)} \\ x \leq -9 \text{ (13)} \quad 0 < x < 4, x > 16 \text{ (12)} \quad -9 \leq x < -2 \text{ (11)} \quad 2 < x < 7 \text{ (10)} \\ 0 < x \leq e \text{ (16)} \quad 0 < x \leq 1 \text{ (15)} \quad 2 \leq x < 8 \text{ (14)} \end{array}$$

משוואות ואי-שוויונים מעריכיים ולוגריתמים נוספים:

*הערה: שאלות אלו מובאות כשאלות חזרה על הטכניקה הנלמדת בפרק זה ועוסקות בבסיס הטבעי e ובלוגריתם הטבעי \ln .

פתור את המשוואות המעריכיות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 e^{x^2-1} \cdot e^{6x} = e^6 & \text{(3)} & e^{3x-5} = (e^{x+1})^2 & \text{(2)} & e^{2x} = e^{x-1} & \text{(1)} \\
 \sqrt[3]{e^x} = e^{1-x} & \text{(6)} & (e^x)^2 \cdot e^{5x+2} \cdot e^{-4x^2} = 1 & \text{(5)} & e^{4x-5} = e \cdot e^{x^2} & \text{(4)} \\
 e^{-x} \cdot \sqrt[4]{e^{4-x}} = 1 & \text{(9)} & \sqrt[3]{e^{x^2+2}} = e^2 \cdot e^x & \text{(8)} & \sqrt[5]{e^{4x+7}} \cdot \sqrt{e} = e^5 \cdot e^x & \text{(7)} \\
 \sqrt[4]{\frac{e^x}{e^{3x-2}}} = e^{5+x} & \text{(12)} & \frac{e^{x^2+6x-16}}{e^{4x}} = (e^2)^x & \text{(11)} & \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} = e^2 \cdot e^{x^2} & \text{(10)} \\
 e^{2x} - e^{2x-3} = \sqrt{e} & \text{(15)} & e^{-x-1} + e^{3-x} = e^3 & \text{(14)} & e^x + e^{x+2} = e^4 & \text{(13)} \\
 e^{2x} + 11e^x + 30 = 0 & \text{(18)} & e^{2x} - e^x - 6 = 0 & \text{(17)} & e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 & \text{(16)} \\
 2 \cdot \sqrt[4]{e^x} + 4 \cdot \sqrt[4]{e^{-x}} = 9 & \text{(21)} & e^{3x} - 18e^{-3x} = 3 & \text{(20)} & e^x - 1 = 6e^{-x} & \text{(19)} \\
 \frac{4 \cdot \sqrt[5]{e^x}}{e} - e^{-2} \cdot \sqrt[5]{e^{2x}} + 12 = 0 & \text{(24)} & \frac{e^{2x}}{\sqrt[2]{e^x}} - 28 = 3 \cdot \sqrt[4]{e^{3x}} & \text{(23)} & e^x - \sqrt[3]{e^x} = 1 & \text{(22)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \ln(1-3x) = 4 & \text{(27)} & \ln(5-x) = 2 & \text{(26)} & \ln(x+1) = 3 & \text{(25)} \\
 \ln(e^x - 1) = 0 & \text{(30)} & \ln(x^2 + 5x + 5) = 0 & \text{(29)} & \ln(x^2 - 2x - 2) = 0 & \text{(28)} \\
 \ln(6-x) + \ln(x+2) = \ln 15 & \text{(32)} & \ln(x-3) + \ln(x+4) = -\ln 10 & \text{(31)} & & \\
 \frac{\ln(4x+3)}{\ln(x^2)} = \frac{1}{2} & \text{(34)} & \frac{\ln(2x^2 - 6x - 7)}{\ln(3-x)} = 2 & \text{(33)} & & \\
 \ln(1-e^x) - \ln(6+e^x) = 6 & \text{(36)} & \ln(e^{2x} + 5) - \ln(e^x + 1) = \ln 3 & \text{(35)} & & \\
 x \ln x = 2x & \text{(38)} & x \ln x = 3 \ln x & \text{(37)} & & \\
 2 \ln^2 x + 2 = 2.5 \ln^2 x & \text{(40)} & 5 \ln^2 x - 3 = \ln^2 x & \text{(39)} & &
 \end{array}$$

פתור את אי-השוויונים המעריכים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 e^{3x-1} < 4 \quad (43) & e^{2x+1} > e^{4-x} \quad (42) & e^x > 2 \quad (41) \\
 e^{5x-27} < e^{x^3} \cdot (e^x)^5 \quad (46) & (e^x)^6 \cdot e^{-x^2} \leq e^5 \quad (45) & e^{x^2+3} \geq (e^x)^4 \quad (44) \\
 e^{3x^2} (e^x)^6 \leq e^{-3} \quad (49) & \sqrt[2]{e^{x+1}} > e^{x^2} \cdot e^1 \quad (48) & e^{x^2-4x} \cdot e^7 < e^{2-x} \quad (47) \\
 6e^{2x} - 5e^x - 1 < 0 \quad (52) & e^{2x} + 7e^x + 12 > 0 \quad (51) & e^{2x} - 13e^x + 30 > 0 \quad (50) \\
 -\sqrt{e^x} + 20 \cdot \sqrt[4]{e^x} - 64 \geq 0 \quad (55) & e^x - 30\sqrt{e^x} + 81 \leq 0 \quad (54) & e^{2x} - 13e^x + 22 < 0 \quad (53)
 \end{array}$$

פתור את אי-השוויונים הלוגריתמים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 2\ln x > 3 \quad (58) & \ln(x+1) > \ln(2-x) \quad (57) & \ln x > \ln 3 \quad (56) \\
 \ln(9x+1) \geq \ln(1+x^3) \quad (61) & \ln(4x-x^2) \leq \ln(6x+3) \quad (60) & \ln(x^2+4) > \ln(2x+3) \quad (59) \\
 2-3\ln x + \ln^2 x \leq 0 \quad (64) & 6\ln x - (\ln x)^2 \leq 0 \quad (63) & \ln^2 x - 8\ln x + 7 > 0 \quad (62)
 \end{array}$$

תשובות סופיות :

$$\begin{array}{llll}
 -0.25, 2 \quad (5) & \phi \quad (4) & 1, -7 \quad (3) & 7 \quad (2) & -1 \quad (1) \\
 -1, 2 \quad (10) & 0.8 \quad (9) & 4, -1 \quad (8) & -15.5 \quad (7) & 0.75 \quad (6) \\
 1.75 - \ln \sqrt{e^3 - 1} \quad (15) & \ln(e^4 + 1) - 4 \quad (14) & 4 - \ln(e^2 + 1) \quad (13) & -3 \quad (12) & -4, 4 \quad (11) \\
 \ln 6 \quad (20) & \ln 3 \quad (19) & \phi \quad (18) & \ln 3 \quad (17) & 2\ln 2, \ln 2 \quad (16) \\
 e^3 - 1 \quad (25) & 5(\ln 6 + 1) \quad (24) & \frac{2}{3} \ln 7 \quad (23) & 0 \quad (22) & 4\ln 4, -4\ln 2 \quad (21) \\
 \ln 2 \quad (30) & -4, -1 \quad (29) & -1, 3 \quad (28) & -17.87 \quad (27) & 5 - e^2 \quad (26) \\
 0, \ln 2 \quad (35) & -0.6 \quad (34) & -4 \quad (33) & 1, 3 \quad (32) & \phi \quad (31) \\
 e, 0.548 \quad (39) & e^2 \quad (38) & 3, 1 \quad (37) & \ln \frac{1-6e^6}{e^6+1} \quad (36) \\
 x < 0.795 \quad (43) & x > 1 \quad (42) & x > \ln 2 \quad (41) & e^2, 1.649 \quad (40) \\
 \phi \quad (47) & x > -3 \quad (46) & x \leq 1, x \geq 5 \quad (45) & x \leq 1, x \geq 3 \quad (44) \\
 x \text{ כל} \quad (51) & x < \ln 3, x > \ln 10 \quad (50) & x = -1 \quad (49) & x \text{ כל} \quad (48) \\
 8\ln 2 \leq x \leq 16\ln 2 \quad (55) & 2\ln 3 \leq x \leq 6\ln 3 \quad (54) & \ln 2 < x < \ln 11 \quad (53) & x < 0 \quad (52) \\
 x > -1.5, x \neq 1 \quad (59) & x > e^{1.5} \quad (58) & 0.5 < x < 2 \quad (57) & x > 3 \quad (56) \\
 & 0 < x < e, x > e^7 \quad (62) & 0 \leq x \leq 3 \quad (61) & 0 < x < 4 \quad (60) \\
 & & e \leq x \leq e^2 \quad (64) & 0 < x \leq 1, x \geq e^6 \quad (63)
 \end{array}$$

פרק 4 - בעיות גדילה ודעיכה:

הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מעריכית:

הכמות לאחר פרק זמן t , המסומנת M_t , כאשר הכמות ההתחלתית היא M_0 וקצב

הגדילה/דעיכה הוא q ניתנת ע"י הנוסחה הבאה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי: $q = \frac{100 \pm p}{100}$.

שאלות חישוב יסודיות:

(1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

- א. מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- ב. מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- ג. אוכלוסיה מתרבה ב-5% לשנה.
- ד. מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- ה. כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- ו. מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- ז. רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- ח. מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

- א. $q = 1.2$
- ב. $q = 1.6$
- ג. $q = 0.85$
- ד. $q = 0.72$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- א. $48 \cdot 1.02^6 =$
- ב. $60 \cdot 1.05^{10} =$
- ג. $5 \cdot 1.13^8 =$

(4) מצא את M_0 :

- א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$
- ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$
- ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$

(5) מצא את q :

- א. $25 = 10 \cdot q^6$
- ב. $512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40}$
- ג. $10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25}$
- ד. $9.35 = 7 \cdot q^{10.5}$
- ה. $6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{\frac{3}{3}}$
- ו. $13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3}$

(6) מצא את t :

- א. $10 \cdot 1.05^t = 70$
- ב. $62 \cdot 0.8^t = 39.68$
- ג. $7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5$

שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

- 7) במדינה מסוימת הערך של מכונית יורד בכל חצי שנה ב-2.5%. מחיר מכונית חדשה הוא 180,000 שקלים.
- מהו מחיר המכונית לאחר שנה? עגלו לשקלים שלמים.
 - מהו מחיר המכונית לאחר 3.5 שנים? עגלו לשקלים שלמים.
 - מהו מחיר המכונית לאחר 5 שנים? עגלו לאלפי שקלים שלמים.
- 8) אדם הפקיד סכום של 60,000 ₪ בריבית שנתית קבועה. אחוז הריבית השנתית הוא 8%.
- מהו הסכום בחסכון כעבור שנה אחת?
 - מהו הסכום בחסכון כעבור 5 שנים?
- 9) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?
- 10) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2. בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.
- כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?
 - כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?
 - כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?
- 11) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%. במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.
- מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?
 - מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?
 - האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה?
- 12) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?

שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

- 13) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה. מה היה מחירו ההתחלתי?

14) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם. ידוע כי שרון רצה ביום השישי מרחק של 2.5 ק"מ. כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

15) מספר הזרות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זרות. כמה זרות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

16) אדם קנה מכונית משומשת ב-95,000 ₪.
ערכה של המכונית יורד בכל שנה ב-6.2%.
א. מה יהיה ערכה של המכונית בעוד שנה?
ב. מה יהיה ערכה של המכונית בעוד 4.5 שנים?
ג. מה היה ערכה של המכונית שנתיים לפני הקנייה?

17) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה. כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.
א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?
ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

18) כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית.
כל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה.
כיום יש באגם $2 \cdot 10^5$ ק"ג אצות.
א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?
ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?
ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?

19) אוכלוסייה במדינה מסוימת גדלה בכל שנה ב-1.2%.
ב-1.1.2000 נערך מפקד אוכלוסין והתברר כי מספר תושבי המדינה הוא 21.3 מיליון איש.
א. מה יהיה גודל האוכלוסייה בתאריך 1.1.2020?
ב. מה היה גודל האוכלוסייה בתאריך 1.1.1990?

שאלות העוסקות במציאת קצב הגידול/הדעיכה או אחוז הגידול/הדעיכה:

20) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?

21) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?

22) מספר התושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.
א. מה היה קצב הריבוי בכל שנה?
ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?

23) בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה ראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים נספרו 1450 תוכים.
א. מה היה קצב הגידול החודשי של התוכים?
ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?

24) כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה $5 \cdot 10^4$ טון עצים ובשנת 1990 הייתה 10^7 טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?

25) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג. בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.
א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?
ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?

26) מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.

א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?
ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?

27) מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.
א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.
ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

28) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

שאלות העוסקות במציאת הזמן:

29) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?

30) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?

31) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?

32) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?

33) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?

34) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

שאלות שונות:

35) יש ברשותי מכונית בדיוק 3 שנים. מחירה היום הוא 50,000 שקלים. המחיר של מכונית משומשת יורד כל שנה ב-10%.
א. מה הסכום ששילמתי עבור המכונית?
ב. אם אמכור את המכונית בעוד שלוש שנים, מה יהיה מחירה של המכונית אז?

36) חלקת יער הכילה לפני 20 שנים 30,000 טונות של עץ. היום יש בחלקת היער 40,000 טונות של עץ. כמות העץ ביער גדלה בכל שנה באופן מעריכי.
א. בכמה אחוזים גדלה כמות העץ ביער מידי שנה?
ב. מה תהיה כמות העץ ביער בעוד 20 שנים?

37) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בכל שלוש שעות באחוז קבוע. מדען שקל את החומר הרדיואקטיבי כל שלוש שעות באותו יום, ואלה התוצאות שקיבל:
 בשעה 6:00 בבוקר היה משקל החומר 50 גרם.
 בשעה 9:00 בבוקר היה משקל החומר 40 גרם.
 א. בשקילה נוספת באותו יום היה משקל החומר 25.6 גרם.
 באיזו שעה נערכה השקילה הנוספת?
 ב. באיזו שעה היה משקל החומר 64% ממה שהיה משקלו בשעה 6:00 בבוקר?

38) ברשותי סכום של 200,000 ₪. מציעים לי שתי תכניות חיסכון:
 תכנית אחת ל-5 שנים שבסופן אקבל את הקרן עם 50% רווח מסכום הקרן.
 תכנית שנייה ל-6 שנים בסופן אקבל את הקרן עם 60% רווח מסכום הקרן.
 בשתי התכניות יש ריבית שנתית קבועה.
 באיזו תכנית יש ריבית שנתית גבוהה יותר?

39) בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

תשובות סופיות:

- 1) א. 1.2 ב. 0.6 ג. 1.05 ד. 1.15 ה. 2. ו. 3. ז. 0.75 ח. 0.5
- 2) א. 20% גדילה. ב. 60% גדילה. ג. 15% דעיכה. ד. 28% דעיכה.
- 3) א. 54.05 ב. 97.73 ג. 13.29 ד. 80 א. 45 ג. 150
- 5) א. 1.165 ב. 0.7469 ג. 0.732 ד. 1.028 ה. 0.22 ו. 1.03
- 6) א. 39.88 ב. 2 ג. 33.01
- 7) א. 171,112 ₪ ב. 150,766 ₪ ג. 140,000 ₪ ד. 8 א. 64,800 ₪ ב. 88,159.6 ₪
- 9) 101,342 תושבים (10) א. 100 ב. 200 ג. 52,428,800
- 11) א. 1889.56 ג'. ב. 1422.4 ג'. ג. כן. 511.7 ג'. (12) 5,062 חסידות. (13) 592.6 ₪
- 14) 1.41 ק"מ. (15) 34,907 זברות (16) א. 89110 ב. 71,225.6 ₪ ג. 107,973.6 ₪
- 17) א. 578,642 תושבים. ב. 467,304 תושבים.
- 18) א. 3,200,000 ק"ג. ב. 50,000 ק"ג. ג. 4,525,483.4 ק"ג.
- 19) א. 27.04 מיליון. ב. 18.905 מיליון. (20) 2.3% (21) 3.5%
- 22) א. 1.029 ב. 9.6 מיליון תושבים. (23) א. 1.032 ב. 2.116 (24) 14.16%
- 25) א. 0.9671 ב. 70.35 גרם. (26) א. 0.90657 ב. 77.1% (27) א. 3.18% ב. 6.15
- 28) 921 חיידקים. (29) 9.41 שנים (30) 7.47 שנים (31) 16.43 שעות (32) 12.43 שעות.
- 33) 9.36 ימים. (34) 16:00 א. 68587 ₪ ב. 36450 ₪
- 36) א. 1.45% ב. 52,822.5 טון. (37) א. 15:00 בצהריים. ב. בשעה 12:00 בצהריים.
- 38) בתכנית לחמש שנים (39) בנק א'.

תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוץ זה אין פתרון בסרטונים.

- 1) בבריכת דגים נספרו 20,000 דגים.
כשלוש שנים לאחר מכן התבצעה ספירה נוספת ובה היו 28098 דגים.
א. מצא את אחוז הגדילה השנתי של הדגים.
ב. לאחר 4 שנים נוספות הוציאו מהבריכה 40,000 דגים.
מצא כמה דגים יישארו בבריכה לאחר שנה מהוצאת ה-40,000 דגים.
- 2) כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה.
בשנת 1990 נספרה כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים
ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים.
מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.
- 3) מדען שוקל כמות חומר רדיואקטיבית 3 פעמים ביום מסוים.
בשקילה הראשונה כמות החומר היא 120 גרם.
לאחר שלוש שעות כמות החומר הייתה 61.44 גרם.
בשקילה השלישית 31.457 גרם.
א. מצא את אחוז הדעיכה של החומר הרדיואקטיבי.
ב. מצא לאחר כמה שעות מהשקילה השנייה התבצעה השקילה השלישית.
- 4) אחוז ריבוי אוכלוסייה בעיר מטרופולין הוא כזה שכל 30 שנים מכפילה העיר את
כמות תושביה.
א. מצא את קצב הגידול השנתי של תושבי העיר.
ב. אחוזי הריבוי בעיר גוטהם ובעיר מטרופולין זהה, בשנת 1980 עזבו חד
פעמית את העיר גוטהם 10,000 איש. בשנת 1970 היו בעיר גוטהם 40,000
תושבים. מצא כמה אנשים יהיו בעיר גוטהם בשנת 1988.
- 5) שתי מכוניות המוצעות למכירה עולות: מכונית א' - 60,000 ומכונית ב' - 85,000 ₪.
ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.
א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.
ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?
- 6) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה. בשנה מסוימת
נספרו 2,300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1,000 עופות
נוספים.
א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.
ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת
בסעיף א' אילו לא הוסיפו את 1,000 העופות הנוספים.

- (7) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של p אחוזים לשנה. בשנה מסוימת נספרו 3,000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1,000 עופות נוספים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי p אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורה 5,647 עופות.
- ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5,647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1,000 העופות הנוספים.
- (8) ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.
- א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.
- ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.
- (9) הערך של משאית הובלה יורד מדי שנה באחוז קבוע. ידוע כי ערך המשאית לאחר 4 שנים מיום מכירתה נמוך ב-20,000 ממחירה המקורי. כמו כן, ערך המשאית לאחר 8 שנים הוא 56,000 ₪. מצא את המחיר המקורי של המשאית ואת האחוז שבו ערכה יורד מדי שנה.
- (10) אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה. כעבור t שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל- t שנים נוספות בתכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.
- א. מצא את t .
- ב. לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪. מצא את אחוז הריבית החדש.
- (11) אדם מפקיד k שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$. לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון k שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את p .
- (12) שני בנקים מציעים שתי תוכניות חיסכון כלהלן:
- בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
- בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.
- א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?
- ב. דני משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'.
- רפי משקיע סכום כסף זהה k לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתוך התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'.

למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות? נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.

13 כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע p מדי שעה. ביום מסוים היו k גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד k גרם לכמות שנתרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו k גרם מהחומר. מצא את p .

14 ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא k . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

15 ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$. מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.

16 ערך של מכונית היום הוא 45,000. המכונית יצאה לשוק לפני 3 שנים וערכה קטן מדי שנה באחוז קבוע של 8%.

- מה המחיר המקורי של המכונית?
- מה יהיה מחיר המכונית לאחר 3 שנים מהיום?
- מצא תוך כמה שנים המכונית תרד עד לרבע מערכה בזמן שיצאה לשוק.

17 ערכן של אדמה עידית ואדמה זיבורית גדל בצורה מעריכית מדי שנה. ידוע כי הערך של דונם אדמה עידית גדול פי 5 מהערך של דונם אדמה זיבורית. הערך של האדמה הזיבורית גדל ב-8% והערך של האדמה העידית גדל ב-4% לשנה. מצא בעוד כמה שנים ישתוו המחירים של דונם אדמה מכל סוג.

18 ערכן של אדמה עידית ואדמה זיבורית גדל בצורה מעריכית מדי שנה. ידוע כי הערך של דונם אדמה עידית גדול פי 6 מהערך של דונם אדמה זיבורית. הערך של האדמה הזיבורית גדל באחוז קבוע הגדול פי 2 מהאחוז שבו גדל הערך של האדמה העידית. מצא את אחוז הגדילה של האדמה הזיבורית אם ידוע כי המחירים של דונם אדמה מכל סוג ישתוו לאחר 62.4 שנים.

19 כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהם מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1,200 ק"ג אצות.

- מצא את קצב גידול האצות השנתי.
- מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.

20 ערכן של שתי מכוניות, האחת חדשה והשנייה ישנה, מתנהג בצורה מעריכית. ערך המכונית החדשה גדול פי 2 מערך המכונית הישנה ויורד באחוז מסוים מידי שנה. כמו כן, ידוע כי ערך המכונית הישנה גדל באותו האחוז מדי שנה. לאחר 20 שנים מהיום שבו הוצעו המכוניות למכירות פומביות ערכן השתווה. מצא את אחוז הגדילה או הדעיכה של כל מכונית.

21 אדם מפקיד לתכנית חיסכון סכום מסוים לפי ריבית דריבית של 3%. ערך מכונית יורד בכל שנה ב-3%. ידוע כי סכום המכונית גדול פי 3 מהסכום שהפקיד האדם בתכנית החיסכון. מצא לאחר כמה זמן יוכל האדם למשוך את הכסף שיעמוד לרשותו ולקנות את המכונית.

22 כמות חומר רדיואקטיבי מאבד 60% ממשקלו תוך 8 שעות. קצב הדעיכה של החומר הוא מעריכי.

א. מצא את קצב הדעיכה של החומר לשעה.
ב. מצא תוך כמה זמן יאבד החומר 90% ממשקלו.
ג. ידוע כי לאחר 3.5 שעות איבד החומר 10 גרם ממשקלו. מצא את כמות החומר הרדיואקטיבי ההתחלתית.
ד. מה הייתה כמות החומר הרדיואקטיבי 3 שעות לפני שנערכה המדידה הראשונה.
ה. בכמה אחוזים קטן החומר הרדיואקטיבי מ-3 שעות לפני המדידה הראשונה עד למדידה הראשונה?

23 לשרון שתי חוות נמלים שבהן קצב ריבוי הנמלים הוא מעריכי וגדל ב-4% ליום. בסוף כל שבוע (לאחר 7 ימים) שרון לוקחת כמות נמלים קבועה מחווה א' ומעבירה אותם לחווה ב'. שרון סופרת את כמות הנמלים בכל חווה ביום מסוים ומגלה כי כמויות הנמלים בשתי החוות הן 3,000 נמלים בכל חווה. בספירה נוספת שערכה שרון לאחר שבועיים מיום מדידתה הקודם (ולאחר ההעברה) מצאה שרון כי בחווה ב' יש 1,500 נמלים יותר מבחווה א'. מצא כמה נמלים מעבירה שרון מחווה א' לחווה ב' לאחר כל 7 ימים.

24 תרבות חיידקים גדלה בצורה מעריכית. מדען שקל את כמות החיידקים בשעה 10:00 בבוקר ומצא כי יש בתרבות k חיידקים. בשעה 14:00 ערך המדען שקילה נוספת ומצא כי משקל החיידקים הוא $1.35k$. בשעה 20:00 ערך המדען שקילה נוספת ומצא כי משקל החיידקים הוא 741.14 גרם.

א. מצא את קצב הגידול של החיידקים בכל שעה.
ב. מצא את המשקל של התרבות בשעה 10:00 בבוקר.
ג. מצא את המשקל של התרבות בשעה 6:00 בבוקר.
ד. כדי שהמדען יצליח בניסויו משקל התרבות חייב לעבור משקל של 1 ק"ג במהלך יום המדידות הני"ל (עד שעה 12 בלילה - 24:00). האם המדען יצליח או ייכשל בניסויו?

- (25)** סוחר קנה בריכת דגים ובה 1000 דגי סלמון. ידוע כי כל שבוע כמות הדגים בבריכה גדלה ב-7%. לאחר 5 שבועות מוכר הסוחר 500 דגי סלמון.
- א. מצא כמה דגים יהיו לסוחר בבריכה לאחר חודשיים (חודש בן 4 שבועות) מזמן הקנייה.
- ב. מצא כמה דגים יהיו לסוחר בבריכה לאחר חודשיים מזמן הקנייה, אם ידוע כי לאחר הוצאת 500 הדגים מהבריכה קצב הגידול של הדגים עלה ל-10%.
- (26)** סוללה בעלת קיבולת מקסימלית של 9 וולט נטענת בקצב של 14% לדקה.
- א. חשב תוך כמה זמן תטען הסוללה אם ידוע כי מטען הסוללה ההתחלתי הוא 3 וולט.
- ב. חשב תוך כמה זמן תטען הסוללה אם ידוע כי לאחר שהגיעה ל-6 וולט מוציאים ממנה 2 וולט (באופן חד-פעמי) ואוגרים אותו בקבל.
- (27)** בתרביית $4 \cdot 10^4$ חיידקים. לאחר 4 שעות כמות החיידקים היא $5 \cdot 10^5$.
- א. מצא את קצב הגידול של החיידקים בכל שעה.
- ב. מדען גילה כי לאחר שבתרביית יש 10^6 חיידקים אז קצב הגדילה שלהם יורד ב-30%. תוך כמה זמן יהיו בתרביית 10^7 חיידקים מאז המדידה הראשונה?
- (28)** בכורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
- א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
- ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים מהכורת וידוע כי נשארו 1,500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכורת.
- (29)** ידוע כי לאחר שמקום השורץ נמלים עובר ריסוס אז הן מתות בצורה מעריכית. המדביר אומר ללקוח כי לאחר 3 שעות כ-90% מהנמלים וודאי ימותו.
- א. חשב באיזה אחוז מתות הנמלים בכל שעה.
- ב. חשב כמה זמן צריך הלקוח לחכות כדי שלפחות מחצית מהנמלים ימותו.
- (30)** ענה על השאלות הבאות:
- א. זמן מחצית החיים של חומר הוא 30 שנים. כמה אחוזים מאבד החומר ממשקלו מידי שנה?
- ב. זמן מחצית החיים של חומר מסוים הוא 22 שנים. כמה אחוזים מאבד החומר ממשקלו מדי שנה?
- ג. זמן מחצית החיים של חומר מסוים הוא שנה. כמה אחוזים מאבד החומר ממשקלו מדי חודש?
- ד. ערכה של מכונית יורד ב-50% לאחר 4 שנים.
- i. כמה אחוזים מערכה המקורי של המכונית ישארו לאחר שנה?
- ii. לאחר כמה שנים תאבד המכונית 75% מערכה?

- ה. ערכה של מנייה מסוימת מאבד 50% לאחר 6 שנים.
- i. כמה אחוזים מערך המנייה המקורי ישארו לאחר שנתיים?
 - ii. לאחר כמה שנים תאבד המנייה 75% מערכה?
- ו. חומר מאבד ממשקלו 2% מדי שנה. מהו זמן מחצית החיים שלו?
 - ז. חומר מאבד ממשקלו 4% מדי שנה. מהו זמן מחצית החיים שלו?
 - ח. מכונית מאבדת 5% מערכה מדי שנה. מהו זמן מחצית החיים שלה?
 - ט. מנייה מסוימת מאבדת 3% מערכה מדי שנה.
 - i. מהו זמן מחצית החיים של המנייה?
 - ii. לאחר כמה שנים ערך המנייה ירד ב-40%?
 - iii. לאחר כמה שנים ערך המנייה יהיה 40% מערכה ההתחלתית?
 - י. מוצר מסוים מאבד 1% מערכו מדי שנה.
 - i. מהו זמן מחצית החיים של המוצר?
 - ii. לאחר כמה שנים ערך המוצר ירד ב-30%?
 - iii. לאחר כמה שנים ערך המוצר יהיה 30% מערכו ההתחלתית?

31) חומר רדיואקטיבי המתפרק בצורה מעריכית מגיע למחצית מהכמות שהיה בתחילתו תוך 6 שעות.

- א. מצא תוך כמה זמן יגיע החומר הרדיואקטיבי לשליש מהכמות שהיה בתחילה.
- ב. מצא כמה חומר רדיואקטיבי ישאר מ-600 גרם לאחר 12 שעות.

32) ערכה של מכונית יורד בצורה מעריכית. ידוע כי המכונית מאבדת ₪ 6500 מערכה לאחר שנה ועוד 5850 ₪ לאחר שנה נוספת.

- א. מצא באיזה אחוז יורד ערך המכונית מדי שנה.
- ב. מצא תוך כמה שנים יגיע ערך המכונית למחצית מערכו המקורי.

33) מדען ביצע ניסוי ובו הזריק חיסון כימי לתוך תרבית חיידקים. המדען גילה כי לאחר 3 שעות נותרו פעילים בדיוק מחצית מכמות החיידקים שהיו בהתחלה.

- א. מצא את אחוז הדעיכה של החיידקים לשעה.
- ב. לאחר כמה זמן יהיו בתרבית 10% של חיידקים פעילים בלבד?

תשובות סופיות:

- (1 א. 12% ב. 4719 דגים. (2 100000 עצים. (3 א. דועך ב-20%. ב. 3 שעות.
- (4 א. 1.023 ב. 48,598 תושבים. (5 א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' (16 שנים).
- (6 א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים. (7 א. 5% ב. 12.96 שנים.
- (8 א. 75,858.5 נה ב. לאחר 15 שנים. (9 91,634.8 נה, יורד ב-6% לשנה.
- (10 א. $t=4$ ב. $p=20\%$ (11 16.63% (12 א. בנק ב'. ב. לשניהם אותו הסכום
- שכן אין משמעות לסדר: $k \cdot 1.8 \cdot 1.6 = k \cdot 1.6 \cdot 1.8 = 2.88k$: (13 $k \cdot q_1^8 \cdot q_2^6 = 14.82\%$
- (14 א. ב-6.6% (15 ב-5.95% (16 א. 57,789 נה ב. 35,040 נה ג. 16.62 שנים.
- (17 42.64 שנים. (18 6% (19 א. $a=1.0174$ ב. 653.23 ק"ג אצות. (20 73%
- (21 18.3 שנים. (22 א. 0.891 ב. 20.1 שעות. ג. $k=30.278$ ד. 42.79 ג'. ה. 29.26%.
- (23 323 נמלים. (24 א. 1.078 ב. $k=350$ ג. 259.25 גרם ד. יצליח.
- (25 א. 1105 דגים. ב. 1201 דגים. (26 א. 8.38 דקות. ב. 11.47 דקות.
- (27 א. 1.88 ב. 10.1 שעות. (28 א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים.
- (29 א. בקצב של 53.5% לשעה. ב. כ-54 דקות ($t=0.903$).
- (30 א. 2.285% ב. 3.1% ג. 5.612% ד. i. 84% ii. 7.95 שנים.
- ה. i. 79.37% ii. 11.98 שנים. ו. 34.3 שנים. ז. 16.979 שנים.
- ח. 13.513 שנים. ט. i. 22.75 שנים. ii. 16.77 שנים. iii. 30.08 שנים.
- י. i. 68.96 שנים. ii. 35.48 שנים. iii. 119.794 שנים.
- (31 א. 9.5 שעות. ב. 150 גרם.
- (32 א. ב-10% ב. 6.57 שנים.
- (33 א. 20.6% ב. לאחר 10 שעות.

תרגול מבגרויות:

*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.

- (1) מ-100 גרם חומר רדיואקטיבי I נשארו כעבור 4 שנים 72 גרם שלא התפרקו.
א. מצא את זמן מחצית החיים של חומר I.
זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי II קטן פי 2 מזמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי I.
ב. מצא באיזה אחוז קטנה כל שנה כמות החומר II.
ג. מצא את הכמות של חומר II שממנה יישארו 80 גרם כעבור 4 שנים.
- (2) הערך של מכונית א' כיום הוא 60,000 שקל, והוא יורד בכל שנה ב-8% לעומת הערך שלה בשנה הקודמת.
הערך של מכונית ב' כיום הוא 79,000, והוא יורד בכל שנה באחוז קבוע לעומת הערך שלה בשנה הקודמת.
ידוע כי בעוד 10 שנים הערך של שתי המכוניות יהיה שווה.
א. באיזה אחוז יורד הערך של מכונית ב' בכל שנה?
ב. כמה שנים אחרי השנה שבה הערך של שתי המכוניות היה שווה, יהיה הערך של מכונית ב' $\frac{4}{5}$ מהערך של מכונית א' (הירידה בערך המכוניות בכל שנה אינה משתנה).
- (3) כמות של 1000 גרם חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית.
כעבור מספר שנים נותרו 250 גרם מהחומר.
כעבור 4 שנים נותרו 200 גרם מהחומר.
מצא כעבור כמה שנים נותרו 250 גרם מהחומר הרדיואקטיבי.
- (4) לחוקר יש היום כמות מסוימת של חומר רדיואקטיבי. הכמות קטנה בצורה מעריכית. בעוד 10 שנים תרד ב-20% כמות החומר שיש לחוקר היום.
מצא בעוד כמה שנים מהיום תרד ב-40% כמות החומר.
- (5) יובל פתח חשבון חדש בבנק והפקיד בו 10,000 הסכום שהפקיד גדל בכל חודש ב-2%. כעבור שנה ברגע ההפקדה משך יובל מחשבונו 5,000 שקל. (הסכום שנשאר ממשך לגדול בכל חודש ב-2%).
כעבור כמה חודשים מרגע המשיכה, שוב יהיו בחשבונו של יובל 10,000 שקל?

תשובות סופיות:

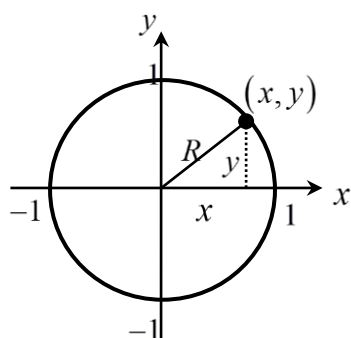
- (1) א. 8 שנים ו-5 חודשים. (8.44). ב. 15.15%. ג. 154.32 גרם.
(2) א. 10.5%. ב. 8 שנים וחודש (8.1113).
(3) 3.44 שנים. (4) 22.89 שנים. (5) 13.31 חודשים.

פרק 5 – משוואות טריגונומטריות:

הגדרות:

זהויות וקשרים טריגונומטריים:

זהויות של סכום והפרש זוויות:	זהויות היסוד:
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$ $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$
<p style="text-align: center;">זהויות של זווית כפולה:</p> $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$



המעגל הטריגונומטרי:

המעגל הטריגונומטרי הוא מעגל היחידה (מעגל קנוני שרדיוסו 1).

טבלת ערכי הפונקציות הטריגונומטריות לזוויות המיוחדות:

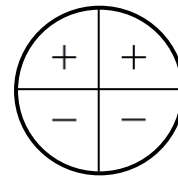
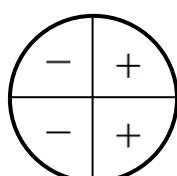
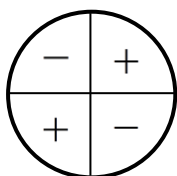
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	$0 \left(= \frac{\sqrt{0}}{2} \right)$	$\frac{1}{2} \left(= \frac{\sqrt{1}}{2} \right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 \left(= \frac{\sqrt{4}}{2} \right)$
$\cos \alpha$	$1 \left(= \frac{\sqrt{4}}{2} \right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} \left(= \frac{\sqrt{1}}{2} \right)$	$0 \left(= \frac{\sqrt{0}}{2} \right)$
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ערכים עבור זוויות בכפולות של 90° :

$\sin 0^\circ = 0$	$\cos 0^\circ = 1$	$\tan 0^\circ = 0$
$\sin 90^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$	$\tan 90^\circ = \emptyset$
$\sin 180^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$	$\tan 180^\circ = 0$
$\sin 270^\circ = -1$	$\cos 270^\circ = 0$	$\tan 270^\circ = \emptyset$

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$



צורת הפתרון הכללי של משוואה טריגונומטרית:

- פתרון כללי של המשוואה: $\sin x = \sin \alpha$ הוא מהצורה: $x_1 = \alpha + 2\pi k$, $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$ או ע"י שימוש במעלות: $x_1 = \alpha + 360^\circ k$, $x_2 = 180 - \alpha + 360^\circ k$.
- פתרון כללי של המשוואה: $\cos x = \cos \alpha$ הוא מהצורה: $x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$ או ע"י שימוש במעלות: $x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$.
- פתרון כללי של המשוואה: $\tan x = \tan \alpha$ הוא מהצורה: $x = \alpha + \pi k$ או ע"י שימוש במעלות: $x = \alpha + 180^\circ k$.
- פתרונות מיוחדים של משוואות טריגונומטריות:

הפתרון ברדיאנים	הפתרון במעלות	המשוואה
$x = \pi k$	$x = 180^\circ k$	$\sin x = 0$
$x = 0.5\pi + 2\pi k$	$x = 90^\circ + 360^\circ k$	$\sin x = 1$
$x = 1.5\pi + 2\pi k$	$x = 270^\circ + 360^\circ k$	$\sin x = -1$
$x = 0.5\pi + \pi k$	$x = 90^\circ + 180^\circ k$	$\cos x = 0$
$x = 2\pi k$	$x = 360^\circ k$	$\cos x = 1$
$x = \pi + 2\pi k$	$x = 180^\circ + 360^\circ k$	$\cos x = -1$
$x = \pi k$	$x = 180^\circ k$	$\tan x = 0$
$x = 0.25\pi + \pi k$	$x = 45^\circ + 180^\circ k$	$\tan x = 1$
$x = -0.25\pi + \pi k$	$x = -45^\circ + 180^\circ k$	$\tan x = -1$

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$ (הגדרת הסינוס):

$$\text{יא. } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ב. } \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ג. } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ד. } \sin x = -\frac{1}{2}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$ (הגדרת הקוסינוס):

$$\text{א. } \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$ (הגדרת הטנגנס):

$$\text{א. } \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ב. } \tan x = -1$$

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$ (זוויות כלליות):

$$\text{א. } \sin x = 0.7 \quad \text{ב. } \cos x = -0.6 \quad \text{ג. } \tan x = 5 \quad \text{ד. } \sin x = 1.85$$

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום המצוין לידן (משוואות עם משתנה מהצורה ax):

$$\text{א. } 0 \leq x \leq \pi : 2\sin 3x = 1 \quad \text{ב. } 0 \leq x \leq \pi : 2\cos 2x = -\sqrt{3}$$

$$\text{ג. } 0 \leq x \leq 0.25\pi : \tan 5x = -1 \quad \text{ד. } 0 \leq x \leq \pi : 3\sin 2x = 2$$

$$\text{ה. } 0 \leq x \leq \pi : 3\cos 3x = 1 \quad \text{ו. } 0 \leq x \leq 0.5\pi : 2\tan 4x = 1$$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום המצוין לידן (ארגומנט ליניארי כללי $ax+b$):

$$\text{א. } 0 \leq x \leq 2\pi : \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב. } 0 \leq x \leq \pi : \cos\left(\frac{5\pi}{12} - 3x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ג. } 0 \leq x \leq \pi : \tan\left(\frac{5\pi}{18} - x\right) = 1.3$$

7) פתור את המשוואות הבאות בתחום המצויין לידן

(השוואות פונקציות טריגונומטריות):

$$0 \leq x \leq \pi : \sin 2x = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ב.} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} : \sin x = \sin 3x \quad \text{א.}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi : \cos x = \cos 3x \quad \text{ד.} \quad 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x = \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) \quad \text{ג.}$$

$$0 \leq x \leq \pi : \tan x = \tan 3x \quad \text{ו.} \quad 0 \leq x \leq 2\pi : \cos x = \cos \left(\frac{4}{18}\pi - x \right) \quad \text{ה.}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} : \tan 2x = \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \quad \text{ז.}$$

8) פתור את המשוואות הבאות בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$ (משוואות עם פתרון מיוחד):

$$\cos x = 0 \quad \text{ד.} \quad \sin x = -1 \quad \text{ג.} \quad \sin x = 1 \quad \text{ב.} \quad \sin x = 0 \quad \text{א.}$$

$$\tan x = 1 \quad \text{ח.} \quad \tan x = 0 \quad \text{ז.} \quad \cos x = -1 \quad \text{ו.} \quad \cos x = 1 \quad \text{ה.}$$

9) פתור את המשוואות הבאות בתחום הנתון (שימוש בפעולות אלגבריות שונות):

$$0 \leq x \leq \pi : \sin^2 x = \frac{1}{4} \quad \text{ב.} \quad 0 \leq x \leq \pi : \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad \text{א.}$$

$$0 \leq x \leq \pi : \sin x \cos 3x = 0 \quad \text{ד.} \quad 0 \leq x \leq 0.5\pi : \tan^2 2x = 3 \quad \text{ג.}$$

$$0 \leq x \leq \pi : 2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0 \quad \text{ו.} \quad 0 \leq x \leq \pi : \sin 2x - 2\sin^2 2x = 0 \quad \text{ה.}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi : 3\sin^2 x - \sin x = 2 \quad \text{ח.} \quad 0 \leq x \leq 2\pi : 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad \text{ז.}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi : \cos^2 x + 2\cos x = 3 \quad \text{י.} \quad 0 \leq x \leq 2\pi : 6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad \text{ט.}$$

$$0 \leq x \leq \pi : \tan^2 x = 4\tan x - 1 \quad \text{יב.} \quad 0 \leq x \leq 2\pi : \tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0 \quad \text{יא.}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi : \frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad \text{יד.} \quad -\pi < x < \pi : \cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad \text{יג.}$$

$$0 \leq x \leq \pi : \frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad \text{טו.}$$

10 פתור את המשוואות הבאות בתחום המצויין לידן (שימוש בזהויות יסוד):

$$\begin{array}{ll}
 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \text{ב.} & 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x = \cos x & \text{א.} \\
 0 \leq x \leq 2\pi : 2\cos^2 x = 3\sin x & \text{ד.} & 0 \leq x \leq 2\pi : \cos x = \frac{2}{3}\sin^2 x & \text{ג.} \\
 0 \leq x \leq 2\pi : \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x & \text{ו.} & 0 \leq x \leq 2\pi : \sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} & \text{ה.} \\
 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x - \tan x = 0 & \text{ח.} & 0 \leq x \leq \pi : \sin^2 x + 2\cos^2 x = 1.5 & \text{ז.} \\
 0 \leq x \leq \pi : \cos x = \sin(0.9\pi - 3x) & \text{ט.} & [0: 2\pi]: \cos(x - 0.3\pi) = \sin(0.4\pi - x) & \text{י.}
 \end{array}$$

11 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

$$\begin{array}{ll}
 0 \leq x \leq \pi : \cos 2x = -\cos 3x & \text{ב.} & 0 \leq x \leq \pi : \sin x = -\sin 3x & \text{א.} \\
 0 \leq x \leq \pi : \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - x) & \text{ד.} & 0 \leq x \leq \pi : \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos x & \text{ג.} \\
 0 \leq x \leq 2\pi : \sin(\pi - x) = \cos(0.3\pi - 2x) & \text{ו.} & 0 \leq x \leq \pi : \sin 3x = -\cos(\pi - x) & \text{ה.}
 \end{array}$$

12 פתור את המשוואות הבאות (פתרון ע"י חלוקה בקוסינוס):

$$\begin{array}{ll}
 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x = -\cos x & \text{ב.} & 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x = \cos x & \text{א.} \\
 0 \leq x \leq \pi : 3\sin^2 x = \cos^2 x & \text{ד.} & 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x = 2\cos x & \text{ג.} \\
 0 \leq x \leq 2\pi : 4\sin x = 7\cos x & \text{ו.} & 0 \leq x \leq 2\pi : 3\sin x = \cos x & \text{ה.} \\
 0 \leq x \leq \pi : \sin^2 x = 8\cos^2 x & \text{ח.} & 0 \leq x \leq 2\pi : 2\sin x = -5\cos x & \text{ז.}
 \end{array}$$

13 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בזהויות של זווית כפולה):

$$\begin{array}{ll}
 0 \leq x \leq 2\pi : \sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0 & \text{ב.} & 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x - \sin 2x = 0 & \text{א.} \\
 0 \leq x \leq \pi : 2\cos 2x + \sin 4x = 0 & \text{ד.} & 0 \leq x \leq 2\pi : 4\cos x = \sin 2x & \text{ג.} \\
 0 \leq x \leq \pi : \cos 2x = 2\sin x & \text{ו.} & 0 \leq x \leq 2\pi : 3\cos x - \cos 2x = 0 & \text{ה.} \\
 0 \leq x \leq 2\pi : 2\sin^2 x = \cos 2x + 2 & \text{ח.} & 0 \leq x \leq 2\pi : \sin x + \cos 2x = 1 & \text{ז.} \\
 0 \leq x \leq \pi : 4\cos 2x + 6\sin x = 5 & \text{י.} & \pi \leq x \leq 2\pi : \cos 2x = 4\sin^2 x - \sin x & \text{ט.} \\
 0 \leq x \leq \pi : \cos 4x + \sin^2 x = 1 & \text{יב.} & 0 \leq x \leq 2\pi : \cos 4x + 1 = 3\sin 2x & \text{יא.}
 \end{array}$$

14 פתור את המשוואות הבאות בתחום המצויין לידן :

א. $\sin x = \frac{1}{2}$, $[0^\circ : 360^\circ]$ ב. $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $[-360^\circ : 360^\circ]$

ג. $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$, $[-180^\circ : 180^\circ]$ ד. $\frac{\sin 6x}{1 - \cos 4x} = 0$, $[0^\circ : 135^\circ]$

15 פתור את המשוואות הבאות בתחום הנתון :

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ כתוב פתרון כללי בלבד ב. $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $[-2\pi : 2\pi]$

ג. $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$, $[-\pi : \pi]$ ד. $\frac{\sin 6x}{1 - \cos 4x} = 0$, $[0 : 0.75\pi]$

ה. $0 \leq x \leq \pi$: $\cos 4x + \sin^2 x = 1$

16 פתור את המשוואות הבאות בתחום : $-\pi \leq x \leq \pi$:

א. $\cos x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ב. $\sin x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

ג. $\cos x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ד. $3 \sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

ה. $\sin x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ו. $3 \sin x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

תשובות סופיות:

$$\text{א. } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad \text{ג. } x = \frac{5}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \quad \text{ד. } x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad (1)$$

$$\text{א. } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad \text{ב. } x = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \quad (2)$$

$$\text{א. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \quad \text{ב. } x = \frac{3\pi}{4} \quad (3)$$

$$\text{א. } x = 0.753\pi, 0.246\pi \quad \text{ב. } x = 0.7\pi, 1.29\pi \quad \text{ג. } x = 1.437\pi, 0.437\pi \quad \text{ד. אין פתרון.} \quad (4)$$

$$\text{א. } x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18} \quad \text{ב. } x = \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \quad \text{ג. } x = 0.15\pi \quad (5)$$

$$x = 0.11\pi, 0.38\pi \quad \text{ה. } x = 0.13\pi, 0.53\pi, 0.79\pi \quad \text{ו. } x = 0.036\pi, 0.28\pi, 0.213\pi \quad (6)$$

$$\text{א. } x = \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}, \frac{7\pi}{4} \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{18}, \frac{2}{9}\pi, \frac{13}{18}\pi, \frac{8}{9}\pi \quad \text{ג. } x = 0.986\pi \quad (7)$$

$$\text{א. } x = 0, \frac{\pi}{4} \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{18}\pi, \frac{17}{18}\pi \quad \text{ג. } x = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi \quad \text{ד. } x = 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi \quad (8)$$

$$\text{ה. } x = \frac{\pi}{9}, \frac{10}{9}\pi \quad \text{ו. } x = 0, 0.5\pi, \pi \quad \text{ז. } x = \frac{\pi}{9}, \frac{4}{9}\pi$$

$$\text{א. } x = 0, \pi, 2\pi \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ג. } x = \frac{3}{2}\pi \quad \text{ד. } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \quad \text{ה. } x = 0, 2\pi \quad \text{ו. } x = \pi \quad (9)$$

$$\text{ז. } x = 0, \pi, 2\pi \quad \text{ח. } x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

$$\text{א. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{ג. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \quad \text{ד. } x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi \quad \text{ה. } x = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \pi \quad (10)$$

$$\text{ו. } x = \frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2} \quad \text{ז. } x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{\pi}{2} \quad \text{ח. } x = 0.5\pi, 1.23\pi, 1.76\pi$$

$$\text{ט. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, 1.1\pi, 1.89\pi \quad \text{י. } x = 2\pi, 0 \quad \text{יא. } x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 1.422\pi, 0.422\pi$$

$$\text{יב. } x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \quad \text{יג. } x = 0 \quad \text{יד. } x = 0, \pi, 2\pi \quad \text{טו. } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{א. } x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{8}, \frac{9}{8}\pi \quad \text{ג. } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \quad \text{ד. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{ה. } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \quad (11)$$

$$\text{ו. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \quad \text{ז. } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \quad \text{ח. } x = 0, \pi, 2\pi \quad \text{ט. } x = 1.1\pi, 0.1\pi \quad \text{י. } x = 0.1\pi, 0.2\pi, 0.6\pi$$

$$\text{א. } x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi \quad \text{ג. } x = \frac{2}{3}\pi \quad \text{ד. } x = \frac{5}{12}\pi \quad (12)$$

$$\text{ה. } x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8} \quad \text{ו. } x = \frac{4}{15}\pi, \frac{14}{15}\pi, \frac{8}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi$$

$$\text{א. } x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \quad \text{ב. } x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \quad \text{ג. } x = 0.35\pi, 1.35\pi \quad \text{ד. } x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad (13)$$

$$\text{ה. } x = 0.1\pi, 1.1\pi \quad \text{ו. } x = 0.33\pi, 1.33\pi \quad \text{ז. } x = 1.62\pi, 0.62\pi \quad \text{ח. } x = 0.608\pi, 0.39\pi$$

$$.x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} .\top x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi .\lambda x = 0, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, 2\pi .\beth x = \frac{5}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, 0, \pi, 2\pi .\aleph \text{ (13)}$$

$$.x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, 0, \pi, 2\pi .\dot{\lambda} x = 0.12\pi, 0.88\pi .\dot{\lambda} x = 0.59\pi, 1.41\pi .\dot{\eta}$$

$$.x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, 0.08\pi, 0.91\pi .\dot{\nu} x = 1.89\pi, 1.1\pi .\dot{\upsilon} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi .\dot{\eta}$$

$$.x = 0, 0.38\pi, 0.615\pi, \pi .\dot{\beth} x = \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi .\aleph^{\nu}$$

$$.x_{1,2,3,4} = -210^{\circ}, -30^{\circ}, 150^{\circ}, 330^{\circ} .\beth x_{1,2} = 30^{\circ}, 150^{\circ} .\aleph \text{ (14)}$$

$$.x_{1,2,3} = 30^{\circ}, 60^{\circ}, 120^{\circ} .\top x_{1,2,3,4} = -165^{\circ}, 15^{\circ}, -105^{\circ}, 75^{\circ} .\dot{\lambda}$$

$$.x_{1,2,3,4} = -\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} .\beth x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi .\aleph \text{ (15)}$$

$$.x_{1,2,3} = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} .\top x_{1,2,3,4} = -\frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} .\dot{\lambda}$$

$$.x = 0, 0.38\pi, 0.615\pi, \pi .\dot{\eta}$$

$$x = -0.073\pi, 0.926\pi .\top x = -\pi, 0, \pi .\lambda x = \pm \frac{\pi}{2} .\beth x = -\pi, 0, \pi .\aleph \text{ (16)}$$

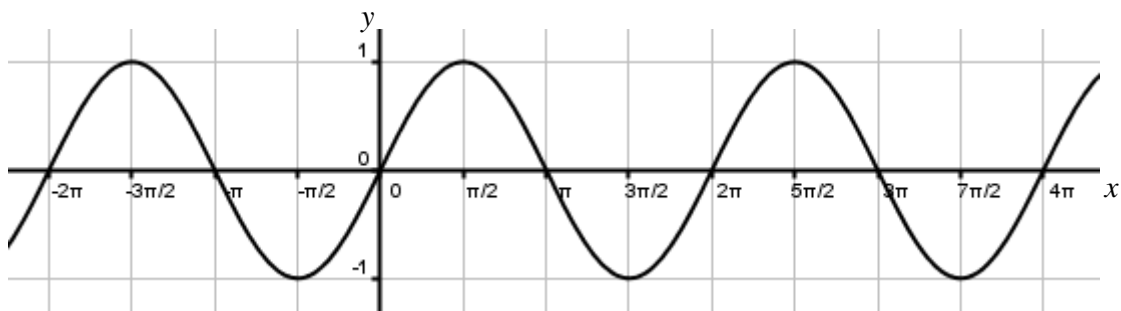
$$.x = -0.787\pi, 0.212\pi .\dot{\lambda} x = -0.409\pi, 0.58\pi .\dot{\eta}$$

פרק 6 – חשבון דיפרנציאלי:

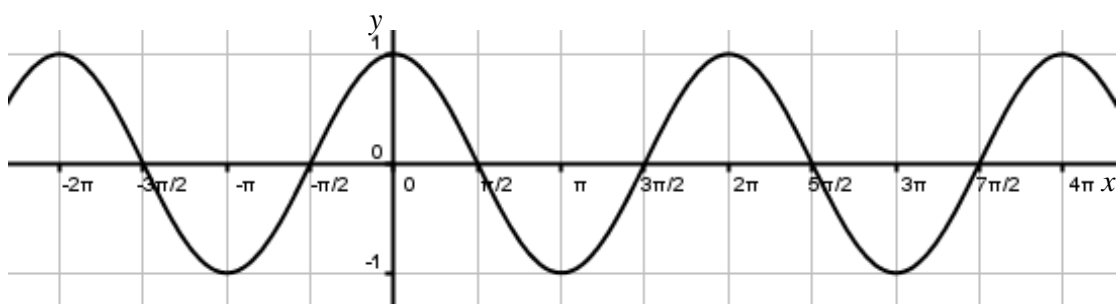
פונקציות טריגונומטריות:

הגדרות כלליות:

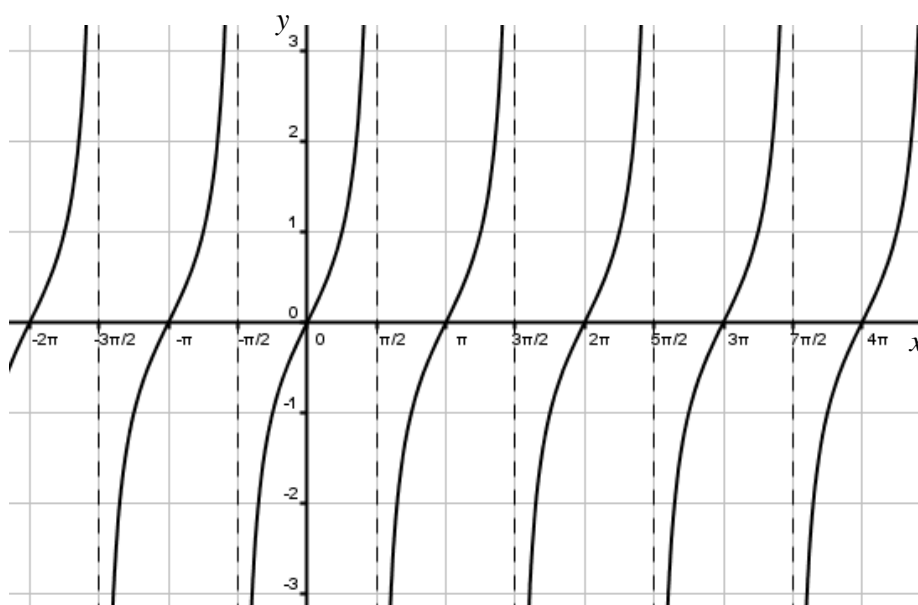
תיאור גרפי של פונקצית הסינוס: $y = \sin x$:



תיאור גרפי של פונקצית הקוסינוס: $y = \cos x$:



תיאור גרפי של פונקצית הטנגנס: $y = \tan x$:



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \cos x$	$y = \sin x$
$y' = -\sin x$	$y = \cos x$
$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan x$
$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \cot x$

זוגיות של פונקציות:

1. פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = f(-x)$.
2. פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = -f(-x)$.
3. פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

1. פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת: $f(x+T) = f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.

2. מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x) = \sin x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
- הפונקציה $f(x) = \cos x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
- הפונקציה $f(x) = \tan x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\tan(x+\pi) = \tan x$.
- הפונקציה $f(x) = \cot x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\cot(x+\pi) = \cot x$.

3. מחזור של פונקציות מהצורה: $y = a + c \cdot f(mx+n)$ (כאשר $f(x)$ מחזורית

במחזור T) תלוי רק במקדם של x והוא: T/m . דוגמאות:

- הפונקציה $f(x) = \sin(3x)$ מחזורית במחזור $T = 2\pi/3$.
- הפונקציה $f(x) = 5 - 2\cos(2x - \pi)$ מחזורית במחזור $T = \pi$.
- הפונקציה $f(x) = \tan(0.1x)$ מחזורית במחזור $T = \pi/0.1 = 10\pi$.

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x} \quad \text{ג.} \quad f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sin x + 3 \cos x + x \quad \text{א.}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x \quad \text{א.}$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin^3 x & \text{א.} \\ f(x) = 2 \cos^4 x & \text{ב.} \\ f(x) = \sin^2 x & \text{ג.} \\ f(x) = \sin^3 2x & \text{ד.} \\ f(x) = \cos^2 2x & \text{ה.} \\ f(x) = \tan^2 4x & \text{ו.} \end{array}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt{\sin 3x} \quad \text{א.}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x & \text{א.} \\ f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x & \text{ב.} \\ f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x & \text{ג.} \end{array}$$

(6) מצא את המחזור של הפונקציות הבאות:

$$y = 2 \sin x \quad \text{א.} \quad y = 5 + 3 \sin(4x + 1) \quad \text{ב.} \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad \text{ג.} \quad y = \sin^2 x \quad \text{ד.}$$

(7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \sin 2x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$.

(9) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \tan 3x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{9}$.

(10) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x) = 4 \sin^2 x$ בנקודות החיתוך

של הפונקציה עם הישר $y = 1$ בתחום $[0, \pi]$.

(11) שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$, $(a$ פרמטר) בנקודה שבה $y = 1$ בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$. מצא את ערך הפרמטר a .

(12) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$ $[0, 2\pi]$
 ב. $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ $[-\pi, \pi]$
 ג. $f(x) = \tan x$ $[0, 2\pi]$

(13) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

(14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

(15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

(16) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של

הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x$ בתחום: $[0: 1.5\pi]$.

(17) לפונקציה: $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$, $(a, b$ פרמטרים) יש נקודת קיצון

ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(18) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0: \pi]$.

(19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ ב- $[0: \pi]$.

(20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \tan x$ בתחום: $[-\pi: \pi]$.

21 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

22 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

23 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא בתחום $[0, \pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

24 נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
 - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
 - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25 נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$ בתחום $[0, 4]$.

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות מבחינות:

26) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \sin^2 x - 5 \sin x + ax$, (פרמטר a) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ידוע כי הישר: $y = ax - 2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

- מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m = 2$.
- האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.
- כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

27) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 + \cos^2 x$ ו- $g(x) = x^2 + \sin^2 x$.

- הוכח כי ההפרש: $f(x) - g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi < x < \pi$.
- ישר $x = t$, ($0 < t < 1$) חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1. מצא את כל הערכים האפשריים עבור t .

28) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4 \sin 2x - 2$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר $y = k$. היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x . מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

30 נתונה הפונקציה: $y = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$, $1 < m < 3$, m פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x = -\frac{\pi}{2}$.

- מצא את ערך הפרמטר m .
- האם הנקודה שבה: $x = -\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה. אם לא נמק מדוע.
- מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0 < x < 2\pi$.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

31 נתונה הפונקציה הבאה: $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $(\sin x + 1) \cdot \cos x = 1$ בתחום הנתון?

32 נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

33 נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos x - x$ בתחום: $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
1. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x מאפסות את הנגזרת של הפונקציה.
2. קבע אלו נקודות מנקודות החיתוך הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון ומצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

34 נתונה הפונקציה: $y = (\cos x + k)^2$, פרמטר, בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{2\pi}{3}$.

- מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

35) נתונה הפונקציה: $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$ (פרמטר m), מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ שמשוואתו היא: $y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}$.

- מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m .
- מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנ"ל.

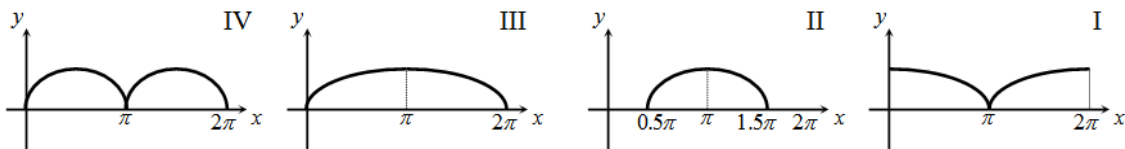
36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan x + kx$ (פרמטר k) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.
- הפונקציה: $g(x) = \tan^2 x + kx$ חותכת את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

37) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{-\cos x}$ ו- $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- האם הגרפים חותכים את ציר ה- x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
- האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.
- לפניך ארבעה איורים: I, II, III, ו-IV. קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.



תשובות סופיות:

- (1) א. $\cos x - 3\sin x + 1$ ב. $2\sin x + 2x\cos x + \frac{4}{\cos^2 x}$ ג. $\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$.ל
- (2) א. $3\cos 3x - 10\sin 5x$ ב. $-\frac{2}{1 + \sin x}$.ג. $3\sin^2 x \cdot \cos x$.ד. $-8\cos^3 x \sin x$.ה. $6\sin^2 2x \cos 2x$.ו. $-2\sin 4x$.ז. $\sin 2x$.ח. $\frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x}$.ט. $\frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.י. $\frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$.יא. $2\sin 2x$.יב. $4\sin 4x$.יג. $-\sin 4x$.יד.
- (3) א. 2π ב. 0.5π ג. 3π ד. π .ה. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.ו. $y = -2x + \pi$.ז. $a = \frac{1}{2}$.ח. $y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$.ט. $y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1$.י. $y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1$.יא. $a = \frac{1}{2}$.יב.
- (4) א. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ב. $-\pi \leq x \leq \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.ג. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.ד.
- (5) א. קצה, $\min(0, 1)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ min , $\max(2\pi, 1)$ קצה .ב.
- (6) א. קצה, $\min(0, 0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)$, $\max(2\pi, -\pi)$ קצה .ב.
- (7) א. $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ מוחלט .ב. $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$, $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 2\frac{2}{15}\right)$.ג. $a = 3$, $b = -4$.ד.
- (8) א. $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi$.ב. $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.ג. $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$.ד. $\min\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$, $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה .ה. $0 \leq x \leq 2\pi$.ו.
- (9) א. $0 < x < \frac{\pi}{6}$ או $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$: תחומי עלייה : ג. $\min(0, 2)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ קצה .ד. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$: תחומי ירידה : ה. $(0, 2)$.ו.
- (10) א. $0 < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.ג. תחומי עלייה : $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה : $0 < x < \frac{\pi}{4}$.ד. $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$.ה. אנכית : $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.ו.

(23) א. חיתוך: $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $\min(0,0)$ קצה.

(24) א. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{2\pi}{3}, 13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$,

$\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$ קצה ג. עולה: $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$, יורדת: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$

וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$

(25) א. $0 \leq x \leq 4$ וגם $x \neq 0.44$, $x \neq 3.56$

ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(2, -1.16)$, $\max(4,0)$ קצה.

(26) א. $f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x$, $a = 2$ ב. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right)$ ג. לא. ד. $y = 2x - 3$

(27) ב. $\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right)$ ג. $t_{1,2} = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$

(28) א. $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$; $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$; $(0, -2)$

ב. $\max(\pi, -2)$, $\min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, $\min(0, -2)$ ד. $-6 < k < 2$, $k \neq -2$ ה. $\frac{\pi}{2}$

(29) א. $(\pi, 0)$, $(0, -2)$ ב. $\max(\pi, 0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$, $\max(0, -2)$

$\min(1\frac{2}{3}\pi, -2.25)$, $\max(2\pi, -2)$ ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, $\frac{\pi}{3} < x < \pi$

יורדת: $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$

(30) א. $m = 2$ ב. נקודת פיתול ג. 2 נקודות ד. $(0.5\pi, 0)$, $(1.5\pi, 0)$

(31) א. $(0,1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $(1.5\pi, 0)$ ב. $\left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, -1.29\right)$, $(0,1)$ ד. 2 פתרונות.

(32) א. $(0,0)$, $(\pm 0.23\pi, 0)$ ב. $x = \pm 0.25\pi$ ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right)$

(33) א. $(-2\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(0,0)$ ב. 1. $\min(-2\pi, 0)$, $\max(2\pi, 0)$, $(0,0)$ 2. $(0,0)$ פיתול.

(34) א. $y = (\cos x + 0.5)^2$, $k = 0.5$ ב. $(\pi, 0.25)$ ג. לא.

(35) א. $m = 6$, $k = \sqrt{7}$ ב. $(1.5\pi, -6)$, $(0.5\pi, 6)$, $(-0.5\pi, -6)$ ג. בשתי נקודות.

(36) א. $x = 0.5\pi$ ב. $k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$

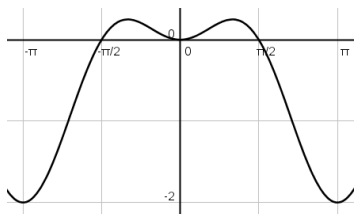
ג. $\max(0,0)$, $\min(0.15\pi, -0.07)$, $\max(0.84\pi, -3.9)$, $\min(\pi, -4)$

37 א. כן. $(1.5\pi, 0)$, $f(x):(0.5\pi, 0)$, $g(x):(\pi, 0)$ ב. כן. $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

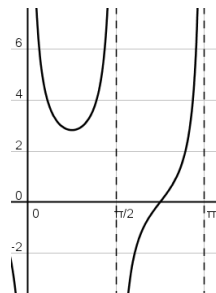
ג. $Max(\pi, 1)$ ד. איור I - $g(x)$. איור II - $f(x)$.

סקיצות לשאלות החקירה:

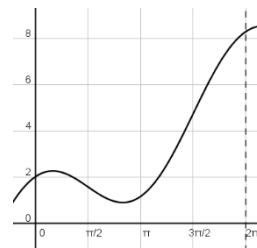
(23)



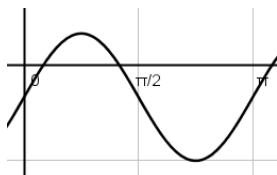
(22)



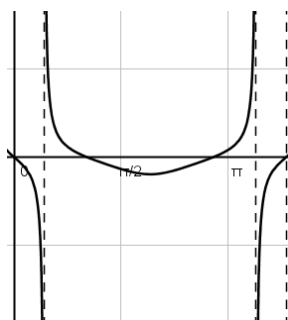
(21)



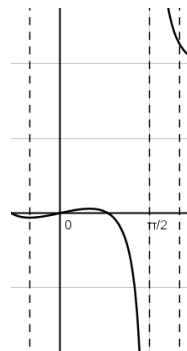
(28)



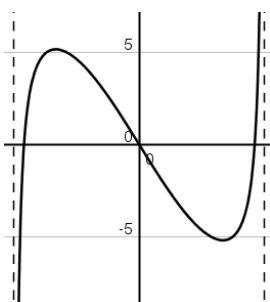
(25)



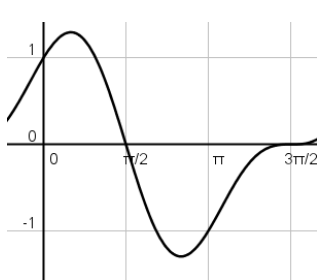
(24)



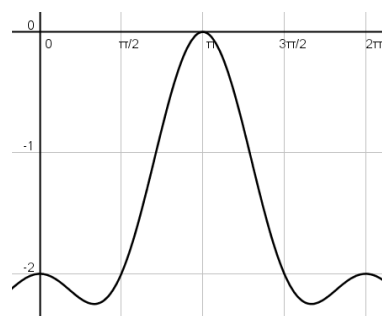
(32)



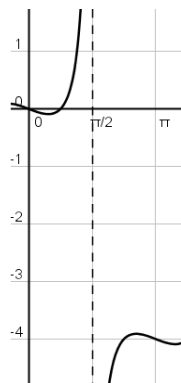
(31)



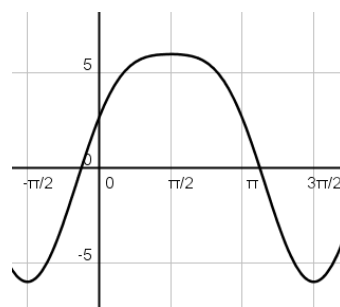
(29)



(36)



(35)



תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.

שאלות יסודיות:

קבע עבור כל אחד מהביטויים הבאים (ללא מחשבון) האם הוא חיובי או שלילי:

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\sin 140^\circ$ (3) | $\cos 80^\circ$ (2) | $\sin 70^\circ$ (1) |
| $\cos 260^\circ$ (6) | $\sin 240^\circ$ (5) | $\sin 160^\circ$ (4) |
| $\sin(-30^\circ)$ (9) | $\cos 340^\circ$ (8) | $\sin 310^\circ$ (7) |
| $\cos(-320^\circ)$ (12) | $\sin(-210^\circ)$ (11) | $\cos(-100^\circ)$ (10) |
| $\sin 610^\circ$ (15) | $\cos 480^\circ$ (14) | $\sin 400^\circ$ (13) |
| $\cos(-1080^\circ)$ (18) | $\sin(-420^\circ)$ (17) | $\cos 700^\circ$ (16) |

מצא באמצעות מעגל היחידה על ערכי הביטויים הבאים:

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\sin 90^\circ$ (21) | $\cos 0^\circ$ (20) | $\sin 0^\circ$ (19) |
| $\cos 180^\circ$ (24) | $\sin 180^\circ$ (23) | $\cos 90^\circ$ (22) |
| $\sin 360^\circ$ (27) | $\cos 270^\circ$ (26) | $\sin 270^\circ$ (25) |
| $\cos(-90^\circ)$ (30) | $\sin(-90^\circ)$ (29) | $\cos 360^\circ$ (28) |
| $\cos(-270^\circ)$ (33) | $\cos(-180^\circ)$ (32) | $\sin(-180^\circ)$ (31) |
| $\cos 630^\circ$ (36) | $\sin 540^\circ$ (35) | $\sin(-360^\circ)$ (34) |
| $\sin 1350^\circ$ (39) | $\sin 900^\circ$ (38) | $\cos 720^\circ$ (37) |
| $\cos(-1260^\circ)$ (42) | $\sin(-810^\circ)$ (41) | $\cos(-450^\circ)$ (40) |

- (43) א. האם יש זווית α המקיימת $\sin \alpha = 1.5$? אם כן, מצאו אותה. אם לא נמקו.
ב. האם יש זווית α המקיימת $\cos \alpha = -2$? אם כן, מצאו אותה. אם לא נמקו.

(44) נתון ש- k הוא מספר שלם. חשב ללא עזרת מחשבון את:

- א. $\sin(90^\circ + 360^\circ k)$
ב. $\cos(180^\circ + 360^\circ k)$

מעבר בין מעלות לרדיאנים:

נוסחת המעבר מזווית הנתונה במעלות לזווית הרדיאנים: $\alpha^R = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$.

נוסחת המעבר מזווית הנתונה ברדיאנים לזווית הנתונה במעלות: $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^R$.

(45) לפניך מספר זוויות הנתונות ברדיאנים, כתוב את ערכן במעלות:

א. π	ב. 0.5π	ג. $\frac{\pi}{3}$	ד. $\frac{\pi}{4}$
ה. $\frac{\pi}{5}$	ו. $\frac{\pi}{6}$	ז. $\frac{\pi}{9}$	ח. $\frac{\pi}{12}$
ט. $\frac{5\pi}{12}$	י. $\frac{3\pi}{2}$	יא. $\frac{7\pi}{3}$	יב. $\frac{7\pi}{6}$

(46) לפניך מספר זוויות הנתונות במעלות, כתוב את ערכן ברדיאנים:

א. 90°	ב. 45°	ג. 30°	ד. 20°	ה. 10°
ו. 115°	ז. 135°	ח. 225°	ט. 315°	י. 345°

(47) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	ב. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	ג. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	ד. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
ה. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	ו. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	ז. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$	ח. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
ט. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$	י. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	יא. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$	יב. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(48) הצב בכל פונקציה את הערכים שלידה וחשב (הזווית נתונה ברדיאנים):

א. $x = \pi, -\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{2} : y = 2 \sin x$	ב. $x = \pi, -\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{2} : y = 3 \cos x$
ג. $x = -\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{8} : y = \sin 2x$	ד. $x = -\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{8} : y = \cos 2x$
ה. $x = \pi, 0, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} : y = 3 \sin x - \cos 3x$	
ו. $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = 4 \cos x + \sin 4x$	
ז. $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin^2 x$	
ח. $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos^2 x$	

$$\begin{aligned}
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin^2 2x \quad \text{ט.} \\
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos^2 2x \quad \text{י.} \\
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan x \quad \text{יא.} \\
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan 2x \quad \text{יב.} \\
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan^2 x \quad \text{יג.} \\
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin x + \tan x \quad \text{יד.} \\
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos x + \tan x \quad \text{טו.} \\
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = x + \sin x \quad \text{טז.} \\
& x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos x - x \quad \text{יז.}
\end{aligned}$$

(49) חשב את ערכי הביטויים הבאים (הזווית נתונה ברדיאנים) :

$$\begin{aligned}
& x = 1, 2, 3 : y = \cos x \quad \text{ב.} & x = 1, 2, 3 : y = \sin x \quad \text{א.} \\
& x = -1, -2.5, -5 : y = \sin x \quad \text{ד.} & x = 1, 2, 3 : y = \tan x \quad \text{ג.} \\
& x = -1, -2.5, -5 : y = \tan x \quad \text{ו.} & x = -1, -2.5, -5 : y = \cos x \quad \text{ה.} \\
& x = -1, -0.5, 3 : y = \cos 2x + \sin 2x \quad \text{ח.} & x = 2, 4, 5 : y = \tan 2x - \sin 3x \quad \text{ז.}
\end{aligned}$$

(50) הצב בפונקציות הבאות את ערכי הזוויות שלידן (הזוויות ברדיאנים) :

$$\begin{aligned}
& x = 0, 1, 2 : y = x + \cos x \quad \text{ב.} & x = 0, 1, 2 : y = x + \sin x \quad \text{א.} \\
& x = 1.5, 2.5, -3 : y = x^2 - \cos x \quad \text{ד.} & x = 1.5, 2.5, -3 : y = x^2 - \sin x \quad \text{ג.} \\
& x = -6, 0.3, 0.25 : y = (x - \sin x)^2 \quad \text{ו.} & x = 1, -3, 0.5 : y = x^2 + \tan x + 1 \quad \text{ה.} \\
& x = 1, 2, 3 : y = x \sin x \quad \text{ח.} & x = -0.5, 1, 2.6 : y = (2x + \cos 2x)^2 \quad \text{ז.} \\
& x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x \tan x \quad \text{י.} & x = 1, 2, 3 : y = x \cos x \quad \text{ט.} \\
& x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x^2 \cos x \quad \text{יב.} & x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x^2 \sin x \quad \text{יא.}
\end{aligned}$$

נגזרות טריגונומטריות:

(51) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| א. $y = 3 \sin x$ | ב. $y = 2 \cos x$ |
| ג. $y = 2 \tan x$ | ד. $y = \cos x + 5 \sin x$ |
| ה. $y = 4 \sin x - 3 \cos x$ | ו. $y = \tan x + 3 \sin x$ |
| ז. $y = \sin x + 2x$ | ח. $y = x^2 - 2 \cos x$ |
| ט. $y = 3x - 3 \tan x$ | י. $y = \sin x + 3 \cos x + x$ |

(52) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| א. $y = \sin 3x$ | ב. $y = \cos 4x$ |
| ג. $y = \tan 2x$ | ד. $y = \sin 3x + 2 \cos 5x$ |
| ה. $y = 4 \sin 3x - \cos 2x$ | ו. $y = \tan 5x + \sin 3x$ |
| ז. $y = \sin 3x + x^2 - 3x$ | ח. $y = 3x - 3 \cos 2x$ |
| ט. $y = \sin(3x - \pi)$ | י. $y = \cos(0.4\pi - 4x)$ |

(53) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | |
|--|--|
| א. $y = x \sin x$ | ב. $y = x \cos x$ |
| ג. $y = 2x \tan x$ | ד. $y = x^2 \cos x$ |
| ה. $y = 2x \sin x + 4 \tan x$ | ו. $y = x(3 - \sin x)$ |
| ז. $y = \cos x \cdot \sin x$ | ח. $y = (\cos x + 1) \cdot (\sin x - 2)$ |
| ט. $y = \cos x(\sin x + 1)$ | י. $y = (\cos x - 1) \cdot (\tan x - 1)$ |
| יא. $y = \sin 3x \cdot (\cos 2x - 1)$ | יב. $y = (x^2 - 3) \tan 4x$ |
| יג. $y = \frac{\sin x}{x}$ | יד. $y = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$ |
| טו. $y = \frac{\cos x}{\tan x - 3}$ | טז. $y = \frac{\sin x}{\sin x - 5}$ |
| יז. $y = \frac{\cos x + 2}{\sin x}$ | יח. $y = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$ |
| יט. $y = \frac{\cos 3x + 1}{\sin x + 2}$ | כ. $y = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$ |

54) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| א. $y = \sin^2 x$ | ב. $y = \cos^2 x$ |
| ג. $y = \tan^2 x$ | ד. $y = \sin^3 x$ |
| ה. $y = 2 \cos^4 x$ | ו. $y = \tan^2 4x$ |
| ז. $y = \sin^3 2x$ | ח. $y = \cos^2 2x$ |
| ט. $y = (x \cos x)^2$ | י. $y = x \sin^2 x$ |
| יא. $y = x^2 \sin x - \cos^2 x$ | יב. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ |
| יג. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ | יד. $y = \sin^4 2x - \cos^4 2x$ |
| טו. $y = (x + \sin x)^2$ | טז. $y = x(3 - \sin x)^2$ |
| יז. $y = \frac{\cos^2 x + 1}{\sin x}$ | יח. $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}$ |

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

55) מצא את שיפוע הפונקציה: $y = \sin x$ בנקודות הבאות:

- א. $x = 0$ ב. $x = \pi$ ג. $x = -0.5\pi$

56) מצא את שיפוע הפונקציה: $y = 3 \cos 2x$ בנקודות הבאות:

- א. $x = 0$ ב. $x = 0.5\pi$ ג. $x = \pi$

57) מצא את שיפוע הפונקציה: $y = \tan x - \cos x$ בנקודות הבאות:

- א. $x = 0$ ב. $x = \frac{\pi}{3}$ ג. $x = \frac{\pi}{4}$

58) מצא את שיפוע הפונקציה: $y = x + \sin 3x$ בנקודות הבאות:

- א. $x = \frac{\pi}{6}$ ב. $x = -\frac{2\pi}{3}$ ג. $x = \frac{\pi}{4}$

59) חשב את הזווית הנוצרת בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{x}{2} - \cos 2x$

בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{3}$ וציר ה- x .

60) חשב את הזווית הנוצרת בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $y = \sin x - \tan x$

בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$ והכיוון החיובי של ציר ה- x .

61) מצא את הזווית הנוצרת בין המשיק לגרף הפונקציה: $y = \sin x - \cos x$ בנקודות

הבאות והכיוון החיובי של ציר ה- x :

א. $x = 0$ ב. $x = \frac{\pi}{2}$ ג. $x = \frac{\pi}{4}$ ד. $x = \frac{\pi}{6}$

62) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \cos x$ בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{6}$

63) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \sin 2x$ בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{2}$

64) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \tan 3x$ בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{9}$

65) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{\sin x + 1}{2}$ בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$

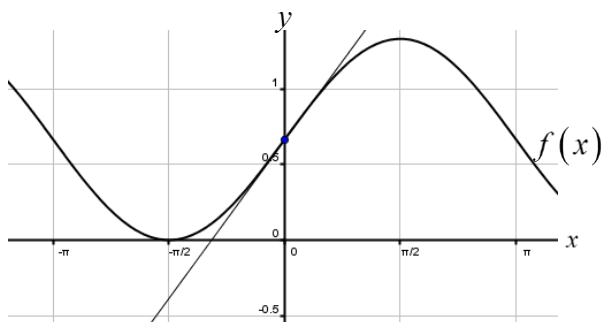
66) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \tan 3x - x$ בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$

67) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = x^2 \cos x$ בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{2}$

68) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = (\sin x + \cos x)^2$ כאשר: $x = \pi$

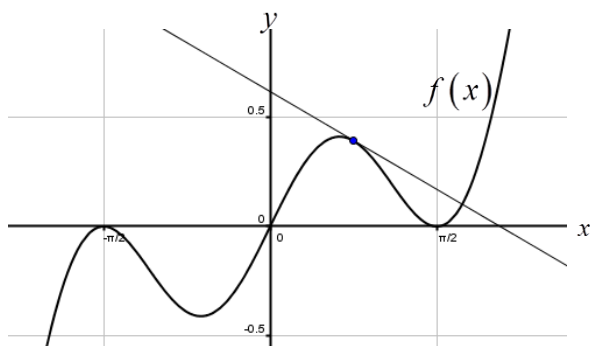
69) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$ בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$

70) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2 \sin x + 2}{3}$ בתחום: $[-\pi; \pi]$.



- מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$
 מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
 - כתוב את משוואת המשיק.
 - מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

71) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos^2 x$ בתחום: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



- מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$
 מהנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$.
- כתוב את משוואת המשיק.
 - מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

72) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 4 \sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = 1$ בתחום: $[0; \pi]$.

73) נתונות הפונקציות: $f(x) = 4 \cos x$ ו- $g(x) = \sin 2x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך שלהן בתחום הנתון.
- מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

74) נתונות הפונקציות: $f(x) = 2 \sin^2 x$ ו- $g(x) = \sin x + 1$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך שלהן בתחום הנתון.
- מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

75) מצא את משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות הבאות בעלי השיפוע הנתון:

- א. $f(x) = 2 \sin x$; $m = 2$; בתחום: $\left[0: \frac{\pi}{2}\right]$.
- ב. $f(x) = \sin 4x$; $m = 2$; בתחום: $\left[0: \frac{\pi}{4}\right]$.
- ג. $f(x) = 3x - \cos x$; $m = 2$; בתחום: $\left[-\frac{\pi}{2}: \frac{\pi}{2}\right]$.
- ד. $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$; $m = 1.5\sqrt{3}$; בתחום: $\left[0: \frac{\pi}{2}\right]$.

76) נתונה הפונקציה: $f(x) = 1 - \sin 2x$. מצא עבור אלו ערכי של x בתחום: $[0: 2\pi]$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא -1.

77) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \cos 2x + 3$ המקביל לישר: $y = x\sqrt{3} + \pi$; בתחום: $[0: \pi]$.

78) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 3 \tan x - 2$ המקביל לישר: $y = 3x + 2\pi$; בתחום: $[0: \pi]$.

79) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{3}{2} \cos 2x$ בתחום: $[0: \pi]$ בעלי השיפוע -1.

שאלות עם פרמטרים – שימושי הנגזרת:

80) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \sin x + \cos 3x$ (a פרמטר) בתחום: $[0: 2\pi]$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{3}$ הוא 2. מצא את a .

81) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos 2x + \cos 3x$ (a פרמטר) בתחום: $[0: 2\pi]$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{3}$ הוא $\sqrt{3}$. מצא את a .

82) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = a \tan x$ בנקודה שבה $x = \pi$ הוא 3.
 א. מצא את a .
 ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$.

- 83** לגרף הפונקציה: $f(x) = \sin x + a \cos x$ (פרמטר a) מעבירים משיק מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- א. הבע באמצעות a את משוואת המשיק.
 ב. מצא את a אם ידוע כי שיפוע המשיק הוא 1 וכתוב את משוואת המשיק.

84 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\sin x + k}$ (פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{6}$ הוא: $-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

- א. מצא את k וכתוב את משוואת המשיק.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
 ג. חשב את שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים.

85 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{k}{\cos x} + 2 \sin 2x$ (פרמטר חיובי).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{2\pi}{3}$.

- א. הבע באמצעות k את שיפוע המשיק.
 ב. המשיק מאונך לישר: $8y = x + 4$. מצא את k .
 ג. כתוב את משוואת המשיק.

86 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2}{a \tan x}$ (פרמטר a).

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = -\frac{2}{a \sin^2 x}$.

ב. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = -\frac{\pi}{6}$ הוא -4.

מצא את a .

חקירות פונקציה טריגונומטרית:

תחומי הגדרה:

87) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום $[0: 2\pi]$:

א. $y = \sin 2x - 5$	ב. $y = \sqrt{3} \cos x$
ג. $y = \tan x$	ד. $y = \tan x + \sin x$
ה. $y = \tan 2x - 2 \cos x$	ו. $y = \tan^2 x + \tan x$
ז. $y = \frac{1}{\sin 2x}$	ח. $y = \frac{3}{\cos x}$
ט. $y = \frac{x}{\sin x - 1}$	י. $y = \frac{\sin x}{\sin 2x + 0.5}$
יא. $y = \frac{\cos x}{4 \sin^2 x - 3}$	יב. $y = \frac{\cos x + 2}{\cos^2 x - 1}$
יג. $y = \frac{x^2 - 4 \sin x + \cos x}{\sin^2 x + 1}$	יד. $y = \frac{6}{\cos^2 x + 4}$
טו. $y = \frac{12}{\tan x}$	טז. $y = \frac{7}{\tan 2x}$
יז. $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$	יח. $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$

88) הפונקציה: $y = \tan ax + 3$ (פרמטר a אינה מוגדרת עבור: $x = \frac{\pi}{4}$). מצא את a .

89) הפונקציה: $y = \frac{2}{\sin x + a}$ (פרמטר a אינה מוגדרת עבור: $x = \frac{\pi}{6}$). מצא את a .

90) הפונקציה: $y = \frac{\sin x}{a^2 - \cos^2 x}$ (פרמטר חיובי a אינה מוגדרת עבור: $x = 0$). מצא את a .

נקודות קיצון:

91 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $[0: 2\pi] : y = \sin x$ ב. $[0: 2\pi] : y = \cos x$

ג. $[-\pi: \pi] : y = \tan x$ ד. $[0: \pi] : y = 2 \sin 2x$

ה. $[0: 0.5\pi] : y = 2 \cos 3x - 3x$ ו. $[0: \pi] : y = 2 \sin x - x\sqrt{3}$

92 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y = \frac{2}{\sin x}$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

93 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y = \frac{4}{\cos x}$ בתחום: $[-\pi: \pi]$.

94 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y = \sin^2 x$ בתחום: $[0: \pi]$.

95 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y = \cos^2 x + 2$ בתחום: $[0: \pi]$.

96 מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה: $y = \sin x + \cos x$ בתחום: $[0: 2\pi]$ וקבע את סוגן.

97 מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה: $y = \sin x - \frac{x}{2}$ בתחום: $[0: 2\pi]$ וקבע את סוגן.

98 מצא את נקודות הקיצון המקומיות וקיצון הקצה של הפונקציות בתחום הנתון:

א. $[0: \pi] : y = 3 \sin 2x$ ב. $[0: \pi] : y = 2 \cos x + x$

ג. $[0: \pi] : y = \sin^2 x - 5$ ד. $[0: \pi] : y = \cos^2 x - \cos x$

99 מצא את נקודות הקיצון המקומיות וקיצון הקצה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון וקבע את סוגן.

א. $[0: 0.5\pi] : y = \cos 4x + 3$ ב. $[0: \pi] : y = \sin x + \cos x$

ג. $[0: \pi] : y = \sin^2 x - 2 \cos x$ ד. $[0: 0.5\pi] : y = \cos^2 x + \sqrt{2} \sin x$

(100) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \sin^2 2x - x$ בתחום: $[0: \frac{2}{3}\pi]$.

(101) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות

של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x$ בתחום: $[0: 1.5\pi]$.

(102) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

(103) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $f(x) = \sin 2x$ בתחום: $[0: \pi]$.

(104) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $f(x) = \frac{\cos x - 1}{3}$ בתחום: $[0: \pi]$.

(105) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $f(x) = \tan x - \sin x$ בתחום: $0 < x < \pi$.

(106) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x$ בתחום: $[-\pi: \pi]$.

(107) הוכח כי הפונקציה: $f(x) = \tan x - \sin x$ אינה יורדת כלל.

(108) הוכח כי הפונקציה: $f(x) = \sin x - 2x$ יורדת לכל x .

(109) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin x + ax$ (a פרמטר).

א. מצא תחום ערכים של a עבורם הפונקציה תמיד עולה.

ב. מצא תחום ערכים של a עבורם הפונקציה תמיד יורדת.

ג. האם בקצוות התחומים שמצאת עבור a בסעיפים הקודמים, הנקודות שמקיימות: $f'(x) = 0$ הן נקודות קיצון?

(110) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos x + x\sqrt{3}$ (a פרמטר).

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = \frac{2\pi}{3}$. מצא את a .

(111) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \sin 2x - \cos x$ (פרמטר a).

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = \frac{\pi}{6}$. מצא את a .

(112) לפונקציה: $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ יש נקודת קיצון ששיעוריה הם: $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

אסימפטוטות אנכיות:

(113) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציות הבאות בתחום המצוין לידן:

א. $[0: \pi]: f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$

ב. $[0: \pi]: f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$

ג. $[-\pi: \pi]: f(x) = \tan x$

(114) לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin ax - 0.5}$ (פרמטר בתחום: $[0: 3]$) אסימפטוטה

אנכית: $x = \frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a .

ב. הראה כי אם האסימפטוטה הייתה: $x = \frac{\pi}{18}$ אז היה מתקבל

ערך a הגדול פי 3 מזה שמצאת בסעיף הקודם.

(115) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\cos 2x + a}$ (פרמטר a).

א. הסבר מדוע עבור: $a > 1$ הפונקציה מוגדרת לכל x .

ב. האם הפונקציה מוגדרת לכל x עבור תחום ערכים נוסף של a ? אם כן – מהו? אם לא – נמק.

ג. מצא את a אם ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x = 0.5\pi$.

(116) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\cos x}{a \sin^2 x - 3}$ (פרמטר a) בתחום: $[-0.5\pi: 0.5\pi]$.

א. מצא את a אם ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x = \frac{\pi}{3}$.

ב. הראה כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית הנגדית ל- $x = \frac{\pi}{3}$ בתחום הנתון.

חקירות חלקיות שונות ללא פרמטרים:

(117) נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{3} - 2\sin^2 x$ בתחום: $[-0.5\pi; 0.5\pi]$.

- הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin 2x$.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(118) נתונה הפונקציה: $f(x) = x\cos x - x$ בתחום: $[-3\pi; 3\pi]$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x מאפסות את הנגזרת של הפונקציה.
- קבע אלו נקודות מנקודות החיתוך הן קיצון ואלו אינן קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

(119) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sin^2 2x - \sin 4x$ בתחום: $[0; \pi]$.

- בכמה נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר ה- x בתחום הנתון?
- כמה נקודות קיצון יש לגרף הפונקציה בתחום הנתון? מצא אותן וקבע את סוגן.

(120) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ בתחום: $[-0.5\pi; 0.5\pi]$.

- מצא את כל הנקודות על גרף הפונקציה בתחום הנתון ששיפוע המשיק העובר דרכן הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- הראה כי הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום הנתון הוא 1.
- כתוב את משוואת המשיק העובר דרך נקודת המקסימום המוחלטת של הפונקציה בתחום הנתון ודרך הנקודה שמצאת בסעיף א' הנמצאת ברביע השני.

(121) נתונה הפונקציה: $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

- הראה כי הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = 2\cos 2x$.
- הוכח כי גרף הפונקציה לא יורד מתחת לציר ה- x .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום: $[-2\pi; 2\pi]$.

122 נתונה הפונקציה: $f(x) = (x + \sin x)(x - \sin x)$.

א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = 2x - \sin 2x$.

ב. הראה כי הנקודה שבה $x = 0$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף

הפרבולה: $g(x) = x^2$ בתחום: $[-1.2\pi; 1.2\pi]$.

חקירות חלקיות שונות עם פרמטרים:

123 נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos 2x + 2 \sin x$ (פרמטר a) בתחום: $[0; \pi]$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{4}$ הוא: $m = \sqrt{2} - 2$.

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

124 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + a \sin x$ (פרמטר a) בתחום: $[0; \pi]$.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את שאר נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

125 נתונה הפונקציה: $f(x) = -\frac{1}{a} \sin x + \cos ax$ (פרמטר שלם ושונה מ-0) a .

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \pi$ הוא 0.5.

א. מצא את a .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מצא את נקודת הקיצון המקומית של גרף הפונקציה בתחום: $0 < x < \pi$.

126 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^3 x + k \sin x$ (פרמטר k) בתחום: $[-\pi; \pi]$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = \frac{\pi}{3}$ הוא $-\frac{3}{8}$.

א. מצא את k .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע האם יש למשוואה: $\sin^3 x - 3 \sin x = 3$ יש פתרון. אם כן מהו?

חקירת מלאות:

(127) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 1 - 2\sin x$ בתחום: $[0: 2\pi]$.

- מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(128) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1$ בתחום: $[0: 1.5\pi]$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(129) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ בתחום: $\left[-\frac{3\pi}{8} : \frac{5\pi}{8}\right]$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(130) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3}\sin 3x + x\sqrt{2}$ בתחום: $0 < x < \pi$.

- מצא את נקודות הקיצון המקומיות של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנתון?
- היעזר בסעיפים הקודמים וקבע כמה פתרונות יש

$$\text{למשוואה: } \frac{2}{3}\sin 3x + x\sqrt{2} = 1 \text{ ?}$$

(131) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 2}$ בתחום: $-\pi < x < \pi$.

- מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(132) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x}$ בתחום: $-0.5\pi < x < 0.5\pi$.

- א. מצא את האסימפטוטה אנכית של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו בתחום הנתון.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

חיובי: 1. 2. 3. 8. 11. 12. 13. 16. 18.

שלילי: 4. 5. 6. 7. 9. 10. 14. 15. 17.

19) 0 (20) 1 (21) 1 (22) 0 (23) 0 (24) -1 (25) -1 (26) 0 (27) 0 (28) 1 (29) -1 (30) 0 (31) 0 (32) -1 (33) 0 (34) 0 (35) 0 (36) 0 (37) 1 (38) 0 (39) -1 (40) 0 (41) -1 (42) -1 (43) א. אין פתרון כי: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ ב. אין פתרון כי: $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ (44) א. 1. ב. -1.

(45) א. 180° ב. 90° ג. 60° ד. 45° ה. 36° ו. 30° ז. 20° ח. 15°
ט. 75° י. 270° יא. 420° יב. 210°

(46) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{4}$ ג. $\frac{\pi}{6}$ ד. $\frac{\pi}{9}$ ה. $\frac{\pi}{18}$ ו. $\frac{23}{36}\pi$ ז. $\frac{3}{4}\pi$ ח. $\frac{5}{4}\pi$ ט. $\frac{7}{4}\pi$ י. $\frac{23}{12}\pi$

(47) א. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. -1 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. 0 ז. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ח. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ט. $\sqrt{3}$ י. \emptyset יא. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ יב. 1.

(48) א. 2, $\sqrt{3}$, 0, 0 ב. 0, -1.5, -3, -3 ג. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0 ד. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1.

ה. 3, -1.59, -1, 1 ו. 0, 0, 0, 0, 4, -4

ז. 1, 1, 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, 0, 0, 0, 0 ח. 0, 0, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1, 1, 1, 1

ט. 0, 0, 0, 0, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, 0, 0, 0, 0 י. 1, 1, 1, 0, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, 1, 1, 1, 1

יא. \emptyset , \emptyset , \emptyset , \emptyset , $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 0, 0, 0, 0 יב. 0, 0, 0, 1, -1, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, \emptyset , \emptyset , \emptyset , \emptyset

יג. \emptyset , \emptyset , \emptyset , \emptyset , 3, 3, 1, 1, 0, 0, 0 יד. \emptyset , \emptyset , \emptyset , \emptyset , 2.59, -2.59, -1.707, 1.707, 0, 0, 0

טו. \emptyset , \emptyset , \emptyset , \emptyset , -1.23, 2.23, -0.2928, 1.707, -1, -1

טז. -3.18, -1.02, 1.913, 1.492, 0, $-\pi$, π יז. 2.96, 1.38, -0.54, -0.078, 1, 2.14, -4.14

(49) א. 0.141, 0.9, 0.841 ב. -0.989, -0.416, 0.54 ג. -0.142, -2.18, 1.55

ד. 0.958, -0.598, -0.841 ה. 0.283, -0.801, 0.54 ו. 3.38, 0.747, -1.55

ז. 0, -6.26, 1.43 ח. 0.68, -0.301, -1.325

(50) א. 2.909, 1.84, 0 ב. 1.583, 1.54, 1 ג. 9.14, 5.651, 1.252 ד. 9.989, 7.05, 2.179

ה. 1.796, 10.14, 3.55 ו. 0, 0, 39.43 ז. 32.132, 2.5, 0.211 ח. 0.423, 1.818, 0.841

ט. -2.969, -0.832, 0.54 י. -0.427, -0.427, -4.37, -4.37, 1.557, 1.557

יא. -1.27, 1.27, -3.63, 3.63, -0.84, 0.84 יב. -8.9, -8.9, -1.66, -1.66, 0.54, 0.54

(51) א. $y' = 3 \cos x$ ב. $y' = -2 \sin x$ ג. $y' = \frac{2}{\cos^2 x}$ ד. $y' = -\sin x + 5 \cos x$

ה. $y' = 4 \cos x + 3 \sin x$ ו. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + 3 \cos x$ ז. $y' = \cos x + 2$

ח. $y' = 2x + 2 \sin x$ ט. $y' = 3 - \frac{3}{\cos^2 x}$ י. $y' = \cos x - 3 \sin x + 1$

$$\cdot y' = 3\cos 3x - 10\sin 5x \quad \cdot \tau \quad y' = \frac{2}{\cos^2 2x} \quad \cdot \lambda \quad y' = -4\sin 4x \quad \cdot \beth \quad y' = 3\cos 3x \quad \cdot \aleph \quad (52)$$

$$\cdot y' = 3\cos 3x + 2x - 3 \quad \cdot \beth \quad y' = \frac{5}{\cos^2 5x} + 3\cos 3x \quad \cdot \aleph \quad y' = 12\cos 3x + 2\sin 2x \quad \cdot \eta$$

$$\cdot y' = 4\sin(0.4\pi - 4x) \quad \cdot \beth \quad y' = 3\cos(3x - \pi) \quad \cdot \upsilon \quad y' = 3 + 6\sin 2x \quad \cdot \eta$$

$$\cdot y' = 2\tan x + \frac{2x}{\cos^2 x} \quad \cdot \lambda \quad y' = \cos x - x\sin x \quad \cdot \beth \quad y' = \sin x + x\cos x \quad \cdot \aleph \quad (53)$$

$$\cdot y' = 2(\sin x + x\cos x) + \frac{4}{\cos^2 x} \quad \cdot \eta \quad y' = 2x\cos x - x^2\sin x \quad \cdot \tau$$

$$\cdot y' = \cos 2x + \cos x + 2\sin x \quad \cdot \eta \quad y' = \cos 2x \quad \cdot \beth \quad y' = 3 - \sin x - x\cos x \quad \cdot \aleph$$

$$\cdot y' = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} + \sin x \quad \cdot \beth \quad y' = \cos 2x - \sin x \quad \cdot \upsilon$$

$$\cdot y' = 2x\tan 4x + \frac{4(x^2 - 3)}{\cos^2(4x)} \quad \cdot \beth \quad y' = 3\cos 3x(\cos 2x - 1) - 2\sin 3x\sin 2x \quad \cdot \aleph$$

$$\cdot y' = \frac{3\sin x \cos x - \sin^2 x - 1}{\cos x(\tan x - 3)^2} \quad \cdot \upsilon \quad y' = \frac{1 + 2\cos x}{(\cos x + 2)^2} \quad \cdot \tau \quad y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \quad \cdot \lambda$$

$$\cdot y' = -2\frac{\sin 2x + 1}{(1 + \sin 2x)^2} \quad \cdot \eta \quad y' = -\frac{1 + 2\cos x}{\sin^2 x} \quad \cdot \beth \quad y' = \frac{-5\cos x}{(\sin x - 5)^2} \quad \cdot \upsilon$$

$$\cdot y' = \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} \quad \cdot \beth \quad y' = -\frac{3\sin 3x\sin x + 6\sin 3x + \cos x \cos 3x + \cos x}{(\sin x + 2)^2} \quad \cdot \upsilon$$

$$\cdot y' = 3\sin^2 x \cos x \quad \cdot \tau \quad y' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \quad \cdot \lambda \quad y' = -\sin 2x \quad \cdot \beth \quad y' = \sin 2x \quad \cdot \aleph \quad (54)$$

$$\cdot y' = 6\sin^2 2x \cos 2x \quad \cdot \beth \quad y' = \frac{8\sin 4x}{\cos^3 4x} \quad \cdot \aleph \quad y' = -8\cos^3 x \sin x \quad \cdot \eta$$

$$\cdot y' = x\sin 2x + \sin^2 x \quad \cdot \beth \quad y' = 2(x\cos x)(\cos x - x\sin x) \quad \cdot \upsilon \quad y' = -2\sin 4x \quad \cdot \eta$$

$$\cdot y' = -\sin 4x \quad \cdot \lambda \quad y' = 2\sin 2x \quad \cdot \beth \quad y' = 2x\sin x + x^2\cos x + \sin 2x \quad \cdot \aleph$$

$$\cdot y' = 2(x + \sin x)(1 + \cos x) \quad \cdot \upsilon \quad y' = 4\sin 4x \quad \cdot \tau$$

$$\cdot y' = -\frac{\sin 2x \sin x + \cos^3 x + \cos x}{\sin^2 x} \quad \cdot \beth \quad y' = (3 - \sin x)^2 - 2x(3 - \sin x)\cos x \quad \cdot \upsilon$$

$$\cdot y' = \frac{\cos^3 x + \cos x + \sin 2x \sin x}{(\cos^2 x + 1)^2} \quad \cdot \eta$$

$$\cdot 2.7 \quad \cdot \lambda \quad 4.866 \quad \cdot \beth \quad 1 \quad \cdot \aleph \quad (57) \quad \cdot 0 \quad \cdot \lambda \quad 0 \quad \cdot \beth \quad 0 \quad \cdot \aleph \quad (56) \quad \cdot 0 \quad \cdot \lambda \quad -1 \quad \cdot \beth \quad 1 \quad \cdot \aleph \quad (55)$$

$$\cdot 127.72^\circ \quad (60) \quad \cdot 65.86^\circ \quad (59) \quad \cdot -1.12 \quad \cdot \lambda \quad 4 \quad \cdot \beth \quad 1 \quad \cdot \aleph \quad (58)$$

$$\cdot y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (62) \quad \cdot 53.8^\circ \quad \cdot \tau \quad 54.73^\circ \quad \cdot \lambda \quad 45^\circ \quad \cdot \beth \quad 45^\circ \quad \cdot \aleph \quad (61)$$

$$\cdot y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + 0.603 \quad (65) \quad \cdot y = 12x + \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \quad (64) \quad \cdot y = -2x + \pi \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot y = 2x + 1 - 2\pi \text{ (68)} \quad \cdot y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8} \text{ (67)} \quad \cdot y = 5x - 1 - 1.5\pi \text{ (66)} \\
& \cdot (-1, 0) \cdot \lambda \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \cdot \beth \quad \left(0, \frac{2}{3}\right) \cdot \aleph \text{ (70)} \quad \cdot y = 0.2426x + 0.2236 \text{ (69)} \\
& \cdot (2.164, 0), (0, 0.6168) \cdot \beth \quad y = -0.285x + 0.6168 \cdot \aleph \text{ (71)} \\
& \quad \cdot y = 2\sqrt{3}x - 0.813, y = -2\sqrt{3}x + 10.06 \text{ (72)} \\
& \cdot y = 4x - 6\pi, y = -4x + 2\pi \cdot \beth \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right) \cdot \aleph \text{ (73)} \\
& \cdot y = 2, y = x\sqrt{3} - 5.848 \cdot \beth \quad \left(\frac{\pi}{2}, 2\right), \left(\frac{7}{6}\pi, \frac{1}{2}\right) \cdot \aleph \text{ (74)} \\
& y = 2x - 0.5\pi \cdot \lambda \quad y = 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \cdot \beth \quad y = 2x \cdot \aleph \text{ (75)} \\
& \quad \cdot y = 1.5\sqrt{3}x + 3.97, y = 1.5\sqrt{3}x - 1.51 \cdot \daleth \\
& \cdot y = 3x - 2, y = 3x - 3\pi - 2 \text{ (78)} \quad \cdot y = \sqrt{3}x - 1.034, y = \sqrt{3}x + 2.5 - \frac{2}{\sqrt{3}}\pi \text{ (77)} \quad x = \frac{\pi}{6} \text{ (76)} \\
& \quad a = -1 \text{ (81)} \quad a = 4 \text{ (80)} \quad y = -x - 0.009, y = -x + 1.657 \text{ (79)} \\
& \quad \cdot a = 2, y = x + 2 \cdot \beth \quad y = x + a \cdot \aleph \text{ (83)} \quad \cdot y = 3x - 3\pi \cdot \beth \quad a = 3 \cdot \aleph \text{ (82)} \\
& S = 0.868 \cdot \lambda \quad (0, 0.613), (2.83, 0) \cdot \beth \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi, k = 1.5 \cdot \aleph \text{ (84)} \\
& \quad \cdot a = 2 \cdot \beth \text{ (86)} \quad \cdot y = -8x + \frac{16\pi}{3} - 3\sqrt{3} \cdot \lambda \quad k = \sqrt{3} \cdot \beth \quad -2(k\sqrt{3} + 1) \cdot \aleph \text{ (85)} \\
& \cdot x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \cdot \heptagon \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \cdot \daleth \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \cdot \lambda \quad x \text{ כל } \cdot \beth \quad x \text{ כל } \cdot \aleph \text{ (87)} \\
& \quad \cdot x \neq \frac{\pi}{2} \cdot \heptagon \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \cdot \heptagon \quad x \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \cdot \daleth \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \cdot \lambda \\
& \cdot x \text{ כל } \cdot \lambda \quad x \neq 0, \pi, 2\pi \cdot \beth \quad x \neq \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \cdot \aleph \quad x \neq \frac{19\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \cdot \daleth \\
& \quad \cdot x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi \cdot \heptagon \quad x \neq 0, \pi, 2\pi \cdot \heptagon \quad x \text{ כל } \cdot \heptagon \\
& \quad \cdot x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi \cdot \heptagon \quad x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi \cdot \heptagon \\
& (0, 1), (2\pi, 1), (\pi, -1) \cdot \beth \quad \left(\frac{3}{2}\pi, -1\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \cdot \aleph \text{ (91)} \quad a = 1 \text{ (90)} \quad a = -\frac{1}{2} \text{ (89)} \quad a = 2 \text{ (88)} \\
& \left(\frac{3\pi}{2}, -2\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\right) \text{ (92)} \quad \left(\frac{\pi}{6}, 0.09\right) \cdot \lambda \quad \left(\frac{7}{18}\pi, -5.39\right) \cdot \heptagon \quad \left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \left(\frac{3}{4}\pi, -2\right) \cdot \daleth \quad \cdot \lambda \text{ אין } \cdot \daleth \\
& \cdot \left(\frac{\pi}{2}, 2\right), (\pi, 3), (0, 3) \text{ (95)} \quad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (0, 0), (\pi, 0) \text{ (94)} \quad (-\pi, -4), (\pi, -4), (0, 4) \text{ (93)} \\
& \quad \cdot \max(2\pi, 1), \min\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right), \max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right), \min(0, 1) \text{ קצה, (96)}
\end{aligned}$$

97) קצה $\max(2\pi, -\pi)$, $\min\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, קצה $\min(0, 0)$

98) א. קצה $\min(0, 0)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$, $\min\left(\frac{3}{4}\pi, -3\right)$, קצה $\max(\pi, 0)$

ב. קצה $\min(0, 2)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 2.25\right)$, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, 0.886\right)$, קצה $\max(\pi, \pi - 2)$

ג. קצה $\min(0, -5)$, $\max\left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$, קצה $\min(\pi, -5)$

ד. קצה $\max(0, 0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4}\right)$, קצה $\max(\pi, 2)$

99) א. קצה $\max\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, קצה $\max(0, 4)$

ב. קצה $\max(\pi, 2)$, קצה $\min(0, -2)$ ג. קצה $\min(\pi, -1)$, קצה $\min(0, 1)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

ד. קצה $\min(0, 1)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, 1.5\right)$, קצה $\min\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right)$

100) $\max\left(\frac{5\pi}{24}, 0.28\right)$ מוחלט. $\min\left(\frac{13\pi}{24}, -1.63\right)$ מוחלט.

101) $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$ מוחלט, $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right)$ מוחלט 102) $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ מוחלט.

103) עולה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$, יורדת: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ 104) יורדת בכל התחום.

105) עולה בכל התחום. 106) עולה: $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$

יורדת: $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$ 109) א. $a > 1$ ב. $a < -1$ ג. לא.

110) $a = 2$ 111) $a = -\frac{1}{2}$ 112) $b = -4, a = 3$

113) א. $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$ ב. $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ג. $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ 114) א. $a = 1$ ב. $a = 3$

115) ג. $a = 1$ 116) א. $a = 4$

117) ב. $\min\left(-\frac{\pi}{2}, -4.72\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.4\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{3}, 0.314\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{2}, 0.72\right)$

ג. עולה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ יורדת:

118) א. $(0, 0), (2\pi, 0), (-2\pi, 0)$ ג. $(0, 0), (2\pi, 0), (-2\pi, 0)$ פיתול.

119) א. 5 נקודות שונות.

ב. $\min\left(\frac{\pi}{16}, -0.414\right)$, $\max\left(\frac{5}{16}\pi, 2.41\right)$, $\min\left(\frac{9}{16}\pi, -0.414\right)$, $\max\left(\frac{13}{16}\pi, 2.41\right)$

א. $y = \frac{9}{7\pi}x + \frac{5}{14}$.ג $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{4}\right)$.א (120)

.ג (121) $(\pi, \pi^2), (-\pi, \pi^2)$.ג (122) $(-1.25\pi, 0), (-0.25\pi, 0), (0.75\pi, 0), (1.75\pi, 0)$.ג

א. $a=1$.ב $\min(0,1), \max\left(\frac{\pi}{6}, 1.5\right), \min\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \max\left(\frac{5}{6}\pi, 1.5\right), \min(\pi, 1)$.א (123)

ג. עולה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$, יורדת: $0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$

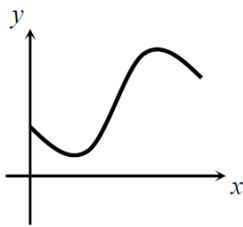
א. $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x, a = -\sqrt{2}$.א (124)

ב. $\max(0,0), \min\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right), \max\left(\frac{\pi}{2}, -0.414\right), \min\left(\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right), \max(\pi, 0)$.ב

.ג $(0,0), (\pi, 0)$

א. $a=2$.ב $y = 0.5x - 0.57$.ג $(0.5\pi, -1.5)$.א (125)

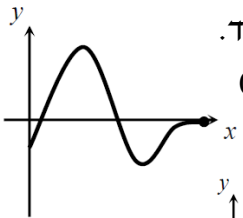
א. $k=-3$.ב $\min(-\pi, 0), \max(-0.5\pi, 2), \min(0.5\pi, -2), \max(\pi, 0)$.ג לא.א (126)



א. $\max\left(\frac{5}{3}\pi, 7.96\right), \min(2\pi, 7.28), \max(0, 1), \min\left(\frac{\pi}{3}, 0.315\right)$.א (127)

ב. עולה: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ יורדת: $0 < x < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$.ג

א. $(0, -1), \left(\frac{\pi}{6}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right), (1.5\pi, 0)$.א (128)

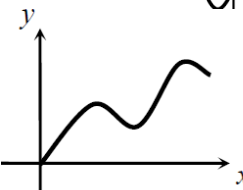
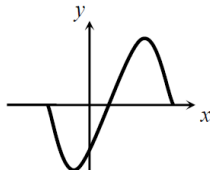


ב. $\min(0, -1), \max(0.5\pi, 2), \min(1.08\pi, -1.24), \max(1.5\pi, 0)$.ג

ג. עולה: $0 < x < 0.5\pi, 1.08\pi < x < 1.5\pi$ יורדת: $0.5\pi < x < 1.08\pi$

א. $\left(-\frac{3\pi}{8}, 0\right), \left(\frac{\pi}{8}, 0\right), \left(\frac{5}{8}\pi, 0\right)$.א (129)

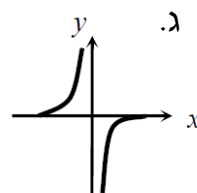
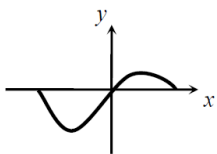
ב. $\min\left(-\frac{\pi}{8}, -1.41\right), \max\left(\frac{3}{8}\pi, 1.41\right)$.ב



א. $\max\left(\frac{\pi}{4}, 1.58\right), \min\left(\frac{5\pi}{12}, 1.38\right), \max\left(\frac{11\pi}{12}, 4.54\right)$.א (130)

ב. ג. לא. ד. פתרון אחד.

א. $(0,0)$.ב $\min(-0.5\pi, -1), \max\left(0.5\pi, \frac{1}{3}\right)$.א (131)

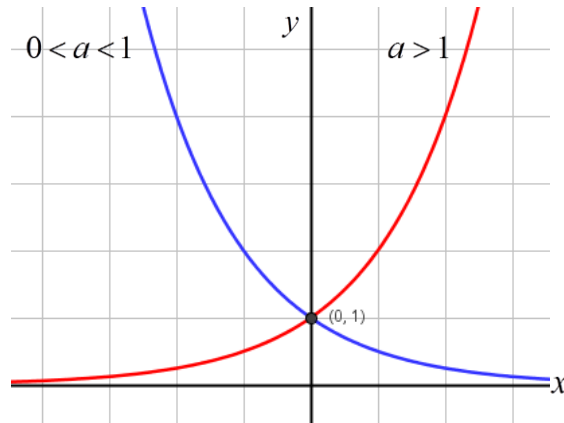


א. $x=0$.א (132)

פונקציות מעריכיות:

הגדרות כלליות:

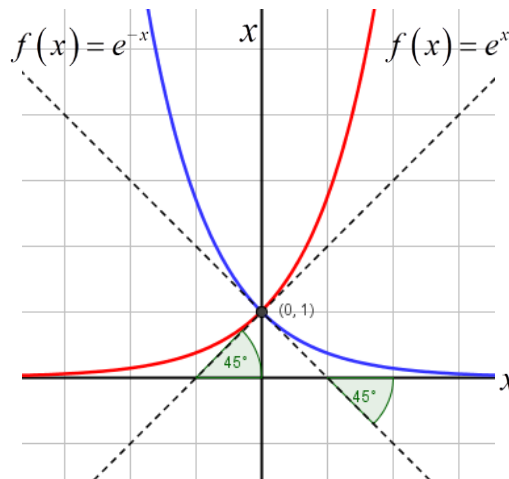
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$
עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1)$.
4. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

תזכורת – כללי הגזירה:

כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
.1	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
.2	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
.3	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
.4	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
.5	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

1 גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$.ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$

ג. $f(x) = 2^{3x}$.ד. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

2 גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x) = x \cdot e^x$.ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$.ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

3 גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

4 גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$.ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

5 מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.

6 מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.

7 מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

8 שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

9 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{2x-1}{e^x}$.ב. $f(x) = \frac{3}{e^x - 1}$.ג. $f(x) = \frac{x+1}{e^x - 5}$
ד. $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$.ה. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$.ו. $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{5x - 2}$

10 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$.

11 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(12) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 9}{e^x}$

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(16) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(17) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

18) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות מבחינות:

19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

20) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}}$ בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $-\frac{12}{e^{10}}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$.

21) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע

כי כאשר $x = \ln \frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x) + f''(x) = 8$.

א. מצא את a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$.

- ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- ג. מצא את b .
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

22) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 6x - e^x$ ו- $g(x) = ae^x - e^{2x} + b$.

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- y .

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

23) לגרף הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $(2, \frac{4}{e})$. $a, b \neq 0$.

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מעבירים ישר: $y = k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

24) לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

26) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- א. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. בכמה נקודות חותך הישר $y = -0.01$ את גרף הפונקציה?

27) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע

כי כאשר $x = \ln \frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x) + f''(x) = 12$.

א. מצא את a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$.

- ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- ג. מצא את b .
- ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

28) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot a^x$, $(a > 0)$.

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = -\frac{1}{\ln 2}$.

א. מצא את a .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x = 2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם

גרף הפונקציה: $g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$.

ג. מצא את k .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

29) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- y .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$ ד. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

2) א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x \ln 2 + \ln 2)$

3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ 4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$

5) $y = ex$ 6) $y = 3x + 1$ 7) $y = (e-1)x + e$, $y = (-e^2 + e)x + e^2$ 8) $b = -1$, $a = 2$

9) א. כל x ב. $x \neq 0$ ג. $x \neq \ln 5$ ד. $x \neq 0$, $x \neq \ln 2$ ה. כל x ו. $0 \leq x \neq \frac{2}{5}$

10) $\min(3, e^3)$ 11) $\max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$, $\min(0, 0)$

12) $b = -12$, $a = 4$ $\min\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$, $\max\left(3\frac{1}{2}, 0.483\right)$ 13) $p = -27$, $q = 35$

14) א. כל x ב. $\min(2, -e^2)$ ג. תחומי עלייה: $2 < x$ תחומי ירידה: $x < 2$.
ד. $(3, 0)$, $(0, -3)$

15) א. כל x ב. $\max(0, 3)$, $\min(\ln 3, 1.59)$

ג. תחומי עלייה: $x > \ln 3$ או $x < 0$ תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$ ד. $(0, 3)$

16 א. כל x . ב. $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right), \max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$. ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$

תחומי ירידה: $x < -1$ או $1 < x$. ד. $(0,0)$.

17 א. כל x . ב. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$. ג. תחומי עלייה: $x < 3$, תחומי ירידה: $x > 3$

ד. $(0,0)$.

18 א. כל x . ב. $\min(-0.91, -0.67)$. ג. תחומי עלייה: $-0.91 < x$

תחומי ירידה: $x < -0.91$. ד. $(0,0)$.

19 א. כל x . ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$. ג. עולה: $x < \frac{1}{6}, x > \frac{1}{2}$

יורדת: $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$. ד. $(0,1)$.

20 א. $k=1$, $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$. ב. $(-1, e^2)$.

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$

21 א. $a=4$. ב. $x = \ln 2$. ג. $b = -5$. ד. $(0,0)$.

22 א. $a=12, b=-12$. ב. עולות: $x < \ln 6$, יורדות: $x > \ln 6$.

23 א. $a=1, b=0.25$, $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{4}x^2}$. ב. $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right), \min(0,0)$. ג. $(0,0)$

ה. $0 < k < \frac{4}{e}$.

24 א. $a = \frac{1}{3}$. ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$. ג. עולה: $1 < x < 11$, יורדת: $x < 1, x > 11$.

ד. $(-1,0), (7,0), (0, -7e)$.

25 א. $m = -6$, $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$. ב. $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right), \min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$. ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$.

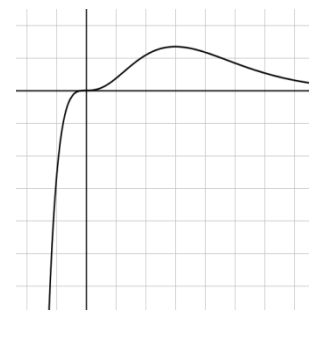
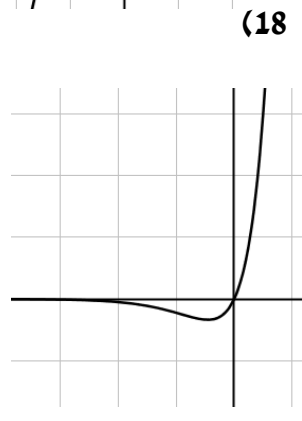
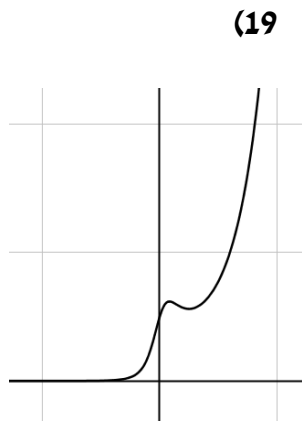
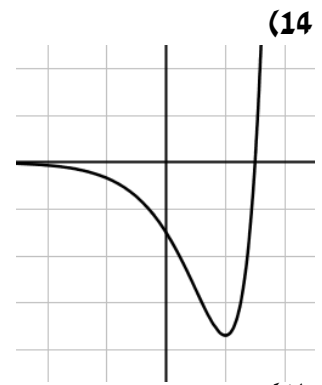
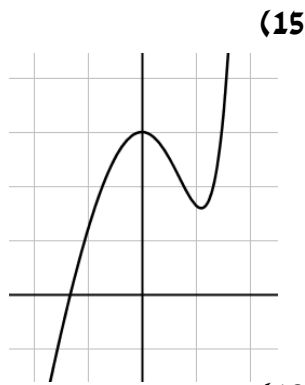
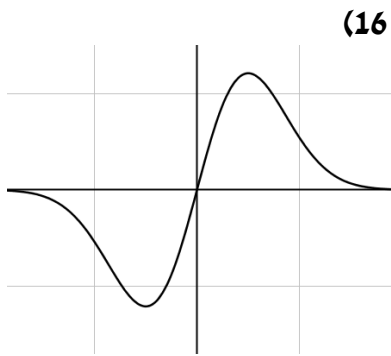
26 א. $x=0, -1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$. ב. $y=0$. ד. 2 נקודות.

27 א. $a=7$. ב. $x = \ln 2$. ג. $b=10$. ד. לא.

28 א. $a=2$. ב. עולה: $x > -\frac{1}{\ln 2}$, יורדת: $x < -\frac{1}{\ln 2}$. ג. $k=1$. ד. $(0,0)$.

29 א. $y = -x \ln 81 + 7$. ג. $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$.

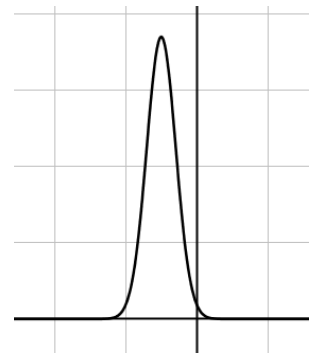
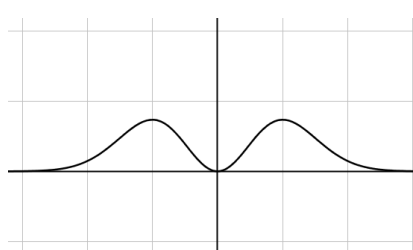
סקיצות לשאלות החקירה:



(24)

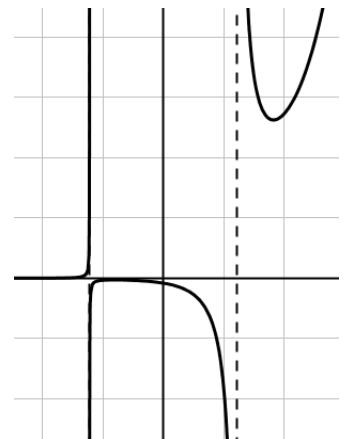
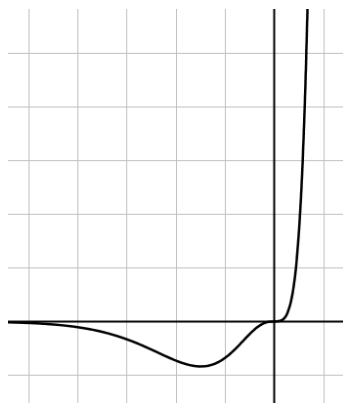
(23)

(20)



(26)

(25)



תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוץ זה אין פתרון בסרטונים.

1 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = e^2 x^2 - \frac{x}{e} + e^2$ בנקודה שבה $x = -1$.

2 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{e^2} - \sqrt{e} \cdot x + \frac{1}{e}$ בנקודה שבה $x = -2$.

3 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x(2x-1)^2}{2}$ בנקודה שבה $x = e$.

4 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{2} \cdot x^3 - x^2 + 0.5 \cdot x}{x}$ בנקודה שבה $x = -e$.

5 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = e \cdot x^{1.5} - \sqrt{e}$ בנקודה שבה $x = \frac{1}{e}$.

6 חקור את הפונקציה $y = e^{4(x-1)}$ לפי הסעיפים הבאים:

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא חיתוכים עם הצירים.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7 חקור את הפונקציה $y = xe^x$ לפי הסעיפים הבאים:

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא חיתוכים עם הצירים.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8) חקור את הפונקציה $y = (x+2)e^x$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9) חקור את הפונקציה $y = (x^2 - 5x + 5)e^x$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10) חקור את הפונקציה $y = \frac{e^x}{x+2}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

11) חקור את הפונקציה $y = \frac{x^2}{e^{x+1}}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12) חקור את הפונקציה $y = \frac{(x-4)^2}{e^x}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

13) חקור את הפונקציה $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

14) חקור את הפונקציה $y = x^2 e^{x^2}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

15) חקור את הפונקציה $y = \frac{x - e^x}{x}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא את תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16 חקור את הפונקציה $y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

17 חקור את הפונקציה $y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 15}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- ד. מהן נקודות החיתוך עם הצירים?
- ה. מהי האסימפטוטה האופקית?
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18 נתונה הפונקציה : $f(x) = e^{x^3 - 3x^2 - 9x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

19 נתונה הפונקציה : $f(x) = (3x^2 - 4)e^{6x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{x^2-24}}{x^2-24}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) לפונקציה: $f(x) = \frac{ae^x}{x+b}$ יש נקודת קיצון: $(4, 5e^4)$.

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 8$.

- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4^x + 4^{1-x}$.

- הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B.
- א. הוכח כי אחת מהנקודות נמצאת על ציר ה- y .
 - ב. הוכח כי שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה שווה לממוצע של שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.
 - ג. כתוב את משוואת המשיק בנקודת הקיצון של הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{kx}$.

- ידוע כי יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון שבה $x = 1$.
- א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
 - ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
 - ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

$y = 33.96x - 65.56$ (3) $y = -2.19x - 0.17$ (2) $y = -40.54x - 12.7$ (1)

$y = 2.47x - 19.5$ (5) $y = -8.69x - 9.95$ (4)

(6) א. כל x ב. אין קיצון. ג. עולה בכל ת.ה. ד. $(0, e^{-4})$.

(7) א. כל x ב. $Min(-1, e^{-1})$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$ ד. $(0, 0)$.

(8) א. כל x ב. $Min(-3, -e^{-3})$ ג. עולה: $x > -3$ יורדת: $x < -3$ ד. $(-2, 0)$, $(0, 2)$.

(9) א. כל x ב. $Max(0, 5)$, $Min(3, -e^3)$ ג. עולה: $x < 0, x > 3$ יורדת: $0 < x < 3$.

ד. $(0, 5)$, $(3.61, 0)$, $(1.38, 0)$.

(10) א. $x \neq -2$ ב. $Min(-1, e^{-1})$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1, x \neq -2$ ד. $(0, \frac{1}{2})$.

ה. $x = -2$.

(11) א. כל x ב. $Min(0, 0)$, $Max(2, 4e^{-3})$ ג. עולה: $0 < x < 2$ יורדת: $x < 0, x > 2$.

ד. $(0, 0)$.

(12) א. כל x ב. $Min(4, 0)$, $Max(6, 4e^{-6})$ ג. עולה: $4 < x < 6$ יורדת: $x < 4, x > 6$.

ד. $(0, 16)$, $(4, 0)$.

(13) א. $x \neq 0$ ב. אין קיצון. ג. יורדת בכל ת.ה. ד. אין חיתוכים עם הצירים כלל.

ה. $x = 0: y = 0$, $x < 0: y = 1$, $x > 0: y = 1$.

(14) א. כל x ב. $Min(0, 0)$ ג. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$ ד. $(0, 0)$.

(15) א. $x \neq 0$ ב. $Max(1, 1 - e)$ ג. עולה: $x < 1, x \neq 0$ יורדת: $x > 1$ ד. אין חיתוכים.

ה. $x < 0: y = 1$.

(16) א. כל x ב. $Max(0, 0.5)$ ג. עולה: $x < 0$ יורדת: $x > 0$ ד. $(0, \frac{1}{2})$ ה. $y = 0$.

(17) א. $x \neq \pm\sqrt{15}$ ב. $Min(-5, \frac{e^5}{10})$, $Max(3, -\frac{1}{6e^3})$

ג. עולה: $-5 < x < 3, x \neq -\sqrt{15}$ יורדת: $x < -5, x > 3, x \neq \sqrt{15}$ ד. $(0, -\frac{1}{15})$.

ה. $y = 0, x = \pm\sqrt{15}$ לצד ימין בלבד.

(18) א. כל x ב. $Max(-1, e^5)$, $Min(3, e^{-27})$ ג. עולה: $x < -1, x > 3$ יורדת: $-1 < x < 3$.

ד. $(0, 1)$.

(19) א. כל x ב. $Min(1, -e^6)$, $Max(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3e^8})$.

ג. עולה: $x > 1, x < -\frac{4}{3}$ יורדת: $-\frac{4}{3} < x < 1$ ד. $(-1.154, 0)$, $(1.154, 0)$, $(0, -4)$.

(20) א. $x \neq \pm\sqrt{24}$. ב. $Max\left(0, -\frac{1}{24e^{24}}\right), Min(-5, e), Min(5, e)$.

ג. עולה: $x > 5, -5 < x < 0, x \neq -\sqrt{24}$ יורדת: $x < -5, 0 < x < 5, x \neq \sqrt{24}$.

ד. $\left(0, -\frac{1}{24e^{24}}\right)$. ה. $x = \pm\sqrt{24}$.

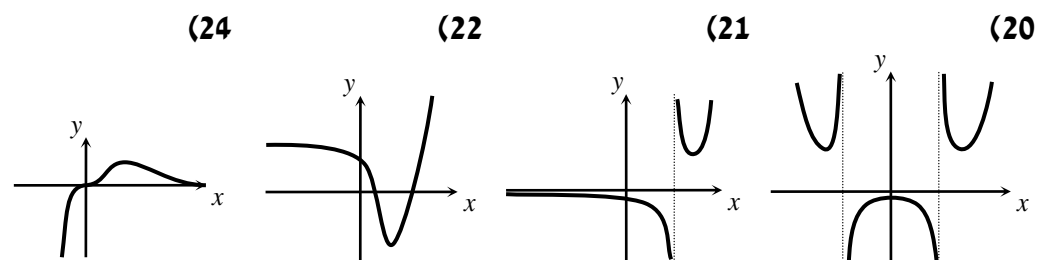
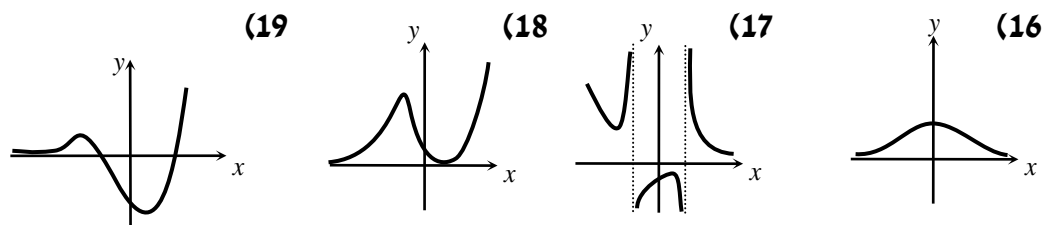
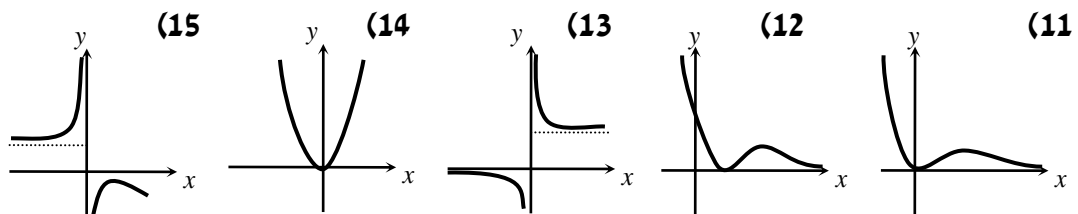
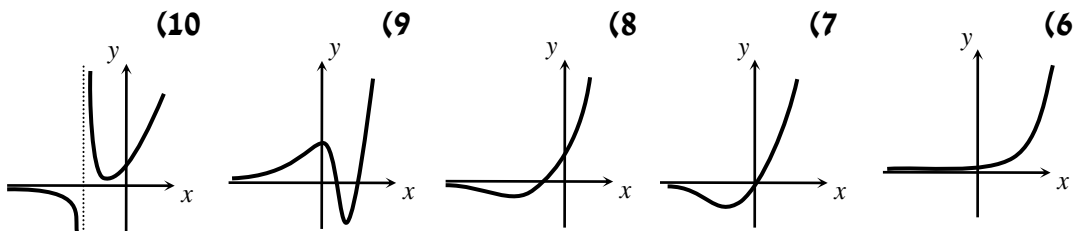
(21) א. $a=5, b=-3$. ב. $x \neq 3$. ג. עולה: $x > 4$ יורדת: $x < 4, x \neq 3$. ד. $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$.

(22) א. $Min(\ln 3, -1)$. ב. עולה: $x > \ln 3$ יורדת: $x < \ln 3$.

ג. $(0, 3), (\ln 2, 0), (\ln 4, 0)$. ד. $y = 4$.

(24) א. $f(x) = x^3 e^{-3x}, k = -3$. ב. לא . ג. עולה: $x < 1, x \neq 0$ יורדת: $x > 1$.

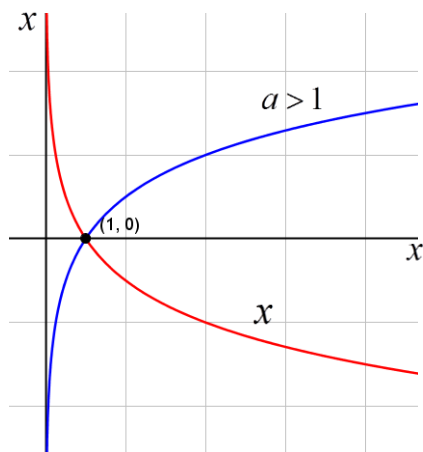
סקיצות לשאלות:



פונקציות לוגריתמיות:

הגדרות כלליות:

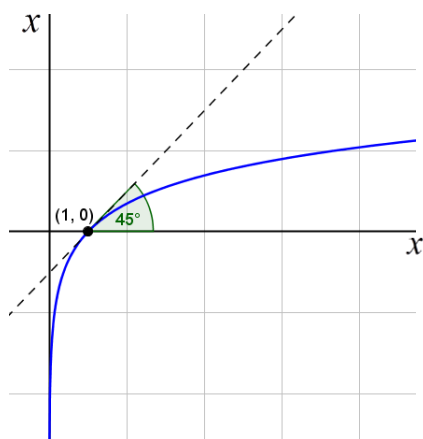
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$
עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. לפונקציות תחום הגדרה: $x > 0$.
2. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה: $(1, 0)$.
3. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- x הוא 1.

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log f(x)$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

1 גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \log_2(x) + 5 \log_3(2x-1)$

2 גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$

ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$

ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3\ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

6) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$ ב. $f(x) = \ln(x^2)$ ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$

ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$ ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$ ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2\ln x - 3}$

ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

7) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2\ln x - x^2$.

8) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

9) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2\ln x - 1}}{x}$.

10) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

11) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

12) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

14) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות מבחינות:

15) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.

- ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$. מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

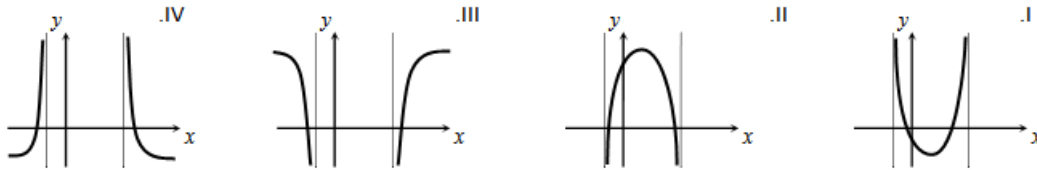
16) נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ו- $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים. נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
 1. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 2. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 3. לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 4. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.

- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

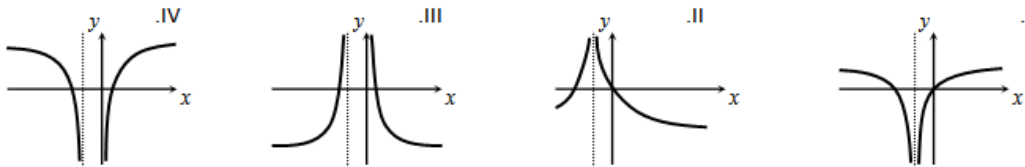
17 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



18 נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



- ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

19 לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

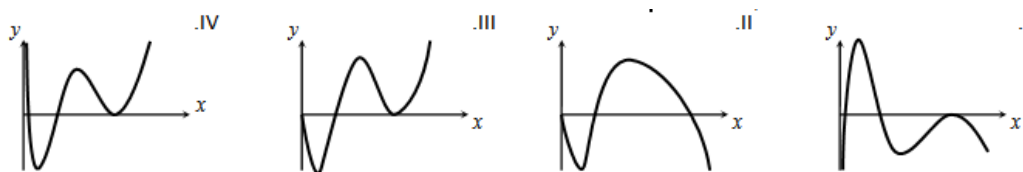
- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
 ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(20) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.
- לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם הפונקציה: $g(x) = \ln x$.

(23) א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$.

- הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = e$.

24) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, פרמטר חיובי, $a \neq 1$.

א. הבע באמצעות a את:

1. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. הנקודה המקיימת $y' = 0$.
 3. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 4. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
- ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום: $x > e - 2$. מצא את a .
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.
- ד. נתון הישר: $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

- א. 1. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
2. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ? אם כן מצא אותה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

1) א. $f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$ ב. $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד. $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ ה. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$

2) א. $f'(x) = \ln x + 1$ ב. $f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$ ג. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

ד. $f'(x) = \frac{4}{x(\ln x + 2)^2}$ ה. $f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}}$

3) א. $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$ ב. $f'(x) = \frac{6 \ln x}{x}$ ג. $f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1)$

ד. $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$ (4) $y = \frac{1}{e} x$ (5) $a = 2, b = -2$

6) א. $x > 0$ ב. $x \neq 0$ ג. $10 < x$ או $x < -2$ ד. $x > \ln 4$

ה. $0 < x \neq e$ ו. $0 < x$ וגם e^{-1}, e^3 ז. $x \neq e$ ח. $\max(1, -1)$ (7)

9) $\min(\sqrt{e}, 0)$ קצה, $\max\left(e, \frac{1}{e}\right)$ (10) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

$$a=1, b=-1 \quad (11)$$

$$(12) \quad \text{א. } 0 < x \quad \text{ב. } \min(1, 0) \quad \text{ג. עלייה: } 1 < x \text{ או } 0 < x < \frac{1}{e^2}, \quad \max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right)$$

$$\text{ירידה: } \frac{1}{e^2} < x < 1 \quad \text{ד. } (1, 0)$$

$$(13) \quad \text{א. } 0 < x \neq e \quad \text{ב. } \min(e^2, e^2) \quad \text{ג. עלייה: } e^2 < x, \text{ ירידה: } 0 < x < e^2 \text{ וגם } x \neq e$$

$$\text{ד. אין. ה. } k > e^2$$

$$(14) \quad \text{א. } 0 < x \quad \text{ב. } \min(4, -1) \quad \text{ג. עלייה: } 4 < x, \text{ ירידה: } 0 < x < 4 \quad \text{ד. } (1, 0), (16, 0)$$

$$(15) \quad \text{א. } x \geq 1 \quad \text{ב. מתקבל: } f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0 \quad \text{ג. } (e, 1), (1, 0) \quad \text{ד. } x = \sqrt[4]{e}$$

$$(16) \quad \text{א. 1. לא נכון. תחום ההגדה של } f(x) \text{ הוא: } x > 0, x \neq 1 \text{ ותחום ההגדרה של } g(x) \text{ הוא: } x > 0$$

$$2. \text{ לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה } x = e \text{ אך עבור } f(x)$$

$$\text{מדובר במינימום ועבור } g(x) \text{ מדובר במקסימום.}$$

$$3. \text{ לא נכון. עבור } f(x) \text{ : עולה: } x > e \text{ יורדת: } 0 < x < e, x \neq 1$$

$$\text{ועבור } g(x) \text{ : עולה: } 0 < x < e \text{ יורדת: } x > e$$

$$4. \text{ נכון.}$$

$$\text{ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה-} y \text{ שלה הוא: } y = \frac{x}{\ln x} \text{ ו-} y = \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{נכפול: } y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$$

$$(17) \quad \text{א. } x < -1, x > 7 \quad \text{ב. } x = 7, -1 \quad \text{ג. עולה: } x > 7 \text{ יורדת: } x < -1$$

$$\text{ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.}$$

$$\text{באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.}$$

$$(18) \quad \text{א. } x \neq -1 \quad \text{ב. } x = -1 \quad \text{ג. עולה: } x > -1 \text{ יורדת: } x < -1$$

$$\text{ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.}$$

$$\text{באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. } -2 < x < 0, x \neq -1$$

$$(19) \quad \text{א. } 0 < x < e \text{ (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: } 1 - \ln x > 0 \text{ וגם } x > 0)$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0 \text{ ולכן הפונקציה יורדת בת.ה. ג. } (1, 0)$$

$$(20) \quad \text{א. } x < -\frac{1}{2}, x > 1 \quad \text{ב. } x = -\frac{1}{2}, 1 \quad \text{ג. } (-2, 0) \quad \text{ד. מתקבל: } y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$$

$$(21) \quad \text{ב. } e^{-4} < x < e^{-1}, x > 1$$

$$\text{ג. 1. 2 נקודות והן: } (1, 0), (e^{-2}, 0) \text{ הנקודה שבה: } x = 0 \text{ לא קיימת עקב ת.ה.}$$

$$2. x \neq 1, x > e^{-2}$$

ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(22) א. $x > 0$. ב. $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(e^{\sqrt{3}}, 0)$, ג. $(1, 0)$, $Max(e^{-1}, 2)$, $Min(e, -2)$.
 ה. $(1, 0)$, $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$.

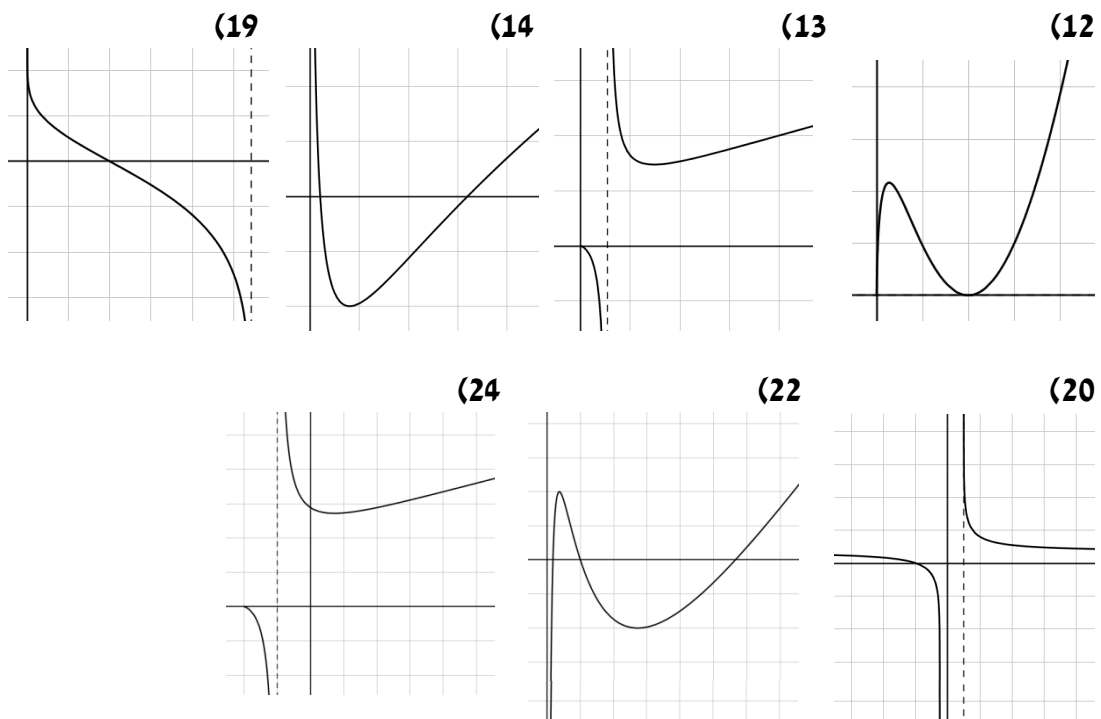
(23) א. $x = e$. ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$. ג. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$.

(24) א. 1. $x > -a$, $x \neq 1-a$. 2. $(e-a, e)$. 3. $(0, \frac{a}{\ln a})$. 4. $x = 1-a$.

ב. $a = 2$. ד. $k < e$.

(25) א. 1. $x > 0$. 2. $x = 0$. ב. $Min(1, 1)$. ג. עולה: $x > 1$ יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:



תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוץ זה אין פתרון בסרטונים.

1) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x(\ln x - 4)$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln x + \sqrt{3-2x}$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הגדרתה.
- מצא את האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
- הראה כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x^2)$.

- חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
 - מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - האם יש לפונקציה נקודות קיצון? נמק והראה חישוב מתאים.
 - האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית? אם כן מהי?
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = (\ln x)^2$.

מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

5) נתונה הפונקציה: $f(x) = (\ln x)^2 + a \ln(x^2)$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = e^2$.

- מצא את a .
- מצא האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודות נוספות.
- הראה כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי שהוא -1.

6 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln^2(x+a)$, פרמטר a .

- א. הבע באמצעות a את:
1. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.
- ב. באיזה תחום צריך להימצא a עבורו האסימפטוטה של הפונקציה תהיה מימין לציר ה- y ?
- ג. 1. הראה כי עבור התחום שמצאת בסעיף הקודם יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון עם שיעור x חיובי.
2. הוכח כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x וקבע את סוגה.
- ד. מצא את a אם ידוע כי הפונקציה עולה בתחום: $x > 4$.

7 נתונה הפונקציה הבאה: $y = (x+k)(\ln(x+k)-1)$, פרמטר k .

- א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = \ln(x+k)$.
- ב. הבע באמצעות k את:
1. נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
 2. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. ידוע כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y . מצא את k .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. העזר בסקיצה של גרף הפונקציה והוכח כי אי-השוויון הבא: $(x+1)(\ln(x+1)-1) \geq -1$ מתקיים עבור כל x .

8 נתונה הפונקציה: $f(x) = x(\ln x)^2$.

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. 1. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x$.
2. הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .
- ג. האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטות? נמק.
- ד. נתון הישר: $y = 4x$. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר.

9 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln \frac{x}{x+a}$, פרמטר $a > 0$.

- א. הבע באמצעות a את:
1. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. נגזרת הפונקציה מקיימת: $f'(1) = \frac{1}{2}$. מצא את a .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10 נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^2(x-a)$, $a > 0$ פרמטר.

- א. הראה כי הנגזרת השנייה של הפונקציה היא: $f''(x) = \frac{2-2\ln(x-a)}{(x-a)^2}$.
- ב. הבע באמצעות a את שיעורי הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.
- ג. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.
- ד. הבע באמצעות a את משוואת המשיק הנ"ל.
- ה. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -\frac{2}{e} - 1$. מצא את a .

11 נתונה הפונקציה הבאה: $y = k \ln x - x^3$.

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ הוא -26 .
- א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. היעזר בסעיף הקודם והוכח את הטענות הבאות:
1. גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .
 2. גרף הפונקציה שלילי בכל תחום הגדרתו.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12 א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln^2 x + 2 \ln x = 0$.

ב. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה: $f(x) = x(\ln x)^3$

היא: $f'(x) = (\ln x)^3 + 3(\ln x)^2$.

ג. הוכח כי הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא: $f''(x) = \frac{3\ln^2 x + 6\ln x}{x}$.

ד. הראה כי אחת מהנקודות המקיימות $f''(x) = 0$ נמצאת על ציר ה- x .

13 א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln^2(10-x^2) - \sqrt{\ln(10-x^2)} = 0$.

(רמז: סמן $t = \ln(10-x^2)$ ופתור עבור t).

לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \ln^2(10-x^2)$, $g(x) = \sqrt{\ln(10-x^2)}$.

- ב. קבע אלו מהמשפטים הבאים נכונים לגבי הפונקציות ואלו לא. נמק כל הסבר בחישוב מתאים.
1. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 2. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון אחת הנמצאת על ציר ה- y .
 3. הגרפים של הפונקציות נחתכים ב-2 נקודות בלבד.
 4. הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותן הנקודות.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ על סמך מה שקבעת בסעיף ב'.

14) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון כלל.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- נתון הישר: $y = k$. האם קיימים ערכי k עבורם הישר יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד? אם כן – מצא אותם.

15) נתונה הפונקציה: $y = \log_2(3x+1)$.

- כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x^2 \log_{0.5}(x^2)$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

17) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \log_3(x^2 + ax + 9)$.

- ידוע כי יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה אנכית: $x = -3$.
- מצא את a .
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - הישר $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות. מצא את נקודות אלו.

18) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x-2}$, $g(x) = 1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x}$.

- מצא את תחום ההגדרה של כל פונקציה.
- הראה כי הגרפים של הפונקציות לא נחתכים באף נקודה.
- מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

19) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \log_4(x-2) - \log_{16}(x^2-4)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. מעבירים ישר $y = -1$ החותך את גרף הפונקציה. מצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך.

20) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{1}{\log_2(x-2)} + \frac{1}{\log_4 x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 4$.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

21) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x \log(x-a)$.

נגזרת הפונקציה מקיימת: $f'(3) = \frac{3}{\ln 10}$.

- א. מצא את a .
- ב. כתוב את משוואת המשיק בנקודה הנ"ל.
- ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק והצירים.

תשובות סופיות:

- (1) א. $x > 0$. ב. $\text{Min}(e^3, -e^3)$. ג. $(e^4, 0)$.
- (2) א. $0 < x \leq 1.5$. ב. $(1, 1)$. ג. $x = 0$.
- (3) א. $1 < x < 3$. ב. $x = 1, 3$. ג. $(2, 0)$.
- (4) א. 1. $x \neq 0$. 2. לא. הנגזרת היא: $y' = \frac{2x}{x^2}$ והרי ש- $x \neq 0$. 3. $x = 0$.
 4. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$. 5. $(-1, 0)$, $(1, 0)$. ב. $(e^2, 4)$, $(1, 0)$.
- (5) א. $a = -1$. ב. $(1, 0)$. ג. לגרף הפונקציה נקודת מינימום יחידה והיא: $(e, -1)$.
 לכן ערך הפונקציה המינימלי הוא -1 .
- (6) א. 1. $x > -a$. 2. $x = -a$. ב. $a < 0$. ג. 1. מתקבל: $x = 1 - a = 1 - (-) > 0$.
 2. $\text{Min}(1 - a, 0)$. ד. $a = -3$.
- (7) א. 1. $(1 - k, -1)$. 2. $(0, k(\ln k - 1))$, $(e - k, 0)$, $(-k, 0)$. ג. $k = 1$.
- (8) א. $x > 0$. ב. $(1, 0)$. ג. לא. גרף הפונקציה שואף ל-0 בגבול שלו .
 ד. $(e^2, 4e^2)$, $(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2})$.
- (9) א. 1. $x < -a$, $x > 0$. 2. $x = 0, -a$. ב. מתקבלת הנגזרת: $y' = \frac{a}{x(x+a)} > 0$.
 ג. $a = 1$.
- (10) א. $(a + e, 1)$. ג. $m = \frac{2}{e}$. ד. $y = \frac{2}{e}x - \frac{2a}{e} - 1$. ה. $a = 1$.
- (11) א. $y = 3 \ln x - x^3$, $k = 3$. ב. $x > 0$. ג. $\text{Max}(1, -1)$.
 ד. 1. + 2. הערך המקסימלי של הפונקציה הוא -1 ולכן גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה- x וכולו שלילי . (12) א. $x = 1, e^{-2}$.
- (13) א. $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 2.7$. ב. 1. לא. עבור: $f(x)$ ת.ה. הוא: $-3.16 < x < 3.16$.
 עבור: $g(x)$ ת.ה. הוא: $-3 \leq x \leq 3$.
 2. כן. עבור $f(x)$ הנקודה: $\text{Max}(0, 5.3)$. עבור: $g(x)$ הנקודה: $\text{Max}(0, 1.5)$.
 3. לא. מסעיף א' ניתן לראות כי הגרפים חותכים זה את זה ב-4 נקודות שונות.
 4. כן. $(-3, 0)$, $(3, 0)$.
- (14) א. $0 < x \leq 1$, $x \geq e^2$. ב. ניתן לראות כי:

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}}{2\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{2 \ln x - 2}{2x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} \rightarrow x \neq e$$

- הפתרון נפסל עקב ת.ה. ולכן אין נקודות קיצון כלל.
 ג. עולה: $x \geq e^2$. יורדת: $0 < x \leq 1$. ד. $(e^2, 0)$, $(1, 0)$.
 ו. לא. הגרף תמיד יחתך בשתי נקודות כאשר $k \geq 0$ ובאף נקודה כאשר: $k < 0$.

15 א. $x > -\frac{1}{3}$. ב. מתקבל: $y' = \frac{3}{(3x+1)\ln 2} > 0$.

16 א. $x \neq 0$. ב. $Max(-0.606, 0.53)$, $Max(0.606, 0.53)$.

ג. עולה: $0 < x < 0.606$, $x < -0.606$ יורדת: $-0.606 < x < 0$, $x > 0.606$.

17 א. $a = 6$. ב. $(-4, 0)$, $(-2, 0)$. ג. $(-30, 6)$, $(24, 6)$.

18 א. עבור $f(x)$: $x < 1$, $x > 2$. עבור $g(x)$: $x < 0$, $x > 2$.

ב. הנקודה המתקבלת (1.5) אינה בתחום. ג. $y = \frac{1}{2\ln 3}x + \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

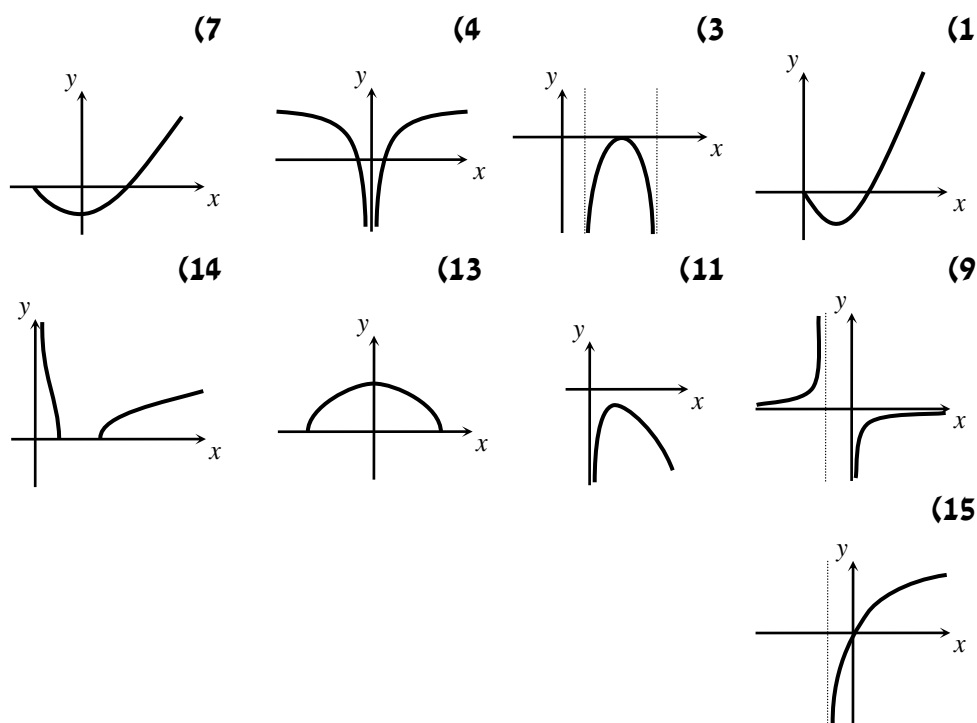
19 א. $x > 2$. ב. מתקבל: $y' = \frac{2}{(x^2-4)\ln 4} > 0$. ג. $x = 2\frac{4}{15} \approx 2.266$.

20 א. $x > 2$, $x \neq 3$. ב. $y = -\frac{5}{4\ln 4}x + \frac{5+\ln 16}{\ln 4}$. ג. $\left(\frac{4(5+\ln 16)}{5}, 0\right)$, $\left(0, \frac{5+\ln 16}{\ln 4}\right)$.

ד. $S = \frac{2(5+\ln 16)^2}{5\ln 4}$.

21 א. $a = 2$. ב. $y = \frac{3}{\ln 10}x - \frac{9}{\ln 10}$. ג. $S = \frac{27}{\ln 100}$.

סקיצות לשאלות:



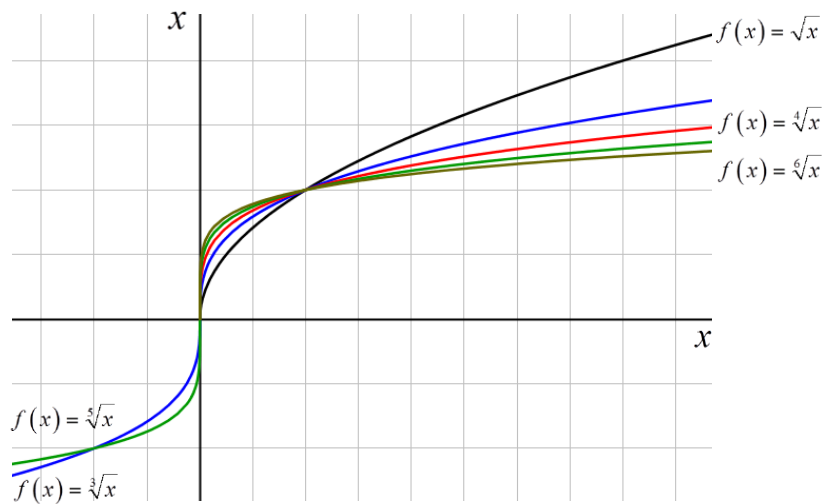
פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

הגדרות כלליות:

הצורה הכללית של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי: $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$.

תזכורת: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$.

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה: $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.



תכונות כלליות:

1. פונקצית חזקה: $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור n אי-זוגי ומוגדרת לכל $x \geq 0$ עבור n זוגי.

2. הפונקציה: $f(x) = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור n אי-זוגי ולכל $x \geq -\frac{b}{a}$ עבור n זוגי.

נגזרת של פונקצית חזקה:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$	$y = x^{\frac{m}{n}}$
$y' = a \cdot \frac{m}{n} (ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$	$y = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$

דוגמאות:

$$. f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} .1$$

$$. f(x) = \sqrt[10]{x} = x^{\frac{1}{10}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{10} x^{\frac{1}{10}-1} = \frac{1}{10} \cdot x^{-\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} \frac{1}{x^{9/10}} = \frac{1}{10} \frac{1}{\sqrt[10]{x^9}} .2$$

$$. f(x) = \sqrt[4]{2x-5} = (2x-5)^{\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} (2x-5)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{1}{2} \frac{1}{(2x-5)^{3/4}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{(2x-5)^3}} .3$$

$$. f(x) = \sqrt[5]{(6-5x)^2} = (6-5x)^{\frac{2}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{5} (6-5x)^{-\frac{3}{5}} \cdot (-5) = -2 \frac{1}{(6-5x)^{3/5}} = \frac{-2}{\sqrt[5]{(6-5x)^3}} .4$$

$$. f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x+7}} = \frac{1}{(x+7)^{1/4}} = (x+7)^{-\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4} (x+7)^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[4]{(x+7)^5}} .5$$

שאלות:

שאלות מבחינות:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6$

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = -f(x)$. קבע לגבי כל טענה האם היא נכונה או שגויה. נמק.
 - לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - שתי הפונקציות חותכות את הצירים באותן הנקודות.
 - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + k\sqrt[3]{x} + 8$, פרמטר k .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = -2.741$.

- מצא את ערך הפרמטר k , עגל למספר שלם.
- הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת גם היא על ציר ה- x .
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. העזר בסקיצה וקבע כמה פתרונות יהיו למשוואה הבאה: $x^3 + 9\sqrt[3]{x} = 8$.

3 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = \sqrt[5]{2x+2.6}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- x .
- ב. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- כתוב מפורשות את הפונקציה $h(x)$ ואת תחום הגדרתה.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
- ה. מצא עבור אלו ערכים של k יחתוך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

4 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{5x^2 - 66x - 440}{\sqrt[6]{x}}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית?
- ב. האם הפונקציה חותכת את הצירים בתחום: $[0:18]$? נמק ע"י חישוב.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)$ המקיימת: $g(x) = -f(x)$. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציה $g(x)$ קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו שגויות. נמק ע"י הסבר או חישוב מתאים.
 1. $g(x)$ חיובית בכל התחום $[0:18]$.
 2. ל- $g(x)$ אותן נקודות קיצון (אותם שיעורים ואותו סוג) כמו $f(x)$.
 3. ל- $g(x)$ אותו תחום הגדרה כמו ל- $f(x)$.

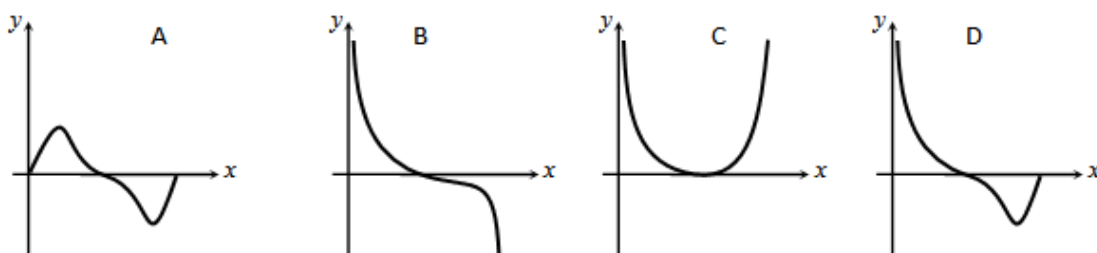
5 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים קבע כמה פתרונות יש למשוואה הבאה: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x} = k$ כאשר:

1. $k = -2$.

2. $k = 1$.

ה. קבע איזה מבין הגרפים הבאים מתאר את הנגזרת של הפונקציה. נמק.



תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 0$. ב. $(0, -6)$, $(64, 0)$. ג. הנגזרת: $f'(x) = \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}} > 0$ בת.ה.
ה. 1. נכון. 2. לא נכון. החיתוך עם ציר ה- y שונה. 3. לא נכון.
- (2) א. $k = -9$. ב. $Min(1, 0)$; $Max(-1, 16)$. ג. עולה: $x > 1$, $x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1$.
ה. 2.

(3) א. $(-1.3, 0)$, $(2, 0)$. ב. $h(x) = (x-2)^2 \sqrt[5]{2x+2.6}$, כל x .

ג. $Max(-1, 9)$; $Min(2, 0)$. ה. $0 < k < 9$.

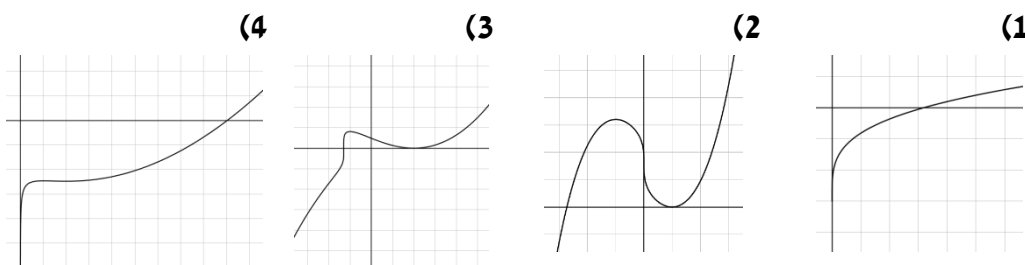
(4) א. $x > 0$, $x = 0$ אסימפטוטה אנכית. ב. לא.

ג. $Max(2, -491.77)$; $Min(4, -495.27)$. ה. 1. נכון. 2. לא נכון. 3. נכון.

(5) א. $0 \leq x \leq 9$. ב. $Max(6, 3.22)$; $Min(0, 0)$ קצה, $Min(9, 0)$ קצה.

ג. עולה: $0 < x < 6$, יורדת: $6 < x < 9$. ד. אין פתרון. $k = -2$ שני פתרונות. $k = 1$.
ה. B.

סקיצות לשאלות:



תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוץ זה אין פתרון בסרטונים.

כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{llll}
 y = \sqrt[8]{2-3x} & \text{(4)} & y = \sqrt[3]{x+1} & \text{(3)} & y = \sqrt[7]{x} & \text{(2)} & y = \sqrt[4]{x} & \text{(1)} \\
 y = \frac{x^2-2x}{\sqrt[20]{(2x-4)^3}} & \text{(8)} & y = \frac{3x}{\sqrt[3]{3x+7}} & \text{(7)} & y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}} & \text{(6)} & y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} & \text{(5)}
 \end{array}$$

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 y = 27 - \sqrt[3]{x+1} & \text{(10)} & y = 4x + \sqrt[4]{x} & \text{(9)} \\
 y = (3-x^3) \cdot \sqrt[6]{x} & \text{(12)} & y = (x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x} & \text{(11)} \\
 y = \sqrt[10]{(8-7x)^7} & \text{(14)} & y = \sqrt[3]{(3x+1)^5} & \text{(13)} \\
 y = x^3 \cdot \sqrt[7]{1-x} & \text{(16)} & y = (x^2-4) \sqrt[8]{(4x+3)^3} & \text{(15)} \\
 y = \frac{2}{\sqrt[7]{(4-3x)^4}} & \text{(18)} & y = \frac{6}{\sqrt[5]{x+2}} & \text{(17)} \\
 y = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} & \text{(20)} & y = \frac{4x-x^3}{\sqrt[5]{x^2}} & \text{(19)}
 \end{array}$$

לפניך מספר פונקציות. מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:

$$x = 3 ; y = 2x + \sqrt[3]{3x-1} \quad \text{(22)} \qquad x = 1 ; y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^4}} \quad \text{(21)}$$

$$x = 8 ; y = \frac{x+4}{\sqrt[5]{4x}} \quad \text{(24)} \qquad x = 81 ; y = (x^2-81) \sqrt[4]{x} \quad \text{(23)}$$

(25) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = (x^2 - 3x - 4) \sqrt[3]{x}$ כאשר: $x = 1$.

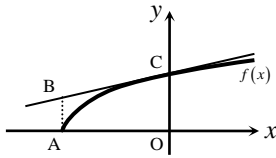
(26) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \sqrt[4]{6-x} - x$ בנקודה שבה: $x = -10$.

(27) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{\sqrt[5]{2x}}{x^2 - 258.5}$ בנקודה שבה: $x = 16$.

28 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{6}{\sqrt[3]{x+x^3}}$ בנקודה שבה: $x=1$.

29 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[4]{8x+16}$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .



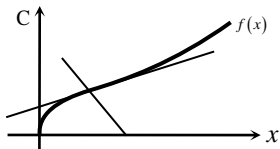
א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מעלים אנך לציר ה- x מקצה תחום ההגדרה

של הפונקציה כך שנוצר טרפז ישר זווית ABCO. חשב את שטחו.

30 באיור שלפניך נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = (2x+4)\sqrt[4]{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך $(1,6)$.



ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודה $(1,6)$.

ג. חשב את השטח הנוצר ע"י שני הישרים והצירים.

31 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = 3\sqrt[6]{x} - 2$.

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. קבע באלו תחומים מתקיים: $f(x) > g(x)$.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$

העובר דרך נקודת החיתוך הרחוקה יותר מהראשית מבין הנקודות שמצאת.

32 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt[5]{32-x}$; $g(x) = \sqrt[5]{32+x}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות.

ב. כתוב את משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות העוברים דרך נקודת החיתוך.

ג. חשב את שטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- x .

33 לפניך מספר פונקציות.

מצא את שיעורי הנקודה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא המצוין לידה:

ב. $m = -\frac{1}{128}$; $f(x) = \frac{6}{\sqrt[6]{x}}$

א. $m = 15$; $f(x) = \sqrt[3]{5x-1}$

ד. $m = 15$; $f(x) = \frac{x^2+27x}{\sqrt{x}}$

ג. $m = \frac{1}{20}$; $f(x) = \sqrt[5]{2x} + \frac{x}{40}$

34) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

מצא את משוואת המשיק המקביל לישר: $y = 3x$.

35) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$.

מצא את משוואת המשיק המאונך לישר: $2y + x = 4$.

36) באיור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{9-x}$.

א. מצא נקודה על הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא 0.

ב. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה

שמצאת בסעיף הקודם.

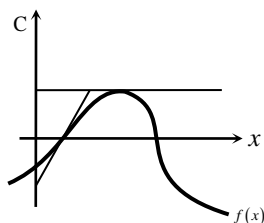
ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר

דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הקרובה

יותר לראשית.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני

המשיקים שמצאת וציר ה- y .



37) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = (x+A)\sqrt[3]{3x}$, (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 9$ הוא: $m = 6$.

מצא את A .

38) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt[4]{2x+7} - Ax^2$, (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 4.5$ הוא: $m = -\frac{1}{2}$.

מצא את A .

39) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{Ax+B}{\sqrt[3]{x}}$, (A, B פרמטרים). משוואת המשיק לגרף

הפונקציה דרך הנקודה: $x = 1$ היא: $3y - x = 14$. מצא את A ואת B .

40) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1-x}}{Ax+B}$, (A, B פרמטרים). משוואת המשיק לגרף

הפונקציה דרך הנקודה: $x = 2$ היא: $45y = 2x - 19$. מצא את A ואת B .

41) לפניך מספר פונקציות. מצא את נקודות הקיצון הפנימיות שלהן וקבע את סוגן.

א. $f(x) = x\sqrt[4]{2x+8}$ ב. $f(x) = -\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 2$

ג. $f(x) = \frac{x+6}{\sqrt[3]{x}}$ ד. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{7-x}}{x-11}$

42 מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 - 128\sqrt[4]{x}$ ב. $f(x) = (x^2 - 25)\sqrt[6]{x+4}$

ג. $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2}{x}$ ד. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[3]{x+8}}$

43 חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה.
2. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
3. מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
4. מציאת תחומי העלייה והירידה.
5. מציאת אסימפטוטות אנכיות.
6. סרטוט סקיצה.

א. $f(x) = \sqrt[4]{6-x}$ ב. $f(x) = (x+12)\sqrt[5]{x}$

ג. $f(x) = (x^2 - 36)\sqrt[4]{x}$ ד. $f(x) = (x+5)\sqrt[3]{1-3x}$

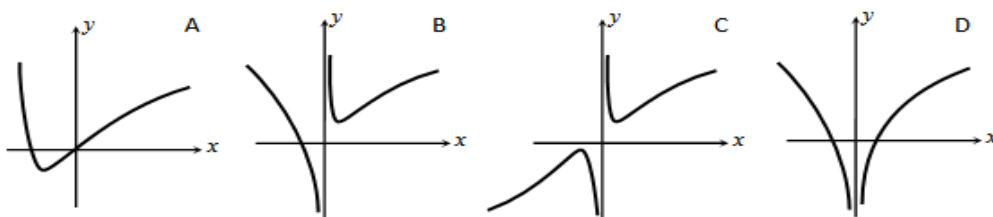
ה. $f(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{2x+3}}$ ו. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 10 + \frac{9}{\sqrt[3]{x}}$

ז. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{8x-2}}{x^2+1}$ ח. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{6-3x}}{x^2-4}$

ט. $f(x) = \frac{x+9}{\sqrt[4]{x+6}}$ י. $f(x) = \frac{x^2-16}{\sqrt[3]{7-x}}$

44 נתונה הפונקציה: $f(x) = (x+1)\sqrt[7]{x^4}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. לפניך 4 סרטוטים. קבע איזה סרטוט מתאר את גרף הנגזרת של הפונקציה. נמק את בחירתך.



תשובות סופיות:

(1) $x \geq 0$ (2) כל x (3) כל x (4) $x \leq \frac{2}{3}$ (5) $x > 0$ (6) $x \neq 0$ (7) $x \neq -\frac{7}{3}$

(8) $x > 2$ (9) $y' = 4 + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ (10) $y' = -\frac{1}{3\sqrt{(x+1)^2}}$ (11) $y' = \frac{(x+2)(7x+2)}{3\sqrt{x^2}}$

(12) $y' = \frac{3-19x^3}{6\sqrt{x^5}}$ (13) $y' = 5\sqrt{(3x+1)^2}$ (14) $y' = -\frac{49}{10\sqrt{(8-7x)^3}}$

(15) $y' = \frac{9.5x^2 + 6x - 6}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}}$ (16) $y' = \frac{21x^2 - 22x^3}{7\sqrt{(1-x)^6}}$ (17) $y' = -\frac{6}{5\sqrt{(x+2)^6}}$

(18) $y' = \frac{24}{7\sqrt{(4-3x)^{11}}}$ (19) $y' = \frac{12x - 13x^3}{5\sqrt{x^7}}$ (20) $y' = \frac{4x\sqrt{x} + x + 6\sqrt{x} + 3}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}$

(21) -8 (22) 2.25 (23) 546 (24) 0.35 (25) $y = -3x - 3$ (26) $y = -\frac{33}{32}x + 1\frac{11}{16}$

(27) $y = -10.25x + 163.2$ (28) $y = -20x + 23$ (29) $y = 0.25x + 2$ ב. 3.5 סמ"ר.

(30) $y = 3.5x + 2.5$ ב. $y = -\frac{2}{7}x + 6\frac{2}{7}$ ג. 67.25 סמ"ר.

(31) $(1,1)$, $(64,4)$ ב. $x < 1$; $x > 64$ ג. $y = \frac{1}{64}x + 3$

(32) $(0,2)$ ב. $y = \frac{1}{80}x + 2$; $y = -\frac{1}{80}x + 2$ ג. 320 סמ"ר.

(33) $(\frac{28}{135}, \frac{1}{3})$ ב. $(64,3)$ ג. $(16,2.4)$ ד. $(1,28)$, $(81,972)$ (34) $y = 3x + 3\frac{2}{9}$

(35) $y = 2x - 3\frac{3}{8}$ (36) $(7, 6\sqrt[3]{2})$ ב. $y = 6\sqrt[3]{2}$ ג. $y = 2x - 2$ ד. 22.84 סמ"ר.

(37) $A = 18$ (38) $A = \frac{1}{16}$ (39) $A = 2$; $B = 3$ (40) $A = B = 1$

(41) $Min(-3.2, -3.59)$ ב. $Max(1,3)$ ג. $Min(3, 6.24)$ ד. $Min(6, -\frac{1}{5})$

(42) $(0,0)$, $(16,0)$ ב. $(0, -31.5)$, $(-4,0)$, $(5,0)$ ג. $(1,0)$ ד. $(0,2)$

(43) $x \leq 6$ 1. $(6,0)$, $(0,1.56)$ 2. $Min(6,0)$ קצה. 3. 4. יורדת בכל ת.ה. 5. אין.

ב. 1. כל x 2. $(0,0)$, $(-12,0)$ 3. $Min(-2,-11.48)$ 4. יורדת: $x < -2$, עולה: $x > -2$. 5. אין.

ג. 1. $x \geq 0$ 2. $(0,0)$, $(6,0)$ 3. $Min(2,-38)$ 4. יורדת: $0 < x < 2$. עולה: $x > 2$. 5. אין.

ד. 1. כל x 2. $(0,5)$, $(-5,0)$, $(\frac{1}{3},0)$ 3. $Max(-1,6.35)$ 4. יורדת: $x > -1$. עולה: $x < -1$. 5. אין.

ה. 1. $x > -1.5$ 2. $(0,3.03)$ 3. אין. 4. יורדת בכל ת.ה. 5. $y=0$, $x=-1.5$.

ו. 1. $x \neq 0$ 2. $(-729,0)$, $(-1,0)$ 3. $Min(27,16)$, $Max(-27,4)$ 4. יורדת: $-27 < x < 27$. עולה: $x < -27$, $x > 27$. 5. $x=0$.

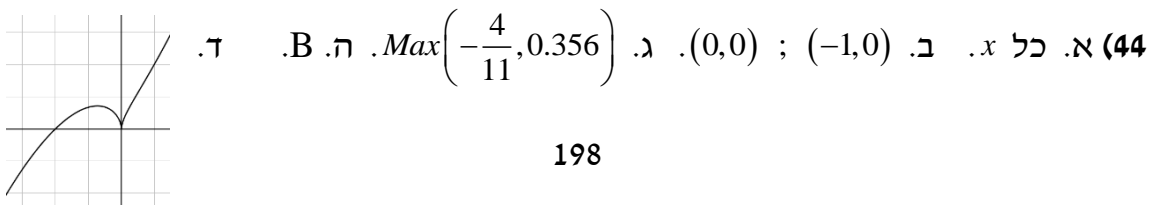
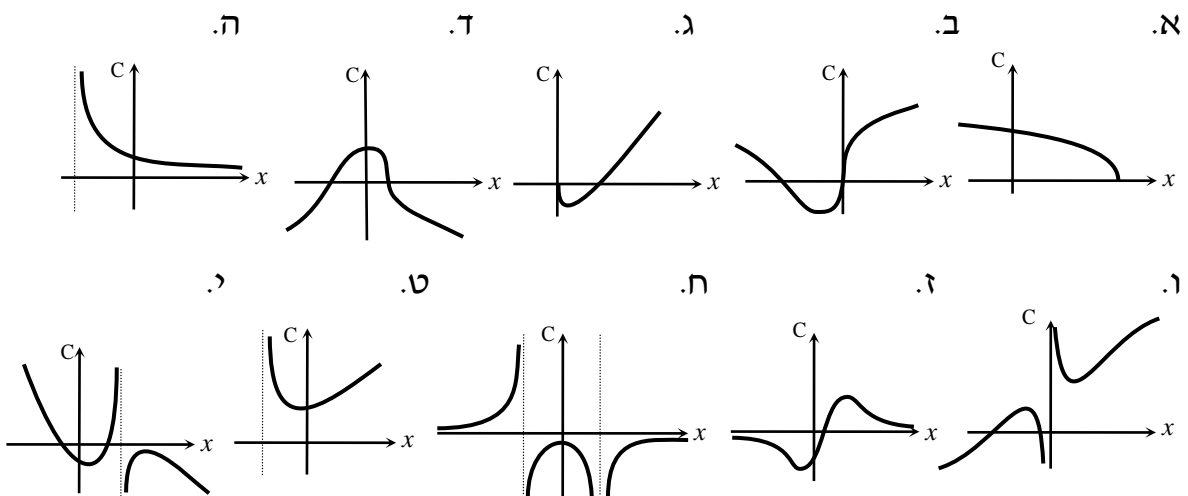
ז. 1. כל x 2. $(0,-1.14)$, $(0.25,0)$ 3. $Min(-\frac{2}{9},-1.24)$, $Max(0.5,0.91)$ 4. יורדת: $x < -\frac{2}{9}$, $x > \frac{1}{2}$. עולה: $-\frac{2}{9} < x < \frac{1}{2}$. 5. $y=0$.

ח. 1. $x \neq \pm 2$ 2. $(0,-0.357)$ 3. $Max(\frac{2}{9},-0.353)$ 4. יורדת: $x > \frac{2}{9}$, $x \neq 2$. עולה: $x < -\frac{2}{9}$, $x < \frac{2}{9}$. 5. $y=0$, $x \neq \pm 2$.

ט. 1. $x > -6$ 2. $(0,5.75)$ 3. $Min(-5,4)$ 4. יורדת: $-6 < x < -5$. עולה: $x > -5$. 5. $x=-6$.

י. 1. $x \neq 7$ 2. $(-4,0)$, $(4,0)$ 3. $Max(8,-48)$, $Min(0.4,-8.44)$ 4. יורדת: $x > 8$, $x < 0.4$. עולה: $0.4 < x < 8$, $x \neq 7$. 5. $x=7$.

סקיצות לסעיפים א'-י':



פרק 7 – חשבון אינטגרלי:

פונקציות טריגונומטריות:

אינטגרלים מיידים של פונקציות טריגונומטריות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int (\sin x) dx = -\cos x + c$	$\int (\sin(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int (\cos x) dx = \sin x + c$	$\int (\cos(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

שאלות:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \left(\sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$ ב. $\int \left(\cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$

ג. $\int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (2 \sin x \cos x) dx$ ב. $\int (\sin 3x \cos 3x) dx$

ג. $\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$

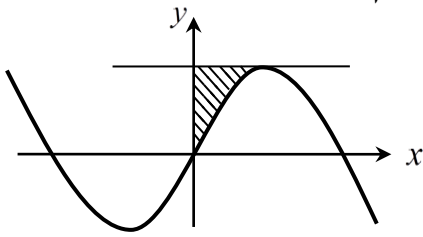
(3) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \cos x + 4 \sin 2x$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה: $\left(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2} \right)$.

(4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$.

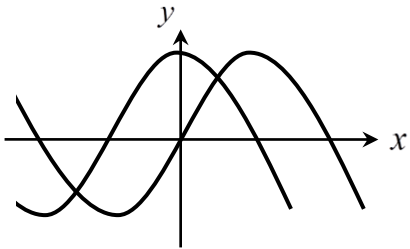
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה: $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3} \right)$.

- 5 נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה : $f''(x) = -4\sin 2x - \cos x$. שיפוע הפונקציה בנקודה (π, π) הוא 3. מצא את הפונקציה.



- 6 נתונה הפונקציה : $f(x) = \sin x$.

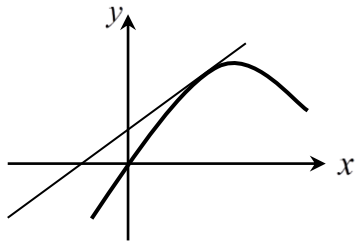
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום שלה הקרובה ביותר לציר ה- y וציר ה- x .



- 7 נתונות הפונקציות : $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- y ברביע הראשון.

- 8 נתונה הפונקציה : $f(x) = x + 2\sin x$.

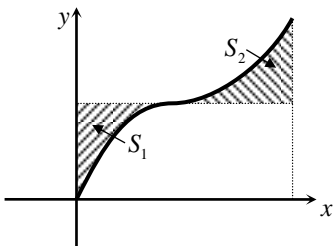
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.



- א. מצא את משוואת המשיק.
ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים הראשון והשני.

שאלות מבחינות:

- 9 באיור שלפניך נתונה הפונקציה : $y = \sin x + x$ בתחום : $0 \leq x \leq 2\pi$.

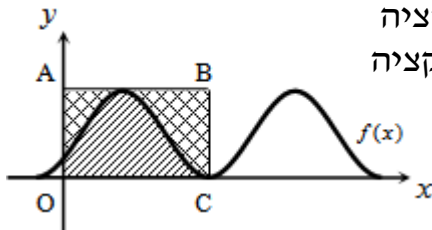


א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון בתחום הנתון? אם כן, מהן? הוכח.

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה : $x = 2\pi$. מעבירים ישר המקביל לציר ה- x דרך הנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט שווים.

10) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.



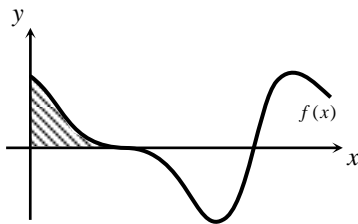
מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x - C, כך שנוצר המלבן ABCO. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לציר ה- x יסומן ב- S_1 (המקווקו). השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 (שביהלום).
א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

11) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.

א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ בתחום: $0 < x < 2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$ אשר אינה קיצון נמצאת על ציר ה- x .



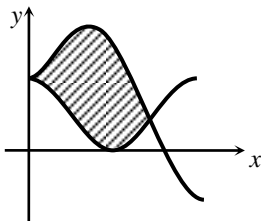
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

12) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה הבאות:

$f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים. השתמש בזהות: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



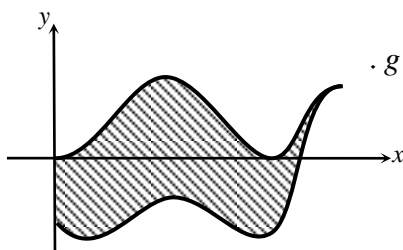
13) נתונות הנגזרות הבאות: $f'(x) = \sin 2x - \cos x + k$, $g'(x) = \sin 2x$.

ידוע כי לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש משיק משותף בנקודה שבה: $x = 1.5\pi$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. ידוע כי משוואת המשיק המשותף היא: $y = 1$.

הראה כי: $f(x) = -\cos^2 x - \sin x$ ו- $g(x) = \sin^2 x - 1$.



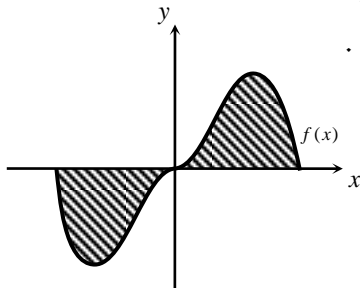
באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שתי

הפונקציות בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים בתחום הנתון.

14) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \cos x + \sin x$.

- א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים. הוכח כי הנגזרת $f'(x)$ והפונקציה המקורית $f(x)$ מקיימות את המשוואה: $f(x) + f'(x) = 2\sin x + 1$.
- ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ באופן הבא: $g(x) = f(x) + f'(x)$.
- מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.
 - מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.
 - כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת.



15) א. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.

הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = x^2 \sin x$.

באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \sin x$

בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

- הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.

16) א. הוכח את הזהות: $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$.

באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x) = 2\sin^2 x$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ושיעוריה: $A(0.75\pi, 1)$.

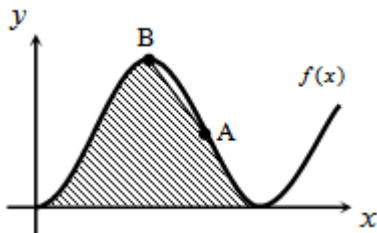
מחברים את הנקודה A עם נקודת המקסימום של

הפונקציה - B.

ב. כתוב את משוואת הישר AB.

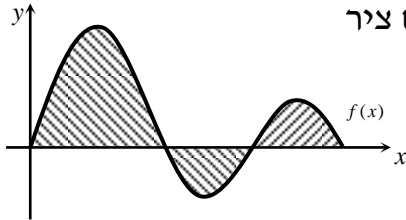
ג. חשב את השטח הכלוא שבין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה- x .

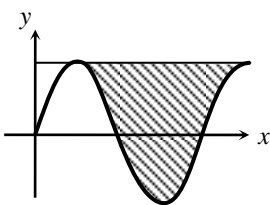


17) א. חשב את האינטגרל המסוים הבא : $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} (\sin x + \sin 2x) dx$

נתונה הפונקציה : $f(x) = \sin x + \sin 2x$ בתחום : $0 \leq x \leq \frac{1}{3}\pi$.



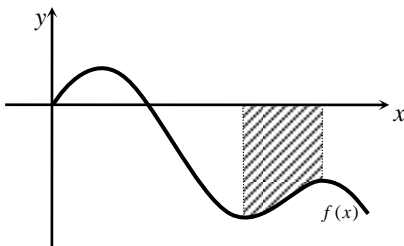
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לציר ה- x (המקווקו בשרטוט).
 ד. הסבר מדוע התוצאות של סעיף א' ו-ג' שונות.



18) באיור שלפניך נתונה הפונקציה : $y = \sin x$.

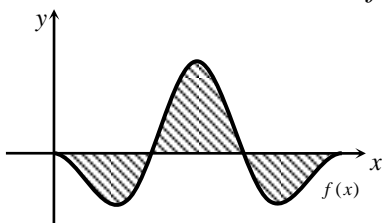
- א. 1. מצא את נקודת המקסימום של הפונקציה בתחום : $0 < x < \pi$.
 2. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה למשיק שמצאת בסעיף הקודם.

19) באיור שלפניך נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{\sin 2x - x}{2}$ בתחום : $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

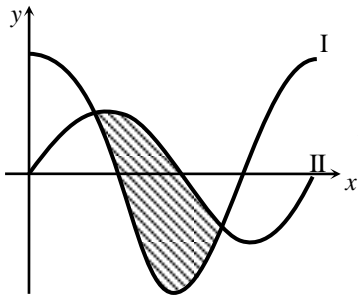


- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
 מעלים אנכים לציר ה- x משתי נקודות הקיצון האחרונות בתחום הנתון.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, אנכים אלו וציר ה- x .

20) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה : $f(x) = \cos 2x - \cos x$ בתחום : $0 \leq x \leq 2\pi$.



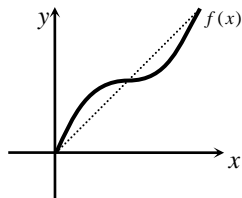
- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לציר ה- x בתחום הנתון.



(21) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 2\cos x - 1, \quad g(x) = \sin x \quad \text{בתחום: } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

- מצא איזה גרף מבין הגרפים I ו-II שייך לכל פונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
- חשב את השטח הכלוא שבין שני הגרפים (המקווקו).



(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x + \sin 2x$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון המקיימת: $f'(x) = 0$.
- כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה שמצאת עם ראשית הצירים.
- האם הישר שאת משוואתו כתבת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה בנקודות נוספות בתחום הנתון? אם כן, מצא אותן.
- חשב את השטח הכלוא בין הישר לפונקציה.

(23) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x) = x + \cos x$, $g(x) = x - \cos x$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $0 < x < 2\pi$.

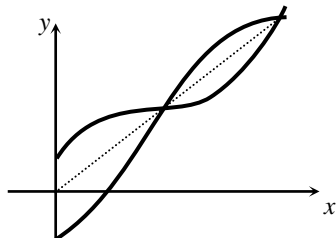
מעבירים ישר דרך נקודות החיתוך של הגרפים שמצאת בסעיף הקודם.

ב. 1. כתוב את משוואת הישר הנ"ל.

2. הראה כי השטח הכלוא בין הישר לגרף

הפונקציה $f(x)$ שווה לשטח הכלוא בין הישר

לגרף הפונקציה $g(x)$ ומצא את שטח זה.



(24) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}x$

בתחום: $0 < x < 3\pi$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה

שבה $x = \pi$ ומורידים אנך לציר ה-x דרך נקודת הקיצון

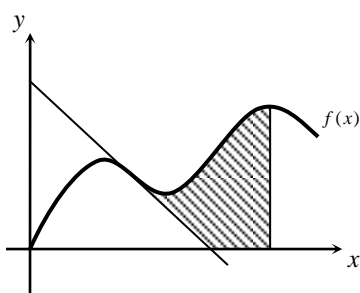
האחרונה בתחום הנתון, כך שנוצר שטח הכלוא בין גרף

הפונקציה, המשיק, האנך וציר ה-x.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת הקיצון האחרונה בתחום הנתון.

ג. חשב את השטח המבוקש (היעזר באיור הסמוך).



תשובות סופיות:

(1) א. $-\cos x - 3\sin x + 4\tan x + 5x + c$. ב. $\frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4\tan 3x}{3} + c$. ג. $\cos(\pi - x) + \tan x + x + c$.

(2) א. $-\frac{1}{2}\cos 2x + c$. ב. $-\frac{\cos 6x}{12} + c$. ג. $-\frac{\sin 2x}{2} + c$.

(3) $f(x) = \sin x - 2\cos 2x + 2$ (4) $f(x) = -2\cos x + \tan x + 1$.

(5) $f(x) = \sin 2x + \cos x + x + 1$ (6) $S = \text{יח"ש} - 1$ (7) $S = \text{יח"ש} + 0.41$.

(8) א. $y = x + 2$. ב. $S = \text{יח"ש} + \pi$.

(9) א. אין נקודות קיצון, הנקודה: (π, π) היא נקודת פיתול.

ב. השטח המתקבל הוא: $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$.

(10) א. $y = 1$. ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$.

(11) א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. ב. $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$. ג. $S = \text{יח"ש} + \frac{1}{2}$.

(12) א. $(0, 1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$. ב. $1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$ יח"ש $S =$.

(13) א. $k = 0$. ג. $1.5\pi + 1$ יח"ש $S =$.

(14) א. $(0.5\pi, 3)$. ב. $(0.75\pi, \sqrt{2} + 1)$. ג. $y = -0.746x + 4.172$.

(15) $S = \text{יח"ש} + 2(\pi^2 - 4) \sim 11.74$.

(16) א. הזהות מתקבלת מ- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

ב. $y = -\frac{4}{\pi}x + 4$. ג. $\frac{9\pi}{8} - \frac{1}{2} = 3.03$ יח"ש $S =$.

(17) א. 2.25 . ב. $(0, 0), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), (\pi, 0), \left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$. ג. $S = \text{יח"ש} + 2.75$.

ד. השטח המבוקש חלקו מעל לציר ה- x וחלקו מתחת.

האינטגרל מחשב שטח הכלוא מתחת לציר ה- x כשטח שלילי ולכן בחישוב

של סעיף א' האינטגרל חיסר את חלק זה.

פירוט נוסף: ערכי השטחים הם: $S_1 = 2.25, S_2 = 0.25, S_3 = 0.25$.

מאחר ש- S_2 נמצא מתחת לציר הרי שהוא שלילי.

האינטגרל שחושב בסעיף א' ביצע: $S_1 - S_2 + S_3 = 2.25 - 0.25 + 0.25 = 2.25$.

ואילו חישוב השטח שבוצע בסעיף ג' התייחס לשטח S_2 כאל גודל חיובי,

ולכן השטח הכללי הוא: $S_1 + S_2 + S_3 = 2.25 + 0.25 + 0.25 = 2.75$.

(18) א. 1. $(0.5\pi, 1)$. 2. $y = 1$. ב. 2π יח"ש $S =$.

(19) א. $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.17\right), \min\left(\frac{5\pi}{6}, -1.74\right), \max\left(\frac{7\pi}{6}, -1.4\right)$. ב. 1.65 יח"ש $S =$.

(20) א. $(2\pi, 0)$, $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$, $(0, 0)$ ב. $3\sqrt{3} = 5.196$ יח"ש $S =$

(21) א. $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = \sin x$ יח"ש

ב. $(1.352\pi, -0.89)$, $(0.352\pi, 0.89)$ ג. 4.472 יח"ש $S =$

(22) א. $(0.5\pi, \pi)$ ב. $y = 2x$ ג. $(\pi, 2\pi)$, $(0, 0)$ ד. 2 יח"ש $S =$

(23) א. $(1.5\pi, 1.5\pi)$, $(0.5\pi, 0.5\pi)$ ב. $y = x$ ג. 2 יח"ש $S =$

(24) א. $y = -0.5x + \pi$ ב. $\left(2\frac{2}{3}\pi, 5.05\right)$ ג. $12.111 = \frac{5}{18}\pi^2 - \frac{1}{2}$ יח"ש $S =$

פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

שאלות:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

ב. $\int (3^x + 5^{2x}) dx$

ד. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

א. $\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx$

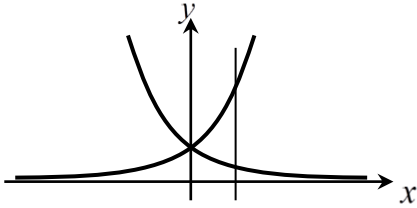
ג. $\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx$

(2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(\ln 2, 3\frac{1}{4})$.

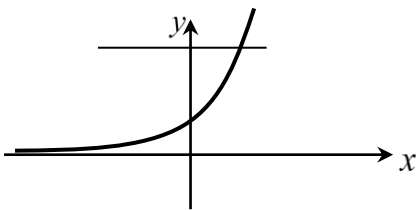
(3) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.



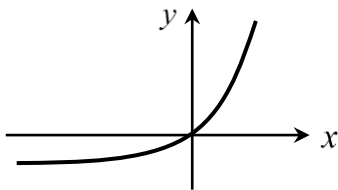
(4) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \ln 3$.



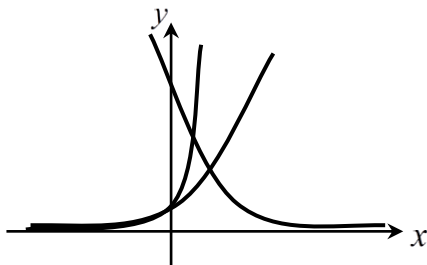
(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^x$.

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $y = 9$ וציר ה- y .



(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - e^x$.

לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים. מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = 2$.



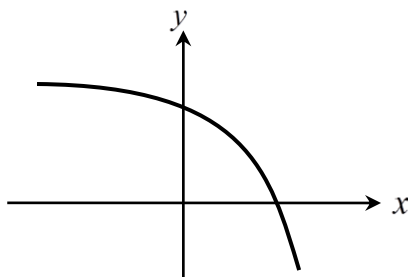
(7) נתונות הפונקציות:

$f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 16e^{-x}$

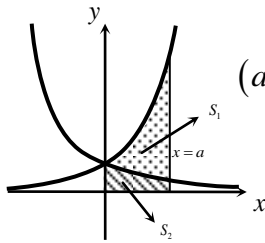
חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.

(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = 5 - e^x$.

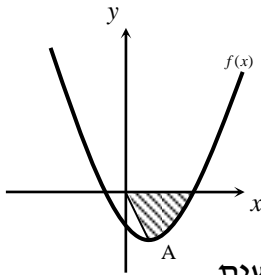
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x . ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.



שאלות מבחינות:



9 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$ מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x = a$ ($a > 0$) כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 . ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 . מצא את a .



10 נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

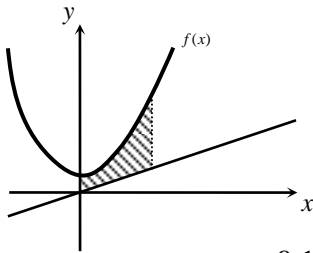
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



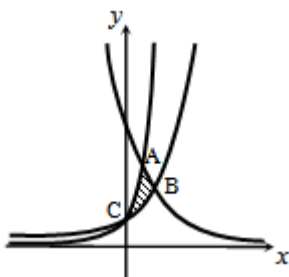
11 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y = 0.1x$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר y והאנך: $x = 2$.



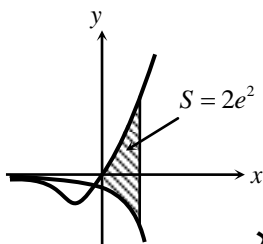
12 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות:

I. $f(x) = 2^x$. II. $g(x) = 4^x$. III. $h(x) = 2^{4-2x}$.

א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).

ג. חשב את השטח המסומן באיור.



13 א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

מעבירים ישר $x = a$ ($a > 0$), החותך את הגרפים של שתי

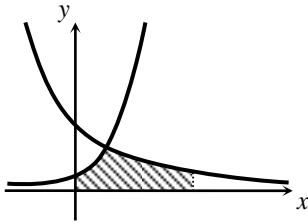
הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם,

ציר ה- y והישר. ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את a .

תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוץ זה אין פתרון בסרטונים.

14) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x-1}$.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר $x = 2$ והצירים.



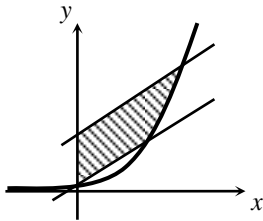
15) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^x$

$$g(x) = ke^{-x} + 2$$

ידוע כי הגרפים חותכים זה את זה בנקודה שבה $x = \ln 3$.

א. מצא את k .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות, הצירים והישר: $x = \ln 4$.



16) באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x) = e^x$.

מעבירים ישר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם

ציר ה- y ודרך הנקודה שבה $x = 1$.

א. מצא את משוואת הישר.

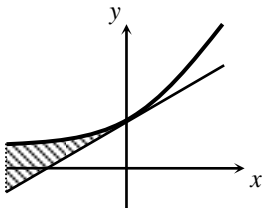
מעבירים ישר נוסף המקביל לישר שמצאת קודם וחותך

את ציר ה- y בנקודה: $y = 3$.

ב. מצא את משוואת הישר השני.

ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הישרים, ציר ה- y וגרף הפונקציה אם ידוע

כי הישר השני חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1.8$.



17) א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = e^x$

בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- y .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x)$

והמשיק. חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק והישר: $x = -3$.

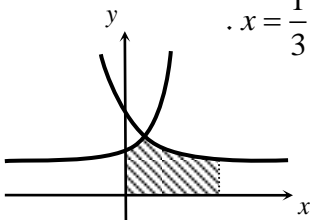
18) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^{ax-1} + 2$

ו- $g(x) = e^{1-ax} + 2$. ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = \frac{1}{3}$.

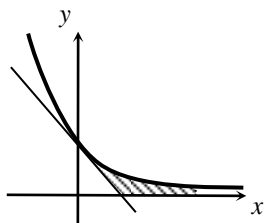
א. מצא את a וכתוב את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי

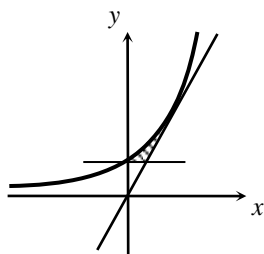
הפונקציות, ציר ה- x והישר $x = 2$.



19) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{-2x} + 1$.



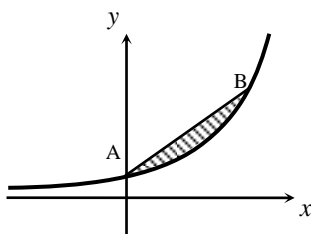
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר: $x = 3$.



20) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{x+2}$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ ומעבירים ישר המקביל לציר ה- x ויוצא מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

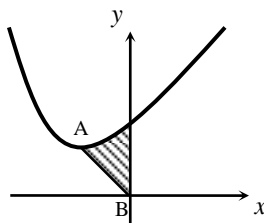
- כתוב את משוואת המשיק והראה כי הוא עובר דרך ראשית הצירים.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



21) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - x + 1$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה ובה $x_B = 1$.

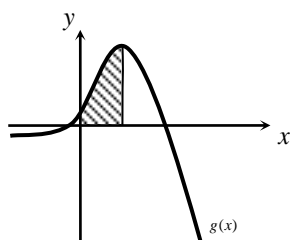
- מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.
- חשב את השטח הכלוא בין הישר AB וגרף הפונקציה.



22) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x+2} - 2x - 1$.

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה B נמצאת בראשית הצירים.

- מצא את שיעורי הנקודה A.
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר AB וציר ה- y .

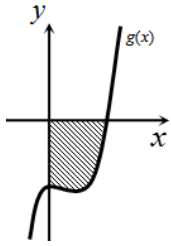


23) נתונה הפונקציה: $f(x) = (a-x)e^x$.

א. הוכח כי: $f'(x) = (a-1-x)e^x$.

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא אפס. מצא את a .

- באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $g(x) = (3-x)e^x$. מורידים אנך לציר ה- x מנקודת הקיצון של הפונקציה. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, הצירים והאנך.



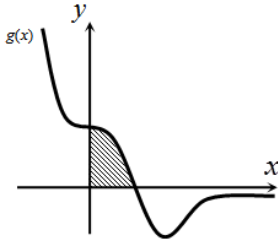
(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^2-2x+k}$.

ידוע ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=3$ הוא $4e^3$.

א. כתוב את נגזרת הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $g(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$.

מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$ והצירים.

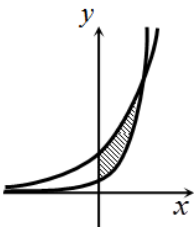


(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot e^{-9x^3}$.

א. הוכח: $f'(x) = (1-27x^3)e^{-9x^3}$.

ב. באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $g(x) = (1-27x^3)e^{-9x^3}$.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

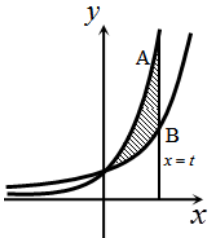


(26) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 9^x$

ו- $g(x) = 9 \cdot 3^x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים וציר ה- y .



(27) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2^x$

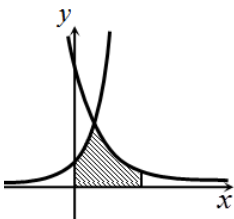
ו- $g(x) = 4^x$. ישר $x=t$ חותך את הגרפים של הפונקציות

בנקודות A ו-B כמתואר באיור. ידוע כי אורך הקטע AB הוא 240.

א. מצא את t .

ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה- y .

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.



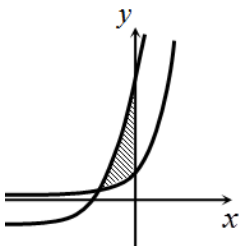
(28) נתונות הפונקציות: $f(x) = 2^x$ ו- $g(x) = 4^{k-x}$.

ידוע כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=4$.

א. מצא את k .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי

הפונקציות, הישר $x=8$ וציר ה- x .



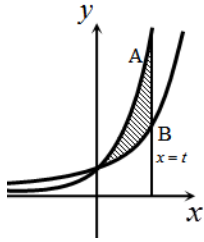
(29) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = 3^{x+2}$ ו- $g(x) = 3^{x+5} - 26$.

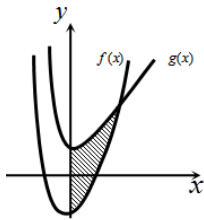
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- y .

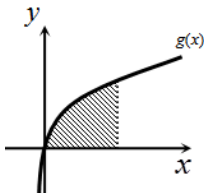
ג. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- y .



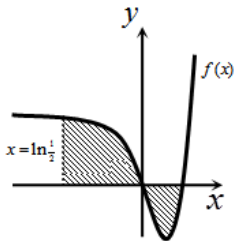
- 30** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 3^x$ ו- $g(x) = 9^x$. ישר $x = t$ ($t > 0$) חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור. ידוע כי אורך הקטע AB הוא 702.
- מצא את t .
 - הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה- y .
 - חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.



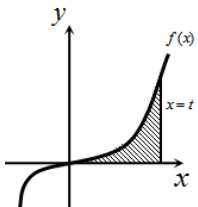
- 31** באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{2x} + x^2 + k$ ו- $g(x) = 2e^x + x^2 - 4$. ידוע כי המרחק בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- y הוא 4.
- מצא את k .
 - מצא את נקודת החיתוך שבין שני הגרפים.
 - חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- y .



- 32** א. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = -(x+1)e^{-x}$.
 נתונה הפונקציה: $g(x) = xe^{-x} + k$.
 ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 1.
- מצא את k וכתוב את הפונקציה.
 - היעזר בסעיף א' וחשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = 2$.

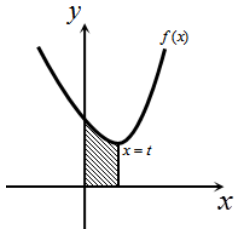


- 33** א. חשב את האינטגרל: $\int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 4} (e^{2x} - 5e^x + 4) dx$.
 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = \ln 0.5$ (המקווקו).
 - הסבר מדוע התוצאות שקיבלת בסעיפים א' וב' שונות.



- 34** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - e^{-x}$.
- הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
 - מעבירים ישר $x = t$ ($t > 0$) המאונך לציר ה- x וחותך את גרף הפונקציה. ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך הוא: $S = \frac{1}{3}$. מצא את t .

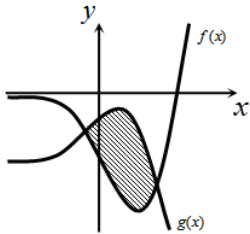
(35) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} + 16e^{-2x}$.



- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 ב. מעבירים ישר $x=t$ ($t > 0$) כמתואר באיור.
 ידוע כי השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה והצירים הוא: $S = 7.5$.
 הוכח כי ישר זה יוצא מנקודת הקיצון שמצאת בסעיף א'.

(36) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = 2e^{2x} - 7e^x$

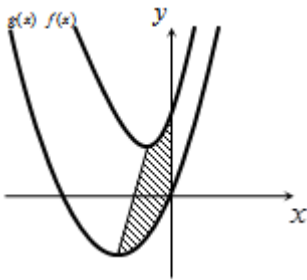
$$g(x) = 3e^x - e^{2x} - 3 - 1$$



- א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים.

(37) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 4e^{2x} + e^{-x}$

$$g(x) = x^2 + 2x - 1$$



- א. מצא את נקודות הקיצון של כל פונקציה וקבע את סוגן.
 ב. מעבירים ישר המחבר את נקודות הקיצון של שני הגרפים כמתואר באיור. כתוב את משוואת הישר הני"ל (עגל תוצאות למספרים שלמים).
 ג. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- y והישר הני"ל.

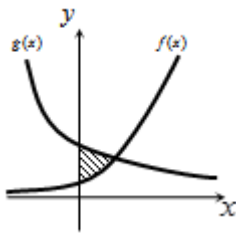
(38) א. פתור את המשוואה הבאה: $9 \cdot 3^x = \frac{243}{9^x}$

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = 3^{x+2}$ ו- $g(x) = 3^{5-2x} - 1$.

הוכח כי השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר

ה- y שווה ל- $\frac{90}{\ln 3}$.



תשובות סופיות:

- (1) א. $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$ ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$
- (2) א. $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$ ג. $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (3) א. $S = 18.41$ ב. $S = 10.72$ ג. $S = 1\frac{1}{3}$ ד. $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7) א. $3\frac{1}{3}$ ב. $S = 0.192$ ג. $S = \ln 2$ ד. $A(1, -e-2)$
- (11) א. $y = -(e+2)x$ ג. $S = 4.744$ ב. $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$, $a = -2$
- (12) א. $A(1, 4)$, $B(1\frac{1}{3}, 2.52)$, $C(0, 1)$ ב. $y' = xe^x$ ג. $S = 1.03$ ד. $a = 2$
- (14) א. $S = \frac{e^4 - 1}{2e}$ ב. $k = 3$ ג. $S = 2.825$ ד. $y = (e-1)x + 1$
- (17) א. $y = (e-1)x + 3$ ג. $S \sim 3$ ב. $y = x + 1$ ד. $S = 2.45$
- (18) א. $f(x) = e^{3x-1} + 2$, $g(x) = e^{1-3x} + 2$, $a = 3$ ב. $S = 4.54$ ג. $S \sim 2.5$ ד. $y = -2x + 2$, $(1, 0)$
- (20) א. $y = e^3 x$ ב. $S = \frac{e^3 - 2e^2 - e}{2} \sim 1.3$ ג. $y = (e-2)x + 2$ ד. $S = 1.5 - \frac{e}{2} \approx 0.14$
- (22) א. $A(\ln 2 - 2, 5 - \ln 4)$ ב. $y \sim -2.76x$ ג. $y = \frac{5 - \ln 4}{\ln 2 - 2} x$ ד. $S = 3.433$
- (23) א. $a = 4$ ג. $S = 2e^2 - 4 \approx 10.78$ ב. $f'(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$ ד. $S = \frac{e-1}{e}$
- (25) א. $S = \frac{1}{3\sqrt[3]{e}}$ ב. $(2, 81)$ ג. $S = \frac{32}{\ln 3}$ ד. $t = 4$
- (28) א. $k = 6$ ב. $S = \frac{735}{32\ln 2}$ ג. $(-2, 1)$ ד. $(0, 9)$, $(0, 217)$ ג. $S = 52 \cdot \frac{4 - \ln 3}{\ln 3}$
- (30) א. $t = 3$ ג. $S = \frac{338}{\ln 3}$ ב. $k = -3$ ד. $(\ln 3, 7.2)$ ג. $S = \ln 27$
- (32) א. $f'(x) = xe^{-x}$ ב. $g(x) = xe^{-x} + x$, $k = 1$ ג. $S = 3 - \frac{3}{e^2}$ ד. $S = \frac{3}{e^2}$
- (33) א. $4\ln 8 - 9\frac{5}{8} \approx -1.3$ ב. $S \sim 2.6$ ג. בסעיף א' חושב ערך האינטגרל בלבד. בסעיף ב' ניתן לראות כי חלקו שלילי ולכן יש לפצל אותו כדי לקבל ערך מקסימלי.
- (34) א. $t = \ln 3$ ב. $(\ln 2, 8)$ ג. $(\ln 3, -3)$ ד. $(\ln \frac{1}{3}, -2\frac{1}{9})$ ג. $S = 13\frac{1}{3} - 2\ln 27 \sim 6.74$
- (37) א. $Min(-1, -1)$, $Min(\ln \frac{1}{2}, 3)$ ב. $y = 13x + 12$ ג. $S \sim 3.46$ ד. $x = 1$

פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

שאלות:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

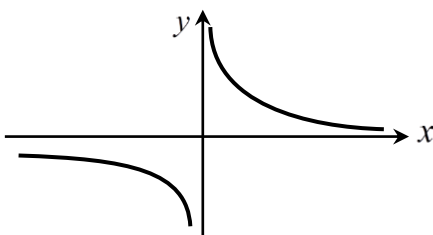
א. $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x} dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9} dx$

2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

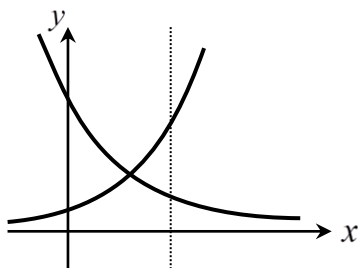
3) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (1, -2) וששיפועה בנקודה זו הוא 3.



4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר \ln בתשובה.

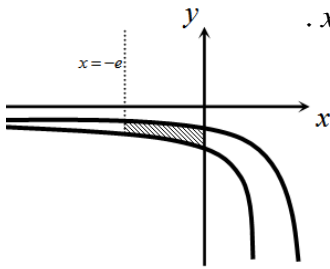


5) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $g(x) = \frac{4}{8-x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x = 4$ והצירים.

שאלות מבחינות:

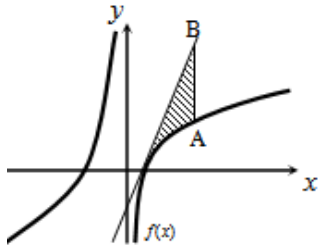
6 באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x-1}$ ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x < 0$.



ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.
- חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

7 נתונה הפונקציה: $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$



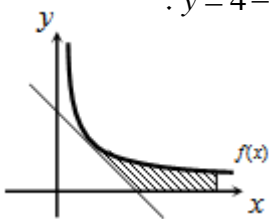
- ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא: $y = 18x - 9$.
- מצא את a ו- b וכתוב את הפונקציה.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

- מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

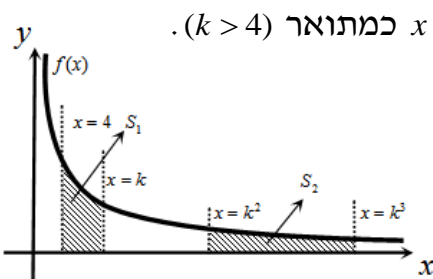
8 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ היא: $y = 4 - x$.
- מצא את הפונקציה $f(x)$.



- באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק בתחום: $x > 0$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.

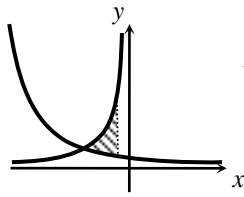
9 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$ בתחום: $x > 0$.



מעבירים את הישרים: $x = 4$, $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$ כמתואר ($k > 4$).

- הבע באמצעות k את השטחים: S_1 ו- S_2 .
- הראה כי ההפרש: $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k וחשב את ערכו.
- נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצא את k .

10 נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.



גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.

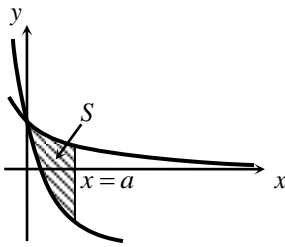
א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.

11 באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$

ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$ בתחום: $x \geq 0$.



א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

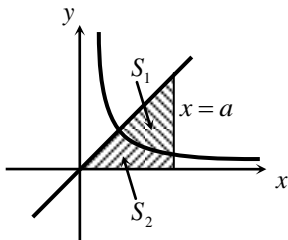
ב. מעבירים ישר $x = a$, $(a > 1)$ המאונך לציר ה- x

אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצא את ערכו של a עבורו מתקיים: $S = 4$.

12 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר: $y = x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.



מעבירים אנך לציר ה- x - $x = a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם. האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2

יהיה שווה ל- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוץ זה אין פתרון בסרטונים.

13 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 8x - \frac{k}{x}$.

ידוע כי יש לפונקציה נקודת מינימום $(1,1)$.

א. מצא את k ואת הפונקציה $f(x)$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

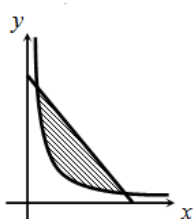
ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? נמק את תשובתך.

14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x+a}{x}$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 6.
 א. מצא את a .

ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=e$.

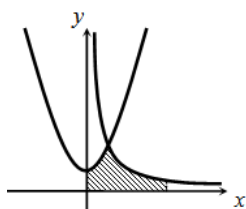


15) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{10}{x}$

ו- $g(x) = -x + 7$.

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.



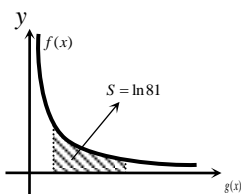
16) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x}$.

ידוע כי הגרפים נחתכים בנקודה שבה $x=2$.

א. מצא את a .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, הצירים

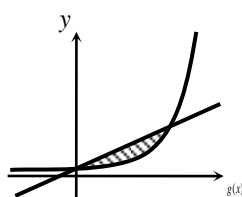
והישר $x=e^2$.



17) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$.

ידוע כי השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x

והישרים: $x=4$ ו- $x=4+t$ ($t > 0$), הוא $\ln 81$. מצא את t .

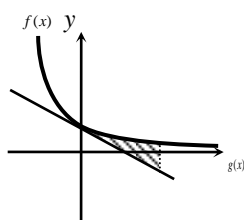


18) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{4e-x}$

והישר: $g(x) = \frac{3}{4e^2}x + \frac{3}{4e}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות.



19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{ax+5}$, פרמטר a . שיפוע המשיק לגרף

הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא -0.12 .

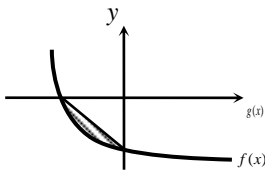
א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

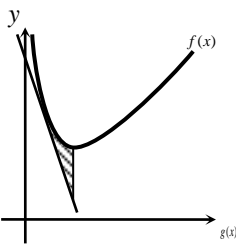
המשיק והישר $x=2$.

20) גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x+5} - m$, פרמטר, חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = -4$.



- מצא את ערך הפרמטר m .
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר שמצאת בסעיף הקודם.

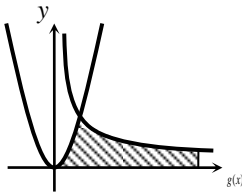
21) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x} + x + 5$ בתחום: $x > 0$.



א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

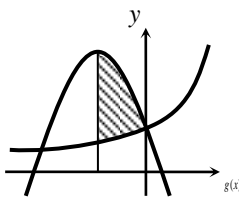
- מעבירים ישר המקביל לציר ה- y מנקודת המינימום של הפונקציה. הישר חותך את משוואת המשיק בנקודה A.
- מצא את שיעורי הנקודה A.
- חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק והישר.

22) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = 3x^2$ ו- $g(x) = \frac{3}{x}$.



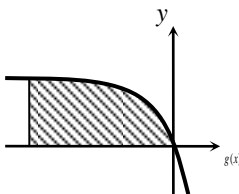
- מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
- חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- x והישר: $x = e^3$.

23) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6}{6-x}$ בתחום: $x < 0$.



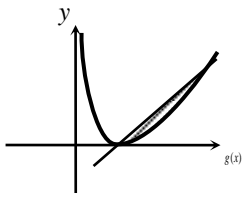
- מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y מעבירים את הפרבולה: $g(x) = -x^2 - 4x + 1$.
- מצא את נקודת הקדקוד של הפרבולה.
- חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים ואנך היוצא מנקודת הקדקוד של הפרבולה.

24) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{8}{x-2} + k$



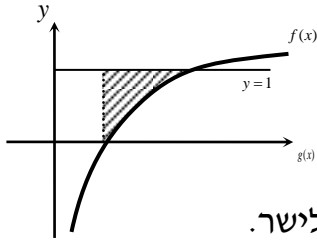
בתחום: $x < 0$. ידוע כי גרף הפונקציה חותך את הישר: $y = x + 4$ בנקודה שבה: $x = 4$.

- מצא את k .
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x = -6$.



25 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$.

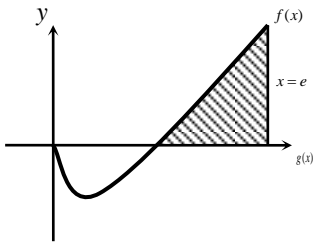
- א. מצא את נקודת המינימום של הפונקציה.
 מעבירים ישר דרך נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה שבה $x = 4$.
 ב. מצא את משוואת הישר.
 ג. חשב את השטח המוגבל בין הישר וגרף הפונקציה (העזר באיור).



26 א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = 2x - x \ln x$.

- באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \ln x$.
 מעבירים ישר $y = 1$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A.
 מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x מעלים אנך לישר.
 ב. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך והישר.

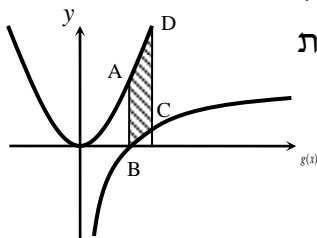
27 א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה: $y = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1)$ היא: $y' = x \ln x$.



- באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x \ln x$.
 מעלים את הישר $x = e$ המאונך לציר ה-x החותך את גרף הפונקציה.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה-x.

28 א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = \frac{x^3}{3} + x - x \ln x$.

- באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = x^2 - 1$.
 מעבירים את הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$ המקבילים לציר ה-y. ישרים אלו חותכים את הגרפים של הפונקציות



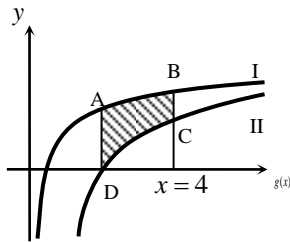
- בנקודות A, B, C, D בהתאמה.
 ב. חשב את השטח ABCD.

29 א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה: $y = 2\ln(x-2) + x\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$

היא: $y' = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$.

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = \ln(x-2)$.

ב. קבע איזה מבין הגרפים I, II מתאר את $f(x)$ ואיזה את $g(x)$. נמק.



ג. מצא את נקודת החיתוך של כל גרף עם ציר ה- x .

ד. מנקודת החיתוך הגדולה יותר שמצאת בסעיף

הקודם, D, מעלים אנך לציר ה- x החותך

את הגרף השני בנקודה A (ראה איור).

מעבירים אנך נוסף $x=4$ החותך את הגרפים

בנקודות B ו-C. העזר בסעיף א' וחשב את

השטח ABCD - הכלוא בין שני הגרפים.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\ln|x-3|+c$. ג. $\frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c$. ב. $3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$.
- (2) $f(x)=x^2-\ln|x-4|+3$ (3) $f(x)=x^3+\ln|x|-x-2$ (4) $\ln 4 \sim 1.386$ יח"ש S .
- (5) 2.17 יח"ש S . א (6) $a=2, f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}$. ב. 1.76 יח"ש S .
- (7) א. $a=2, b=-4, f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$. ב. $x=2$. ג. 11.54 יח"ש $S \approx 6+\ln 256$.
- (8) א. $f(x)=\frac{4}{x}$. ב. $6-4\ln 2$ יח"ש S .
- (9) א. $S_1=2\ln k-\ln 16, S_2=2\ln k$. ב. $S_2-S_1=\ln 16$. ג. $k=8$.
- (10) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$. ב. $(-2,2)$. ג. $\ln 5^{\frac{1}{3}} \approx 1.674$ יח"ש S . ב. $a=2$ (11) .
- (12) א. $(1,1)$. ב. $a=5$. ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$.
- (13) א. $f(x)=4x^2-8\ln x-3, k=8$. ב. $x>0$. ג. עולה: $x>1$, יורדת: $0<x<1$.
 ד. לא. הנקודה הנמוכה ביותר בתחום הגדרתה נמצאת מעל לציר ה- x ולכן גם כל גרף הפונקציה.
- (14) א. $a=-6$. ב. $(2,0)$. ג. $3e+\ln 64-12$ יח"ש S .
- (15) א. $(5,2), (2,5)$. ב. $10.5+10(\ln 2-\ln 5)$ יח"ש S .
- (16) א. $a=12$. ב. $30\frac{2}{3}-12\ln 2$ יח"ש S . ג. $t=8$ (17) .
- (18) א. $(3e, \frac{3}{e}), (0, \frac{3}{4e})$. ב. $5\frac{5}{8}-\ln 64$ יח"ש S .
- (19) א. $f(x)=\frac{1}{3x+5}, a=3$. ב. $y=-0.12x+0.2$. ג. 0.1 יח"ש S .
- (20) א. $m=2$. ב. $y=-\frac{2}{5}x-1\frac{3}{5}$. ג. $4.8-\ln 25 \approx 1.58$ יח"ש S .
- (21) א. $y=-3x+13$. ב. $(2,7)$. ג. $\ln 16-2 \approx 0.772$ יח"ש S .
- (22) א. $(1,3)$. ב. 10 יח"ש S . א (23) $(-2,5)$. ב. $7\frac{1}{3}-6(\ln 8-\ln 6) \approx 5.6$ יח"ש S .
- (24) א. $k=4$. ב. $24-16\ln 2$ יח"ש S . א (25) $(2,0)$. ב. $y=\frac{1}{2}x-1$. ג. $3-\ln 16$ יח"ש S .
- (26) א. $y'=1-\ln x$. ב. $e-2$ יח"ש S .
- (27) א. $S=\frac{e^2+1}{4}$. ב. $y'=x^2-\ln x$. א (28) $3\frac{1}{3}-\ln 4 \approx 1.94$ יח"ש S .
- (29) א. $f(x)=I, g(x)=II$. ג. $(3,0), (1,0)$. ד. $3\ln \frac{4}{3} \approx 0.863$ יח"ש S .

פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

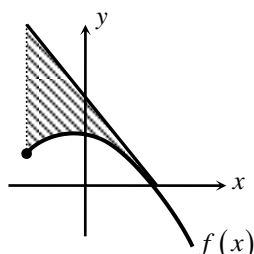
אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

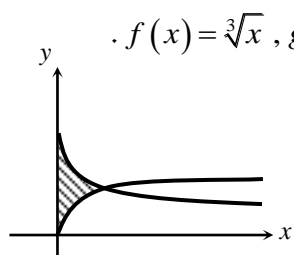
תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.

שאלות:

שאלות מבחינות:

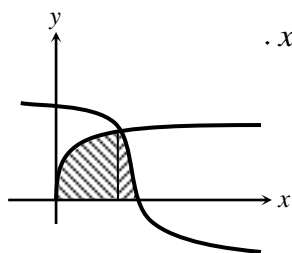


- 1 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, (פרמטר a). ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.
- מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
 - מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
 - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
 - באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.



- 2 באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 2 - \sqrt{x}$.
- מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 - חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

3 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$



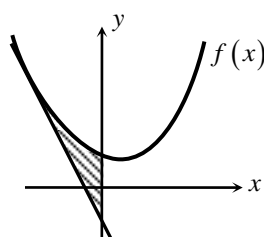
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=1.2$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה: $g(x) = \sqrt[10]{x}$,

וציר ה- x .



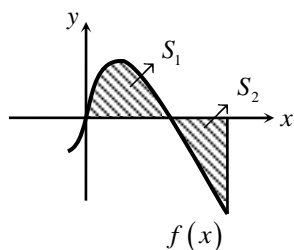
4 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה שבה $x = -3$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$,

המשיק וציר ה- y .



5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .

מעבירים ישר $x=k$ אשר יוצר את השטח S_2 כמתואר.

מצא את k אם ידוע כי: $S_1 = S_2$.

תירגול נוסף:

*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.

6 חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sqrt[3]{x} dx$ ב. $\int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx$ ג. $\int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx$

ד. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx$ ה. $\int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx$ ו. $\int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$

ז. $\int \sqrt[3]{2x-3} dx$ ח. $\int \sqrt[4]{5-x} dx$ ט. $\int (\sqrt[5]{1-4x} + \sqrt[5]{4x-1}) dx$

י. $\int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx$ יא. $\int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx$ יב. $\int \left(\sqrt[4]{1-x} - \frac{3}{\sqrt[4]{x+1}} \right) dx$

7) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים :

א. $\int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx$ ב. $\int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx$ ג. $\int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx$

ד. $\int_4^9 \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x}} dx$ ה. $\int_{-8}^{-1} \frac{\sqrt[3]{x} + 6}{x^2} dx$ ו. $\int_{3.5}^{19} \left(\frac{x}{4} - 3 - \frac{4}{\sqrt[5]{2x-6}} \right) dx$

8) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה (2,3) מצא את הפונקציה.

9) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$. מצא את הפונקציה.

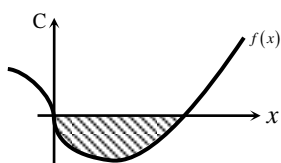
10) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x+1}} + (x-1)^2$. ידוע כי הפונקציה חותכת את

ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$. מצא את הפונקציה.

11) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}$. ידוע כי הישר $y = 6x - 380$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את הפונקציה.

12) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x}}$. ידוע כי שיעור ה- y של נקודת

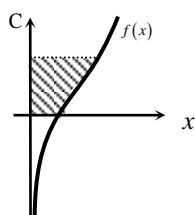
הקיצון של הפונקציה הוא 4. מצא את הפונקציה.



13) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה: $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים ברביע הרביעי.



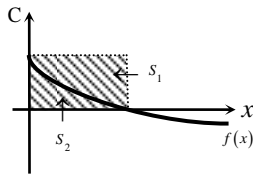
14) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

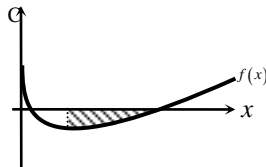
ג. מעבירים אנך לציר ה- y מהנקודה (4,6).

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

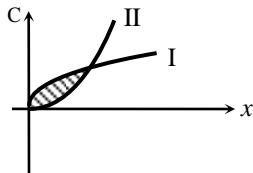


15) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.
 מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף
 הפונקציה עם הצירים כך שנוצר המלבן ABCO.
 מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1

ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 . מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.



16) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2$.
 מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים אנך לציר ה- x .
 מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- x .

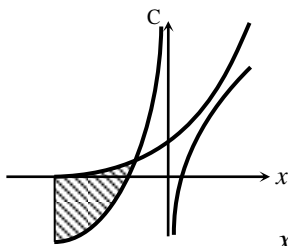


17) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2$
 ו- $g(x) = 32\sqrt[3]{x}$ בתחום: $x \geq 0$.

א. קבע איזה מבין הגרפים I ו-II שייך לכל פונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.



*הערה: בתרגיל הבא יש שימוש גם באינטגרל לוגריתמי.

18) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x+2}$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי

הישר: $4y - 8x = 7$ חותך אותה כאשר: $x = -1$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $x < 0$.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4}$ ואף היא מסורטטת באיור.

1. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות.

2. חשב את השטח הכלוא ביניהן והישר: $x = -2$.

19) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt[5]{x} + 2\sqrt[10]{x} - 3$.

א. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

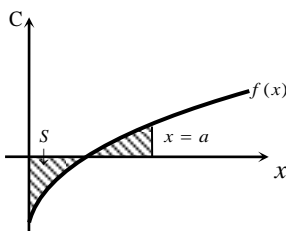
ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x = a$, (a פרמטר).

מצא את הערך של a עבורו השטח הכלוא בין

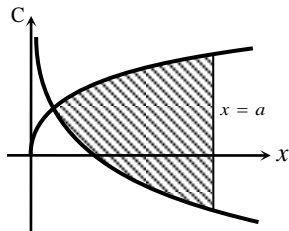
גרף הפונקציה וציר ה- x בין נקודת החיתוך שלהם

ועד לאנך הוא: $S - \frac{7}{66}a^{1.2}$ כאשר S הוא השטח

שמצאת בסעיף הקודם.



20) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות הבאות: $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$; $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.



- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x > 0$.
 ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x = a$, (פרמטר).
 ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר.
 מצא את a .

21) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 + B}{\sqrt[4]{x}}$, (פרמטרים a, B).

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt[4]{x}$.

ידוע כי מכפלת הפונקציות שווה לביטוי הבא: $f(x) \cdot g(x) = x^3 + 8$.

א. מצא את ערך הפרמטר B .

מגדירים את פונקציה ההפרש הבאה: $h(x) = f(x) - g(x)$.

ב. מצא את ערך הפרמטר a אם ידוע כי $h(8) = 258$.

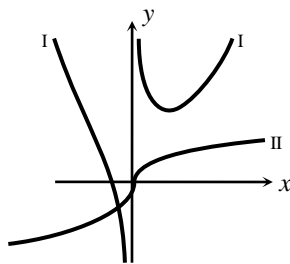
ג. באיור שלפניך מצוירים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

1. התאם לכל גרף את הפונקציה המתאימה: I ו-II.

2. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

3. מורידים אנך לציר ה- x מנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$, האנך וציר ה- x .

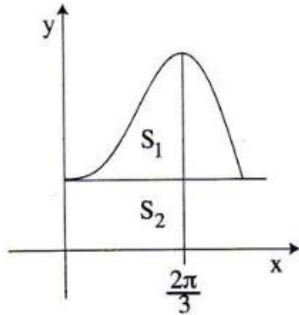


תשובות סופיות:

1. א. $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1$ ב. $x \geq -1.2$ ג. $(-1.2, 1.2)$ ד. $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$ ה. $S = 0.48$ יח"ש
2. א. $(1, 1)$ ב. $\frac{11}{28}$ יח"ש $S =$ 3. א. $f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $1\frac{5}{66}$ יח"ש $S =$
4. א. $y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16}$ ב. 4.56 יח"ש $S =$
5. א. כל x ב. $(-\frac{1}{8}, 0), (\frac{1}{8}, 0), (0, 0)$ ג. $k = (\frac{3}{8})^{1.5} = 0.2296..$
6. א. $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$ ב. $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$ ד. $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$
- ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$ ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$ ח. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$ ט. $\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4x-1)^6} + c$ י. $-\frac{5}{24}\sqrt[5]{(1-4x)^6} + c$ יא. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$ יב. $-0.8\sqrt[4]{(1-x)^5} - 4\sqrt[4]{(x+1)^3} + c$
7. א. $45\frac{1}{3}$ ב. 33.76 ג. $18\frac{2}{3}$ ד. 126.4 ה. $4\frac{1}{8}$ ו. $40\frac{13}{32}$
8. א. $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$ 9. $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
10. $f(x) = 12.5\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
11. $f(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} - 297\frac{5}{7}$ 12. $f(x) = 0.4\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + 8\frac{4}{15}$
13. א. $(\pm 8, 0), (0, 0)$ ב. 16 יח"ש $S =$
14. א. $x > 0$ ב. $(2, 0)$ ג. $27.2 - 6.4\sqrt{2} \sim 18.14$ יח"ש $S =$
15. $\frac{S_1}{S_2} = 4$ 16. $1\frac{301}{480} \sim 1.627$ יח"ש $S =$
17. א. $I - g(x); II - f(x)$ ב. $(8, 64); (0, 0)$ ג. $213\frac{1}{3}$ יח"ש $S =$
18. א. $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4} - 2$ ב. $(-0.5, 1.28)$ 2. $3 - \ln 4$ יח"ש $S =$
19. א. $\frac{23}{66}$ יח"ש $S =$ ב. $\left(\frac{33}{31}\right)^{10}$ א. $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$ ב. $a = 8$
21. א. $B = 8$ ב. $a = 3$ ג. $I - f(x); II - g(x)$ 2. $(1, 9)$ 3. 0.75 יח"ש $S =$

תרגול מבגרויות – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

*הערה: לשאלות בחוץ זה אין פתרון בסרטונים.



(1) נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \sin x - \sin 2x + a$

בתחום $0 \leq x \leq \pi$. הוא פרמטר a .

דרך הנקודה שבה $x = \frac{2\pi}{3}$ העבירו ישר המאונך

לציר ה- x , ודרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y העבירו ישר המקביל לציר ה- x (ראה ציור).

א. הבע באמצעות a את משוואת הישר המקביל לציר ה- x .

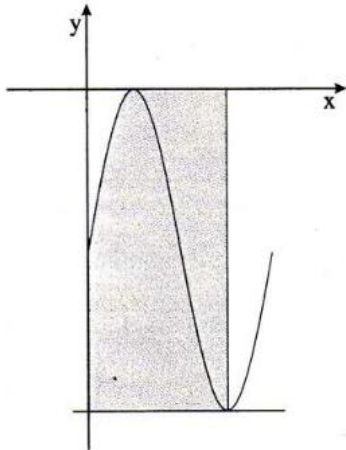
S_1 הוא השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי שני הישרים.

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי שני הישרים ועל ידי הצירים (ראה ציור).

ב. חשב את השטח S_1 .

ג. נתון $S_2 = \pi$.

מצא את ערך הפרמטר a .



(2) נתונה הפונקציה $f(x) = 4 \sin 2x - 4$

בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

בנקודת המינימום המוחלט של הפונקציה העבירו משיק לגרף הפונקציה ואנך לציר ה- x (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח האפור בציור

(השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי המשיק, על ידי גרף הפונקציה ועל ידי הצירים).

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = x + \sin x$ בתחום $-\pi \leq x \leq 2\pi$,

ונתון הישר $y = x - 1$ (ראה ציור).

א. מצא בתחום הנתון את שיעור ה- x של

נקודות הפגישה בין גרף הפונקציה ובין הישר.

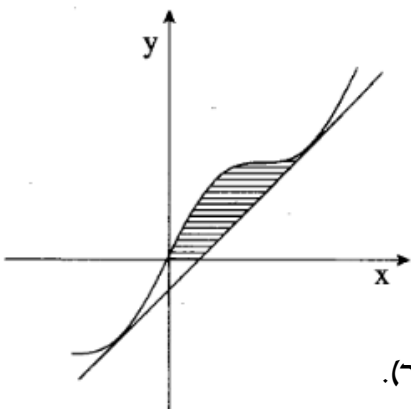
ב. הוכח כי הישר משיק לפונקציה בנקודות

שמצאת בסעיף א.

ג. חשב בתחום הנתון את השטח הנמצא מעל

ציר ה- x , ומוגבל על ידי גרף הפונקציה על

ידי הישר ועל ידי ציר ה- x (השטח המקוקו בציור).



4 נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

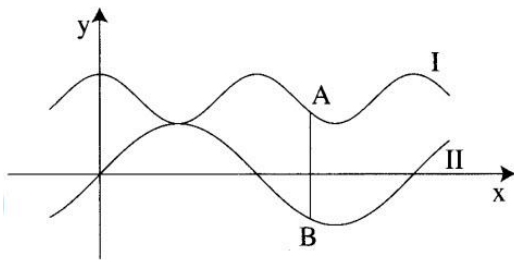
- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- ד. הסבר מדוע בתחום $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ הפונקציה אינה מוגדרת.

5 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$.

- א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגן.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

6 בציור מוצגים הגרפים I ו-II של הפונקציות

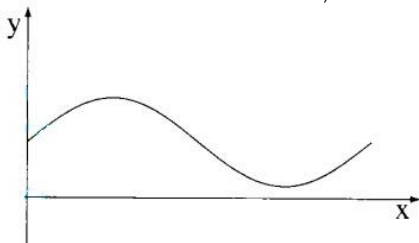
$$g(x) = \cos^2 x + 1, \quad f(x) = \sin x$$



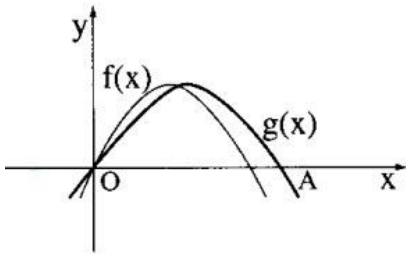
- א. מצא איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$ ואיזה גרף הוא של הפונקציה $g(x)$. נמק.
- ב. נקודה A נמצאת על גרף I ונקודה B נמצאת על גרף II כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y ונמצא בתחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

- (1) מצא את שיעור ה-x של הנקודה A, שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.
- (2) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB.

7 נתונה הפונקציה $f(x) = 1 + a \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ (ראה ציור), $0 < a < 1$.



- א. בתחום הנתון מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה (הבע האמצעות a במידת הצורך), והוכח כי באחת מהנקודות האלה יש מקסימום ובנקודה האחרת יש מינימום.
- ב. בתחום הנתון העבירו אנך לציר ה-x דרך נקודת המינימום המוחלט של הפונקציה. השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה ועל ידי הצירים שווה ל- $7\pi/4$. מצא את הערך של a.

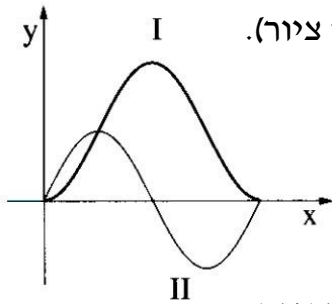


8 נתונות הפונקציות $f(x) = -x^2 + 2x$, $g(x) = \sin(bx)$.

b הוא פרמטר גדול מ-0. שתיים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x הן ראשית הצירים O והנקודה A , כמתואר בציור.

- הבע באמצעות b את שיעורי ה- x של הנקודה A .
- השטח, המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x , שווה לשטח המוגבל על ידי הגרף של $g(x)$ ועל ידי הקטע OA . מצא את ערך הפרמטר b .

9 בציור מוצגים הגרפים I ו-II של שתי הפונקציות



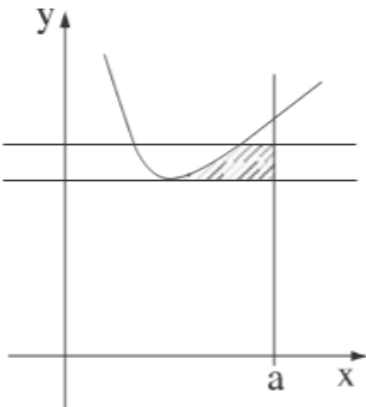
$f(x) = 1 - \cos 2x$, $g(x) = \sin(2x)$. בתחום $0 \leq x \leq \pi$ (ראה ציור).

- איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$, ואיזה גרף הוא של הפונקציה $g(x)$? נמק.
- בתחום הנתון מצא את שיעורי ה- x של לנקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.
- בתחום $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים

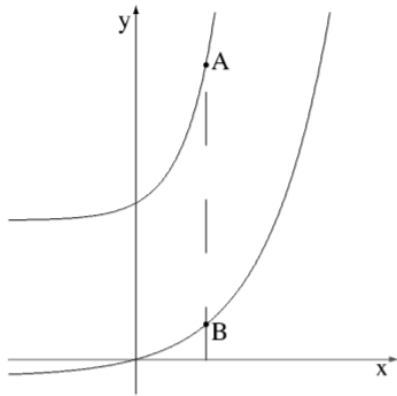
של שתי הפונקציות ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$.

10 נתונה הפונקציה $y = x + \frac{4}{x-1}$ בתחום $x > 1$.

העבירו לגרף הפונקציה משיק שמשוואתו $y = 5$, והעבירו ישר המקביל למשיק ונמצא מעליו במרחק יחידה אחת ממנו (ראה ציור).



- מצא את השיעורים של נקודת ההשקה של המשיק לגרף הפונקציה.
- השטח, המוגבל על ידי שני הישרים המקבילים, על ידי גרף הפונקציה ועל ידי הישר $x = a$, $a > 5$. (השטח המקווקו בציור) שווה ל- $4 \ln 2 - 1$. מצא את הערך של a .



11 נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{2x} - 1$, $g(x) = e^{4x} + 8$

A היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $g(x)$.

דרך נקודה A העבירו אנך לציר ה-x.

האנך חותך את גרף הפונקציה $f(x)$

בנקודה B (ראה ציור).

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי

שהיחס בין שיעור ה-y של A לשיעור ה-y של B

של B - $\left(\frac{y_A}{y_B}\right)$ יהיה מינימלי?

12 נתונה הפונקציה $f(x) = -2e^{-2x} + 3$

א. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה (אם יש כאלה) של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה (אם יש כאלה) של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים

(אם יש כאלה).

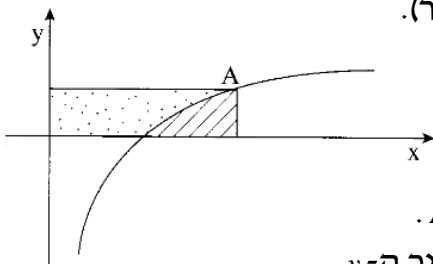
(3) הוסף לסקיצה שסרטטת בתת-סעיף א (3) סקיצה של גרף פונקציית

הנגזרת $f'(x)$.

ג. דרך נקודת החיתוך שבין הגרפים של $f(x)$ ושל $f'(x)$ העבירו אנך לציר ה-x

ואנך לציר ה-y. מצא את השטח של המלבן הנוצר על ידי שני האנכים ועל

ידי ציר ה-x וציר ה-y.



13 נתונה הפונקציה $f(x) = a - \frac{1}{x}$ בתחום $x > 0$ (ראה ציור).

a הוא פרמטר גדול מאפס. A היא נקודה על גרף

הפונקציה ששיעור ה-y שלה הוא $\frac{a}{2}$.

א. הבע באמצעות a את שיעור ה-x של הנקודה A.

ב. דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה-x ואנך לציר ה-y.

הראה כי:

(1) השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי האנך לציר ה-x

ועל ידי ציר ה-x (השטח המקווקו בציור), אינו תלוי ב-a.

(2) השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי האנך לציר ה-y

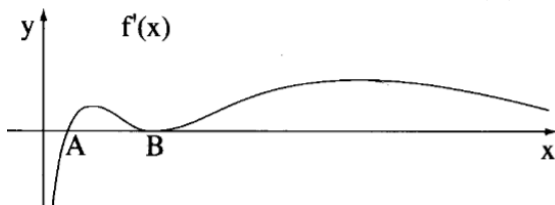
ועל ידי הצירים (השטח המנוקד בציור), אינו תלוי ב-a ושווה ל- $\ln 2$.

14 נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$, $g(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^x}$.

- א. הראה:
- (1) כי הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל x .
 - (2) כי הפונקציה $g(x)$ יורדת לכל x .
- ב. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה):
- (1) של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - (2) של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. (1) פתור את האי שוויון $e^{-x} > e^{-2x}$.
- (2) היעזר הפתרון של תת-סעיף ד (1), ורשום עבור אילו ערכי x מתקיים $f(x) > g(x)$.
- ה. לסרטוט שסרטט בסעיף ג הוסף בקו מרוסק (---) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

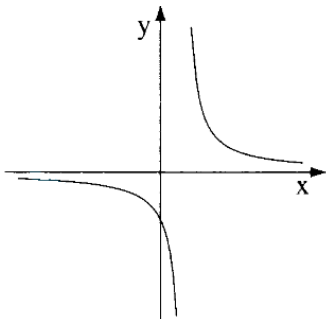
15 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{3} \ln^3 x + \frac{1}{4} \ln^4 x$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- ג. לפניך סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות A ו-B (ראה ציור).
מה הם השיעורים של הנקודות A ו-B? נמק.

16 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2x-a}$, $\left(x \neq \frac{a}{2}\right)$ (ראה ציור).



- א. הוא פרמטר a .
העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$,
העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$.
המשיקים מקבילים זה לזה.
- א. מצא את הערך של a .
- ב. הצב את הערך של a שמצאת, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=3$.

17) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x^2} + e^{-x^2}$.

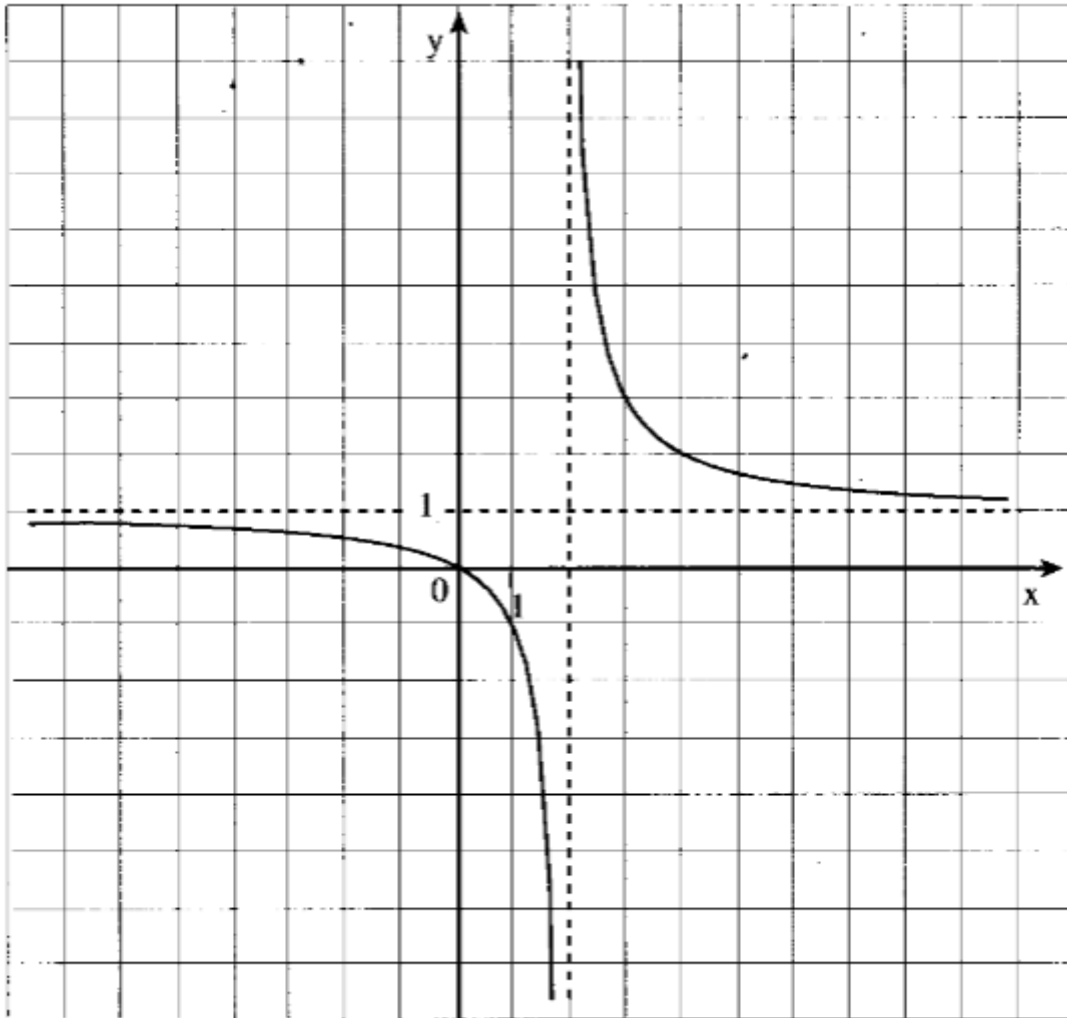
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. ישר שמשוואתו $y = 2.5$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות. מבין שתי הנקודות האלה, מצא את השיעורים של הנקודה שבה הפונקציה יורדת. נמק.

18) נתונות הפונקציות: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^{x-2}$.

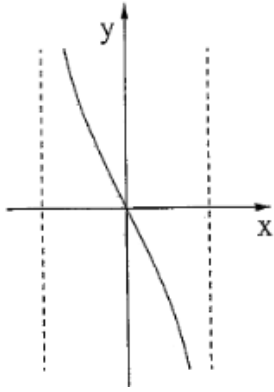
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציות?
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- ג. עבור אילו ערכי x מתקיים $g(x) > f(x)$? נמק.
- ד. מצא תחומי עלייה וירידה (אם יש כאלה) של הפונקציה $f(x)$ ושל הפונקציה $g(x)$.
- ה. באותה מערכת סרטט בקו מלא סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, וסרטט בקו מרוסק (---) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ו. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל ידי ציר ה- y .

19) בסרטוט שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x-2} + b$.

a ו- b הם פרמטרים שלמים.



- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. על פי הגרף, מצא את הערך של b ואת הערך של a . נמק.
 ג. הצב את הערך של b ואת הערך של a שמצאת, ומצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=2$, $x=4$ ו- $y=3$.



20 נתונה הפונקציה $f(x) = \log_{\frac{1}{e}}(1+x) - \log_{\frac{1}{e}}(1-x)$ (ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הראה כי $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$.

ג. (1) מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$

בנקודה A הנמצאת ברביע השני, ומעבירים

ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה B הנמצאת

ברביע הרביעי. נתון כי כל אחד משיפועי המשיקים

הוא $-\frac{8}{3}$. מצא את שיעור ה- x של הנקודות A ו-B.

(2) דרך הנקודה A העבירו מקביל לציר ה- x , ודרך הנקודה B העבירו מקביל

לציר ה- x . היעזר בחוקי הלוגריתמים (בלי להשתמש במחשבון), והראה כי

המרחק בין המקבילים הוא $2\ln 3$.

ד. היעזר בגרף של הפונקציה $f(x)$, וקבע אם בתחום ההגדרה של $f(x)$

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא תמיד שלילית, תמיד חיובית או לפעמים שלילית

ולפעמים חיובית. נמק.

21 הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x מקיימת:

$$f(x) \geq 0 \text{ לכל } x.$$

$$f(0) = 0 \text{ ואין יותר נקודות שבהן } f(x) = 0.$$

$$f(x) \text{ עולה בתחומים } x > 0, x < -\ln 3.$$

$$f(x) \text{ יורדת בתחום } -\ln 3 < x < 0.$$

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, וציין בה את שיעורי

ה- x של נקודות הקיצון.

נתון גם: $f(x) = e^{3x} - 2e^{ax} + e^x$, a הוא פרמטר.

ב. היעזר בנקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$, ומצא את ערך הפרמטר a .

ג. דרך נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ העבירו אנך לציר ה- x .

הצב $a = 2$, ומצא את השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף

הפונקציה $f(x)$, ועל ידי ציר ה- x .

22) בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x)$,

ומוצג הישר $y = -x + 4$.

הישר משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -1$.

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = a - e^{-x}$.

a הוא פרמטר.

א. מצא את הערך של a . בתשובתך רצוי להשאיר e .

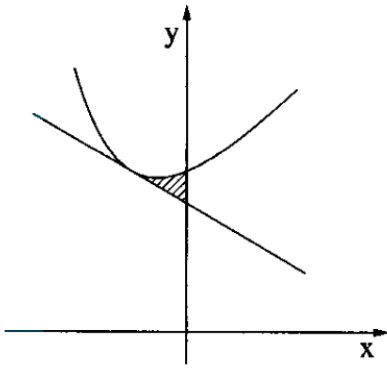
הצב את הערך של a וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. (1) מצא את שיעור ה- y של נקודת ההשקה.

(2) מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ על ידי הישר

הנתון ועל ידי ציר ה- y (השטח המקווקו בציור).



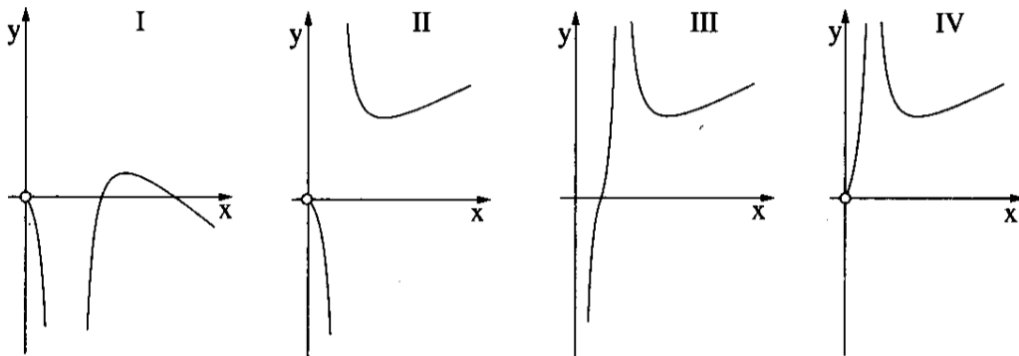
23) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{\ln(2x)}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

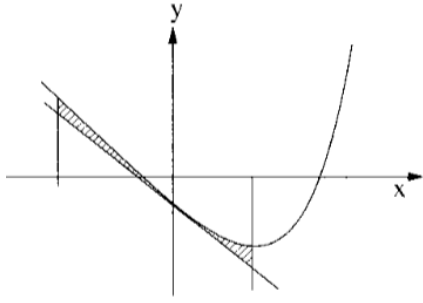
ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מבין הגרפים IV-I שלפניך איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק.



ה. הסבר מדוע עבור $x > \frac{e}{2}$ מתקיים $f(x) > e$.



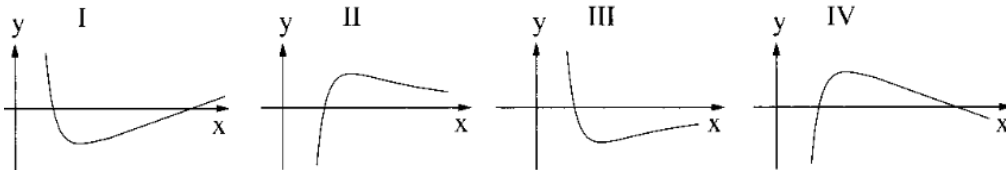
24) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$, והעבירו אנך לציר ה- x דרך נקודת המינימום של הפונקציה (ראה ציור).

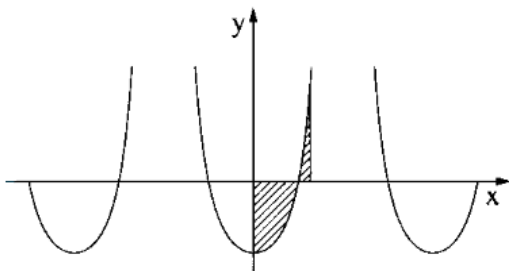
- א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. מצא את משוואת האנך.
 ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק, על ידי האנך ועל ידי הישר $x = -1$ (בשטח המקווקו בציור).

25) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a \ln x}{x^2}$. הוא פרמטר שונה מאפס.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $f(0) = 0$, הוא 3.
 מצא את הערך של a .
 הצב $a = 3$ וענה על הסעיפים ג-ה.
 ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 ד. לפניך הגרפים II, III, IV. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק.



ה. האם יש פתרון למשוואה $1 = \frac{3 \ln x}{x^2}$? נמק.



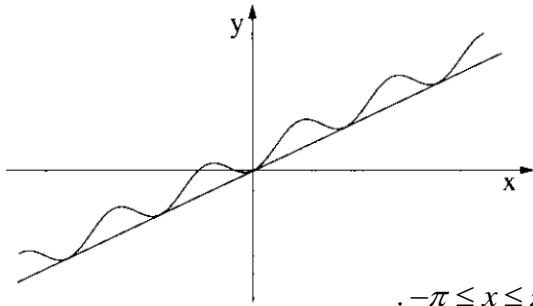
26) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2$

בקטע $-\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ (ראה ציור).

- א. בקטע הנתון מצא:
 (1) את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y .
 (2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

27) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_2(-x^2 + 4x + 32)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים. בתשובתך השאר, במידת הצורך, שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לציר ה- x . בתשובתך תוכל להשאיר \log או תוכל להשאיר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



28) נתונה הפונקציה

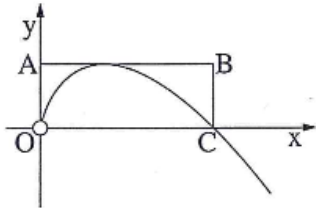
$$f(x) = 0.5x - 0.5\cos(2x) + 0.5$$

ונתון הישר $y = 0.5x$ (ראה ציור).

- מצא את שיעורי ה- x של הנקודות המשותפות לישר ולגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
- הראה כי הישר משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות שמצאת בתת סעיף א (1).
- מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הישר $y = 0.5x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

29) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^2 e^{-\frac{x^2}{m}}$, m הוא פרמטר שונה מ-0.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ששיעור ה- x שלה הוא -2. מצא את הערך של הפרמטר m .
- הצב $m = 4$ וענה על הסעיפים שלפניך.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 - מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - לפי גרף הפונקציה $f(x)$ סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-2 \leq x \leq 2$.



30) נתונה הפונקציה $f(x) = -x \ln(2x)$, $x > 0$ (ראה ציור).

דרך נקודת הקיצון של הפונקציה

העבירו משיר המקביל לציר ה- x ,

ודרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר

ה- x העבירו ישר המקביל לציר ה- y .

הישרים יוצרים עם הצירים מלבן ABCO, כמתואר בציור (O - ראשית הצירים).

מצא את שטח המלבן ABCO. בתשובתך תוכל להשאיר e .

31) נתונה הפונקציה $f(x) = a - b \sin(2x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

a ו- b הם פרמטרים חיוביים.

א. אחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא הנקודה שבה $x = \frac{\pi}{12}$.

הבע b באמצעות a .

הצב בפונקציה $b = 2a$, וענה על הסעיפים ב-ד שלפניך.

ב. בתחום הנתון הבע באמצעות a במידת הצורך:

(1) את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0.5a$ בתחום הנתון? נמק.

32) נתונה הפונקציה $f(x) = (3e^x - 3)^2$.

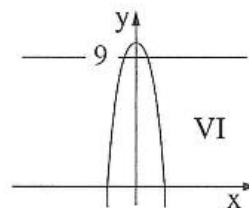
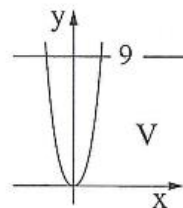
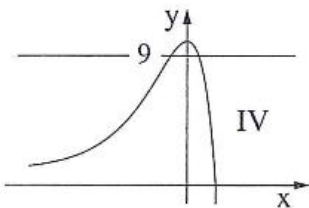
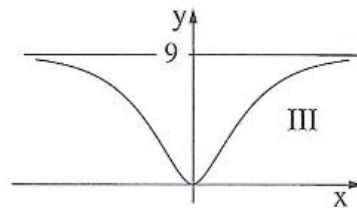
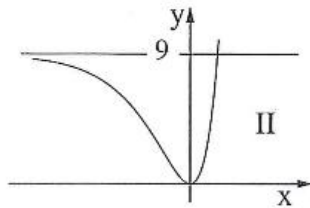
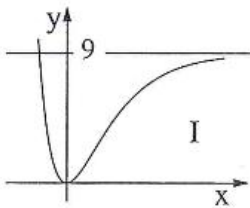
א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

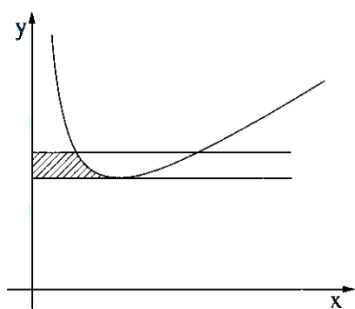
ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר $y = 9$ (אם יש כאלה).

ג. מבין הגרפים VI-I שלפניך, איזה גרף מציג סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.



33) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-2}{2x-3}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי ציר ה- y , ועל ידי הישר $x=1$.



34) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3}{2x} + \frac{2x}{3}$ בתחום $x > 0$.

- העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון שלה, והעבירו את הישר $y = 2\frac{1}{6}$ החותך את גרף הפונקציה בין היתר בנקודה שבה $x=1$ (הנקודה הקרובה לציר ה- y).
- מצא את השטח המוגבל על ידי שני הישרים, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- y , השטח המקווקו בציור.

35) נתונה הפונקציה $f(x) = -2\cos(2x) + a$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.

a הוא פרמטר המקיים $0 < a < 2$.

- א. מצא את השיעורים של נקודות המקסימום המוחלט והמינימום המוחלט של הפונקציה $f(x)$ (הבע באמצעות a במידת הצורך).
- ב. נתון כי הישר $y=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון. מצא את הערך של a .
- הצב $a=1$ וענה על הסעיפים ג-ד.
- ג. בתחום הנתון סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. בתחום הנתון מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק $y=3$ ועל ידי ציר ה- y .

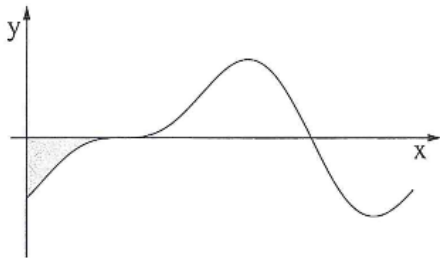
36 נתונה הפונקציה $f(x) = (a-3x)e^{3x}$, a הוא פרמטר.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. ידוע כי שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 1. מצא את הערך של a .
 הצב $a = 4$ וענה על הסעיפים ג ו-ד.
 ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ד. נתון הישר $y = k$, $k \leq 0$. כמה נקודות חיתוך יש לישר זה עם גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

37 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 2}{e^{2x}}$.

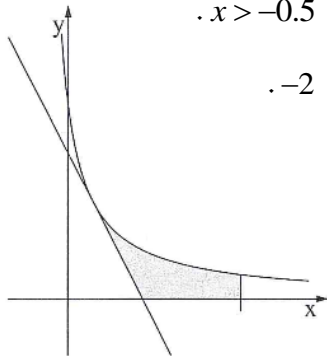
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. (1) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ג. דרך נקודות הקיצון של הפונקציה העבירו אנכים לציר ה- x . מצא את המרחק בין האנכים.

38 בצויר שלפניך נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = a \sin(2x) - \cos x$,



בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$. a הוא פרמטר.
 לפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x = \frac{7\pi}{6}$.

- א. מצא את הערך של a .
 ב. הצב בפונקציה $a = 0.5$, וענה על התת-סעיפים (1) ו-(2).
 (1) מצא בתחום הנתון את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 (2) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y (השטח האפור בצויר).



39) בציור שלפניך מוצג גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{2x+1}$ בתחום $x > -0.5$.

א. העבירו משיק לגרף הפונקציה, שיפוע המשיק הוא -2 .

(1) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה.

(2) מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק, על ידי הישר $x = 3.5$

ועל ידי ציר ה- x (השטח האפור בציור).

40) נתונה הפונקציה $f(x) = e^x + \frac{e^2}{e^x} - 2e$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

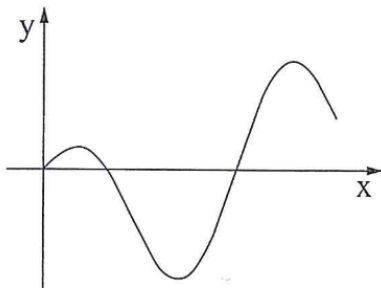
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

על פי גרף הפונקציה של $f(x)$ שסרטטת, מצא עבור אילו ערכים

של x הפונקציה $g(x)$ חיובית.

41) בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = a \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin x$,



בתחום $0 \leq x \leq 1.5\pi$. a הוא פרמטר.

ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$,

מקביל לישר $y = 1.5x + 3$.

א. מצא את הערך של a .

הצב $a = \frac{1}{2}$ וענה על הסעיפים ב-ו-ג.

ב. בתחום $0 \leq x \leq 1.5\pi$, מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף

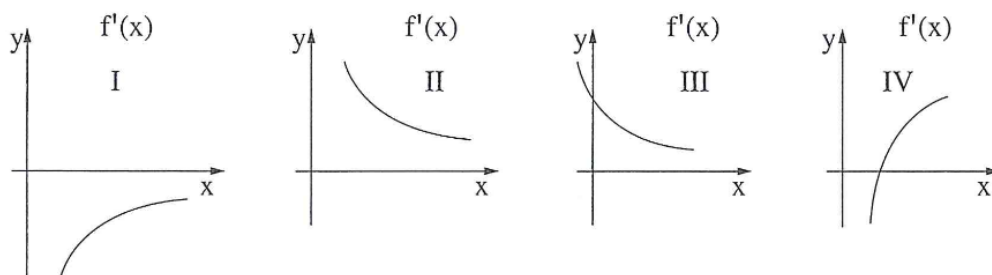
הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ג. בתחום $0 \leq x \leq \pi$, מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$

ועל ידי ציר ה- x .

42 נתונה הפונקציה $f(x) = \log_2(x^2) + \frac{1}{3} \log_2 x$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
- ג. הראה כי הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.
- ד. מבין הגרפים IV-I שלפניך, קבע איזה גרף הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמק.



- ה. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=2$.

תשובות סופיות:

(1) א. $y = a$ ב. 2.25 יח"ש $S_1 =$ ג. $a = 1.5$

(2) א. $y = -8$ ב. $3\pi - 2$ יח"ש $S =$

(3) א. $1.5\pi, 0.5\pi$ ג. $1.5\pi + 0.5\pi$ יח"ש $S =$

(4) א. $(0, 2), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

ב. $\max(0, 2)$ מוחלט, $\min\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ מוחלט, $\min\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ מוחלט.

ג. סקיצה בסוף ד. בתחום $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ שלילי, ולכן $\sqrt{\cos x}$ אינו מוגדר

ומכאן שהפונקציה $f(x) = 2\sqrt{\cos x}$ אינה מוגדרת.

(5) א. $\max\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \min\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \min\left(-\frac{\pi}{2}, -0.5\right), \max(2\pi, 0)$

ב. $(0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0)$ ג. סקיצה בסוף.

(6) א. $I - g(x), \Pi - f(x)$ ב. $x_A = 1\frac{1}{6}\pi$ (1) 2.25 (2)

(7) א. $\max\left(\frac{\pi}{2}, 1+a\right)$ מוחלט, $\left(\frac{3\pi}{2}, 1-a\right)$ ב. $a = \frac{\pi}{4}$

(8) א. $A\left(\frac{\pi}{b}, 0\right)$ ב. $b = 1.5$

(9) א. $f(x) - I, g(x) - \Pi$ ב. $x = \pi, x = \frac{\pi}{4}, x = 0$ ג. $\frac{\pi}{2} + 1$

(10) א. $(3, 5)$ ב. $a = 6$

(11) $A(\ln 2, 24)$

(12) א. (1) עולה בכל תחום הגדרתה. (2) $(0, 3)$, (3) $(-\ln \sqrt{1.5}, 0)$ סקיצה בסוף.

ב. (1) יורדת בכל תחום הגדרתה. (2) $(0, 4)$ (3) סקיצה בסוף. ג. $\ln 2$ יח"ר.

(13) א. $x_A = \frac{2}{a}$

(14) ב. (1) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (2) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ג. סקיצה בסוף ד. (1) $x > 0$ (2) $x > 0$ ה. סקיצה בסוף.

(15) א. $x > 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{12}\right)$ ג. $A\left(\frac{1}{e}, 0\right), B(1, 0)$

(16) א. $a = 1$ ב. 0.5547 יח"ר.

(17) א. כל x ב. $\min(0, 2)$ ג. סקיצה בסוף. ד. $(-0.833, 2.5)$

18 א. כל x . ב. $f(x): (0,1)$, $g(x): \left(0, \frac{1}{16}\right)$. ג. $x > 4$.

ד. $f(x)$: עלייה: כל x , $g(x)$: עלייה: כל x . ה. סקיצה בסוף. ו. 10.14 יח"ר.

19 א. $x \neq 2$. ב. $a=2, b=1$. ג. 5.386 יח"ר.

20 א. $-1 < x < 1$. ג. (1) $x_A = -\frac{1}{2}$, $x_B = \frac{1}{2}$. ד. תמיד שלילית.

21 א. סקיצה בסוף. ב. $a=2$. ג. $\frac{8}{81}$ יח"ר.

22 א. $a=e-1$. ב. (1) 5 (2) $f(x) = ex - x + e^{-x} + 4$. ג. $\frac{e}{2} - 1$ יח"ר.

23 א. $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$. ב. $\min\left(\frac{e}{2}, e\right)$. ג. עלייה: $x > \frac{e}{2}$; ירידה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $\frac{1}{2} < x < \frac{e}{2}$.

ד. גרף II.

24 א. $y = -2x - \frac{1}{2}$. ב. $x = \ln 2$. ג. 0.181 יח"ר.

25 א. $x > 0$. ב. $a=3$. ג. $\max\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2e}\right)$. ד. גרף II . ה. לא.

26 א. (1) תחום הגדרה: $-\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$, $x \neq \frac{1}{2}\pi$, $x \neq -\frac{1}{2}\pi$.

אסימפטוטות: $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = -\frac{1}{2}\pi$.

(2) $\left(\frac{5}{4}\pi, 0\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$, $\left(\frac{1}{4}\pi, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{4}\pi, 0\right)$, $\left(-\frac{3}{4}\pi, 0\right)$, $\left(-\frac{5}{4}\pi, 0\right)$

ב. 0.779 יח"ר.

27 א. $-4 < x < 8$. ב. $(-3.92, 0)$, $(7.92, 0)$, $(0, 5)$.

ג. עלייה: $-4 < x < 2$; ירידה: $2 < x < 8$. ד. $y = \log_2 36 = 5.17$.

28 א. (1) $-\pi, 0, \pi$. ב. π יח"ר.

29 א. כל x . ב. $m=4$. ג. (1) $(0, 0)$ (2) $\max\left(2, \frac{8}{e}\right)$, $\min(0, 0)$, $\max\left(-2, \frac{8}{e}\right)$

(3) סקיצה בסוף. ד. סקיצה בסוף.

30 $\frac{1}{4e}$ יח"ר.

31 א. $b=2a$. ב. (1) $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right)$, $(0, a)$ (2) $\max\left(\frac{3}{4}\pi, 3a\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{4}, -a\right)$

ג. סקיצה בסוף. ד. 2 .

32 א. (1) כל x (2) $(0, 0)$ (3) $\min(0, 0)$. ב. $(\ln 2, 9)$. ג. גרף II .

33 א. $x \neq 1.5$. ב. עלייה: $x > 1.5$, $x < 1.5$; ירידה: אין. ג. $x=1.5$, $y=0$. ד. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

ה. סקיצה בסוף. ו. $\ln 3$.

0.1915 יח"ר. (34)

(35) א. $\max\left(\frac{\pi}{2}, a+2\right), \min(0, a-2)$ ב. $a=1$ ג. סקיצה בסוף. ד. π יח"ר.

(36) א. כל x ב. $a=4$ ג. (1) עלייה: $x < 1$, ירידה: $x > 1$ (2) $(0, 4)$, $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

(3) סקיצה בסוף ד. נקודה אחת.

(37) א. כל x ב. (1) $\max\left(2, \frac{2}{e^4}\right), \min(-1, -e^2)$ (2) $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, -2)$

(3) סקיצה בסוף ג. 3 יחידות.

(38) א. $a = \frac{1}{2}$ ב. (1) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ (2) $\frac{1}{2}$ יח"ר.

(39) א. (1) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ (2) $y = -2x + 3$ ב. 1.76 יח"ר.

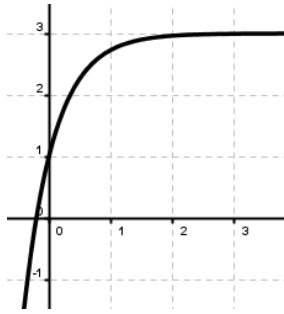
(40) א. כל x ב. $(0, e^2 - 2e + 1)$, $(1, 0)$ ג. $\min(1, 0)$ ד. סקיצה בסוף ה. $x \neq 1$.

(41) א. $a = \frac{1}{2}$ ב. $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, $(\pi, 0)$ ג. 1.25 יח"ר.

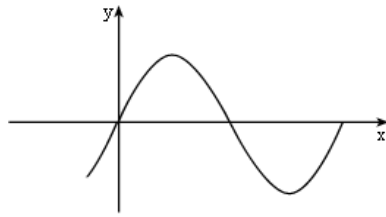
(42) א. $x > 0$ ב. $(1, 0)$ ד. גרף Π ה. $2\frac{1}{3}$.

סרטוטים לשאלות:

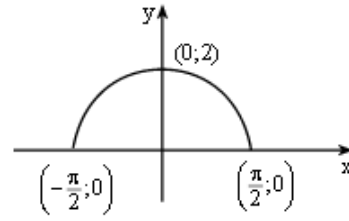
(3) א (12)



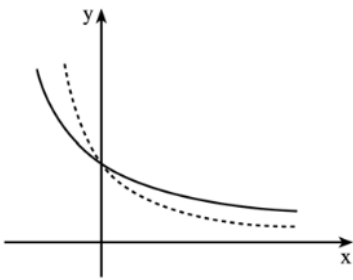
ג (5)



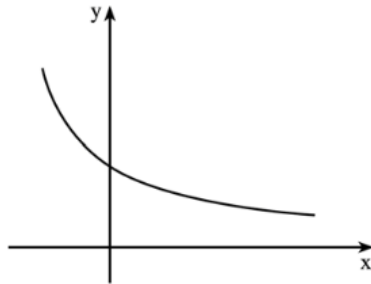
ג (4)



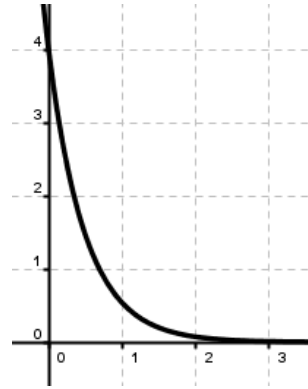
ה (14)



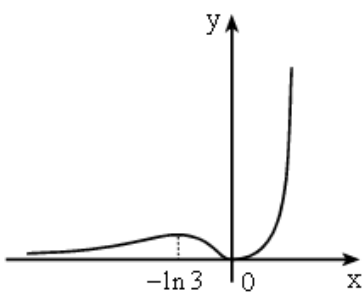
ג (14)



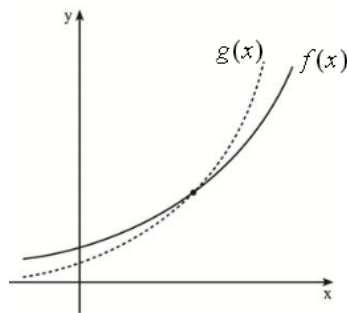
(3) ב (12)



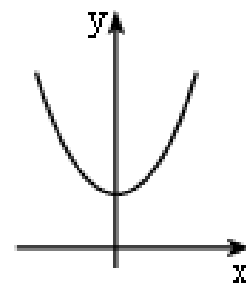
א (21)



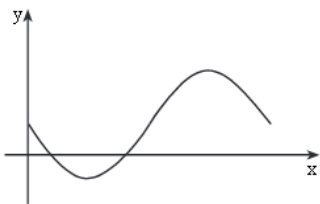
ה (18)



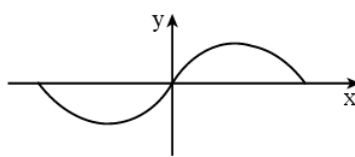
ג (17)



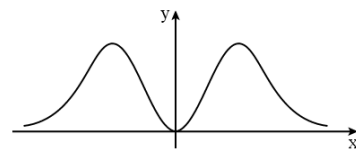
ג (31)



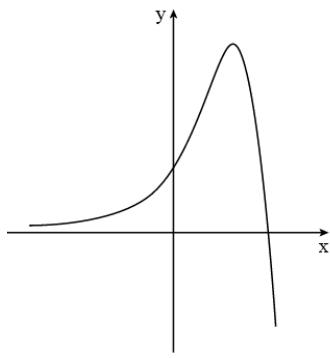
ט (29)



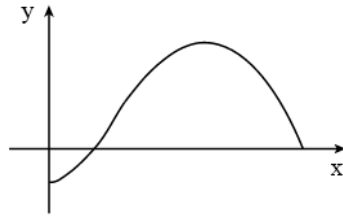
(3) ג (29)



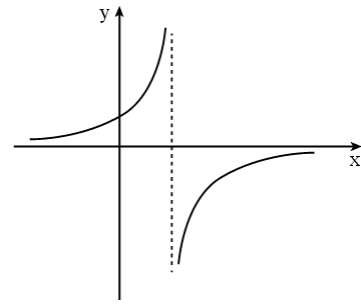
(3) ג (36)



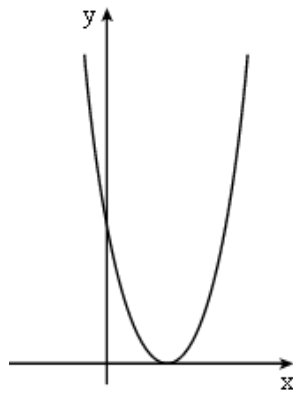
ג (35)



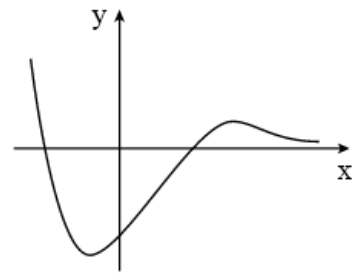
ה (33)



ט (40)



(3) ב (37)



נספח 1 – דף ההוראות הרשמי לשאלון 805:

מדינת ישראל	סוג הבחינה:	א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
משרד החינוך	מועד הבחינה:	ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
	מספר השאלון:	תשע"ב, מועד ב
	נספח:	315, 035805
		דפי נוסחאות ל-4 יחידות לימוד

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבע שאלות בנושאים: סדרות, גדילה ודעיכה, אלגברה וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, טריגונומטריה במרחב. עליך לענות על שלוש שאלות – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - (3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

נספח 2 – עקרונות מנחים לבדיקת בחינות הבגרות:

מטרת מסמך זה היא להביא לידיעת המורים את השגיאות השכיחות ואת אופן הערכתן בבדיקת השאלות בבחינת הבגרות. במסמך נרשום כמה אחוזים מורידים על שגיאות רק במקרים כלליים שאינם תלויים בשאלה ספציפית, בשאר המקרים רק נתאר את השגיאה.

עקרונות כלליים

- שאלות בבחינה ייבדקו על פי סדר הופעתן בלבד. נבחן חייב לציין איזה חלק מהבחינה הוא טיוטה. כל שאלה שנבחן התחיל לפתור ולא מחק, לא רשם "טיוטה" או לא רשם "לא לבדוק", תיבדק לפי סדר הופעתה ולא יתקבל ערעור בעניין זה.
- החלטה על מספר נקודות שמורידים על טעות תלויה באופי השגיאה, ביכולת לבדוק את המשך השאלה, ברמת הקושי שנוצרה עקב השגיאה וכדומה. בכל מקרה, אם נבחן טעה טעות גסה (ראה בהמשך דוגמאות), יקבל נקודות רק לסעיפים שאינם קשורים בטעות זו. למשל, קבלת הסתברות גדולה מ-1 ושימוש בתוצאה זו גם בהמשך השאלה יגרום לפסילת כל השאלה, אך אם בהמשך הנבחן אינו משתמש בתוצאה זו הרי שרק עבור הסעיף השגוי לא יינתנו נקודות.
- ניקוד סעיפי השאלות בבחינת הבגרות אינו מתחלק שווה בשווה בין הסעיפים אלא תלוי ברמת המורכבות של הסעיף, ברמת הקושי של הסעיף יחסית לסעיפים אחרים.
- נבחן שביצע פעולה לא חוקית במהלך הפתרון ייקנס גם אם קיבל תשובה נכונה. למשל: חילק ב- x את המשוואה $x^2 - x = 0$ ללא ציון $x \neq 0$, ייקנס גם אם פתרון הבעיה הוא $x=1$ בלבד.
- נבחן שהעתיק בצורה שגויה מהשאלון ביטוי או נתון, ייקנס בצורה משמעותית אם שינה את רמת הקושי של השאלה.
- נבחן שהניח הנחה שגויה, המפשטת את כל השאלה, לא יקבל נקודות לשאלה זו.
- נבחן שרשם ישירות תשובה, בלי לרשום את הדרך, לא יקבל נקודות לסעיף גם במקרים שהתשובה מתקבלת בחישוב פשוט. ייתכן שהוא יוחשד בהעתקה (פרט למקרים פשוטים של פתרון משוואה ריבועית).
- בכל מקרה רלוונטי על הנבחן לסמן יחידות מידה בתשובה. למשל, בזוויות יש לסמן מעלות ליד המספר, אחרת מדובר במידת הזווית ברדיאנים.
- על טעות ברישום סדר האיברים בזוג סדור מורידים 5%.
- על טעות חשבונית מורידים בין 5% ל-15% (תלוי באופי השגיאה).

- בשאלה מילולית מכל סוג תלמיד חייב להגדיר את המשתנים באופן ברור (מילולי) ולרשום בסוף תשובה מילולית.
- אם נבחן לא פסל תוצאות שיש לפסול, ייקנס בהתאם לאופי הטעות.
- נבחן שפתר שאלה המנוסחת באופן כללי, עבור מקרה פרטי, לא יקבל ניקוד לשאלה. לדוגמה: במקום פרמטר נבחן הציב מספר קבוע ופתר את השאלה למקרה זה.
- מותר להגיע לתשובה על ידי ניסוי וטעייה, בתנאי שהנבחן מראה את כל הניסיונות, ובתנאי שלא צוין שעל הנבחן לפתור את השאלה על סמך סעיפים קודמים. אם נבחן לא מראה את כל הניסיונות הוא עשוי להיחשד בהעתקה.
- בסעיפים בהם נרשם "נמק", יש לנמק באמצעים מקובלים כגון באופן אלגברי ו/או באופן מילולי. ללא נימוק, הנבחן לא יקבל נקודות לסעיף זה.
- שימוש בטכניקות או בידע שאינו חלק מתוכנית הלימודים חייב הסבר של הנבחן, שיכלול את מהות הטכניקה ומדוע אפשר להשתמש בה במקום שבו השתמש. לא מספיק לרשום ביטויים כגון: "שיטת הקרוס", "מכפלה ווקטורית", "משפט גרין" ועוד. נבחן שלא ייתן הסבר משכנע, לא יקבל נקודות בסעיף זה.
- **עצם השימוש בנוסחאות או בטכניקות שאינן בתוכנית הלימודים איננו פסול ובתנאי שהנבחן יראה הבנה בתהליכים אלה.**
- הנחיות חשובות בנוגע לשעתוק:
 - יש לשלוח למרב"ד שתי מחברות: מחברת המקור והמחברת המשועתקת.
 - המחברת המשועתקת חייבת להיות זהה למקור.
 - סדר השאלות ותוכן חייב להיות זהה למקור.
 - אם אין התאמה מלאה בין מחברת המקור לבין המחברת המשועתקת, הנבחן ייחשד באי שמירה על טוהר הבחינות והבחינה תטופל בהליך המקובל למחברות חשודות בהעתקה.

דגשים בהתאם לנושאי הלימוד

1. שאלות מילוליות

- על הנבחן להגדיר את הנעלמים ולרשום תשובה סופית ברורה.
- אם נבחן טעה ביחידות מידה כגון ביחידות זמן, ביחידות מרחק וכד', ההורדה היא משמעותית.
- אם נבחן תרגם מושגים כגון "גדול ב" או "קטן ב" בצורה שגויה, ההורדה היא משמעותית.
- נבחן שבנה טבלה מסודרת ומלאה ולא המשיך בתהליך הפתרון, יקבל ציון חלקי בלבד.

2. אינדוקציה מתמטית

- אם נבחן לא רשם נכון את הנחת האינדוקציה או לא רשם נכון את מה שצריך להוכיח, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- נבחן שרשם בהנחת האינדוקציה "נניח לכל n טבעי", נקנס ב- 20%.
- חובה לרשום משפט סיכום.

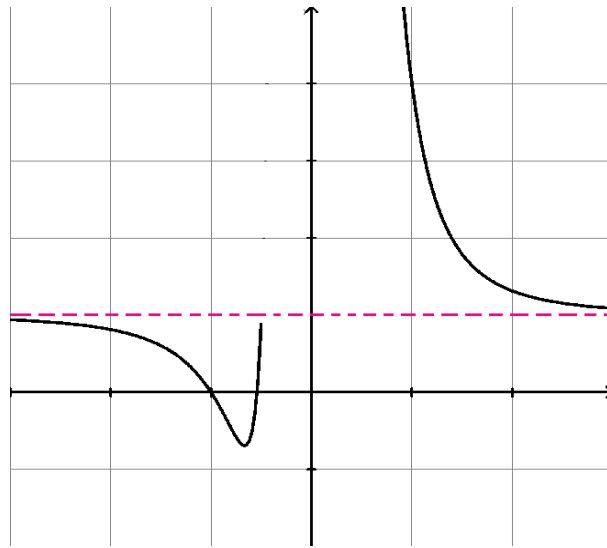
3. אלגברה

- בסדרות מותר לרשום את כל איברי הסדרה הרלוונטיים וכך להגיע לתשובה, אך אם שגה בדרך פתרון זו בחישוב אחד האיברים או בסכומם לא יקבל נקודות לסעיף.
- בשאלת גידול ודעיכה אם נבחן פתר לפי גדילה במקום דעיכה או להפך לא יקבל נקודות לשאלה.
- נבחן שטעה בחוקי חזקות לא יקבל נקודות על הסעיף ועל סעיפים הנובעים ממנו (למשל, רשם $(5^3)^x = 15^x$, $3 \cdot 5^x = 15^x$).
- אם נבחן השתמש בחוקי לוגריתמים באופן שגוי, לא יקבל נקודות על הסעיף (למשל, רשם כי לוגריתם של מכפלה שווה למכפלת הלוגריתמים או כל טעות דומה).

4. חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- אם נבחן מציב במקום פרמטר ערך מסוים קבוע, במקום שבו היה עליו להביע פתרונות באמצעות הפרמטר, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- נבחן שטעה בחישוב תחום ההגדרה ובעקבות שגיאה זו הפתרון השתנה בצורה משמעותית, ייקנס לא רק בסעיף תחום ההגדרה אלא גם בסעיפים נוספים בהם טעות זו הקלה על הפתרון.
- למשל: אם בשל טעות בתחום ההגדרה התקבלה פונקציה ללא אסימפטוטה אנכית, וכתוצאה מכך השתנה גרף הפונקציה באופן משמעותי, הנבחן ייקנס גם בסעיפים נוספים בהתאם לשאלה.
- נבחן שקיבל תוצאות שאינן מתיישבות עם הנתון בשאלה, ייקנס בכל הסעיפים המושפעים מתשובתו.
- למשל: אם נתון בשאלה כי לפונקציה יש נקודת קיצון ובעקבות טעות בתחום ההגדרה קיבל הנבחן כי לפונקציה אין נקודות קיצון, במקרה זה ייקנס הנבחן על תחומי עליה וירידה וכד'.
- נבחן שציין תחום הגדרה ולא התייחס לנקודות אי הגדרה, לא יקבל נקודות על תחום ההגדרה וכן על הסעיפים הקשורים.
- נבחן שרשם בתחום ההגדרה אי שוויון חזק במקום אי שוויון חלש או להפך, לא יקבל נקודות לסעיף זה.
- בחקירה של פונקציה טריגונומטרית אין להשאיר את התשובה במעלות.
- אם בגזירה של פונקציה מורכבת נבחן לא התייחס לפונקציה הפנימית, במרבית המקרים מפסיקים לבדוק את הסעיף ולפעמים אפילו את השאלה כולה (אם הפתרון בנוי על הגזירה). החלטה על מספר נקודות שמורידים על הטעות תלויה באופי השגיאה, ביכולת לבדוק את המשך השאלה, ברמת הקושי שנוצרה ועוד. **בכל מקרה, אם נבחן טעה טעות גסה בנגזרת, יקבל נקודות רק לסעיפים שאינם קשורים לנגזרת**
- אם נבחן שרטט אסימפטוטות לא נכונות, או שרטט גרף מחוץ לתחום ההגדרה, או שרטט גרף החותך את ציר ה-x בצורה שגויה, או חותך אסימפטוטה אנכית, לא יקבל נקודות לסעיף.

לדוגמה, טעות נפוצה בשרטוט גרפים עם אסימפטוטות:



- אם בפונקציית מנה, נבחן כפל את הפונקציה במכנה, ו"קיבל" פונקציה ללא מכנה (למשל, פולינום), לא יקבל נקודות לכל השאלה.
- בבדיקת סוג הקיצון של פונקציית מנה, נבחן חייב להסביר מדוע מספיק לגזור את המונה בלבד. אין לרשום את נגזרת המונה כנגזרת השנייה של הפונקציה.
- כאשר לפונקציה אין נקודות קיצון בתחום מסוים, על הנבחן לנמק את העלייה/הירידה של הפונקציה בתחום זה.
- בפונקציות בעלות תחום סגור יש להתייחס לקצות התחום בעת רישום נקודות קיצון.
- נבחן שגה בפתרון של אי שוויון, לא יקבל נקודות לסעיף זה ולסעיפים הקשורים.
- במציאת פונקציה קדומה:

- אם הטעות היא רק ברמה של מקדם קבוע, מורידים נקודות רק על הפונקציה הקדומה וממשיכים לבדוק על פי השגיאה.
- בכל מקרה אחר של טעות, מפסיקים לבדוק את הסעיף הרלוונטי.
- במקרה שנבחן טעה טעות גסה במציאת הפונקציה הקדומה, לא יקבל נקודות על הסעיף ועל סעיפים הנובעים ממנו

$$\text{(למשל רשם: } \int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} \text{)}$$

- נבחן שלא רשם בכתובת האינטגרל dx , לא רשם סוגריים במקום הנכון וכדומה, ייקנס ב- 5%.
- בעת חישוב האינטגרל חייבים לרשום את הצבת הגבולות בפונקציה הקדומה.

- נבחן שטעה בזיהוי השטח הנדרש בשאלה וחישוב שטח אחר מהמבוקש, יקבל נקודות רק עבור מציאת הפונקציה הקדומה.
- בחשבון אינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות על הנבחן לעבוד ברדיאנים, אחרת לא יקבל ניקוד עבור החישוב.
- נבחן שקיבל שטח שלילי ורשם בשרשרת השוויונות ערך מוחלט רק על התוצאה הסופית יקבל נקודות רק עבור מציאת הפונקציה הקדומה.
- אם השאיר את תוצאת השטח כמספר שלילי לא יקבל נקודות לסעיף זה.
- אם במציאת נפח גוף סיבוב נבחן רשם ריבוע ההפרש של פונקציות במקום הפרש הריבועים, מפסיקים לבדוק את הסעיף הרלוונטי.
- אם נבחן שכח לרשום π במציאת נפח גוף סיבוב, מורידים 10%.

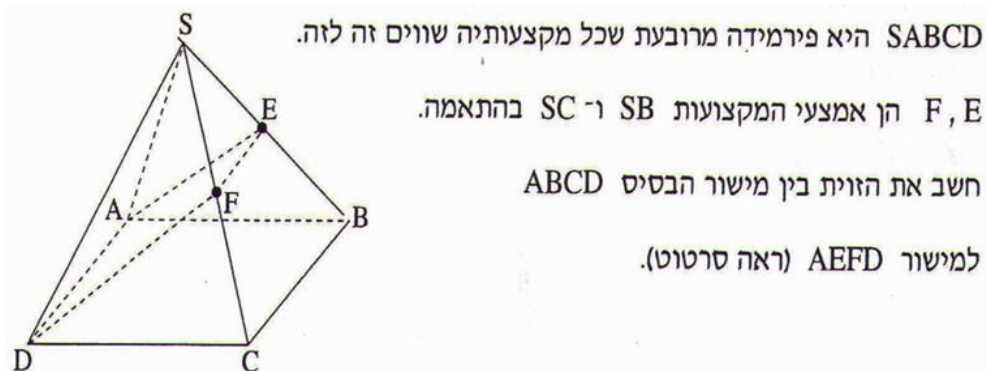
5. בעיות ערך קיצון

- בניית הפונקציה הנכונה מהווה כ- 50% מהשאלה.
- אם יש טעות חמורה בגזירה, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- אי בדיקת מינימום/מקסימום גורמת להורדה של עד 10%.
- נבחן ששגה משמעותית בבניית הפונקציה, לא יקבל נקודות לכל השאלה.

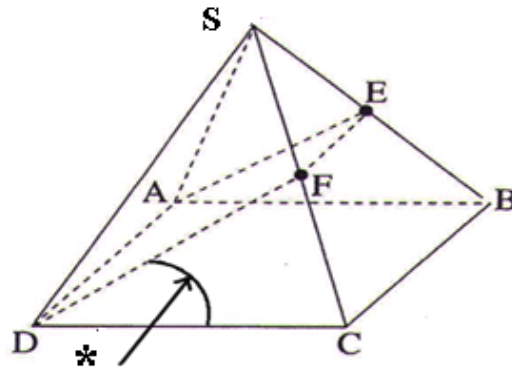
6. טריגונומטריה במישור ובמרחב

- נבחן שהשתמש בזהויות טריגונומטריות שגויות, לא יקבל ניקוד על הסעיף.
- נבחן שהשתמש במשפט הסינוסים עם רדיוס של מעגל שאיננו חוסם את המשולש שעבורו השתמש במשפט, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- מפסיקים לבדוק תשובה שבה הפתרון מבוסס על הנחת יסוד שגויה. למשל, שימוש בשיקול גיאומטרי שגוי כגון: תיכון הוא חוצה זווית....
- אין להשאיר תשובה מהצורה $\sin(90^\circ - \alpha)$ או $\cos(\pi - \alpha)$ וכד'.
- בטריגונומטריה במישור ובמרחב, נבחן חייב לרשום באיזה משולש הוא מבצע תהליך. אם לא רשם את המשולש ולא ברור לאיזה משולש הכוונה, הוא לא יקבל נקודות לסעיף.
- נבחן שטעה בפונקציה טריגונומטרית או במשפט הסינוסים, או במשפט הקוסינוסים, לא יקבל נקודות לסעיף.
- אם נבחן שגה בזיהוי של זווית במרחב מפסיקים לבדוק את השאלה.
- במקרים רבים בחירת הזווית נעשית על ידי גישה אינטואיטיבית ולא על פי הגדרה ומכך נובעות מרבית הטעויות, בפרט אם יש צורך לזהות זווית במקרים פחות סטנדרטיים.

לדוגמה : מועד ב' מיוחד תשס"ז



טעות נפוצה בפתרון שאלה זו, היא זיהוי שגוי של הזווית המסומנת בשרטוט ב-
 (*).



7. סטטיסטיקה והסתברות

- נבחן שרשם עץ מלא ונכון ולא המשיך, יקבל נקודות עבור העץ.
- נבחן שחישב מקרים אפשריים וחיבר ביניהם ושכח מקרה אחד יקבל, בדרך כלל, חלק מנקודות הסעיף. אם שכח יותר ממקרה אחד לא יקבל נקודות על הסעיף.
- נבחן שקיבל הסתברות גדולה מ-1 או הסתברות שלילית לא יקבל נקודות על הסעיף. השתמש בכך גם בהמשך לא יקבל נקודות לשאלה כולה.
- על הנבחן להגדיר בבירור את המאורעות ולפרט את כל תהליך הפתרון כולל הצבות.
- כדי לקבל נקודות לפתרון שאלה בהתפלגות נורמלית יש למלא במחברת את הגרף בשלמות (המשתנה והאחוזים), או לחילופין להסביר כל סעיף בנפרד. תשובה סופית בלבד לא תזכה בנקודות.

8. גיאומטריה המישור

- יש לנמק כל שלב גיאומטרי על ידי ציטוט משפט מתאים.
כל נימוק חסר ייקנס ב-10%.
- מותר להשתמש רק במשפטים הנמצאים ברשימת המשפטים שפורסמה באתר המפמ"ר. שימוש בטענה שאיננה נמצאת ברשימת המשפטים מחייבת הוכחה. היעדר הוכחה במקרה כזה ייחשב כדילוג על שלבים בהוכחה.

9. גיאומטריה אנליטית

- לא יתקבל פתרון על פי שרטוט בלבד.

10. וקטורים

- אם נבחן צמצם וקטורים במכפלה סקלרית, מפסיקים לבדוק את השאלה.
- אם נבחן חילק וקטור בווקטור, הנבחן ייקנס גם אם לטעות אין השפעה על הפתרון.
- נבחן שלא סימן ווקטורים בצורה תקנית ייקנס.

11. מספרים מרוכבים

- טיפול שגוי של נבחן בערך המוחלט של מספר מרוכב, מביא להפסקת הבדיקה.

אירמה ג'ן

מפמ"ר מתמטיקה