

## פרק 4

# חשבון דיפרנציאלי – פונקציה רציונאלית:

### חישוב נגזרות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y = \frac{5}{x}$	ב. $y = -\frac{6}{x}$	ג. $y = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x}$
ד. $y = \frac{1}{3x} + 2$	ה. $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{x}$	ו. $y = \frac{7x-8}{x}$
ז. $y = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x}$	ח. $y = \frac{2}{x^2}$	ט. $y = \frac{4x^2 - 5x - 3}{x^2}$

### מציאת שיפוע ומשוואת משיק כאשר נתונה הנקודה:

2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{x}$  חשב את ערך הנגזרת בנקודה  $x=3$ .

3) נתונות הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ . הישר:  $y=3$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
- מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x)$  בנקודות אלו.
- מצא את נקודת החיתוך בין המשיקים.

4) הישר  $y = -4$  חותך את גרף הפונקציה  $y = 3x + \frac{1}{x}$  בשתי נקודות A ו-B) A) מימין ל-B).

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה A.
- מצא את נקודת החיתוך של משיק זה עם הצירים.

(5) נתונה הפונקציה:  $y = x^2 - 4x + \frac{8}{x}$ .

- א. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה:  $x = -2$ .  
 ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה זו.

(6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \frac{2x^3 - x + 4}{x}$  בנקודה שבה:  $x = 1$ .

### מציאת נקודה כאשר ידוע השיפוע:

(7) מצא נקודות על גרף הפונקציה:  $f(x) = 5x - 2 + \frac{1}{x}$  עבורן שיפוע המשיק הוא 1.

(8) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 2x - 1 - \frac{3}{x}$ .

- א. מצא על גרף הפונקציה נקודות שהמשיק העובר דרכן מקביל לישר:  $y = 5x - 1$ .  
 ב. מצא את משוואות המשיקים.

(9) מצא על גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x}$  נקודות שהמשיק העובר דרכן יוצר זווית

בת  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(10) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{2}{x} - 4$ .

- א. הוכח כי לפונקציה אין משיק ששיפועו 1.  
 ב. האם יש לפונקציה משיק ששיפועו חיובי?  
 ג. מצא על הפונקציה נקודות שהמשיק העובר דרכן מקביל לישר העובר דרך הנקודות:  $(-3, 8), (-2, 6)$ .

(11) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x^2 + 2x - 4}{2x}$ . הראה שהישר  $y = x - 1$  הוא משיק לגרף

הפונקציה.

## פונקציות עם פרמטרים:

**12** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 + \frac{A}{x}$  (פרמטר  $A$ ).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=2$  הוא 3. מצא את  $A$ .

**13** ערך הנגזרת של הפונקציה:  $y = x^3 - \frac{A}{x}$  (פרמטר  $A$ ), בנקודה שבה:  $x=1$

הוא 0. מצא את  $A$ .

**14** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{x^3 - 2x + A}{x}$  (פרמטר  $A$ ).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=3$  הוא 5.

א. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

## חקירת פונקציות רציונאלית:

**15** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ .

א. רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. רשום את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

**16** נתונה הפונקציה:  $y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + 3$ .

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ב. האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים? נמק.

ג. רשום את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

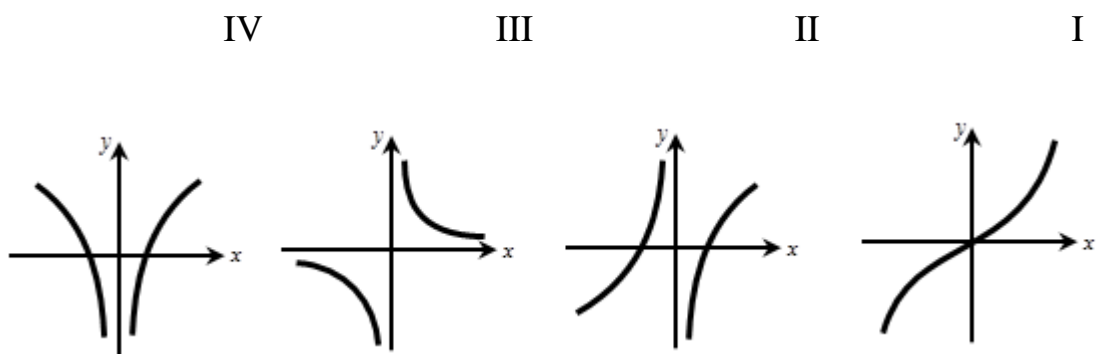
ד. מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?

17 נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{4x^2 - x + 9}{x}$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- $x$ .  
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.  
 ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ו. היעזר בסקיצה וקבע לאילו ערכים של  $k$  הישר:  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה:  
 i. בשתי נקודות שונות.  
 ii. בנקודה אחת בלבד.  
 iii. באף נקודה.

18 נתונה הפונקציה:  $y = 9x - \frac{1}{x}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.  
 ii. הסבר מדוע הפונקציה עולה בתחום:  $x > 0$  וגם בתחום:  $x < 0$ .  
 ד. לפניך ארבעה גרפים: I, II, III, IV.  
 איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.



## שאלות מתוך מאגר משרד החינוך – פונקציה רציונאלית:

19) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x^3 - x + 4}{x}$ ,  $(x \neq 0)$ . מעבירים משיק לגרף הפונקציה

בנקודה שבה:  $x = 2$ .

א. חשב את שיפוע המשיק.

ב. מצא את משוואת המשיק.

20) נתונה הפונקציה:  $y = 2x + \frac{1}{x}$  בתחום  $x > 0$

(ראה איור). הישר  $y = 3$  חותך את גרף

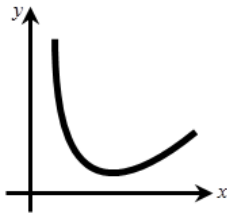
הפונקציה בנקודה A ובנקודה B (משמאל

ל-B). מעבירים לגרף הפונקציה משיק

בנקודה A ומשיק בנקודה B. שני המשיקים

נפגשים בנקודה P. מצא את שיעורי הנקודה

P.



21) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{x}{5}$ ,  $(x \neq 0)$ . עבור איזה ערך של  $x$  מקבלת

הפונקציה מקסימום, ועבור איזה ערך של  $x$  היא מקבלת מינימום?

ב. הראה כי לפונקציה:  $g(x) = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$ ,  $(x \neq 0)$  אין נקודות מקסימום ואין

נקודות מינימום.

22) נתונה הפונקציה:  $y = x^2 + \frac{A}{x}$ , (A פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = 4$  הוא 7.

מצא את הערך של A.

23) נתונה הפונקציה:  $y = Ax + \frac{12}{x}$ , (A פרמטר).

ידוע כי לפונקציה זו יש מינימום כאשר  $x = 2$ .

מצא את הערך של A.

24) ענה על הסעיפים הבאים :

א. לפונקציה:  $y = x + \frac{a}{x}$  יש ערך קיצון בנקודה  $x = 2$ . חשב את  $a$  וקבע

אם הנקודה היא נקודת מינימום או מקסימום.

ב. הראה שאם  $a = -2$  אז לפונקציה הזו אין נקודת קיצון.

25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$  בתחום:  $x \neq 0$ .

א. מצא את נקודות הקיצון של  $f(x)$ .

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

ג. ציין את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של  $f(x)$ .

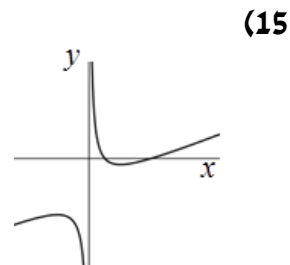
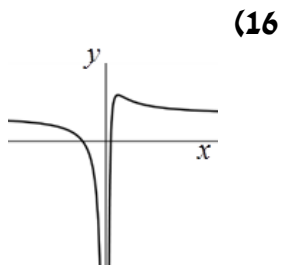
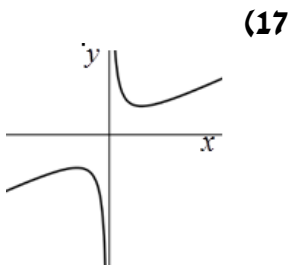
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום:  $[-4:4]$ .

## תשובות סופיות:

- $y' = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x^2}$  .ג  
 $y' = \frac{8}{x^2}$  .ו  
 $y' = \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}$  .ט  
**ב.**  $y = -2x + 4, y = x + 2$
- $y' = \frac{6}{x^2}$  .ב  
 $y' = 6x - 2 - \frac{1}{x^2}$  .ה  
 $y' = -\frac{4}{x^3}$  .ח  
**א (3)**  $\left(\frac{1}{2}, 3\right), (1, 3)$
- $y' = -\frac{5}{x^2}$  .א **(1)**  
 $y' = -\frac{1}{3x^2}$  .ד  
 $y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$  .ז  
**(2)**  $-\frac{1}{3}$   
**ג.**  $\left(\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right)$
- א (4)**  $y = -6x - 6$   
**ב.**  $(-1, 0), (0, -6)$
- א (5)**  $-10$   
**ב.**  $y = -10x - 12$
- א (6)**  $y = 5$
- א (7)**  $(0.5, 2.5), (-0.5, -6.5)$
- א (8)**  $(1, -2), (-1, 0)$
- ב.**  $y = 5x - 7, y = 5x + 5$
- א (9)**  $(2, 2), (-2, -2)$   
**ב (10)** לא
- א (11)**  $A = 4$   
**ב (12)**  $A = -3$
- א (13)**  $A = 9$   
**ב.**  $y = 5x - 5$
- א (14)**  $x \neq 0$   
**ב.**  $(1, 0), (2, 0)$
- א (15)**  $x \neq 0$   
**ג.**  $\min(1.4, -0.17), \max(-1.4, -5.8)$
- ד. עולה:**  $x < -1.4, x > 1.4$  **יורדת:**  $-1.4 < x < 0, 0 < x < 1.4$
- ו. חיובית:**  $0 < x < 1, x > 2$  **שלילית:**  $x < 0, 1 < x < 2$
- א (16)**  $\max\left(4, 3\frac{1}{8}\right)$   
**ב.**  $(-1, 0), \left(\frac{2}{3}, 0\right)$   
**ג.**  $x = 0, y = 3$
- ד. חיובית:**  $x < -1, x > \frac{2}{3}$  **שלילית:**  $-1 < x < 0, 0 < x < \frac{2}{3}$
- א (17)**  $x \neq 0$   
**ג.**  $\min\left(1\frac{1}{2}, 11\right), \max\left(-1\frac{1}{2}, -13\right)$
- ד. עולה:**  $x < -1.5, x > 1.5$  **יורדת:**  $-1.5 < x < 0, 0 < x < 1.5$
- ו. 2 נקודות:**  $k < -13, k > 11$  **נקודה אחת:**  $k = 11, -13$  **אף נקודה:**  $-13 < k < 11$

18 א.  $x \neq 0$  ב.  $\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$  ג.  $\frac{1}{3}$  ד.  $\frac{1}{3}$

סקיצות לשאלות 15-17:



18

19 א. 3 ב.  $y = 3x - 1$

20  $P\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$  21 א. מקסימום:  $x = -5$  מינימום:  $x = 5$

22  $A = 16$  23  $A = 3$  24 א.  $a = 4$ , מינימום:  $(2, 4)$

25 א.  $\left(1\frac{1}{3}, 3\frac{1}{8}\right)$  ב.  $(-2, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ג. עולה:  $0 < x < \frac{4}{3}$  יורדת:  $x > \frac{4}{3}, x < 0$