

שאלון 471

אנליזה של פונקצית שורש

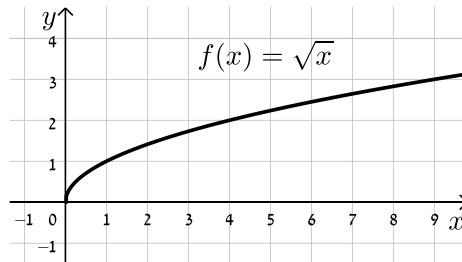
תוכן העניינים:

2.....	משוואות עם שורש ריבועי:
2.....	סיכום כללי:
3.....	שאלות:
4.....	תשובות סופיות:
5.....	אי-שוויונות ממעלה ראשונה:
5.....	סיכום כללי:
5.....	שאלות:
6.....	תשובות סופיות:
7.....	אי-שוויונות ממעלה שנייה:
7.....	סיכום כללי:
7.....	שאלות:
8.....	תשובות סופיות:
9.....	הנגזרת של פונקצית השורש הריבועי:
9.....	סיכום כללי:
9.....	שאלות:
10.....	תשובות סופיות:
11.....	חקירת פונקצית שורש:
11.....	סיכום כללי:
12.....	שאלות:
15.....	תשובות סופיות:
16.....	שאלות עם פרמטרים:
16.....	שאלות:
16.....	תשובות סופיות:

משוואות עם שורש ריבועי:

סיכום כללי:

הצורה הכללית של פונקצית השורש:



תחום ההגדרה של פונקצית השורש היסודית:

תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x}$ הוא $x \geq 0$.

תחום ההגדרה של פונקציה מהצורה: $f(x) = \sqrt{ax+b}$ הוא: $x \geq -\frac{b}{a}$.

עקרונות בפתרון משוואות עם שורשים:

כדי לפתור משוואה הכוללת את הביטוי $\sqrt{x}$ נבצע:

- (1) בידוד האיבר $\sqrt{x}$ (ניתן גם לבודד אותו עם מקדם מספרי, למשל: $3\sqrt{x}$)
- (2) העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה.
- (3) מציאת x (לעיתים ייתכן פתרון בודד ולעיתים יתכנו מספר פתרונות).
- (4) בדיקה של ערך/ערכי ה- x ע"י הצבה במשוואה לפניי ההעלאה בריבוע.

הערה:

במקרים מסוימים בהם יתקבל פתרון יחיד, נדלג על הבדיקה (שלב 4).

שאלות:

חזרה על טכניקה בפתרון משוואות עם שורשים:

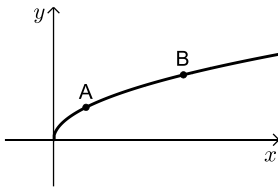
(1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\sqrt{x} = 5$	ב. $\sqrt{x} - 1 = 3$
ג. $\sqrt{2x} = 3$	ד. $2\sqrt{x} = 14$
ה. $2\sqrt{x} - 1 = 0$	ו. $3\sqrt{x} - 28 = 2$

(2) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $x - \sqrt{x} = 0$	ב. $3x - 6\sqrt{x} = 0$
ג. $\frac{4}{\sqrt{x}} = 1$	ד. $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$

(3) בציור הבא מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ ועליו נקודות A ו-B.



א. ידוע כי שיעור ה- x בנקודה A הוא 1.

מה הוא שיעור ה- y של הנקודה A?

ב. שיעור ה- x של הנקודה B הוא 9.

כתבו את שיעורי הנקודה B.

ג. קבעו אלו מבין הנקודות הבאות יכול להימצא על גרף הפונקציה $f(x)$:

C(6,12) (1)

D(49,7) (2)

E(-4,16) (3)

ד. מצאו את שיעורי הנקודה F אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא 9.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 6 - \sqrt{x}$.

מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x} - 8x$.

מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\sqrt{2x+7} + 4 = x \quad (7)$$

$$\sqrt{2x+5} = 7 \quad (6)$$

$$\sqrt{x+6} - 2 = 2x \quad (9)$$

$$\sqrt{10x+6} + 9 = x \quad (8)$$

$$\sqrt{x+16} + 4 = 2x \quad (11)$$

$$\sqrt{24-x} + 3 = 2x \quad (10)$$

$$\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17} \quad (13)$$

$$2x = 16 - 3\sqrt{x-1} \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x} \quad (14)$$

תשובות סופיות:

$$x = 49 \text{ ד.} \quad x = 4.5 \text{ ג.} \quad x = 16 \text{ ב.} \quad x = 25 \text{ א.} \quad (1)$$

$$x = 100 \text{ ו.} \quad x = \frac{1}{4} \text{ ה.}$$

$$x = \frac{1}{16} \text{ ד.} \quad x = 16 \text{ ג.} \quad x = 0,4 \text{ ב.} \quad x = 0,1 \text{ א.} \quad (2)$$

$$F(81,9) \text{ ד.} \quad D - (2) \text{ ג. רק נקודה} \quad B(9,3) \text{ ג.} \quad y_A = 1 \text{ א.} \quad (3)$$

$$(0,6), (36,0) \quad (4)$$

$$(0,0), \left(\frac{1}{16}, 0\right) \quad (5)$$

$$x = 9 \quad (7)$$

$$x = 22 \quad (6)$$

$$x = 0.25 \quad (9)$$

$$x = 25 \quad (8)$$

$$x = 4.25 \quad (11)$$

$$x = 3.75 \quad (10)$$

$$x = 6 \quad (13)$$

$$x = 5 \quad (12)$$

$$x = 4, -3 \quad (14)$$

אי-שוויונות ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתרו את אי-השוויונות הבאים:

$$6x > 2(3x - 1) \quad (2)$$

$$45x - 26 > 109 \quad (1)$$

$$(x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20 \quad (4)$$

$$2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6) \quad (3)$$

$$4(6x - 8) < 8(3x - 4) \quad (6)$$

$$\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3} \quad (5)$$

$$\frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7 \quad (8)$$

$$\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x \quad (7)$$

תשובות סופיות:

(3) $x \neq$

(6) $x \neq$

(2) $x \leq$

(5) $x < 5$

(8) $x > -13$

(1) $x > 3$

(4) $x > -2$

(7) $x \geq 12$

אי-שוויונות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

שאלות:

פתרו את אי השוויונות הריבועיים הבאים:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| (1) $x^2 - 6x + 8 > 0$ | (2) $x^2 - 4x + 3 < 0$ |
| (3) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$ | (4) $-3x^2 + 2x + 1 \leq 0$ |
| (5) $-3x^2 + 13x - 12 \geq 0$ | |

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. פתרו את אי השוויון הבא: $2x^2 + 3x + 6 \geq 0$.
- ב. כיצד ישתנה הפתרון של סעיף א' אם מחליפים את סימן אי השוויון: $2x^2 + 3x + 6 < 0$?

פתרו את אי השוויונות הריבועיים הבאים:

- | | |
|----------------------------------|---|
| (7) $x^2 < 256$ | (8) $x^2 - 13x < -42$ |
| (9) $(x - 4)(x + 3) \geq 0$ | (10) $(x - 1)(x - 3) > 3x + 11$ |
| (11) $(x + 5)^2 + x(x + 1) > 31$ | (12) $(x - 7)^2 > (x + 2)(x + 3) + x(3 - x) - 29$ |
| (13) $(x + 1)^2 < x - 6$ | (14) $(x - 9)(x - 1) \leq 6(x^2 + 3) + x(2 - x)$ |

(15) נתונות הפונקציות הריבועיות: $f(x) = 5x^2 + 2$ ו- $g(x) = x^2 + 3x + 2$.

- א. מצאו את התחום בו מתקיים: $f(x) > 0$ ואת התחום בו מתקיים: $g(x) > 0$.
- ב. מצאו את התחום בו מתקיים: $f(x) > g(x)$.
- ג. באיזה תחום מתקיימים: $f(x) > g(x)$ וגם $g(x) > 0$?

תשובות סופיות:

(1) $x < 2, x > 4$

(2) $1 < x < 3$

(3) כל x .

(4) $x \leq -\frac{1}{3}, x \geq 1$

(5) $-\frac{4}{3} \leq x \leq 3$

(6) א. כל x . ב. אף x .

(7) $-16 < x < 16$

(8) $6 < x < 7$

(9) $x \leq -3, x \geq 4$

(10) $x < -1, x > 8$

(11) $x < -6, x > \frac{1}{2}$

(12) $x < 4, x > 18$

(13) אף x .

(14) כל x .

(15) א. $f(x)$: כל x , $g(x)$: $x < -2, x > -1$. ב. $x < 0, x > \frac{3}{4}$

ג. $x < -2, -1 < x < 0, x > \frac{3}{4}$.

הנגזרת של פונקצית השורש הריבועי:

סיכום כללי:

כלל הגזירה של פונקצית השורש:

הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ היא: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$

ג. $f(x) = 3x - \sqrt{x}$

ה. $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x+1}$

ג. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$

ה. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$

ז. $f(x) = x^2 \sqrt{1-2x}$

ב. $f(x) = -3\sqrt{x}$

ד. $f(x) = 4\sqrt{x} + 4x + 3$

ו. $f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^2$

ב. $f(x) = \sqrt{2x}$

ד. $f(x) = \sqrt{10-3x}$

ו. $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$

ח. $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

תשובות סופיות:

$$f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב.}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 4 \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{12\sqrt{x}} - \frac{2}{3}x \quad \text{ה.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ו.}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ז.}$$

$$f'(x) = 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ח.}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad \text{ט.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{א. (1)}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב.}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ד. (2)}$$

$$f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}} \quad \text{ה.}$$

$$f'(x) = \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2 + 7x}} \quad \text{ו.}$$

$$f'(x) = \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ז.}$$

חקירת פונקציות שורש:

סיכום כללי:

שלבי החקירה של פונקציות השורש:

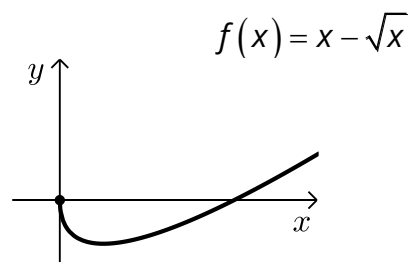
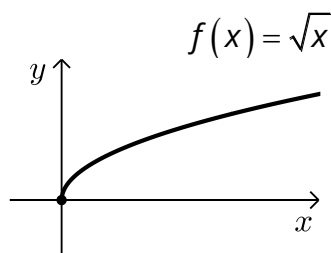
- (1) מציאת תחום ההגדרה.
- (2) מציאת נקודות הקיצון וקביעת סוגן.
- (3) כתיבת תחומי העלייה והירידה.
- (4) מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- (5) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

הערות:

- בשאלות שונות נקבל סעיפי חקירה חלקיים או מלאים (תלוי בשאלה) ולעיתים ייתכן גם שילוב של חקירה חלקית ושימוש במשיקים.
- בשאלות מסוימות לא נדרש לצייר סקיצה של גרף הפונקציה אלא לבחור סקיצה נכונה מבין מספר אפשרויות. במקרים אלו נבחן את תוצאות סעיפי החקירה ונאתר את הסקיצה הנכונה.

נקודות קיצון קצה ונקודות קיצון מקומיות:

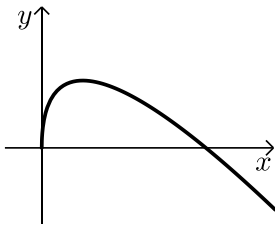
פונקציות עם שורשים מהצורה $\sqrt{x}$ כוללות תחום הגדרה שהוא $x \geq 0$. במקרים אלו נבחין כי הפונקציה 'מתחילה' מהנקודה שבה $x = 0$ ומתקדמת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .



נקודת ההתחלה נקראת **נקודת קיצון הקצה** של הפונקציה או: **קיצון קצה**.

- מקסימום קצה: נקודה אשר הפונקציה מתחילה ממנה ויורדת אחריה.
- מינימום קצה: נקודה אשר הפונקציה מתחילה ממנה ועולה אחריה.

שאלות:



(1) בציור הבא מתוארת הפונקציה: $f(x) = 12\sqrt{x} - x$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה)?
- כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) מצאו את נקודות המקסימום והמינימום (המקומיות וקיצון הקצה) של הפונקציות הבאות. פרטו בכל פונקציה אלו נקודות הן מקומיות ואלו נקודות הן קצה.

א. $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x}{8} + 2$

ב. $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$

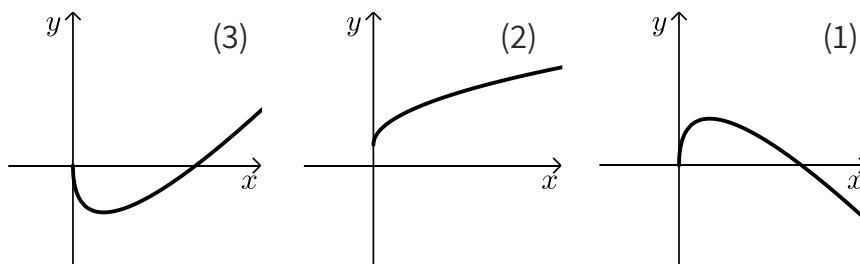
ג. $f(x) = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3\sqrt{x} - 6$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- כתבו את נגזרת הפונקציה.
- (1) האם יש לפונקציה נקודת קיצון (פנימית)? אם כן מצאו אותה.
- (2) הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

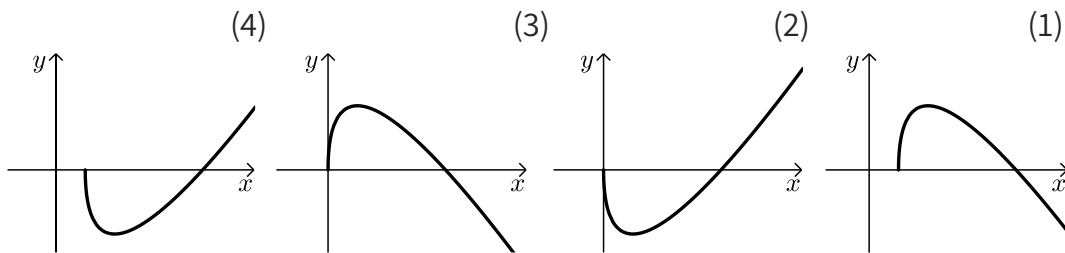
(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x - 3\sqrt{x}$.

- כתבו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבעו את סוגה.
- כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. לפניכם 3 סקיצות (1)-(3) של פונקציות שונות. קבעו איזו מהן מתאימה לפונקציה $f(x)$.



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = 12\sqrt{x} - 3x$.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- לפניכם רשימה של נקודות על ציר ה- x : $(0,0)$, $(4,0)$, $(16,0)$, $(144,0)$. קבעו אלו מהן נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$. נמקו.
- מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.
- רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- אחד מן הגרפים (1)-(4) שלפניכם מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו את קביעתכם.



(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x - 8\sqrt{x} + 9$.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x ? נמקו.
- קבעו בכמה נקודות כל אחד מהישרים הבאים חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

(1) הישר: $y = -1$.

(2) הישר: $y = 10$.

(3) הישר: $y = 1$.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{2x-13}$.

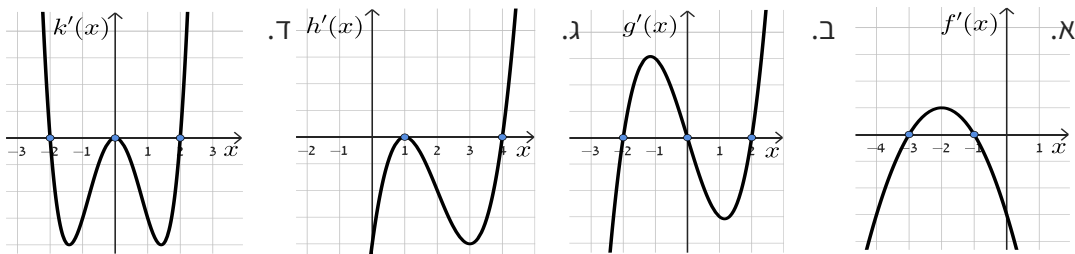
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) הראו כי הפונקציה $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = f(x+3)$.
 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = ax \cdot \sqrt{12-x}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. (1) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4$ הוא 9. מצאו את a .
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ה. נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x) - k$, הפונקציה $g(x)$ משיקה לציר ה- x .
 מצאו את k .

(9) לפניכם הגרפים של הפונקציות $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$, $k'(x)$

שהן פונקציות הנגזרת של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ בהתאמה.
 מצאו על פי הנתונים שבסרטוט את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ וקבעו את סוגן.



תשובות סופיות:

(1) א. $x \geq 0$ ב. $\min(0,0)$ קצה, $\max(36,36)$

ג. עולה: $0 < x < 36$, יורדת: $x > 36$ ד. $(0,0)$, $(144,0)$

(2) א. $\min(0,2)$ קצה, $\max(64,10)$ ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(1,-3)$

ג. $\max(0,-1)$ קצה, $\min\left(\frac{1}{36}, -1\frac{1}{24}\right)$ (מקומי).

(3) א. $x \geq 0$ ב. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ ג. (1) אין נקודות קיצון פנימיות.

ג. (2) הוכחה.

(4) א. $x \geq 0$ ב. $\min\left(2\frac{1}{4}, -2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $x > 2\frac{1}{4}$, יורדת: $0 < x < 2\frac{1}{4}$

ד. $(0,0)$, $(9,0)$ ה. סקיצה (3).

(5) א. $x \geq 0$ ב. $(0,0)$ ו- $(16,0)$ ג. $\max(4,12)$

ד. עולה: $0 < x < 4$, יורדת: $x > 4$ ה. סקיצה (3).

(6) א. $x \geq 0$ ב. $\min(4,1)$ ג. עולה: $x > 4$, יורדת: $0 < x < 4$

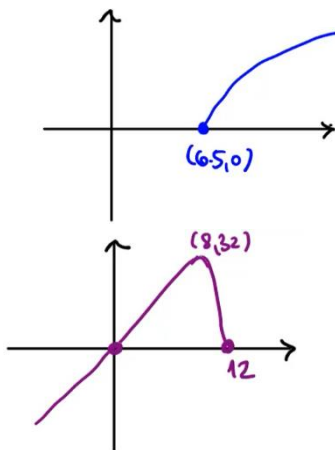
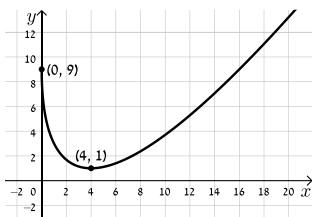
ד. $(0,9)$ ה. להלן סקיצה:

ו. לא.

ז. i. 0 נקודות, ii. נקודה אחת, iii. נקודה אחת.

(7) א. (1) $x \geq 6.5$ א. (2) $(6.5,0)$ א. (3) ראו בסרטון.

א. (4) להלן סקיצה: ב. $x \geq 3.5$



(8) א. $x \leq 12$ ב. (1) $a = 2$ ב. (2) $(0,0)$, $(12,0)$

ג. $\max(8,32)$, $\min(12,0)$ ד. להלן סקיצה:

ה. $k = 32$

(9) $f(x)$: $\min: x = -3$, $\max: x = 1$ $g(x)$: $\min: x = -2, 2$, $\max: x = 0$

$h(x)$: $\min: x = 4$ $k(x)$: $\max: x = -2$, $\min: x = 2$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

(1) לגרף הפונקציה: $f(x) = ax + \sqrt{x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x = 4$ ושיפועו הוא 1.

א. מצאו את ערך הפרמטר a .

ב. כתבו את משוואת המשיק.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x} + bx$, b הוא פרמטר.

ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון פנימית עבור $x = 1$.

א. מצאו את b .

ב. כתבו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית.

ג. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון.

תשובות סופיות:

(1) א. $a = \frac{3}{4}$ ב. $y = x + 1$

(2) א. $b = -1$ ב. $(1, 1)$ ג. $y = 1$