

שאלון 471

אנליזה של פונקצית פולינום

תוכן העניינים:

2	כללי הגזירה:
2	סיכום כללי:
2	שאלות:
3	תשובות סופיות:
4	שיפוע משיק לגרף הפונקציה:
4	סיכום כללי:
4	שאלות:
5	תשובות סופיות:
6	מציאת נקודת השקה לפי שיפוע משיק:
6	סיכום כללי:
6	שאלות:
6	תשובות סופיות:
7	מציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה:
7	סיכום כללי:
7	שאלות:
8	תשובות סופיות:
9	חקירת פונקצית פולינום:
9	סיכום כללי:
11	שאלות:
15	תשובות סופיות:
17	חקירה בתחום סגור:
17	סיכום כללי:
18	שאלות:
18	תשובות סופיות:
19	שאלות עם פרמטרים:
19	סיכום כללי:
19	שאלות:

כללי הגזירה:

סיכום כללי:

פונקצית הנגזרת:

בהינתן הפונקציה $y = x^n$ כאשר n מספר טבעי, הנגזרת שלה תחושב: $y' = n \cdot x^{n-1}$.

כללים:

- בפונקציה עם מקדם: $y = Ax^n$, נכפול את הנגזרת פי מקדם זה: $y' = A \cdot nx^{n-1}$.
- בפונקציה עם מספר מחוברים נגזור כל מחובר בנפרד.
- נגזרת של מספר קבוע היא 0.

שאלות:

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y = x^2$	ב. $y = x^3$	ג. $y = x^6$
ד. $y = 4x^3$	ה. $y = 12x^4$	ו. $y = \frac{1}{2}x^2$
ז. $y = 7$	ח. $y = -3x^2$	ט. $y = -\frac{1}{3}x^3$

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 7x^2 + 23x - 6$	ב. $f(x) = 6x^2 + 8x + 4$
ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3$	ד. $f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$

(3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y = 5x^2 - 3x$	ב. $y = 3x^3 + 14x$
ג. $y = \frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5$	ד. $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{7}x^5$

(4) גזרו את הפונקציות הבאות:

ב. $y = x^2(3-x)$

א. $y = (x-2)(x+3)$

ד. $y = 3x(x-1)^2$

ג. $y = (x+2)^2$

תשובות סופיות:

(1) א. $y' = 2x$ ב. $y' = 3x^2$ ג. $y' = 6x^5$ ד. $y' = 12x^2$ ה. $y' = 48x^3$

ו. $y' = -x^2$ ז. $y' = 0$ ח. $y' = -6x$ ט. $y' = -x^2$

(2) א. $f'(x) = 14x + 23$ ב. $f'(x) = 12x + 8$ ג. $f'(x) = x - 3x^2$ ד. $f'(x) = \frac{1}{2}x^3$

(3) א. $y' = 10x - 3$ ב. $y' = 9x^2 + 14$ ג. $y' = 2x^5 - 2x^4$

ד. $y' = \frac{2}{3}x^3 - \frac{15}{7}x^4$

(4) א. $y' = 2x + 1$ ב. $y' = 6x - 3x^2$ ג. $y' = 2x + 4$

ד. $y' = 9x^2 - 12x + 3$

שיפוע משיק לגרף הפונקציה:

סיכום כללי:

הנגזרת של פונקציה בנקודה שבה $x = x_0$ מסוים תיתן את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה. מקובל לקרוא לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה גם בשם **שיפוע הפונקציה** בנקודה שבה $x = x_0$. מתמטית נרשום: $f'(x_0) = m$.

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה: $y = x^2$.

א. מצאו את נגזרת הפונקציה.

ב. חשבו את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x = 3$.

(2) נתונה הפונקציה: $y = 5x^2 - 2x$.

א. מצאו את נגזרת הפונקציה.

ב. חשבו את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x = -2$.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 4x + 2$.

חשבו את: $f'(3)$, $f'(-1)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

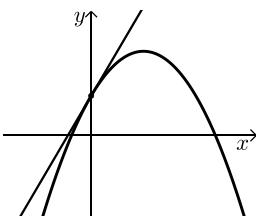
(4) חשבו את שיפוע המשיק לפונקציה $y = 2x^4 - x$ בנקודה $x = 1$.

(5) נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 6x + 8$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- y .



תשובות סופיות:

(1) א. $y' = 2x$ ב. $y'(3) = 6$

(2) א. $y' = 10x - 2$ ב. $y'(-2) = -22$

(3) $f'(3) = 50$, $f'(-1) = 2$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2.5$

(4) $m = y'(1) = 7$

(5) א. $(0, 8)$ ב. $m = 6$

מציאת נקודת השקה לפי שיפוע המשיק:

סיכום כללי:

כדי למצוא נקודת השקה בהינתן שיפוע הפונקציה (או שיפוע המשיק לגרף הפונקציה) בנקודה זו, נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לשיפוע הנתון. מהמשוואה המתקבלת נמצא את שיעור/י ה- x של נקודות ההשקה. נציב את שיעורי ה- x שהתקבלו מפתרון המשוואה בפונקציה המקורית $f(x)$ כדי למצוא את שיעור ה- y ולכתוב את שיעורי הנקודות המלאים.

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 + 9x - 3$.

א. מצאו נקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא 17.

ב. מצאו נקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא 0.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 9x$.

א. חשבו את $f'(1)$.

ב. חשבו את ערכי x עבורם מתקיים: $f'(x) = 3$.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-5)(x+1)^2$.

א. מצאו את שיעורי הנקודות שבהן שיפוע הפונקציה הוא אפס.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא -12.

תשובות סופיות:

(1) א. $(2, 23)$ ב. $\left(-2\frac{1}{4}, -13\frac{1}{8}\right)$

(5) א. $f'(1) = -6$ ב. $x = \pm 2$

(6) א. $(-1, 0)$, $(3, -32)$ ב. $(1, -16)$

מציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה:

סיכום כללי:

- כדי למצוא משוואת משיק נעזר בנוסחה לכתיבת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$ כאשר (x_1, y_1) הם שיעורי נקודה ההשקה ו- m הוא שיפוע הישר.
- בשאלות שבהן נקודת ההשקה נתונה, נמצא את השיפוע ע"י הנגזרת (הצבת הנקודה בנגזרת).
 - בשאלות שבהן השיפוע נתון, נמצא את נקודת ההשקה ע"י השוואת הנגזרת לשיפוע הנתון.

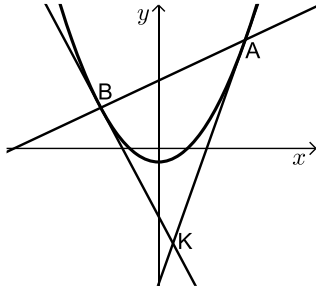
שאלות:

- לפונקציה $y = 3x^2$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x = 2$. כתבו את משוואתו.
- מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{x^3 + 12x}{3}$ בנקודה שבה $x = -1$.
- מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $y = 2x^2 + 5x - 3$ בנקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x .
- לגרף הפונקציה $y = 3x^2 - 5x + 8$ מעבירים משיק ששיפועו 7.
 - מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.
 - כתבו את משוואת המשיק.
- מצאו נקודה על גרף הפונקציה $y = x^2 - 2x - 1$ שבה המשיק מקביל לציר ה- x .

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 9x + 4$.

מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה המקבילים לישר $y = 8x - 2$.

(7) הישר $y = x + 5$ חותך את גרף הפרבולה $y = x^2 - 1$ בנקודות A ו-B (ראו איור).



מעבירים משיקים לגרף הפרבולה בנקודות A ו-B. המשיקים נפגשים בנקודה K.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצאו את משוואות המשיקים.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה K.

תשובות סופיות:

(1) $y = 12x - 12$

(2) $y = 5x + \frac{2}{3}$

(3) $y = -7x - 21$ ו- $y = 7x - 3\frac{1}{2}$

(4) א. $(2, 10)$ ב. $y = 7x - 4$

(5) $(1, -2)$

(6) $y = 8x + 4\frac{4}{27}$ ו- $y = 8x + 4$

(7) א. $A(3, 8)$, $B(-2, 3)$ ב. $y = -4x - 5$ ו- $y = 6x - 10$ ג. $K\left(\frac{1}{2}, -7\right)$

חקירת פונקציות פולינום:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

פונקציה המורכבת מ-'חוליות' של x -ים בחזקות שונות, כאשר כל החזקות הן מספרים טבעיים, נקראת פונקציה פולינומית.

דוגמאות: $f(x) = x^2 + 7x + 10$, $f(x) = x^3 - x^2 + 4$, $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{x}{2}$.

הערה:

לעיתים נקבל פונקציות פולינום אשר יש לסדר אותן תחילה.

תחום ההגדרה של פונקציות הפולינום:

פונקציה פולינומית מוגדרת לכל ערך של x .

תחומי עליה וירידה של פונקציה:

- תחום עלייה הוא כזה שבו ערכי הפונקציה גדלים ככל שמתקדמים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- תחום ירידה הוא כזה שבו ערכי הפונקציה קטנים ככל שמתקדמים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

נקודות מינימום ומקסימום של פונקציה:

- נקודת מקסימום היא נקודה שעד אליה הפונקציה עולה ואחריה הפונקציה יורדת.
- נקודת מינימום היא נקודה שעד אליה הפונקציה יורדת ואחריה הפונקציה עולה.
- נקודות מקסימום ומינימום של פונקציה נקראות:

נקודות הקיצון המקומיות (פנימיות) של הפונקציה.

- בנקודות הקיצון, הפונקציה משנה את מגמת ההתקדמות שלה (מעלייה לירידה, או מירידה לעלייה).

כתיבת תחומי עלייה וירידה באמצעות הנגזרת:

נתונה פונקציה $f(x)$ ונתונה נקודה (x_0, y_0) על גרף הפונקציה.

- אם נגזרת הפונקציה בנקודה, $f'(x_0)$, היא חיובית אז הפונקציה במגמת עלייה.
- אם נגזרת הפונקציה בנקודה, $f'(x_0)$, היא שלילית אז הפונקציה במגמת ירידה.

בקצרה:

- אם: $f'(x_0) > 0$ אז $f(x)$ עולה.
- אם: $f'(x_0) < 0$ אז $f(x)$ יורדת.

נקודות קיצון:

נקודות קיצון של פונקציה הן נקודות אשר מאפסות את נגזרת הפונקציה והפונקציה משנה את מגמת ההתקדמות שלה לפניהן ואחריהן.

אם נקודה $A(x_0, y_0)$ מקיימת: $f'(x_0) = 0$ והפונקציה עולה לפני A ויורדת אחריה, או להיפך, אז נאמר כי הנקודה $A(x_0, y_0)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה.

- אם הפונקציה יורדת לפני הנקודה A ועולה אחריה, אז A היא **נקודת מינימום**.
- אם הפונקציה עולה לפני הנקודה A ויורדת אחריה, אז A היא **נקודת מקסימום**.

טבלת תחומי עלייה וירידה:

כשאנו מקבלים פונקציה $f(x)$ ומוצאים את הנקודות שמאפסות את נגזרתה ($f'(x) = 0$) דרך נוחה לתאר את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה תהיה באמצעות טבלת תחומי עלייה וירידה.

כללים למציאת נקודות קיצון וקביעת סוג הקיצון:

- (1) נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס: $f'(x) = 0$.
- (2) נפתור את המשוואה שהתקבלה ונמצא את שיעורי ה- x של הנקודות החשודות לקיצון.
- (3) נמצא את שיעורי ה- y של כל הנקודות שהתקבלו ונרשום אותן במלואן.
- (4) נקבע את סוג הקיצון (מקסימום או מינימום) ע"י טבלת תחומי עלייה וירידה.

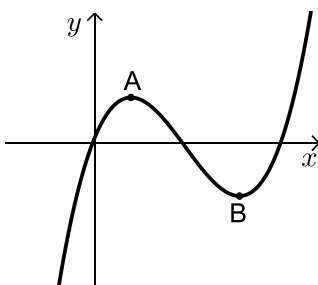
שלבי חקירה מלאה:

- (8) מציאת/כתיבת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (9) מציאת נקודות הקיצון וקביעת סוגן (מקסימום או מינימום).
- (10) כתיבת תחומי עלייה וירידה.
- (11) מציאת נקודות חיתוך עם צירים (במידה וישנן).
- (12) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות:

מציאת נקודות קיצון וקביעת תחומי עלייה וירידה:

- (1) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x^2 - 10x + 21$.
א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
ב. באלו תחומים הפונקציה עולה ובאילו תחומים היא יורדת?



- (2) לפניכם גרף הפונקציה: $y = x^3 - 15x^2 + 48x + 6$.
הנקודה A היא נקודת המקסימום של הפונקציה והנקודה B היא נקודת המינימום שלה.
א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.
ב. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3) מצאו את נקודות הקיצון (הפנימיות) וכתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

א. $y = -2x^3 + 12x^2$

ב. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

(4) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + x + 3$

א. הראו כי לפונקציה אין נקודות קיצון כלל.

ב. הוכיחו כי הפונקציה עולה לכל ערך של x .

חקירת פונקציה:

(5) נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 9x + 8$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) חקרו את הפונקציה: $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ לפי הסעיפים הבאים:

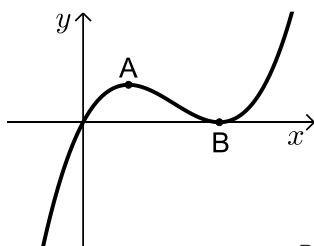
א. תחום הגדרה.

ב. נקודות מינימום ומקסימום.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.



(7) באיור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $y = x(x-1)^2$

לפונקציה מקסימום מקומי בנקודה A

ומינימום מקומי בנקודה B.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. עבור אילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה ב:

i. שלוש נקודות.

ii. שתי נקודות.

iii. נקודה אחת.

(8) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצאו את נקודות המינימום ונקודות המקסימום של הפונקציה.
- כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- נתון הישר $y = k$. בכמה נקודות חותך הישר את גרף הפונקציה בכל מקרה:

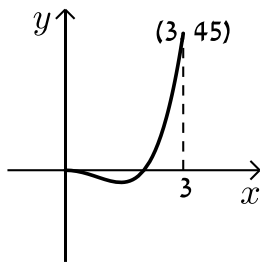
i. $k = -2$

ii. $k = 8$

iii. $k = 12$

(9) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:



- תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
 - התבססו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$.
 - (הוסיפו את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטתם בסעיף הקודם).

(10) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$.

- א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0 : 4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמקו באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמכו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים והוסיפו לסקיצה שסרטטתם בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4 : 0]$.
- ד. הוכיחו כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

(11) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x^3 - 9x$.

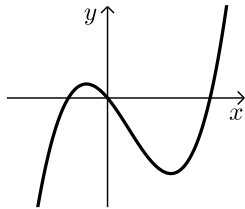
- א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0 : 5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבססו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את הפונקציה בתחום: $[-5 : 5]$ (הוסיפו את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5 : 0]$ לגרף שסרטטתם בסעיף הקודם).

(12) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$.

- א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[-4 : 0]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - i. תחום הגדרה.
 - ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
 - iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמקו ע"י חישוב מתאים.
- ג. הסתמכו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים והוסיפו לסקיצה שעשיתם את גרף הפונקציה בתחום $[0 : 4]$.

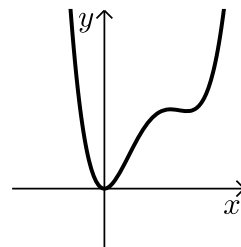
תשובות סופיות:

- (1) א. $\min(5, -4)$ ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$.
- (2) א. $x_A = 2, x_B = 8$ ב. עולה: $x < 2, x > 8$, יורדת: $2 < x < 8$.
- (3) א. $\max(4, 64), \min(0, 0)$, עולה: $0 < x < 4$, יורדת: $x < 0, x > 4$.
- ב. $\max(-2, 20), \min(1, -7)$, עולה: $x > 1, x < -2$, יורדת: $-2 < x < 1$.
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. הנגזרת חיובית לכל ערך של x ולכן הפונקציה תמיד עולה.
- (5) א. כל x ב. $\min\left(4\frac{1}{2}, -12\frac{1}{4}\right)$ ג. $(0, 8), (1, 0), (8, 0)$
- ד. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.
- (6) א. כל x ב. $\max(-1, 5), \min(3, -27)$ ג. עולה: $x > 3, x < -1$, יורדת: $-1 < x < 3$
- ד. $(0, 0)$ ה. להלן סקיצה:



- (7) א. $A\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), B(1, 0)$ ב. (i) $0 < k < \frac{4}{27}$
- ב. (ii) $k = 0, \frac{4}{27}$ ב. (iii) $k < 0, k > \frac{4}{27}$
- (8) א. כל x ב. $\min\left(2\frac{1}{2}, 7\frac{13}{16}\right), \max(2, 8), \min(0, 0)$
- ג. עולה: $0 < x < 2, x > 2\frac{1}{2}$, יורדת: $2 < x < 2\frac{1}{2}$, $x < 0$ ד. $(0, 0)$.

- ה. להלן סקיצה:
- ו. (i) אף נקודה.
ו. (ii) 3 נקודות שונות.
ו. (iii) 2 נקודות שונות.



- (9) א. i. $0 \leq x \leq 3$ ii. $(0, 0), (2, 0)$ iii. $\max(3, 45)$ קצה, $\min(\sqrt{2}, -4)$
- iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ v. סרטוט בסוף.
- ב. סעיף הוכחה. ג. סרטוט בסוף.

- (10)** א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$,
נקודות קיצון: $\max(4, 4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$, סרטוט בסוף.
ב. זוגית. ג. סרטוט בסוף. ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.
- (11)** א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$,
נקודות קיצון: $\max(5, 330)$ קצה, $\min(1, -6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$, סרטוט סוף.
ב. אי-זוגית. ג. סרטוט בסוף.
- (12)** א. i $-4 \leq x \leq 0$, ii $(-1,0)$, $(0,0)$, iii $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723, 0.207)$,
 $\min(-4, -5460)$ קצה. iv. עולה: $-4 < x < -0.723$, יורדת: $-0.723 < x < 0$,
v. סרטוט בסוף. ג. אי-זוגית. ד. סרטוט בסוף.

חקירה בתחום סגור:

סיכום כללי:

חקירה בתחום סגור:

- למדנו כי פונקצית הפולינום מוגדרת לכל x , כלומר עבור כל ערך של x נקבל ערך y כלשהו.
- לעיתים מקובל לתחום את הפונקציה בתחום מסוים, למשל: $2 \leq x \leq 8$, $x > 7$ וכו'.
- תחום סגור - מסומן עם סוגריים מרובעות: $[2, 6] \rightarrow 2 \leq x \leq 6$ וכולל את קצוות התחום.
 - תחום פתוח - מסומן עם סוגריים עגולות: $(2, 6) \rightarrow 2 < x < 6$ ואינו כולל את קצוות התחום.

נקודות קיצון פנימיות ונקודות קיצון קצה:

- נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) הן נקודות המתקבלות מאיפוס הנגזרת ושינוי מגמת ההתקדמות של הפונקציה לפנייה ואחריהן (בעצם, מה שעשינו עד כה).
- נקודות קיצון קצה הן נקודות קצה התחום הסגור הנתון בשאלה.

סיכום:

- בחקירת פונקציה בקטע סגור נגדיר את נקודות הקיצון המוחלטות כך:
- נקודת מקסימום מוחלטת:
 - הנקודה הגבוהה ביותר מבין נקודות מקסימום הקצה והמקומיות.
 - נקודת מינימום מוחלטת:
 - הנקודה הנמוכה ביותר מבין נקודות מינימום הקצה והמקומיות.

הערה:

ייתכן ותהיינה יותר מנקודת מקסימום מוחלטת אחת או יותר מנקודת מינימום מוחלטת אחת.

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x + 10$ בקטע $[0, 4]$.

- א. מצאו את שיעורי נקודות הקצה של תחום ההגדרה.
- ב. מצאו את הנקודות שבהן הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.
- ג. ציינו את נקודות הקיצון המקומיות והמוחלטות של הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ בקטע $[-3, 2]$.

מצאו את נקודות הקיצון המוחלטות והמקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x - x^3$ בקטע $[-3, 2]$.

מצאו את נקודות הקיצון המוחלטות והמקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.

תשובות סופיות:

(1) א. קצה $(0, 10)$, קצה $(4, 2)$ max ב. $\min(3, 1)$ מקומי

ג. $\max(0, 10)$ מוחלט, $\min(3, 1)$ מוחלט.

(2) $\min(-3, -26)$ מוחלט, $\max(2, 29)$ מוחלט.

(3) $\max(-3, 18)$ מוחלט, $\min(-1, -2)$ מוחלט, $\min(2, -2)$ מוחלט.

שאלות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

בשאלות שבהן נתון פרמטר, יש לבצע את כל הפעולות האלגבריות שלמדנו עם התייחסות לפרמטר כאל מספר.

לאחר שמצאנו את ערכו של הפרמטר, נזכור לכתוב את הפונקציה ואת הנגזרת פעם נוספת בטרם נמשיך בפתרון השאלה.

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה: $y = ax^2 + 3$, a הוא פרמטר.

א. מצאו את a אם ידוע כי $y'(-1) = 4$.

ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 4$.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + kx + 1$, k הוא פרמטר.

א. מצאו את k אם ידוע כי שיפוע המשיק בנקודה שבה $x = -1$ הוא 2.

ב. מצאו נקודה נוספת שבה: $f'(x) = 2$.

ג. כתבו את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ שבהם $f'(x) = 2$.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{Ax^3}{3} - 2x^2 - x - 1$, A הוא פרמטר.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ מקביל לישר $y = 5x + 3.5$.
מצאו את משוואת המשיק.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 + bx^2 - 48x + 12$, b הוא פרמטר.

שיעור ה- x של הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא 2.
מצאו את ערכו של b והראו שהנקודה היא נקודת מינימום.

(5) לפונקציה: $f(x) = mx^3 - 3x^2$ (m פרמטר) יש נקודת קיצון שבה: $x = 1$.

א. הוכיחו שנקודה זו היא נקודת מינימום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = -2$.

(6) לפניכם הפונקציה: $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקרו את הפונקציה בתחום: $[-2; 0]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,

מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?

נמקו באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמכו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את גרף הפונקציה

בתחום: $[-2; 2]$.

(7) לפניכם הפונקציה הבאה: $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$, פרמטר b .

ידוע כי הישר $y = 2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x) = 0$.

א. מצאו את b וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0; 2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.

נמקו את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמכו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים והוסיפו לסקיצה

של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2; 0]$.

תשובות סופיות:

(1) א. $a = -2$ ב. $y = -16x + 35$

(2) א. $k = -1$ ב. $(1, 1)$ ג. $y = 2x - 1, y = 2x + 3$

(3) $y = 5x - 19$ (הערך של A הוא 2).

(4) $b = 6$

(5) א. הוכחה. (מתקבל: $m = 2$) ב. $y = 36x + 44$

6) א. $a = 0$ ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים: $(-1.225, 0), (0, 0)$,

נקודות קיצון: $\min(-2, -80)$, $\max(-1, 1)$, $\min(0, 0)$, קצצה,

עולה: $-2 < x < -1$, יורדת: $-1 < x < 0$. סרטוט בסוף.

ג. זוגית. ד. סרטוט בסוף.

7) א. $b = 0$ ב. i $0 \leq x \leq 2$, ii $(0, 0), (1.29, 0)$, iii $\min(2, -56)$, $\max(1, 2)$, קצצה,

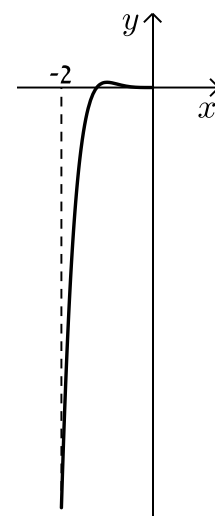
iv. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x < 2$. v. סרטוט בסוף.

ג. אי-זוגית. ד. סרטוט בסוף.

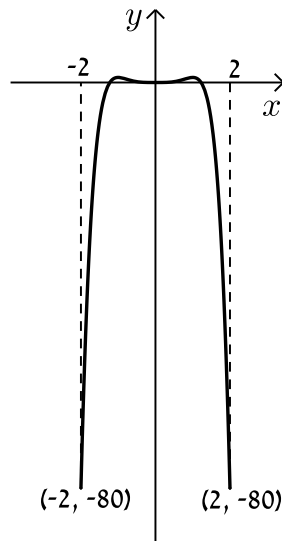
סרטוטים:

שאלה 6:

סעיף א'

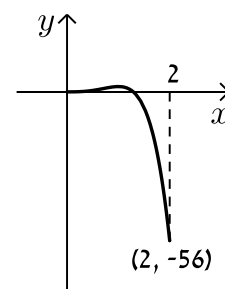


סעיף ג'



שאלה 7:

סעיף א'



סעיף ד'

