שאלון 571

גיאומטריה במערכת הצירים

תוכן העניינים:

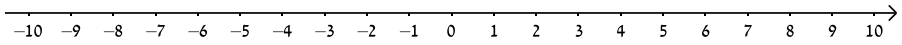
תזכורת מחטיבת הביניים: 2
סיכום כללי: 2
שאלות: 5
תשובות סופיות: 5
מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית: 6
סיכום כללי: 6
שאלות: 7
תשובות סופיות: 9
משוואת הישר: 10
סיכום כללי: 10
שאלות: 11
תשובות סופיות: 13
מצבים הדדיים בין ישרים: 15
סיכום כללי: 15
שאלות: 16
תשובות סופיות: 17
המעגל הקנוני: 18
סיכום כללי: 18
שאלות: 20
תשובות סופיות: 21
הזזה של מעגל קנוני במערכת הצירים: 22
סיכום כללי: 22
שאלות: 23
תשובות סופיות: 23

תזכורת מחטיבת הביניים:

סיכום כללי:

ציר המספרים:

ציר המספרים הוא ישר עליו מסודרים המספרים החיוביים, המספרים השליליים והאפס.

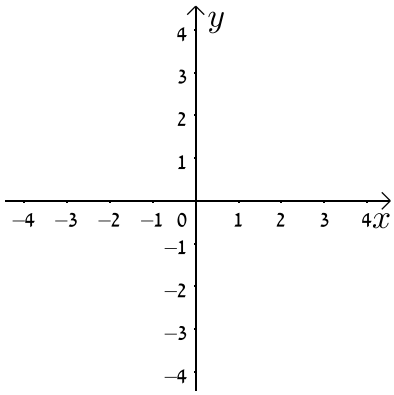


הערות:

- המרווחים בין המספרים לאורך הציר הם קבועים ואורכם הוא יחידת המידה של הציר.
- קווי החלוקה נקראים בשם **שנתות**.

מערכת הצירים:

מערכת הצירים במישור מורכבת משני צירי מספרים המאונכים זה לזה.
לציר האופקי קוראים בשם "ציר ה- x " ולציר האנכי קוראים בשם "ציר ה- y ".



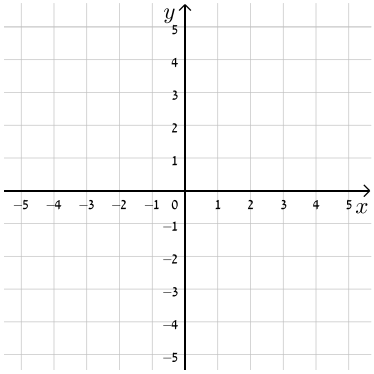
הערות:

- נקודת המפגש שבין הצירים נקראת "ראשית הצירים".
- קנה המידה על הצירים לא חייב להיות זהה על שני הצירים, אך חייב להישמר לאורך כל הציר.
- כאשר משתמשים במערכת צירים לצורך ייצוג צורות הנדסיות שונות חשוב להקפיד על קנה מידה זהה בשני הצירים.

נקודה במערכת הצירים:

שיעורי נקודה במערכת הצירים זוג סדור של שני מספרים הנקראים שיעורי הנקודה.
מהנקודה מעבירים אנכים לצירים.

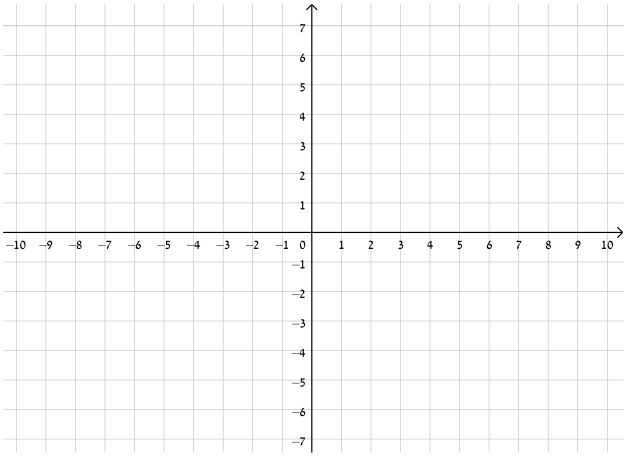
- מפגש האנך עם ציר ה- x יקבע את שיעור ה- x של הנקודה.
- מפגש האנך עם ציר ה- y יקבע את שיעור ה- y של הנקודה.



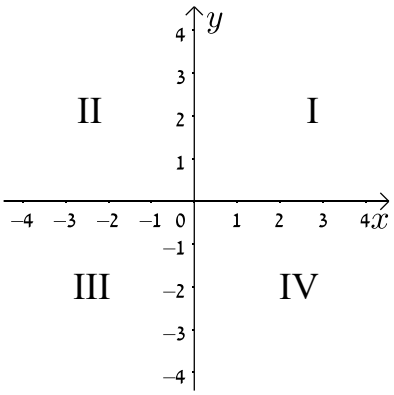
את הזוג הסדור כותבים באופן הבא: (x,y)
ונהוג לסמן אותה באות גדולה באנגלית, כגון A, B וכו'.

קווי רשת:

קווי הרשת במערכת צירים הם אנכים לצירים המאפשרים לחלק את המישור באופן שווה בין יחידות האורך של כל ציר.



רביעים במערכת הצירים:



הצירים מחלקים את המישור ל-4 אזורים הנקראים "רביעים".

- נקודה שבה: $x>0$, $y>0$ נמצאת ברביע ה-I.
- נקודה שבה: $x<0$, $y>0$ נמצאת ברביע ה-II.
- נקודה שבה: $x<0$, $y<0$ נמצאת ברביע ה-III.
- נקודה שבה: $x>0$, $y<0$ נמצאת ברביע ה-IV.

הערה:

- נקודות שעל הצירים אינן שייכות לאף רביע.

קטעים המקבילים לצירים:

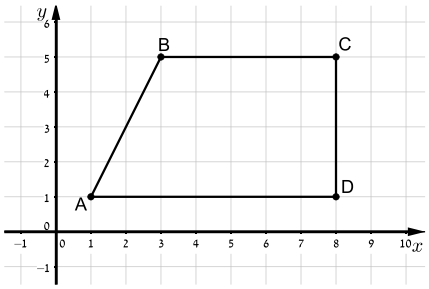
- קטע העובר דרך שתי נקודות עם אותו שיעור y הוא מקביל לציר ה-x.
- קטע העובר דרך שתי נקודות עם אותו שיעור x הוא מקביל לציר ה-y.

שאלות:

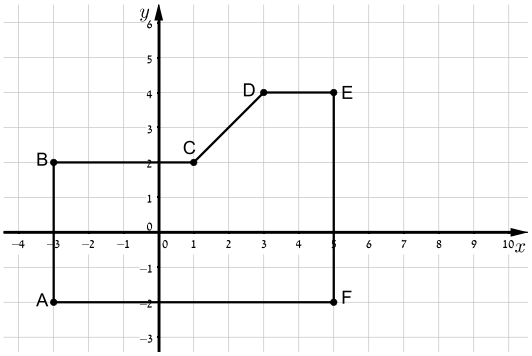
1) קבעו באיזה רביע נמצאות הנקודות.

$A(-1,5)$, $B(-3,8)$, $C(-20,16)$, $D(-13,12)$, $E(-12,13)$, $F(-6,7)$.

2) רשמו את שיעורי הנקודות בצורה הבאה:



3) רשמו את שיעורי הנקודות בצורה הבאה:



4) סרטטו במערכת צירים ריבוע שאורך צלעו היא 5 ואחד מקודקודיו נמצא בנקודה $(-1,4)$.

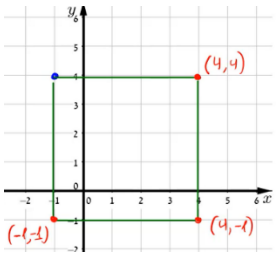
תשובות סופיות:

1) בכל הנקודות מתקבל $x<0$ ו- $y>0$ ולכן הן נמצאות ברביע השני (II).

2) $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(8,5)$, $D(8,1)$

3) $A(-3,-2)$, $B(-3,2)$, $C(1,2)$, $D(3,4)$, $E(5,4)$, $F(5,-2)$

4)



מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

אמצע קטע:

אמצע קטע שקצותיו הם $A(x_1,x_1)$ ו- $B(x_2,x_2)$ יחושב לפי ממוצע של שיעורי נקודות הקצה באופן הבא: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$; $x=\frac{x_1+x_2}{2}$.

הערות:

- מקובל לסמן באות כלשהי את שיעורי נקודת האמצע, למשל P,
  וכך הנוסחאות תיכתבנה באמצעות האותיות כך: $y_P=\frac{y_A+y_B}{2}$; $x_P=\frac{x_A+x_B}{2}$.
- כל נוסחה מתארת קשר בין 3 נעלמים. לכן בידיעת שניים מהם ניתן לחשב את השלישי. כאשר נקבל בשאלות את שיעורי אחת מהקצוות ואת שיעורי נקודת האמצע, נוכל לחשב את שיעורי נקודת הקצה השנייה.

נוסחת המרחק:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,x_1)$ ו- $B(x_2,x_2)$ יחושב לפי:

$$AB=d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

שיפוע ישר:

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות $A(x_1,x_1)$ ו- $B(x_2,x_2)$ הוא: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

שאלות:

1) מצאו את אמצעי הקטעים שקודקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$, $B(5,-8)$

ב. $A(-3,0)$, $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$, $B(-4,-5)$

ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)$, $B(-3,-1)$

ו. $A(4,7)$, $B(4,-12)$

2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.

מצאו את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$, $M(2,1)$

ב. $A(-6,-8)$, $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$, $M(4,-7)$

ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

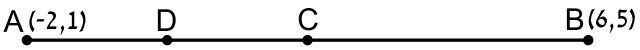
3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.

ידוע כי שיעורי הקודקודים B ו-C הם $C(6,1)$, $B(2,-4)$.

מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצאו את שיעורי הנקודה D.

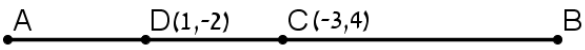
4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.

ידוע כי: $B(6,5)$, $A(-2,1)$. מצאו את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.

ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $A(2,-7)$,$B(-10,4)$ ו- $C(6,11)$ הן שלושה קודקודים של מקבילית ABCD.

מצאו את שיעורי הקודקוד הרביעי.

7) מצאו את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7),B(-3,7)$ ב. $A(6,2),B(1,2)$

ג. $A(-3,10),B(0,6)$ ד. $A(6,-9),B(1,3)$

ה. $A(4,7),B(13,-1)$ ו. $A(6,6),B(-9,-9)$

8) חשבו את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$, $B(4,9)$, $A(3,-2)$.

9) נתונות נקודות $B(6,y)$, $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצאו את y.

10) נתונות נקודות $B(15,-2)$, $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצאו את x.

11) נתונה נקודה B בربיע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצאו את שיעורי הנקודה B.

12) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך.
שיעורי הקודקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- y של הקודקודים B ו-C הוא 2-.
מצאו את קודקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$, $A(-3,-2)$. מצאו את היקף המלבן.

14) מצאו את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)$, $B(4,1)$ ב. $A(3,-2)$, $B(-3,1)$

ג. $A(7,8)$, $B(6,15)$ ד. $A(0,5)$, $B(7,0)$

ה. $A(6,9)$, $B(6,-7)$ ו. $A(4,-1)$, $B(18,-1)$

15) מצאו את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם:
$C(4,-7)$, $B(2,13)$, $A(6,5)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$ ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$

ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$

4) $D(0,2)$

5) $B(-11,16)$, $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$

ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.727 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $C(-3,-2)$, $B(3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$

ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AC}=6$, $m_{BC}=-10$, $m_{AB}=-2$.

משוואת הישר:

סיכום כללי:

הגדרה:

משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+b$ כאשר: m - שיפוע הישר ו- b - איבר חופשי (חיתוך עם ציר ה- y).

ראינו כי:

- $m>0$ (שיפוע הישר הוא חיובי) – הישר עולה.
- $m<0$ (שיפוע הישר הוא שלילי) – הישר יורד.

ישרים המאונכים לצירים:

ישר המאונך לישר אופקי (כלומר מהצורה $y=n$) הוא אנכי (כלומר $x=k$) ולהיפך.

בפרט:

- ישר המאונך לציר ה- x הוא מהצורה $x=k$.
- ישר המאונך לציר ה- y הוא מהצורה $y=n$.

משוואת ישר:

משוואת ישר ששיפועו הוא m והוא עובר בנקודה (x_1,y_1) היא: $y-y_1=m(x-x_1)$.

הערות:

- בהינתן שיפוע ונקודה ניתן למצוא את משוואת הישר ע"י הצבה ישירה בצורה המפורשת $y=mx+b$, חילוץ האיבר החופשי b וכתיבה של המשוואה הסופית.
- כדי למצוא משוואת ישר באמצעות שתי נקודות, נחשב תחילה את שיפועו ולאחר מכן נמצא את משוואתו ע"י לקיחת השיפוע שמצאנו ובחירת אחת מהנקודות.

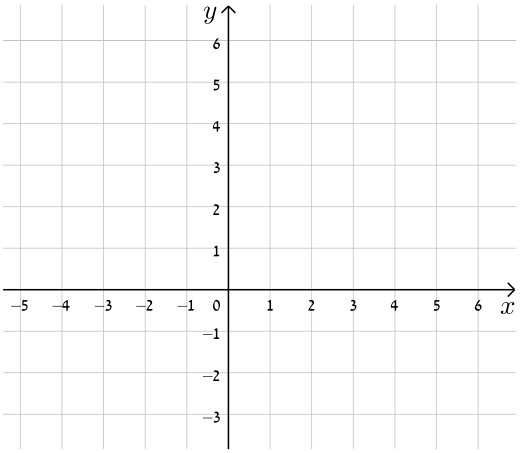
חיתוך של ישר עם הצירים:

- כדי למצוא חיתוך של ישר עם ציר ה- x נציב: $y=0$.
- כדי למצוא חיתוך של ישר עם ציר ה- y נציב: $x=0$.

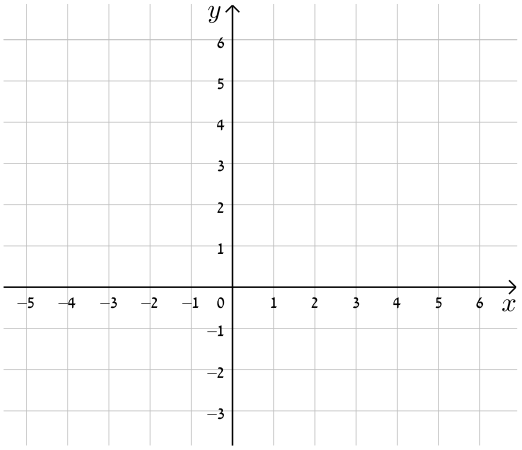
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטטו את הישרים במערכת הצירים שלפניכם.

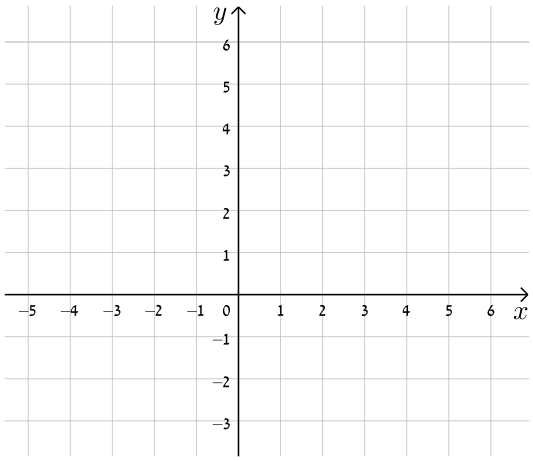
א. $y = x + 4$



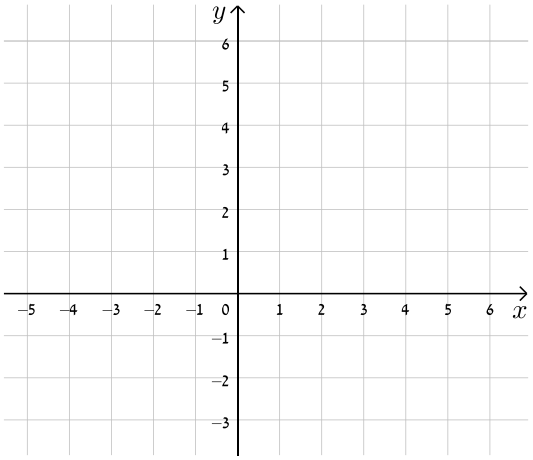
ב. $y = -x + 5$



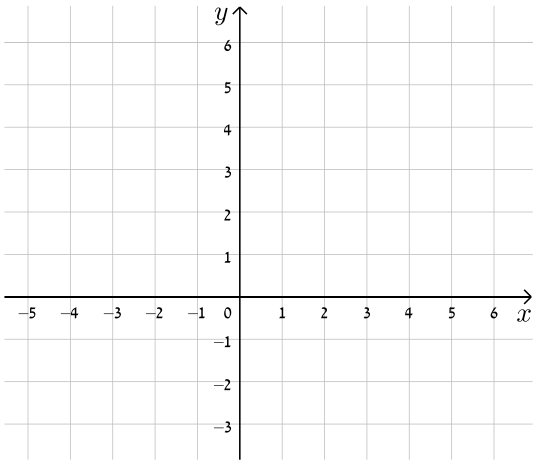
ג. $y = 2x - 3$



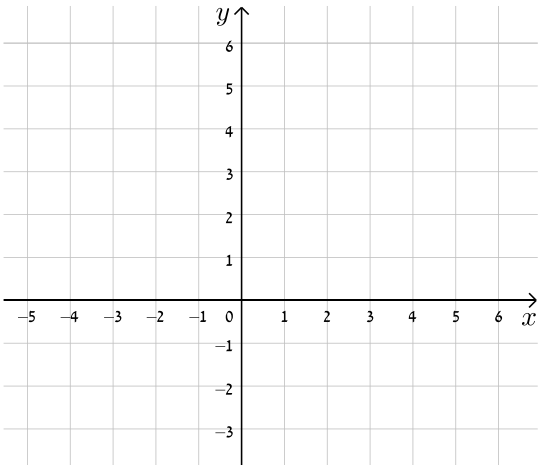
ד. $y = -3x + 5$



ה. $y = 3x - 1$

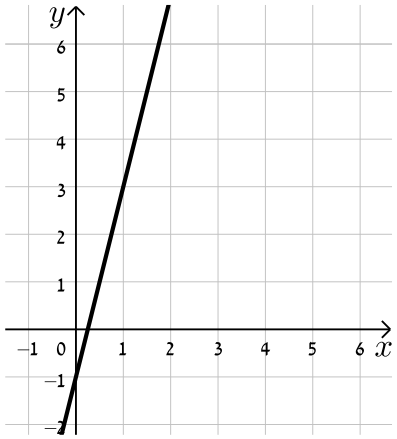


ו. $y = 8 - 4x$

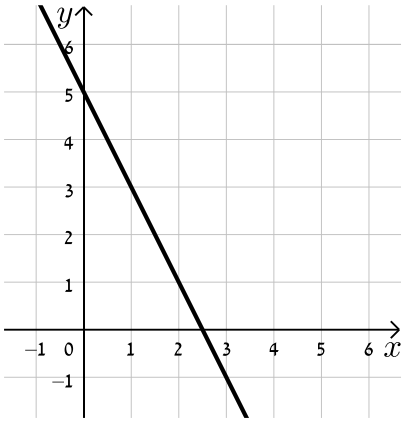


17) כתבו את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

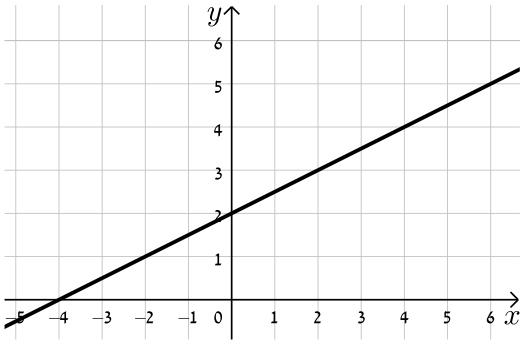
א.



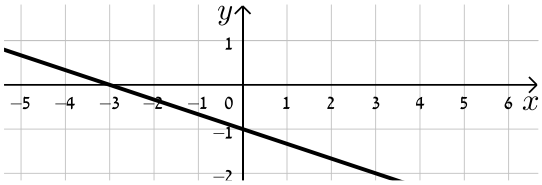
ב.



ג.



ד.



18) התאימו בין משוואות הישרים הבאים לישרים בסרטוט:

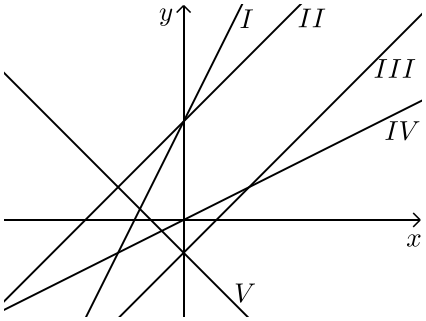
א. $y = x + 3$.

ב. $y = -x - 1$.

ג. $y = 2x + 3$.

ד. $y = x - 1$.

ה. $y = \frac{1}{2}x$.



19) נתונה משוואה הישר הבאה: $y = 2x + 3$.

קבעו אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$, $C(0,4)$, $B(3,3)$, $A(-1,1)$.

20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y = mx - 2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר.

מצאו את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

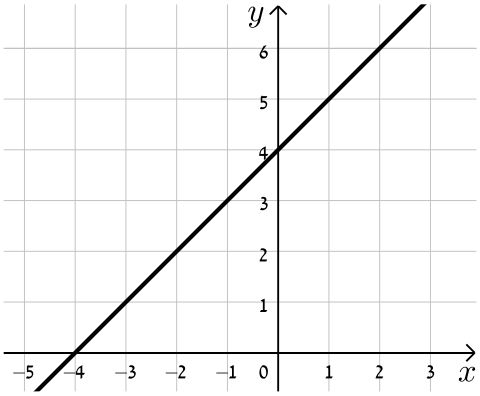
21) הנקודות $B(4,1)$, $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y = mx + n$.

מצאו את m ואת n.

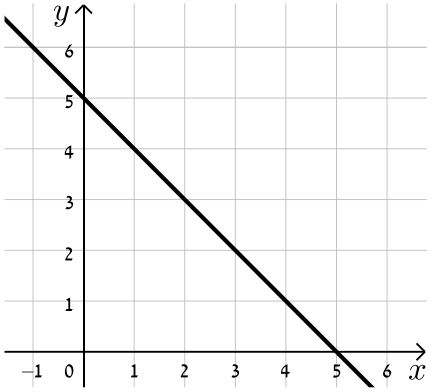
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

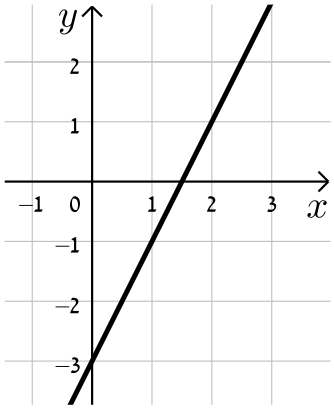
א.



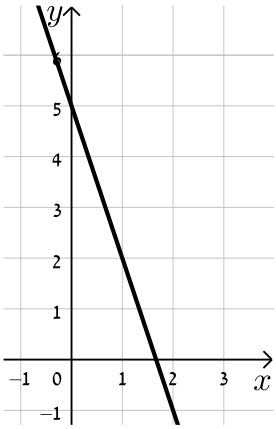
ב.



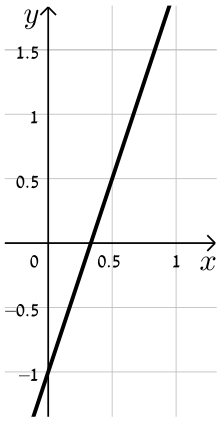
ג.



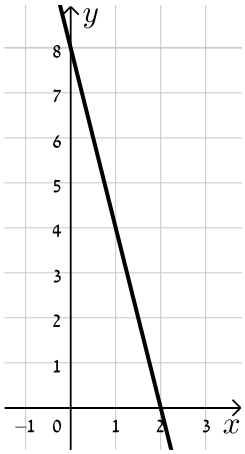
ד.



ה.



ו.



17) א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

18) א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

20) $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

21) $n=17$, $m=-4$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

חיתוך בין שני ישרים:

כדי למצוא חיתוך בין שני ישרים, נפתור מערכת המשוואות הכוללת את משוואותיהם.

ישרים מקבילים:

- ישרים בעלי שיפועים זהים הם מקבילים זה לזה.
- אם לישרים יש אותו שיפוע ונקודת חיתוך שונה עם ציר ה- y אז הם מקבילים זה לזה.

מספרים הופכיים:

זוג מספרים (השונים מאפס) שמכפלתם שווה ל-1 נקראים מספרים הופכיים.

כדי למצוא מספר ההופכי למספר נתון, נחליף את המונה והמכנה.

ישרים מאונכים:

השיפועים m_1 ו- m_2 של שני ישרים המאונכים זה לזה מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$
(כאשר $m_1 \neq 0$ וגם $m_2 \neq 0$).
מכך נובע כי השיפועים של ישרים מאונכים הם מספריים הופכיים ונגדיים.

שאלות:

22) מצאו את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x-1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=x-12 \\ y=4x+6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=x+6 \end{cases}$

23) קבעו את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=2x+4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=x-7 \\ y=x+6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y=6x-15 \\ y=3x+41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y=x+8 \\ y=x+8 \end{cases}$

24) קבעו אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=3x-1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=2x \\ y=\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y=-4x-5 \\ y=\frac{1}{4}x+5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y=x-6 \\ y=-x+6 \end{cases}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $C(-5,5)$, $B(3,7)$, $A(5,-1)$.

הוכיחו שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

22) א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

25) א. $m_{AB}=m_{CD}=6$, $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$.

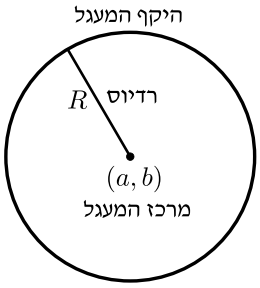
ב. הכל הפוך: $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$, $m_{BC}=m_{AD}=6$.

26) שאלת הוכחה.

המעגל הקנוני:

סיכום כללי:

המעגל:



המעגל הוא המקום הגאומטרי (אוסף כל הנקודות) במישור שמרחקן מנקודה קבועה הוא גודל קבועה.

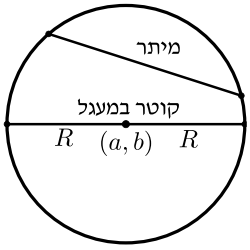
- לנקודה הקבועה קוראים **מרכז המעגל**.
- למרחק הקבוע קוראים **רדיוס המעגל**.

בהנדסת אנליטית נסמן את שיעורי נקודת מרכז המעגל ב-(a,b).

לרוב, מקובל לסמן את נקודת המרכז באות M, כלומר: $M(a,b)$.

את רדיוס המעגל נסמן ב-R.

מושגים נוספים במעגל:



- מיתר - קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר - מיתר העובר דרך מרכז המעגל.

משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוסו R היא: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

המעגל הקנוני:

מעגל שמרכזו נמצא בראשית הצירים, כלומר: $M(0,0)$ ורדיוסו R נקרא מעגל קנוני.

במקרה זה משוואת המעגל תהיה: $x^2+y^2=R^2$.

מעגל המשיק לציר ה- x :

במעגל שמרכזו בנקודה (a,b) המשיק לציר ה- x , נקודה ההשקה היא $(a,0)$ ורדיוסו $R=|b|$.

מעגל המשיק לציר ה- y :

במעגל שמרכזו בנקודה (a,b) המשיק לציר ה- y , נקודת ההשקה היא $(0,b)$ ורדיוסו $R=|a|$.

מעגל המשני לשני הצירים:

במעגל המשיק לשני הצירים לעולם יתקיים: $R=|a|=|b|$.
נקודות ההשקה של מעגל כזה תהיינה: $(a,0)$ ו- $(0,b)$.

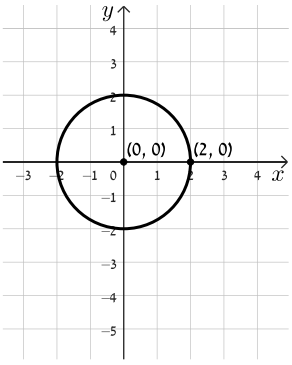
נקודה על המעגל:

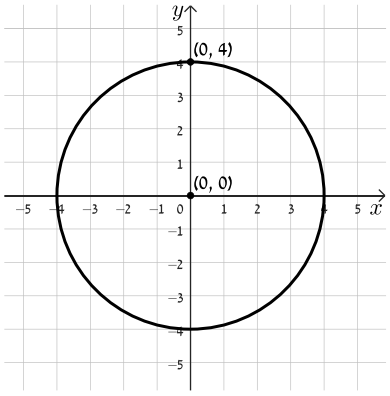
כל נקודה שנמצאת על המעגל (כלומר על היקף המעגל) תקיים את משוואת המעגל.

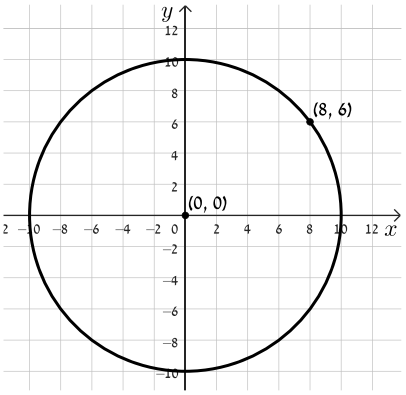
שאלות:

1) כתבו את משוואות המעגלים הבאים:

א. ב. ג.

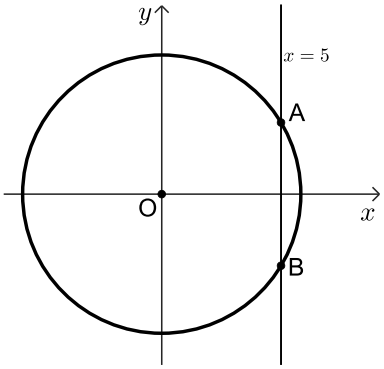






2) מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=34$ חותך את הישר $x=5$ ב-2 נקודות A ו-B.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B נמצאת ברביע הרביעי.



א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. חשבו את אורך הקטע AB.

ג. חשבו את שטח המשולש ABO (O - ראשית הצירים).

3) משולש ישר זווית שאורכי ניצביו הם 10 יחידות אורך ו-14 יחידות אורך חסום במעגל קנוני.

מצאו את משוואת המעגל הקנוני.

4) משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$) חסום במעגל קנוני.

ידוע כי: $A(-7,6)$.

א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. הניצבים AB ו-BC מקבילים לצירים x ו- y בהתאמה.

מצאו את שיעורי הנקודות B ו-C וכתבו את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות AB ו-BC.

ג. כתבו את משוואת הישר AC.

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+y^2=4$ ב. $x^2+y^2=16$ ג. $x^2+y^2=100$

2) א. $A(5,3)$, $B(5,-3)$ ב. 6 יח"א ג. 15 יח"ש

3) $x^2+y^2=74$

4) א. $x^2+y^2=85$ ב. $B(7,6)$, $C(7,-6)$:AB $y=6$, :BC $x=7$.

ג. $y=-\frac{6}{7}x$

הזזה של מעגל קנוני במערכת הצירים:

סיכום כללי:

עקרונות הזזה:

נתון מעגל קנוני: $x^2+y^2=R^2$.

- עבור הזזה שלו a יחידות באופן אופקי, יתקבל המעגל שמשוואתו: $(x-a)^2+y^2=R^2$
(כאשר $a>0$ תתקבל הזזה ימינה וכאשר $a<0$ תתקבל הזזה שמאלה).
- עבור הזזה שלו b יחידות באופן אנכי, יתקבל המעגל שמשוואתו: $x^2+(y-b)^2=R^2$
(כאשר $b>0$ תתקבל הזזה מעלה וכאשר $b<0$ תתקבל הזזה מטה).

משוואת מעגל כללי כשההזזה של מעגל קנוני:

ניתן להסתכל על משוואת מעגל כללי $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ כהזזה אופקית של מעגל קנוני $x^2+y^2=R^2$ ב-a יחידות והזזה אנכית שלו ב-b יחידות.

על כן, מרכזו של מעגל כללי גם הוא מוזז מהראשית ושיעוריו $M(a,b)$
אך רדיוס המעגל אינו מושפע מן ההזזות ולכן נשאר R.

שאלות:

1) כתבו את משוואות המעגלים הבאים:

א. מזיזים את המעגל הקנוני $x^2+y^2=15$, 4 יחידות מעלה ו-3 יחידות ימינה.

ב. מזיזים מעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{18}$ ב-18 יחידות מעלה.

ג. מרכזו של מעגל עם רדיוס 13 נמצא על ציר ה- x במרחק של 5 יחידות משמאל לציר ה- y.

ד. מזיזים מעגל קנוני שרדיוסו 10 ב-10 יחידות שמאלה ו-10 יחידות מטה.

2) לפניכם משוואות של מעגלים שונים.
קבעו בכל מקרה אלו הזזות בוצעו על מעגל קנוני (רשמו גם את משוואת המעגל הקנוני המקורי) על מנת לקבל את המשוואות הנתונות.

א. $(x-4)^2+(y-1)^2=81$.

ב. $(x+2)^2+(y-19)^2=20$.

ג. $x^2+(y+4)^2=14$.

ד. $(x-3.5)^2+y^2=12.25$.

תשובות סופיות:

1) א. $(x-3)^2+(y-4)^2=15$ ב. $x^2+(y-18)^2=18$ ג. $(x+5)^2+y^2=169$

ד. $(x+10)^2+(y+10)^2=100$

2) א. הזזה מעלה ב-2 יחידות, הזזה ימינה ב-4 יחידות.

ב. הזזה מעלה ב-19 יחידות, הזזה שמאלה ב-2 יחידות.

ג. הזזה מטה ב-4 יחידות, אין הזזה אופקית. ד. אין הזזה אנכית, הזזה ימינה ב-3.5 יחידות.