

שאלון 571

תזכורת מחטיבת הביניים – הפרבולה

תוכן העניינים:

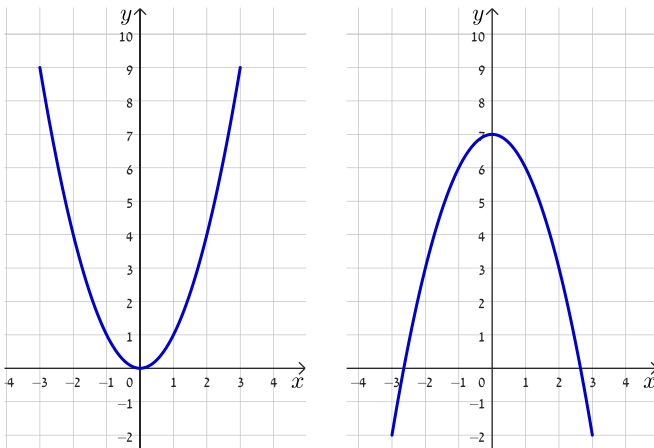
2.....	הגדרות יסודיות בפרבולה:
2.....	סיכום כללי:
4.....	שאלות:
5.....	תשובות סופיות:
6.....	הזזות ומתיחות של פרבולה:
6.....	סיכום כללי:
7.....	שאלות:
11.....	תשובות סופיות:
12.....	ייצוגים שונים של הפונקציה הריבועית:
12.....	סיכום כללי:
12.....	שאלות:
14.....	תשובות סופיות:

הגדרות יסודיות בפרבולה:

סיכום כללי:

הגדרה:

פונקציה מהצורה: $f(x) = ax^2 + bx + c$ כאשר $a \neq 0$ היא פונקציה ריבועית. גרף הפונקציה הריבועית הוא פרבולה.



פרבולה ישרה ופרבולה הפוכה:

- פרבולה ישרה:
מתקבלת כאשר $a > 0$
ולה נקודות מינימום.
- פרבולה הפוכה:
מתקבלת כאשר $a < 0$
ולה נקודת מקסימום.

קודקוד הפרבולה:

הנקודה הנמוכה/הגבוהה ביותר בפרבולה ישרה/הפוכה נקראת קודקוד הפרבולה.

שיעור ה- x של קודקוד הפרבולה הוא: $x = -\frac{b}{2a}$ קודקוד

את שיעור ה- y נמצא ע"י הצבת שיעור ה- x בפונקציה.

ציר הסימטריה של הפרבולה:

ישר אנכי העובר דרך קודקוד הפרבולה נקרא ציר הסימטריה של הפרבולה ומשוואתו: $x = -\frac{b}{2a}$.

ענפים של גרף הפרבולה:

ציר הסימטריה מחלק את גרף הפרבולה לשני חלקים. כל חלק נקרא ענף.

לגרף הפרבולה ענף ימני ו-ענף שמאלי.

תחומי עלייה וירידה:

בפרבולה ישרה הענף השמאלי הוא יורד והענף הימני הוא עולה.

בפרבולה הפוכה הענף השמאלי הוא עולה והענף הימני הוא יורד.

תחומי העלייה והירידה, אם כן, הם:

סוג הפרבולה	תחום עלייה	תחום ירידה
ישרה	$x > -\frac{b}{2a}$	$x < -\frac{b}{2a}$
הפוכה	$x < -\frac{b}{2a}$	$x > -\frac{b}{2a}$

נקודות החיתוך עם הצירים:

- כדי למצוא חיתוך עם ציר ה- y , נציב: $x = 0$ במשוואת הפונקציה.
- כדי למצוא חיתוך עם ציר ה- x , נשווה את הפונקציה הריבועית לאפס.
- נקודות החיתוך עם ציר ה- x נקראות גם **נקודות האפס** של הפונקציה.

תחומי חיוביות ושליליות:

תחום חיוביות של פונקציה מקיים: $f(x) > 0$ ותחום שליליות של פונקציה מקיים: $f(x) < 0$.

מקרים מיוחדים:

- אם לפונקציה הריבועית נקודת אפס אחת אז היא אי-שלילית עבור $a > 0$ ואי-חיובית עבור $a < 0$.
- אם לפונקציה הריבועית אין נקודות אפס אז היא חיובית בכל תחום הגדרתה עבור $a > 0$ ושלילית בכל תחום הגדרתה עבור $a < 0$.

שאלות:

(1) בכל אחד מהמקרים שלפניכם נתון ציר הסימטריה של פרבולה ושיעורי אחת מנקודות האפס שלה. מצאו את שיעורי נקודת האפס הנוספת.

- א. $x = 4$; $(5,0)$ ב. $x = -1$; $(7,0)$
 ג. $x = 3$; $(-2,0)$ ד. $x = -4\frac{1}{2}$; $(6\frac{1}{2},0)$

(2) בכל אחד מהמקרים הבאים, קבעו כמה נקודות אפס יש לפונקציה הריבועית לפי הנתונים המתארים את גרף הפרבולה שלה.

- א. יש לה נקודת מינימום ברביע השלישי.
 ב. יש לה נקודת מקסימום ברביע הרביעי.
 ג. יש לה נקודת מינימום המונחת על הישר $y = -3$.
 ד. יש לה נקודת מינימום על ציר ה- x .
 ה. יש לה נקודת מקסימום ברביע הראשון.
 ו. יש לה נקודת מקסימום הנמצאת על ציר ה- y בחלקו השלילי.

(3) נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 2x - 15$.

- א. מהם שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- y ?
 ב. רשמו פונקציה ריבועית נוספת בעלת אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
 ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?
 ד. כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה עם הישרים הבאים:
 (1) $y = -15$
 (2) $y = 15$
 (3) $y = -25$

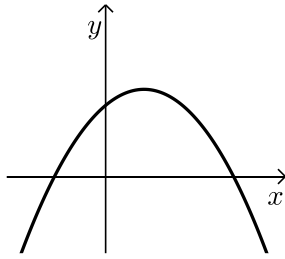
ה. רשמו פונקציה ריבועית נוספת שיש לה את אותן נקודות האפס כמו לפונקציה הנתונה.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה: $y = -x^2 + 4x$.
 ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה: $y = 2x^2 - 5x$.

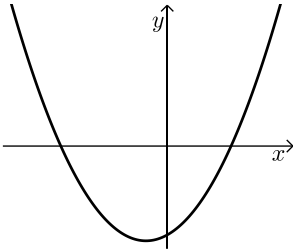
(5) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה $y = -x^2 - x + 2$ עם ציר ה- x וסרטטו סקיצה שלה.
 ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה $y = 4x^2 - 10x$ עם ציר ה- x וסרטטו סקיצה שלה.



(6) נתונה הפרבולה: $y = -x^2 + 3x + 10$.

- מצאו את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x .
- כתבו דוגמא לערך כלשהו של x עבורו הפונקציה חיובית ודוגמא לערך אחר עבורו הפונקציה שלילית. נמקו.



(7) נתונה הפרבולה: $y = x^2 + 2x - 15$.

- לאילו ערכים של x הפונקציה חיובית?
- לאילו ערכים של x הפונקציה שלילית?

תשובות סופיות:

(1) א. $(3,0)$ ב. $(-9,0)$ ג. $(8,0)$ ד. $(-15\frac{1}{2}, 0)$

(2) א. 2 נקודות. ב. אין חיתוכים. ג. 2 נקודות. ד. חיתוך אחד.

ה. 2 נקודות. ו. אין חיתוכים.

(3) א. $(0, -15)$ ב. $y = x^2 - 15$ ג. $(-3, 0)$, $(5, 0)$

ד. (1) שתיים. ד. (2) שתיים. ד. (3) אפס.

ה. $y = 2x^2 - 4x - 30$.

(4) א. עולה: $x < 2$, יורדת: $x > 2$ ב. עולה: $x > 1\frac{1}{4}$, יורדת: $x < 1\frac{1}{4}$

(5) א. $(-2, 0)$, $(1, 0)$ ב. $(0, 0)$, $(2.5, 0)$

(6) א. $(-2, 0)$, $(5, 0)$ ב. חיובית: 1, 2, 3. שלילית: -10, -4, 6, 7.

(7) א. $x < -5$, $x > 3$ ב. $-5 < x < 3$

הזזות ומתיחות של פרבולה:

סיכום כללי:

הזזה אנכית ואופקית:

משפחת הפרבולות מהצורה: $y = (x - p)^2 + k$ מתקבלת ע"י שילוב של הזזות של הפרבולה: $y = x^2$.

- הזזה אנכית ב- k יחידות למעלה (כאשר: $k > 0$) או למטה (כאשר: $k < 0$).
- הזזה אופקית ב- p יחידות ימינה (כאשר: $p > 0$) או שמאלה (כאשר: $p < 0$).

קדקוד הפרבולה $y = (x - p)^2 + k$ הוא (p, k) והוא קדקוד מינימום.

ציר הסימטריה של הפרבולה $y = (x - p)^2 + k$ הוא $x = p$, אשר מקביל לציר ה- y .

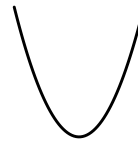
מתיחה וכיווץ אנכיים:

לפרמטר a במשפחות הפונקציות: $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = a(x - p)^2$ ($a \neq 0$), יש שני תפקידים:

- הוא קובע את כיוון הגרף:

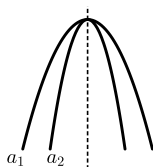


הפרבולה הפוכה והקודקוד הוא מקסימום.

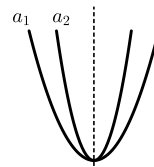


הפרבולה ישרה והקודקוד הוא מינימום.

- הוא קובע את מידת המתיחה/כיווץ של הגרף ביחס לציר הסימטריה שלו. כלומר, ככל ש- $|a|$ גדול יותר, כך ענפי הפרבולה יהיו קרובים יותר לציר הסימטריה.



עבור: $a < 0$: $a_2 < a_1$



עבור: $a > 0$: $a_2 > a_1$

שאלות:

(1) התאימו בין משוואות הפונקציות הבאות לגרפים:

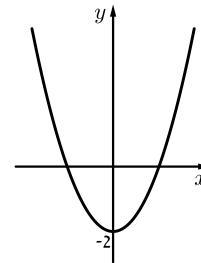
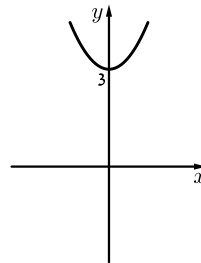
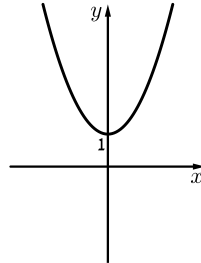
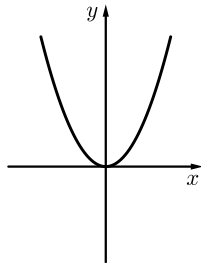
$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = x^2 - 2, \quad h(x) = x^2 + 1, \quad w(x) = x^2$$

ד.

ג.

ב.

א.



(2) רשמו את משוואת הפונקציה הריבועית המתאימה המתקבלת מהפונקציה $y = x^2$

בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. מזיזים את הגרף שלה ב-6 יחידות למעלה.

ב. מזיזים את הגרף שלה ב-4.5 יחידות למטה.

(3) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (x + 4)(x - 4)$.

א. הסבירו מדוע הפונקציה הזו הינה פונקציה ריבועית.

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקודקוד של הפונקציה.

ג. מצאו את ציר הסימטריה של הפונקציה.

ד. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.

ה. סרטטו באופן מקורב סקיצה של גרף הפונקציה.

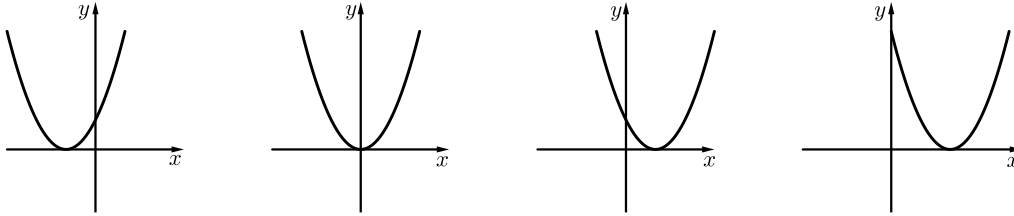
ו. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה והראו אותם באיור שעשיתם.

ז. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה והראו אותם באיור שעשיתם.

(4) התאימו לכל אחת מהפונקציות את הגרף המתאים והסבירו את בחירתכם.

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = (x-6)^2, \quad h(x) = (x+2)^2, \quad w(x) = (x-4)^2$$

א. ב. ג. ד.



(5) רשמו פונקציה מהצורה $y = (x-p)^2$ המתאימה לכל אחת מהדרישות הבאות:

א. קדקוד הפרבולה הוא $\left(2\frac{1}{5}, 0\right)$.

ב. ציר הסימטריה הוא $x = -19$.

(6) רשמו את הפונקציה המתקבלת מהזזה של הפרבולה $y = x^2$ בכל מקרה:

א. הזזה של 2 יחידות ימינה ו-5 יחידות למעלה.

ב. הזזה של 3 יחידות שמאלה ויחידה אחת למעלה.

(7) נתונה הפונקציה: $y = (x+5)^2 - 13$.

א. תארו במילים את ההזזות שהתבצעו על גרף הפונקציה $y = x^2$

בכדי לקבל את הפונקציה הנתונה.

ב. מצאו את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה.

ג. מצאו את ציר הסימטריה של הפרבולה.

ד. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y .

ה. כמה נקודות אפס יש לפונקציה הנתונה? נמקו. אין צורך בחישוב.

ו. עבור אילו ערכי x הפונקציה יורדת ועבור אילו היא עולה?

ז. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

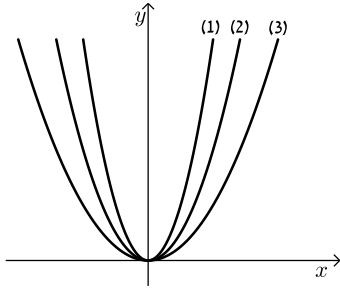
ח. מצאו נקודה הסימטרית ל- $(3, 51)$. הסבירו כיצד מצאתם אותה.

(8) נתונה הפונקציה: $y = (x + 5.5)^2 - 16$.

- א. מהו ציר הסימטריה של הפרבולה?
- ב. מהי נקודת הקודקוד של הפרבולה?
- ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.
- ד. מצאו את נקודות האפס של הפרבולה.
- ה. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפרבולה.

(9) התאימו גרף לכל פונקציה ונמק.

I. $y = x^2$ II. $y = 2x^2$ III. $y = 4x^2$



(10) התאימו גרף לכל פונקציה ונמק.

א. $y = \frac{1}{3}x^2$

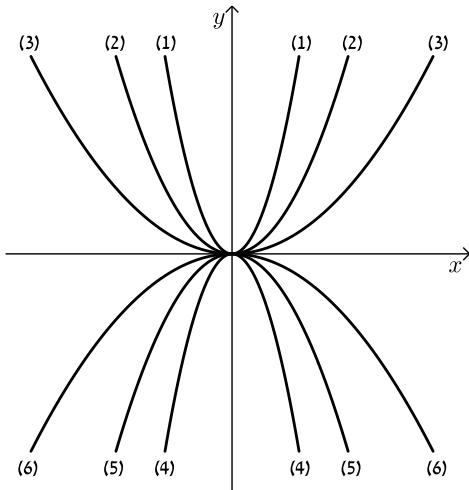
ב. $y = -\frac{1}{3}x^2$

ג. $y = 3x^2$

ד. $y = -3x^2$

ה. $y = x^2$

ו. $y = -x^2$



(11) סרטטו באופן איכותי בלבד במערכת צירים את הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \frac{2}{5}x^2, \quad f_3(x) = \frac{5}{2}x^2, \quad f_4(x) = -\frac{2}{5}x^2, \quad f_5(x) = -\frac{5}{2}x^2$$

(12) לפניכם הפונקציה הבאה: $y = 3(x + 1)^2 - 12$.

- א. תארו במילים את הפעולות שהתבצעו על גרף הפונקציה $y = x^2$ לקבלת הפונקציה הנתונה.
- ב. מהם שיעורי נקודת הקודקוד של הפרבולה? האם מדובר בנקודת מקסימום או מינימום?
- ג. מהי משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה?
- ד. מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?
- ה. מהם שיעורי נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y ?
- ו. עבור אילו ערכי x הפרבולה עולה ועבור אילו היא יורדת?
- ז. עבור אילו ערכי x הפרבולה חיובית ועבור אילו היא שלילית?
- ח. סרטטו סקיצה של גרף הפרבולה במערכת צירים וציינו את ממציאכם מהסעיפים הקודמים.
- ט. הוסיפו לסקיצה גרף נוסף של פרבולה עם אותו ציר סימטריה בעלת קודקוד מקסימום אשר נמצא 3 יחידות מעל לקודקוד של הפרבולה הנתונה. כמה אפשרויות שונות ישנן?

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. רשמו את המשוואה המתקבלת מהזזת גרף הפרבולה $y = \frac{1}{3}x^2$ כאשר מתבצעת הזזה של 3 יחידות ימינה ו-2 יחידות למטה.
- ב. רשמו את המשוואה המתקבלת מהזזת גרף הפרבולה $y = 5x^2$ במקרה הבא:
הזזה כך שקודקוד הפרבולה יתקבל בנקודה $(2.5, -3.15)$.

תשובות סופיות:

(1) א. $g(x)$ ב. $f(x)$ ג. $h(x)$ ד. $w(x)$

(2) א. $y = x^2 + 6$ ב. $y = x^2 - 4.5$

(3) א. כי ניתן לכתוב אותה עם ביטוי הכולל x^2 . ב. $(0, -16)$

ג. $x = 0$ ד. $(-4, 0)$, $(4, 0)$ ה. ראו סרטוט בסרטון.

ו. עלייה: $x > 0$, ירידה: $x < 0$ ז. חיובית: $x > 4$, $x < -4$, שלילית: $-4 < x < 4$.

(4) א. $g(x)$ ב. $w(x)$ ג. $f(x)$ ד. $h(x)$

(5) א. $y = \left(x - 2\frac{1}{5}\right)^2$ ב. $y = (x + 19)^2$

(6) א. $y = (x - 2)^2 + 5$ ב. $y = (x + 3)^2 + 1$

(7) א. הזזה 5 יחידות שמאלה ו-13 יחידות למטה.

ב. $(-5, -13)$ ג. $x = -5$ ד. $(0, 12)$ ה. 2.

ו. עולה: $x > -5$, יורדת: $x < -5$ ז. ראו סרטוט בסרטון. ח. $(-13, 51)$.

(8) א. $x = -5.5$ ב. $(-5.5, -16)$ ג. עולה: $x > -5.5$, יורדת: $x < -5.5$

ד. $(-9.5, 0)$, $(-1.5, 0)$

ה. חיובית: $x > -1.5$, $x < -9.5$, שלילית: $-9.5 < x < -1.5$.

(9) א. $\rightarrow (1)$, ב. $\rightarrow (2)$, ג. $\rightarrow (3)$

(10) א. (3) ב. (6) ג. (1) ד. (4) ה. (2) ו. (5).

(11) סרטוט בצד.

(12) א. הזזה שמאלה ביחידה אחת, כיווץ פי 3 והזזה מטה ב-12 יחידות

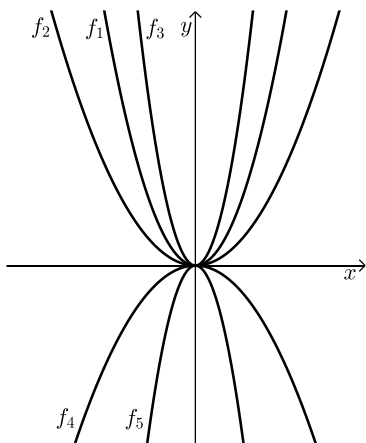
ב. $\min(-1, -12)$ ג. $x = -1$ ד. $(-3, 0)$, $(1, 0)$.

ה. $(0, -9)$ ו. עולה: $x > -1$, יורדת: $x < -1$.

ז. חיובית: $x > 1$, $x < -3$, שלילית: $-3 < x < 1$.

ח. עיינו בסרטון. ט. עיינו בסרטון.

(13) א. $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 + 2$ ב. $y = 5(x - 2.5)^2 - 3.15$



ייצוגים שונים של הפונקציה הריבועית:

סיכום כללי:

צורות הצגה של פונקציה ריבועית:

- הצגה סטנדרטית: $y = ax^2 + bx + c$ (כאשר: a, b, c הם פרמטרים ו- $a \neq 0$).
- הצגה קודקודית: $y = a(x - p)^2 + k$ (כאשר: a, p, k הם פרמטרים ו- $a \neq 0$).
- הצגה כמכפלה: $y = a(x - m)(x - n)$ (כאשר: a, m, n הם פרמטרים ו- $a \neq 0$).

ניתן לעבור מייצוג אחד לשני באמצעות פעולות אלגבריות.

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. רשמו את הפונקציה $y = (x - 3)(x + 5)$ בייצוגים מהצורה:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ ו- } y = a(x - p)^2 + k.$$

ב. רשמו את הפונקציה $y = 2x^2 - 12x + 10$ בצורה: $y = a(x - m)(x - n)$.

(2) נתונה הפונקציה: $y = 2(x - 1)(x + 4)$.

א. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?

ב. האם הפרבולה המתאימה לפונקציה זו צרה/רחבה/זהה מזו של הפונקציה $y = x^2$? נמקו.

ג. מהם שיעורי נקודת הקודקוד ומה סוגה?

(3) נתונה הפונקציה: $y = -\frac{1}{3}(x + 5)^2 + 2$.

א. חשבו את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה המתארת את הפונקציה.

ב. האם הפרבולה המתאימה לפונקציה זו צרה/רחבה/זהה מזו של הפונקציה $y = x^2$? נמקו.

(4) נתונה הפונקציה: $y = -3x^2 + 9x + 8$.

א. חשב את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה המתארת את הפונקציה.

ב. האם הפרבולה המתאימה לפונקציה זו צרה/רחבה/זהה מזו של הפונקציה $y = x^2$? נמקו.

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. רשמו את הפונקציה המתקבלת בצורה של $y = a(x-p)^2 + k$ מביצוע הפעולות הבאות על הפונקציה $y = x^2$:
- הזזה של 4 יחידות שמאלה.
 - כיווץ פי 2.
 - הזזה של 2 יחידות למטה.
- ב. כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x ?
- ג. מצאו את נקודות החיתוך וכתוב את הפונקציה בצורה: $y = a(x-m)(x-n)$.
- ד. מהו ציר הסימטריה ונקודת הקודקוד של הפרבולה המתאימה?

(6) מצאו כיצד התקבל גרף הפרבולה $y = 2x^2 - 6x + 8$ מביצוע פעולות הזזה ומתיחה על גרף הפרבולה $y = x^2$. האם ניתן לכתוב את הפונקציה בייצוג: $y = a(x-m)(x-n)$? נמק.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. כתבו את משוואת הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ בעלת התכונות הבאות:
- חותכת את ציר ה- x בנקודות $(-1,0)$, $(3,0)$.
 - רחבה פי 3 מגרף הפרבולה $y = x^2$.
- ב. כתבו את משוואת הפרבולה הנ"ל בייצוג $y = a(x-p)^2 + k$.

(8) לפניכם 3 פונקציות: $y = x^2 + 4x + 3$, $y = x^2 + 4x + 4$, $y = x^2 + 4x + 5$.

- א. כתבו (במידה ויש) את שני הייצוגים הנוספים של כל אחת מהן.
- ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף כל פונקציה עם הצירים.
- ג. מצאו את שיעורי הקודקוד של כל אחת מהפרבולות המתאימות.
- ד. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של כל אחת מהפונקציות.
- ה. כתבו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מהפונקציות.

תשובות סופיות:

(1) א. $y = x^2 + 2x - 15$, $y = (x-1)^2 - 16$ ב. $y = 2(x-1)(x-5)$

(2) א. $(1,0)$, $(-4,0)$ ב. צרה יותר. ג. $\min(-1.5, -7.5)$

(3) א. $(-5,2)$ ב. רחבה יותר.

(4) א. $(1.5, 14.75)$ ב. צרה יותר.

(5) א. $y = 2(x+4)^2 - 2$ ב. 2 נקודות.

ג. $y = 2(x+3)(x+5)$, $(-3,0)$, $(-5,0)$ ד. $x = -4$, $(-4, -2)$

(6) $y = 2\left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + 3\frac{1}{2}$ - הזזה 1.5 יחידות ימינה, כיווץ פי 2 והזזה מעלה ב-3.5 יחידות.

(7) א. $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ ב. $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 - 1\frac{1}{3}$

(8) א. עבור: $y = x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3) = (x+2)^2 - 1$

עבור: $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, עבור: $y = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$

ב. $y = x^2 + 4x + 3$: $(-1,0)$, $(-3,0)$, $(0,3)$; $y = x^2 + 4x + 4$: $(-2,0)$, $(0,4)$

$y = x^2 + 4x + 5$: $(0,5)$

ג. $y = x^2 + 4x + 3$: $(-2,-1)$; $y = x^2 + 4x + 4$: $(-2,0)$; $y = x^2 + 4x + 5$: $(-2,1)$

ד. עבור $y = x^2 + 4x + 3$: חיובית: $x > -1$, $x < -3$, שלילית: $-3 < x < -1$

עבור $y = x^2 + 4x + 4$: חיובית לכל $x \neq -2$. עבור: $y = x^2 + 4x + 5$ חיובית לכל x .

ה. עולה: $x > -2$, יורדת: $x < -2$ עבור כולן.