

# שאלון 472

## הסדרה החשבונית

### תוכן העניינים:

#### 1 .....הסדרה החשבונית

- 3.....נוסחת האיבר הכללי:
- 3.....סיכום כללי:
- 4.....שאלות:
- 7.....תשובות סופיות:
- 8.....מציאת האיבר הראשון והפרש הסדרה:
- 8.....סיכום כללי:
- 8.....שאלות:
- 9.....תשובות סופיות:
- 10.....חיבור משוואות לפי תיאור מילולי:
- 10.....סיכום כללי:
- 10.....שאלות:
- 11.....תשובות סופיות:
- 12.....איברים חיוביים ושליליים:
- 12.....סיכום כללי:
- 12.....שאלות:
- 12.....תשובות סופיות:
- 13.....תכונת הממוצע החשבוני:
- 13.....סיכום כללי:
- 13.....שאלות:
- 14.....תשובות סופיות:
- 15.....כלל נסיגה של סדרה חשבונית:
- 15.....סיכום כללי:
- 15.....שאלות:
- 16.....תשובות סופיות:

- 17.....: סכום סדרה חשבונית:
- 17.....: סיכום כללי:
- 18.....: שאלות:
- 20.....: תשובות סופיות:
- 21.....: מציאת מספר האיברים מנוסחת הסכום:
- 21.....: סיכום כללי:
- 21.....: שאלות:
- 22.....: תשובות סופיות:
- 23.....: מעבר מנוסחת סכום לנוסחת איבר כללי:
- 23.....: סיכום כללי:
- 23.....: שאלות:
- 23.....: תשובות סופיות:
- 24.....: הרכבה של סדרות חשבוניות:
- 24.....: שאלות:
- 25.....: תשובות סופיות:
- 26.....: סכום איברים העומדים במקומות הזוגיים והאי-זוגיים:
- 26.....: סיכום כללי:
- 27.....: שאלות:
- 28.....: תשובות סופיות:
- 29.....: שאלות מסכמות:
- 29.....: שאלות:
- 30.....: תשובות סופיות:

## נוסחת האיבר הכללי:

### סיכום כללי:

### סדרה חשבונית:

סדרה שבה ההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא מספר קבוע נקראת סדרה חשבונית. נסמן את ההפרש באות  $d$  (מלשון: difference).

### דוגמאות:

- הסדרה: ... 2, 7, 12, 17
- הסדרה: ... 21, 13, 5, -3, -11, -19
- הסדרה: ... 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

### סיכום:

כאשר חוקיות מסוימת מתגלה בתור כזו שבה כל איבר מתקבל ע"י תוספת של מספר קבוע לאיבר שלפניו החל מהאיבר השני, והחוקיות הזו ממשיכה כך ללא שינוי, אז מדובר בסדרת מספרים שהיא חשבונית.

### נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית  $a_n$  שבה האיבר הראשון הוא  $a_1$  והפרשה הוא  $d$  היא:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

כאשר:

- $a_1$  - האיבר הראשון בסדרה.
- $d$  - הפרש הסדרה.
- $n$  - מיקומו של האיבר ה- $n$  בסדרה.
- $a_n$  - ערכו של האיבר העומד המקום ה- $n$  בסדרה.

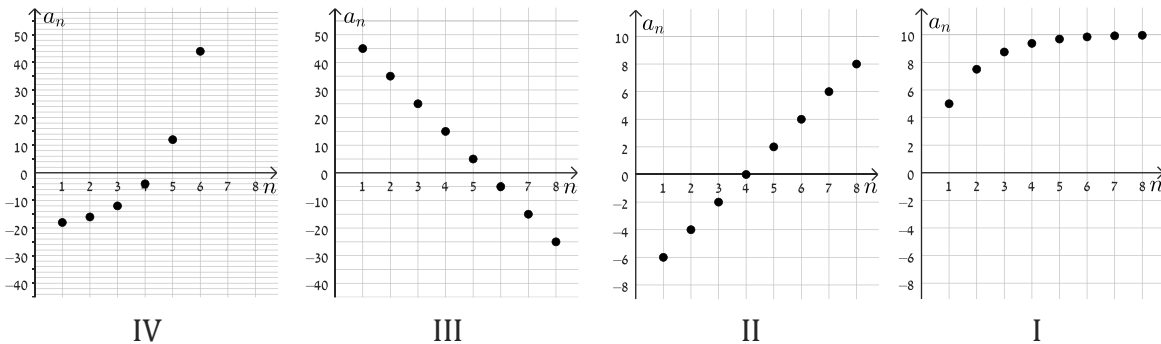
שאלות:

1) קבעו אלו מבין הסדרות הבאות הן חשבוניות ואילו אינן חשבוניות. נמקו.

- א. הסדרה:  $10, 12, 14, 16, 18, \dots$   
 ב. הסדרה:  $-5, 5, -5, 5, -5, 5, \dots$   
 ג. הסדרה:  $0, -6, -12, -18, -24, -30, \dots$   
 ד. הסדרה:  $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

2) לפניכם ייצוגים של מספר גרפים.

קבעו לגבי כל גרף האם הוא ניתן לייצוג כסדרה חשבונית. נמקו.



3) לפניכם סדרות חשבוניות. כתבו מהו  $a_1$  ומהו  $d$  בכל אחת מהן.

- א.  $1, 3, 5, \dots$   
 ב.  $-1, 4, 9, 14, \dots$   
 ג.  $6, 2, -2, -6, \dots$   
 ד.  $80, 75, 70, 65, \dots$   
 ה.  $4\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3}, 10\frac{1}{3}, \dots$   
 ו.  $-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{14}{5}, \dots$

4) ענו על השאלות הבאות:

- א. נתונה הסדרה החשבונית הבאה:  $7, 7.5, 8, \dots$ . מצאו את:  $a_9$ .  
 ב. נתונה הסדרה החשבונית הבאה:  $12, 10.5, 9, \dots$ . מצאו את:  $a_{15}$ .  
 ג. נתונה הסדרה החשבונית הבאה:  $4, -1, -6, \dots$ . מצאו את:  $a_{24}$ .  
 ד. נתונה הסדרה החשבונית הבאה:  $-10, -6, -2, \dots$ . מצאו את:  $a_{32}$ .

5) ענו על השאלות הבאות:

- א. האיבר הרביעי בסדרה חשבונית הוא 7 והפרש הסדרה הוא 2. מהו האיבר הראשון בסדרה?

- ב. האיבר ה-11 בסדרה חשבונית הוא 12 והפרש הסדרה הוא -6.  
מה הוא האיבר הראשון בסדרה?
- ג. האיבר ה-19 בסדרה חשבונית הוא -67 והפרש הסדרה הוא -4.  
מה הוא האיבר הראשון בסדרה?

- (6)** האיבר החמישי בסדרה חשבונית הוא 25 והפרש הסדרה הוא 6.  
א. מהו האיבר הראשון?  
ב. מהו האיבר השמיני? (חשבו בצורה ישירה ובאמצעות הנוסחה והשווה).

- (7)** בסדרה חשבונית האיבר הרביעי הוא 12 והפרש הסדרה הוא 5.  
מצאו את האיבר ה-17 בסדרה.

- (8)** מצאו את ערך האיבר  $a_n$  בסדרות החשבוניות הבאות:
- א.  $a_1 = 4, d = 9, n = 17$       ב.  $a_1 = -35, d = -2, n = 15$
- ג.  $a_1 = 68, d = -7, n = 20$       ד.  $a_1 = 5.5, d = 4\frac{1}{3}, n = 28$

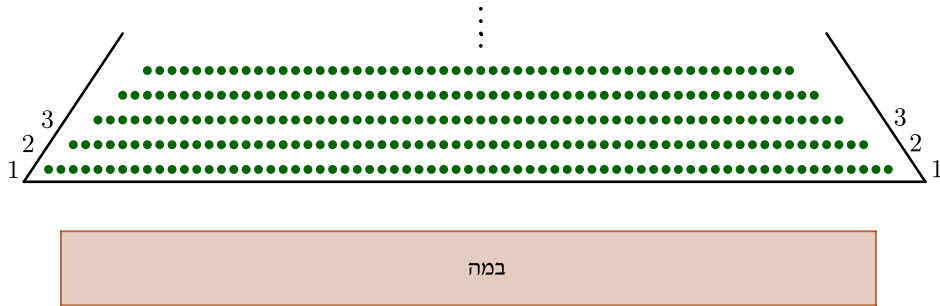
- (9)** ענו על השאלות הבאות:
- א. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 5 והאיבר ה-13 הוא 77.  
מצאו את הפרש הסדרה.
- ב. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 3 והאיבר ה-27 הוא 107.  
מצאו את הפרש הסדרה.
- ג. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא -10 והאיבר ה-20 הוא -48.  
מצאו את הפרש הסדרה.

- (10)** מצאו כמה איברים יש בכל אחת מהסדרות החשבוניות הבאות:
- א.  $3, 6, 9, \dots, 36$       ב.  $-6, -1, 4, \dots, 39$
- ג.  $-60, -51, \dots, 129$       ד.  $-120, 105, \dots, -180$

- (11)** מצאו את מספר איברי הסדרה בסדרות החשבוניות הבאות:
- א.  $a_1 = -1, d = -3, a_n = -79$       ב.  $a_1 = 4, d = 9, a_n = 103$
- ג.  $a_1 = -6, d = 10, a_n = 274$       ד.  $a_1 = -5, d = 9, a_n = 202$

12) מצאו כמה איברים יש בסדרה החשבונית:  $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$ .

13) נתון אולם אירועים כפי שמופיע באיור הבא, וצורתו היא טרפזית. ידוע כי מספר הכיסאות בכל שורה קטן ב-4 ביחס לשורה שלפניה. באולם ישנן 9 שורות הממוספרות בסדר עולה מהבמה לאחור. ידוע כי בשורה הראשונה (הקדמית ביותר) ישנם 68 כיסאות.



- א. (1) מהו האיבר הראשון בסדרה?  
 (2) מהו הפרש הסדרה?
- ב. כתבו את נוסחת האיבר הכללי לסדרה החשבונית המתארת את מספר הכיסאות שיש בכל שורה באולם.
- ג. כמה כיסאות יש בשורה 8?

## תשובות סופיות:

- (1) א. חשבונית      ב. לא חשבונית      ג. חשבונית      ד. לא חשבונית.
- (2) I. אינה חשבונית, II. סדרה חשבונית, III. סדרה חשבונית, IV. אינה חשבונית.
- (3) א.  $a_1 = 1, d = 2$       ב.  $a_1 = -1, d = 5$       ג.  $a_1 = 6, d = -4$
- ד.  $a_1 = 80, d = -5$       ה.  $a_1 = 4\frac{1}{3}, d = 3$       ו.  $a_1 = -\frac{2}{5}, d = -\frac{6}{5}$
- (4) א.  $a_9 = 11$       ב.  $a_{15} = -9$       ג.  $a_{24} = -111$       ד.  $a_{32} = 114$
- (5) א.  $a_1 = 1$       ב.  $a_1 = 72$       ג.  $a_1 = 5$
- (6) א.  $a_1 = 1$       ב.  $a_8 = 29$
- (7)  $a_{17} = 77$
- (8) א.  $a_n = 148$       ב.  $a_n = -63$       ג.  $a_n = -65$       ד.  $a_n = 122.5$
- (9) א.  $d = 6$       ב.  $d = 4$       ג.  $d = -2$
- (10) א. 12      ב. 10      ג. 22      ד. 21
- (11) א. 27      ב. 12      ג. 29      ד. 24
- (12) 20 איברים.
- (13) א. (1)  $a_1 = 68$       א. (2)  $d = -4$       ב.  $a_n = 72 - 4n$       ג.  $a_8 = 40$

## מציאת האיבר הראשון והפרש הסדרה:

### סיכום כללי:

ניתן לבטא איבר כלשהו בסדרה חשבונית בידיעת מיקומו ע"י האיבר הראשון והפרש הסדרה בלבד, למשל:  $a_5 = a_1 + 4d$  או:  $a_{20} = a_1 + 19d$ .  
לפי עיקרון זה, ניתן לחבר מערכת של שתי משוואות כדי למצוא את  $a_1$  ואת  $d$ .

### שאלות:

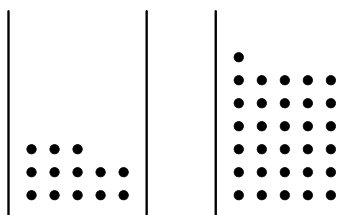
(1) בסדרה חשבונית האיבר העשירי הוא 73 והאיבר ה-16 הוא 103.  
מצאו את  $a_1$  ואת  $d$ .

(2) בסדרה חשבונית נתון:  $\begin{cases} a_9 = 42 \\ a_{13} = 62 \end{cases}$ . מצאו את  $a_1$  ואת  $d$ .

(3) בסדרה חשבונית נתון:  $\begin{cases} a_{16} = 132 \\ a_{10} = 78 \end{cases}$ . מצאו את  $a_1$  ואת  $d$ .

(4) בסדרה חשבונית נתון:  $a_{11} = 30, a_{18} = 51$ .  
חשבו את האיבר החמישי בסדרה.

(5) משחק מסוים מורכב מסדרה של קופסאות ובהן כדורים.  
ידוע כי מספר הכדורים בקופסאות המשחק מהווה סדרה חשבונית.  
מספר הכדורים בקופסה הרביעית הוא 13 ומספר הכדורים בקופסה העשירית הוא 31.  
א. האם בקופסה הראשונה יש את מספר הכדורים הגדול ביותר או הקטן ביותר? נמקו.  
ב. מצאו את מספר הכדורים בקופסה הראשונה ואת הפרש הסדרה.



**(6)** בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.  
מצאו כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

### תשובות סופיות:

(1)  $a_1 = 28, d = 5$

(2)  $a_1 = 2, d = 5$

(3)  $a_1 = -3, d = 9$

(4)  $a_5 = 12, (a_1 = 0, d = 3)$

(5) א. הקטן ביותר ב.  $a_1 = 4, d = 3$

(6) 48 איברים.

## חיבור משוואות לפי תיאור מילולי:

### סיכום כללי:

כתיבה משוואה מתאימה	תיאור מילולי כללי
$a = b + 5$	$a$ גדול ב-5 מ- $b$
$a = 3b$	$a$ גדול פי 3 מ- $b$
$a + b = 20$	סכום האיברים $a$ ו- $b$ הוא 20
$a - b = 6$	ההפרש בין $a$ ל- $b$ הוא 6

### שאלות:

- (1) בסדרה חשבונית האיבר הרביעי גדול ב-6 מהאיבר השני, והאיבר ה-11 הוא 33. מצאו את האיבר הראשון והפרש הסדרה.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השביעי גדול פי 5 מהאיבר השני והאיבר השישי הוא 21. מצאו את האיבר הראשון והפרש הסדרה.
- (3) בסדרה חשבונית נתון:  $a_{12} = 27$ . האיבר התשיעי גדול פי שלושה מהאיבר השני.
  - א. מהו הפרש הסדרה?
  - ב. מצאו את ערכם של האיבר השני והאיבר התשיעי בסדרה.
- (4) בסדרה חשבונית האיבר השמיני גדול ב-6 מהאיבר החמישי. האיבר האחד עשר גדול פי 3 מהאיבר הראשון. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
- (5) בסדרה חשבונית סכום האיברים החמישי והשמיני הוא 12 והאיבר השלישי הוא 13. מצאו את  $a_1$  ואת  $d$ .
- (6) בסדרה חשבונית סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 33 והאיבר התשיעי הוא 39. מצאו את  $a_1$  ואת  $d$ .

(7) בסדרה חשבונית נתון: 
$$\begin{cases} a_3 + a_7 = 32 \\ a_6 + a_9 = 47 \end{cases}$$
 . מצאו את  $a_1$  ואת  $d$ .

(8) בסדרה חשבונית סכום האיברים החמישי והשמיני הוא עשרים ואחד. ההפרש בין האיבר התשיעי לאיבר השני הוא 35. חשבו את האיבר התשיעי בסדרה.

(9) באמפיתיאטרון 20 שורות. מספר המושבים בשורה הראשונה הוא 120. מספר המושבים בכל שורה גדול יותר מאשר בשורה הקודמת בגודל קבוע. מספר המושבים בשורה ה-8 הוא 155. מצאו כמה מושבים בשורה האחרונה.

(10) תלמיד פתר תרגילים בחשבון. מספר התרגילים שפתר בכל יום היוו סדרה חשבונית. במשך שלושת הימים הראשונים פתר 54 תרגילים. ביום השישי פתר מחצית מהתרגילים שפתר ביום הראשון.  
א. כמה תרגילים פתר ביום הראשון?  
ב. כמה ימים עבד אם ביום האחרון פתר רק 6 תרגילים?

(11) בתחרות שחמט חולקו פרסים. כל פרס היה קטן מקודמו במספר קבוע. הפרס הראשון היה גדול פי 2 מהפרס ה-11, והפרס השלישי היה גדול ב-700 ש. מסכום הפרסים ה-15 וה-16. הפרס האחרון בתחרות היה 200 ש. מצאו כמה פרסים חולקו בתחרות.

## תשובות סופיות:

(1)  $a_1 = 3, d = 3$

(2)  $a_1 = 1, d = 4$

(3) א.  $d = 2$  ב.  $a_2 = 7, a_9 = 21$

(4)  $a_1 = 10, d = 2$

(5)  $a_1 = 17, d = -2$

(6)  $a_1 = 7, d = 4$

(7)  $a_1 = 4, d = 3$

(8)  $a_1 = -17, d = 5$

(9) 215 מושבים.

(10) א. 20 תרגילים. ב. 8 ימים. (11) 19 פרסים.

### סיכום כללי:

- סדרה עולה שבה האיבר הראשון הוא שלילי ( $a_1 < 0$ ), היא סדרה שבה מספר סופי של איברים שליליים.
- סדרה יורדת שבה האיבר הראשון הוא חיובי ( $a_1 > 0$ ), היא סדרה שבה מספר סופי של איברים חיוביים.

### שאלות:

- (1)** בחשבון בנק הופקדו בשבוע הראשון 147 ₪. בכל שבוע עוקב, הבנק לוקח עמלה קבועה של 30 ₪ מהחשבון עבור דמי ניהול.
- א. מצאו את נוסחת האיבר הכללי,  $a_n$ , המייצגת את יתרת הכסף בחשבון בשבוע ה- $n$ .
- ב. (1) מהי היתרה החיובית הנמוכה ביותר שתהיה בחשבון לפני שתהיה בחשבון יתרת חובה (מינוס)?
- (2) מה מספר השבוע שממנו והלאה יתרת החשבון תהיה בחובה (מינוס)?
- ג. במשך כמה שבועות (כולל השבוע הראשון) יתרת החשבון היא חיובית?
- (2)** נועם פתח ערוץ יוטיוב חדש. כדי לקדם את הערוץ, הוא השקיע מכספו האישי בפרסום ממומן. ביום הראשון להפעלת הערוץ, היתרה בחשבונו היא 210- ₪ (הפסד בשל הוצאות הפרסום). ידוע כי לערוץ הכנסה קבועה של 45 ₪ המתקבלת מפרסום בסוף כל יום.
- א. מצאו את נוסחת האיבר הכללי,  $a_n$ , המייצגת את יתרת החשבון של הערוץ בתחילת היום ה- $n$  לפעילותו.
- ב. מהי היתרה השלילית הגדולה ביותר שתוצג בחשבון של נועם?
- ג. החל מאיזה יום פעילות של הערוץ, היתרה תהיה חיובית?

### תשובות סופיות:

- (1)** א.  $a_n = 177 - 30n$     ב. (1) 27 ש"ח    ב. (2)  $n = 6$     ג. 5 שבועות.
- (2)** א.  $a_n = -255 + 45n$     ב. -30    ג. החל מהיום השישי.

סיכום כללי:

הגדרה:

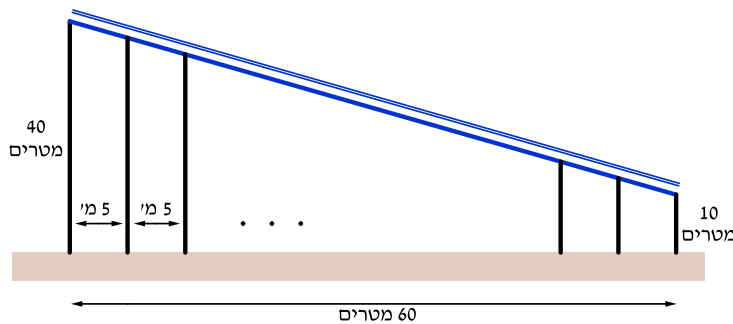
יהיו  $a, b, c$  שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית.

$$2b = a + c \text{ או: } b = \frac{a+c}{2}$$

לתכונה זו קוראים תכונת הממוצע החשבוני.

שאלות:

- 1) מסילת רכבת הרים יורדת במקטע מסוים בשיפוע קבוע מגובה של 40 מטרים ועד לגובה של 10 מטרים. כדי לתמוך במסילה, הותקנו תחתיה עמודי תמיכה אנכיים במרווחים אופקיים שווים זה מזה. בשל השיפוע הקבוע, הפרש הגבהים בין כל שני עמודים סמוכים הוא קבוע.



- א. גבהי העמודים יוצרים סדרה חשבונית.
- (1) מהו ערכו של האיבר הראשון בסדרה  $a_1$ ?
- (2) מהו ערכו של האיבר האחרון בסדרה  $a_n$ ?
- ב. נתון כי המרחק האופקי הכולל בין העמוד הראשון לעמוד האחרון הוא 60 מטרים, וכי המרחק האופקי בין כל שני עמודים סמוכים הוא 5 מטרים.
- (1) כמה עמודי תמיכה מותקנים לאורך המקטע (כולל העמוד הראשון והאחרון)?
- (2) מצאו את הפרש הסדרה החשבונית.
- ג. (1) מה מיקומו של העמוד האמצעי בסדרת העמודים האנכיים?
- (2) הראו כי בסדרה שהתקבלה, גובהו של העמוד האמצעי שווה לממוצע הגבהים של העמודים בקצות מקטע המסילה.

(2) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית:  $x - 2$ ,  $3x + 5$ ,  $x^2$ .

א. מצאו את  $x$  (הבחינו בין שני ערכים אפשריים).

ב. עבור כל אחד מערכי ה- $x$  שמצאתם:

(1) מצאו את שלושת האיברים.

(2) מצאו את הפרש הסדרה.

ג. עבור כל אחד מערכי ה- $x$  שמצאתם, כתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה

בהנחה ש- $x^2$  הוא האיבר הראשון בה.

### תשובות סופיות:

(1) א.  $a_1 = 40$  (1) א.  $a_n = 10$  (2) ב.  $n = 13$  (1) ב.  $d = -2.5$  (2)

ג.  $n = 7$  (1) ג.  $a_7 = 25$  (2)

(2) א.  $x = 8$ ,  $x = -1$  ב. עבור  $x = 8$ :  $d = -35$ , עבור  $x = 1$ :  $d = 1$ ,  $1, 2, 3$

## כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

### סיכום כללי:

#### כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל הנסיגה של סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא  $a_1$  והפרשה  $d$  הוא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_1 \end{cases}$$

כלל:

כדי להוכיח כי סדרה היא חשבונית יש להראות כי ההפרש בין איבר לאיבר שלפניו הוא גודל קבוע שאינו תלוי ב- $n$ . במילים אחרות:  $a_{n+1} - a_n = const.$

### שאלות:

$$(1) \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4 \\ a_1 = -3 \end{cases} \cdot \text{סדרה מוגדרת לפי כלל נסיגה לכל } n \text{ טבעי:}$$

- מצאו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
- הוכיחו כי מדובר בסדרה חשבונית.
- כתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.
- מצאו את ערכו של האיבר העומד במקום ה-45 בסדרה.

$$(2) \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 3 \\ a_6 = 27 \end{cases} \cdot \text{סדרה מוגדרת לפי כלל נסיגה לכל } n \text{ טבעי:}$$

- הוכיחו כי מדובר בסדרה חשבונית.
- מצאו את האיבר הראשון בסדרה זו.
- כתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.
- מצאו כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

$$(3) \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases} \cdot \text{נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:}$$

הוכיחו שהסדרה חשבונית ומצאו מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-3, 1, 5, 9$     ב. הוכחה    ג.  $a_n = 42 - 7$     ד.  $a_{45} = 173$
- (2) א. הוכחה    ב.  $a_1 = 42$     ג.  $a_n = 45 - 3n$     ד. 14 איברים.
- (3)  $a_{19} = 59$

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

נתונה סדרה חשבונית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  שבה  $n$  איברים והפרשה הוא  $d$ .  
 סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- $S_n$  ויחושב לפי הנוסחה:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + d(n-1)]$$

#### הערות:

- הנוסחה מקשרת בין האיבר הראשון  $a_1$ , הפרש הסדרה  $d$ , מספר האיברים שיש לסכום  $n$  וסכום הסדרה עצמו  $S_n$ . בהתאם לכך ניתן לבקש למצוא את כל אחד מהגדלים הנ"ל כאשר האחרים נתונים.
- אם האיבר הראשון  $a_1$  והאיבר האחרון  $a_n$  בסדרה ידועים, אז ניתן לחשב את

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

סכום האיברים לפי הנוסחה הבאה:

## שאלות:

(1) חשבו את סכום הסדרה הבאה:  $4, 7, 10, \dots, 34$  בשתי דרכים:

א. בעזרת הנוסחה:  $S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ .

ב. בעזרת הנוסחה:  $S = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$ .

(2) נתונה סדרה חשבונית ובה  $a_1 = 2$  ו- $d = 3$ .

א. חשבו את סכום חמשת האיברים הראשונים באופן ידני.

ב. היעזרו בנוסחת הסכום וחשבו את סכום חמשת האיברים הראשונים.

(3) נתונות הסדרות החשבוניות הבאות.

בכל סדרה חשבו את סכום האיברים הנדרש.

א.  $5, 7, 9, \dots$  מצאו את  $S_8$ .

ב.  $3, 7, 11, \dots$  מצאו את  $S_{15}$ .

ג.  $8, 2, -4, \dots$  מצאו את  $S_{25}$ .

ד.  $10, 3, -4, \dots$  מצאו את  $S_{16}$ .

(4) בכל אחת מהסדרות החשבוניות הבאות נתון הפרשה וסכום כל איבריה.

מצאו את האיבר הראשון.

א.  $S_{10} = 210, d = 4$

ב.  $S_{24} = 768, d = 2$

ג.  $S_{22} = -539, d = -3$

ד.  $S_{53} = -1484, d = -1$

(5) בכל אחת מהסדרות החשבוניות הבאות נתון האיבר הראשון וסכום כל איבריה.

מצאו את הפרש הסדרה.

א.  $S_{18} = 981, a_1 = 12$

ב.  $S_{30} = 1080, a_1 = 7$

ג.  $S_{25} = 2100, a_1 = -12$

ד.  $S_{13} = 624, a_1 = 9$

(6) בסדרה חשבונית שבה 10 איברים הפרש הסדרה הוא 6 וסכום כל איברי הסדרה הוא 300.

חשבו את האיבר הראשון בסדרה.

(7) נתונה סדרה חשבונית בת 7 איברים. האיבר הראשון הוא 3 וסכום כל איבריה הוא 105.

חשבו את הפרש הסדרה.

8 בסדרה חשבונית ידוע כי האיבר הראשון הוא 2 וכי האיבר השביעי הוא 38. מצאו את סכום 15 האיברים הראשונים בסדרה.

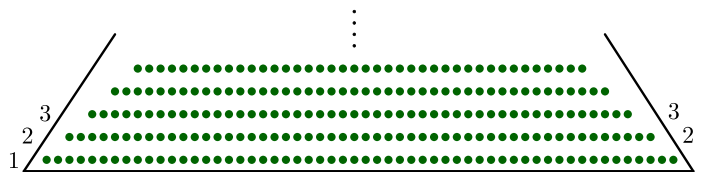
9 בסדרה חשבונית האיבר החמישי גדול פי 2 מהאיבר השלישי. סכום עשרת האיברים הראשונים הוא 90. חשבו את האיבר השביעי בסדרה.

10 המשכורת החודשית ההתחלתית של עובד במפעל היא 3600 ₪. בכל חודש עולה משכורתו ב-100 ₪.  
א. מה תהיה משכורתו בחודש התשיעי לעבודתו?  
ב. כמה השתכר העובד במשך 9 חודשים?

11 מיטל רצה ביום הראשון 3 ק"מ ובכל יום רצה 1 ק"מ יותר מאשר ביום הקודם.  
א. כמה ק"מ רצה מיטל ביום השמיני?  
ב. כמה ק"מ רצה מיטל בשמונת הימים הראשונים בסה"כ?

12 באמפיתיאטרון של מתנ"ס שכונתי ישנן 12 שורות. בשורה הראשונה יש 7 כיסאות ובכל שורה יש 3 כיסאות יותר מאשר בשורה שלפניה. כמה כיסאות יש בכל השורות יחדיו?

13 נתון אולם אירועים כפי שמופיע באיור הבא, וצורתו היא טרפזית. ידוע כי מספר הכיסאות בכל שורה קטן ב-2 ביחס לשורה שלפניה. באולם ישנן 9 שורות הממוספרות בסדר עולה מהבמה לאחור. ידוע כי בשורה הראשונה (הקדמית ביותר) ישנם 56 כיסאות.



במה

א. כתבו את נוסחת האיבר הכללי המתאימה לתיאור מספר הכיסאות בכל שורה.  
ב. שני אמנים מעוניינים להופיע באולם: לאחד קהל של 400 איש, ולשני קהל של 500 איש. עבור איזה מהאמנים קיבולת האולם תספיק? נמקו באמצעות חישוב.

- 14** נועם החליט לחסוך כסף לטיול ארוך בחו"ל.  
 בחודש הראשון לעבודתו, הוא הפקיד בחיסכון 1000 ש.  
 בכל חודש לאחר מכן, בזכות בונוס קבוע על התמדה, הוא הצליח להגדיל את סכום ההפקדה החודשי שלו ב-100 ש לעומת החודש הקודם.
- א. כתבו ביטוי לאיבר הכללי,  $a_n$ , המייצג את סכום ההפקדה בחודש ה- $n$ .  
 ב. נועם מתכנן לחסוך במשך שנה שלמה (12 חודשים).  
 מהו סכום הכסף הכולל שיהיה ברשותו בתום התקופה?  
 ג. במידה והטיול שנועם מתכנן לעשות עולה 15,000 ש, האם הסכום שחסך יספיק לו?

- 15** נתונה הסדרה החשבונית שאיבריה הראשונים הם:  $\dots, -54, -60, -66, -72$ .
- א. מצאו כמה איברים שליליים קיימים בסדרה.  
 ב. חשבו את סכומם של כל האיברים השליליים בסדרה.  
 ג. מהו מספר האיברים המינימלי שיש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי שסכום הסדרה יהיה חיובי?

### תשובות סופיות:

- (1) 209  
 (2) א. 40 ב. 40  
 (3) א. 96 ב. 465 ד. -680 ג. -2370  
 (4) א. 3 ב. 9 ג. 7 ד. -2  
 (5) א. 5 ב. 2 ג. 8 ד. 6.5  
 (6)  $a_1 = 3$   
 (7)  $d = 4$   
 (8)  $S_{15} = 660$   
 (9)  $a_7 = 12$   
 (10) א. 4400 ש ב. 36000 ש  
 (11) א. 10 ק"מ ב. 52 ק"מ  
 (12) 282 כיסאות  
 (13) א.  $a_n = 58 - 2n$  ב. יתאים לקהל של 400 איש.  
 (14) א.  $a_n = 100n + 900$  ב. 18600 ש ג. כן.  
 (15) א. 12 איברים ב. -468 ג. 26 איברים.

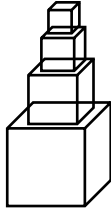
## מציאת מספר האיברים מנוסחת הסכום:

### סיכום כללי:

כאשר יש למצוא את  $n$  מנוסחת הסכום, תתקבל משוואה ריבועית עבורו. במקרים אלו נפתור אותה ע"י שימוש בנוסחת השורשים ונפסול פתרונות שליליים או שאינם שלמים.

### שאלות:

- (1) נתונה סדרה חשבונית שבה  $a_1 = 10$  ו- $d = -2$ . כמה איברים יש לחבר כדי לקבל את הסכום 30?  
 א. ציירו את איברי הסדרה ומצאו את כל הפתרונות האפשריים.  
 ב. אמתו את תוצאתכם ע"י שימוש בנוסחת הסכום.
- (2) נתונה הסדרה:  $\dots, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$ . מצאו כמה איברים יש לחבר, החל מהאיבר הראשון, כדי לקבל את הסכום 90.
- (3) בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא 3 והפרש הסדרה הוא 9. סכום כל האיברים בסדרה הוא 435. כמה איברים בסדרה?
- (4) נתונה סדרה חשבונית:  $\dots, 9, 7, 5$ . סכום כל האיברים בסדרה הוא 60. חשבו את מספר איברי הסדרה.
- (5) בסדרה חשבונית האיבר השלישי הוא 50 והאיבר השמיני הוא 30. כמה איברים בסדרה אם סכומם 418 (מצאו את כל האפשרויות).
- (6) עדן צועדת ביום הראשון 2.5 ק"מ ובכל יום צעידה, צועדת 1.5 ק"מ יותר מאשר ביום הקודם. במשך כמה ימים צעדה עדן מרחק כולל של 92.5 ק"מ בסך הכול?
- (7) שיר קוראת ספר. ביום הראשון קראה 6 עמודים ובכל יום קראה 4 עמודים יותר מאשר ביום הקודם. בספר 336 עמודים בסך הכל. במשך כמה ימים קראה שיר את הספר?



- (8) מגדל מורכב מקוביות המונחות זו על זו.  
 אורך הצלע של הקובייה התחתונה הוא 20 ס"מ.  
 הצלע של כל קובייה אחרת קצרה ב-2 ס"מ מזו שמתחתיה.  
 גובה המגדל 90 ס"מ. כמה קוביות במגדל?

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $n = 5$  או  $n = 6$ . ב. אימות ע"י נוסחת הסכום.  
 (2) 3 איברים או 12 איברים ראשונים.  
 (3) 10 איברים.  
 (4) 6 איברים.  
 (5) 11 איברים או 19 איברים יתנו את המבוקש.  
 (6) 10 ימים.  
 (7) 12 ימים.  
 (8) 6 קוביות.

## מעבר מנוסחת סכום לנוסחת איבר כללי:

### סיכום כללי:

בסדרה חשבונית, הקשר שבין האיבר הכללי  $a_n$  לסכום הסדרה  $S_n$  הוא:  
 $S_n - S_{n-1} = a_n$  לכל  $n \geq 2$ .

### שאלות:

(1) בכל אחת מן הסדרות הבאות, נתונה נוסחת סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה. מצאו את נוסחת האיבר הכללי והוכיחו כי מדובר בסדרות חשבוניות.

א.  $S_n = n^2 + 8n$

ב.  $S_n = n^2 - 5n$

ג.  $S_n = -2n^2 + 7n$

(2) נתונה סדרה שבה  $S_n = 2n^2 + 4n$ .

א. מצאו את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכיחו כי הסדרה חשבונית ומצאו את הפרשה.

### תשובות סופיות:

(1) א.  $a_n = 2n + 7$     ב.  $a_n = 2n - 6$     ג.  $a_n = -4n + 9$

(2) א.  $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$     ב.  $d = 4$

## הרכבה של סדרות חשבוניות:

### שאלות:

(1) מגדירים שתי סדרות חשבוניות:

- סדרה A:  $1, 9, 17, 25, \dots$

- סדרה B:  $5, 13, 21, 29, \dots$

א. חשבו את סכום 30 האיברים הראשונים בכל אחת מן הסדרות A ו-B.  
מגדירים כעת סדרה חדשה C המורכבת מאיברי הסדרות A ו-B באופן הבא:

$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots$

ב. (1) הסבירו מדוע הסדרה C היא חשבונית.

(2) חשבו את סכום 60 האיברים הראשונים בסדרה C.

ג. (1) הראו כי מתקיים השוויון:  $S_{60}(C) = S_{30}(A) + S_{30}(B)$ .

כלומר: סכום 30 האיברים הראשונים של הסדרה A ועוד סכום 30 האיברים

של הסדרה B שווים לסכום כל 60 האיברים בסדרה C.

(2) הסבירו את משמעות התוצאה.

(2) לליאן ניתנה משימה לחשב את סכום 100 האיברים הראשונים בסדרה הבאה:

$3, 7, 15, 19, 27, 31, \dots$

כדי לבצע את החישוב, נעזרה ליאן באחותה, אליון, שהציעה את דרך הפעולה הבאה.

אליון הבחינה כי ניתן לפצל את הסדרה המקורית לשתי סדרות חשבוניות נפרדות.

סדרה 1:  $3, 15, 27, \dots$

סדרה 2:  $7, 19, 31, \dots$

א. (1) כמה איברים יש לחבר מכל סדרה לפי הצעתה של אליון, כדי להגיע לסכום של 100

האיברים הראשונים בסדרה המקורית?

(2) מצאו את הערך של האיבר האחרון בכל אחת משתי הסדרות הללו.

ב. (1) חשבו את הסכום של כל סדרה בנפרד.

(2) מצאו את הסכום שליאן נתבקשה לחשב.

(3) נתונה הסדרה החשבונית:  $4, 9, 14, 19, \dots, 599$

מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצאו את סכום האיברים שנותרו.

## תשובות סופיות:

- (1)** א. סדרה A: 3510, סדרה B: 3630      ב. (1) ראו סרטון      ב. (2) 7140.  
ג. (1) ראו סרטון      ג. (2) ראו סרטון.
- (2)** א. (1) 50 איברים      א. (2) סדרה 1: 591, סדרה 2: 595.  
ב. (1) סדרה 1: 14850, סדרה 2: 15050      ב. (2) 29900.
- (3)** 23920.

## סכום איברים העומדים במקומות הזוגיים והאי-זוגיים:

### סיכום כללי:

#### הגדרות:

- סדרה בעלת מספר זוגי של איברים  $\leftarrow$  סדרה בעלת  $2n$  איברים.
- סדרה בעלת מספר אי-זוגי של איברים  $\leftarrow$  סדרה בעלת  $2n+1$  איברים.

תת הסדרה המתקבלת		קריטריון
סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים	סדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים	
$n$ איברים	$n$ איברים	סדרה בעלת $2n$ איברים
$n+1$ איברים	$n$ איברים	סדרה בעלת $2n+1$ איברים
$a_1$	$a_2$	האיבר הראשון
$2d$	$2d$	הפרש הסדרה

## שאלות:

1) בטבלה שלפניכם נתונות סדרות חשבוניות שונות.

מלאו את הטבלה עבור הסדרות החלקיות:

סדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

סדרת איברים העומדים במקומות הזוגיים			סדרת איברים העומדים במקומות האי-זוגיים			הסדרה
איבר ראשון	הפרש חדש	מס' איברים	איבר ראשון	הפרש חדש	מס' איברים	
						סדרה חשבונית שבה 21 איברים: ... 8, 3, -2
						סדרה חשבונית שבה 30 איברים: ... 7, 10, 13
						סדרה חשבונית שבה 15 איברים: ... 12, 14, 16
						סדרה חשבונית שבה 44 איברים: ... -6, -12, -18

2) נתונה סדרה חשבונית שבה  $a_1 = 1$  ו- $d = 4$ .

א. רשמו לפי סדר את 10 האיברים הראשונים בסדרה:

-----

- ב. בסדרה זו מוחקים את האיברים השני, הרביעי, השישי, השמיני והעשירי.  
כלומר, מוחקים כל איבר הנמצא במקום זוגי בסדרה.  
חשבו את סכום האיברים שנותרו בסדרה באמצעות חישוב ישיר ובאמצעות  
נוסחת הסכום.
- ג. חשבו את סכום 50 האיברים שלא נמחקו.
- ד. חשבו את סכום 50 האיברים שנמחקו.

## תשובות סופיות:

(1) להלן טבלה:

סדרת איברים העומדים במקומות הזוגיים			סדרת איברים העומדים במקומות האי-זוגיים			הסדרה
איבר ראשון	הפרש חדש	מס' איברים	איבר ראשון	הפרש חדש	מס' איברים	
3	10	10	-2	10	11	סדרה חשבונית שבה 21 איברים: -2, 3, 8 ...
10	-6	15	13	-6	15	סדרה חשבונית שבה 30 איברים: .13, 10, 7 ...
14	4	7	12	4	8	סדרה חשבונית שבה 15 איברים: .12, 14, 16 ...
-12	12	22	-18	12	22	סדרה חשבונית שבה 44 איברים: -18, -12, -6 ...

(2) א. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37 ב. 85 ג. 9850 ד. 10050.

### שאלות:

- (1)** בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7 וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
- מצאו את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
  - מצאו את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
  - מצאו כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.
- (2)** לפניכם שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית:  $x-5$ ,  $x-16$ ,  $2x+23$ .
- ענו על הסעיפים הבאים:
    - מצאו את  $x$ .
    - מצאו את הפרש הסדרה.
  - ידוע כי:  $a_{12} = 0$ . מצאו את  $a_1$ .
  - האיבר האחרון בסדרה הוא:  $a_n = 308$ .
- מצאו את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- (3)** בסדרה חשבונית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
- הוכיחו:  $a_5 = 0$ .
  - נתון:  $a_3 - a_1 = 24$ . מצאו את  $a_1$  ואת  $d$ .
  - מגדירים סדרה חשבונית חדשה  $b_n$  המקיימת:  $b_n = 2a_n - 3$ . מצאו את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- (4)** נתונים שני טורים חשבוניים:  $\begin{cases} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{cases}$ . לשני הטורים אותו מספר איברים.
- ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.
- מצאו את מספר האיברים שבכל טור.
  - מחברים את  $n$  האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם  $n$  האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצאו את  $n$  אם ידוע שהוא קטן מ-20.

- (5) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.
- א. הוכיחו את הטענות הבאות:  
 (1)  $a_1 = -4d$   
 (2)  $S_9 = 0$
- ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5. מצאו את  $a_1$  ואת  $d$ .
- ג. מצאו את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

- (6) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר. ההצעה הראשונה: לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם. ההצעה השנייה: לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם. ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.
- א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.  
 ב. מה מחיר הרכב?

### תשובות סופיות:

- (3) א.  $a_1 = 50, d = -6$       ב.  $a_{10} = -4$       ג.  $n = 6$
- (4) א. (1)  $x = -50$       א. (2)  $d = 11$       ב.  $a_1 = -121$       ג.  $S = 2156$
- (5) א. הוכחה      ב.  $a_1 = 12, d = -3$       ג.  $b_5 = -3$
- (6) א.  $n = 81$       ב.  $n = 16$
- (7) א. הוכחה      ב.  $a_1 = -8, d = 2$       ג.  $n = 36$
- (8) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה.      ב. 45000 ₪.