

שאלון 471

קדם אנליזה של פונקצית מנה – הפונקציה ההופכית

תוכן העניינים:

קדם אנליזה של פונקצית מנה – הפונקציה ההופכית..... 1

2.....	גרף הפונקציה ההופכית:
2.....	סיכום כללי:
3.....	שאלות:
6.....	אסימפטוטה אופקית:
6.....	סיכום כללי:
7.....	שאלות:
8.....	חיתוך בין גרף הפונקציה וההופכית לה:
8.....	סיכום כללי:
8.....	שאלות:
9.....	סרטוט גרף הכולל אסימפטוטה אנכית:
9.....	סיכום כללי:
10.....	שאלות:
13.....	טרנספורמציות עם פונקציה הופכית:
13.....	סיכום כללי:
14.....	שאלות:
16.....	תשובות סופיות:

גרף הפונקציה ההופכית:

סיכום כללי:

מספר הופכי:

המספר ההופכי של מספר נתון הוא מספר (השונה מ-0), שמכפלתו במספר הנתון שווה ל-1. במילים אחרות, זהו המספר שמקבלים ע"י חלוקת 1 במספר הנתון.

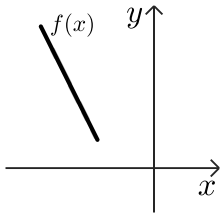
מסקנות:

- הסימן של שני מספרים הופכיים זהה: אם מספר הוא חיובי, אז גם ההופכי לו יהיה חיובי, ואם מספר הוא שלילי אז גם ההופכי לו יהיה שלילי.
- ל-0 אין הופכי!
- ישנם שני מספרים שהם הופכיים של עצמם: 1, -1.

הקשר בין תכונות פונקציה והפונקציה ההופכית לה:

נקודות קיצון		עלייה וירידה		חיוביות ושליליות		
$\max(x, y)$	$\min(x, y)$	יורדת	עולה	שלילית	חיובית	$f(x)$
$\min\left(x, \frac{1}{y}\right)$	$\max\left(x, \frac{1}{y}\right)$	עולה	יורדת	שלילית	חיובית	$\frac{1}{f(x)}$

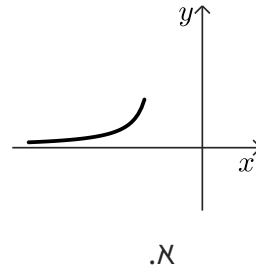
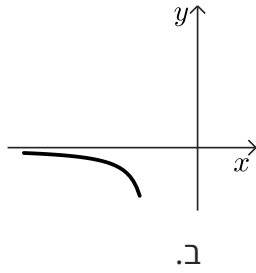
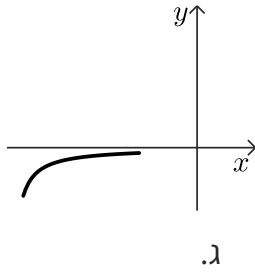
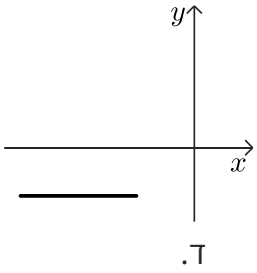
שאלות:



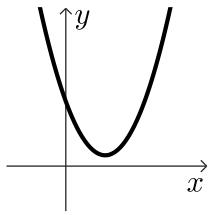
1) לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -2x - 6$ בתחום: $-8 \leq x \leq -4$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = \frac{1}{-2x-6}$.

העזרו בתחומי החיוביות והשליליות ובתחומי העלייה והירידה, ובחרו איזה מבין הגרפים שלפניכם מתאים לפונקציה $g(x)$ בתחום הנ"ל.



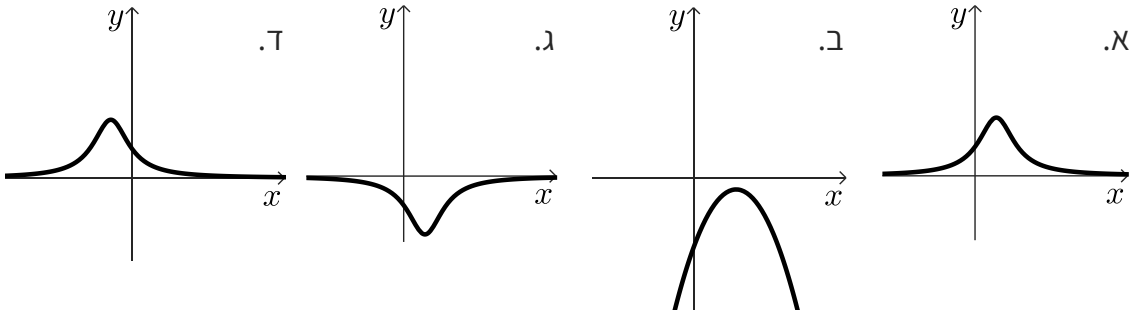
הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון וסוגה
$f(x)$					
$g(x)$					



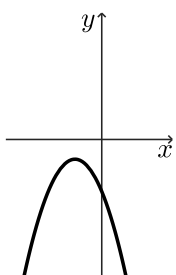
(2) לפניכם גרף הפונקציה: $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$.

נתונה הפונקציה $h(x)$, המקיימת: $h(x) = \frac{1}{2x^2 - 4x + 4}$.

העזרו בנקודת הקיצון, בתחומי החיוביות והשליליות ובתחומי העליה והירידה, ובחרו איזה מבין הגרפים שלפניכם מתאים לפונקציה $h(x)$ בתחום הנ"ל.



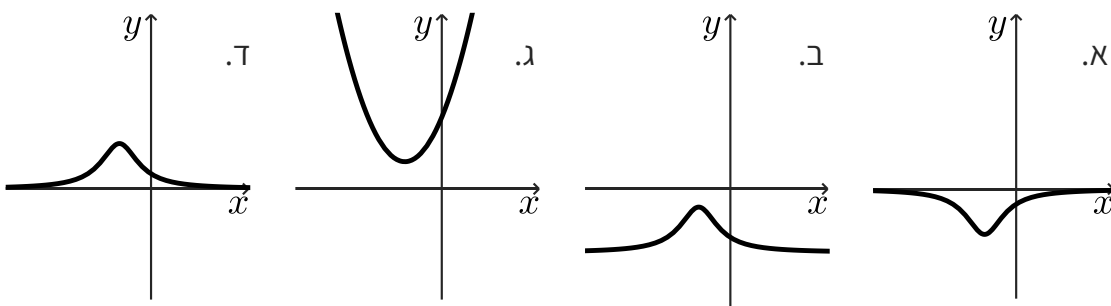
הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון וסוגה
$g(x)$					
$h(x)$					



(3) לפניכם גרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 - 4x - 6$.

נתונה הפונקציה $h(x)$, המקיימת: $h(x) = \frac{1}{-x^2 - 4x - 6}$.

העזרו בנקודת הקיצון, בתחומי החיוביות והשליליות ובתחומי העליה והירידה, ובחרו איזה מבין הגרפים שלפניכם מתאים לפונקציה $h(x)$.

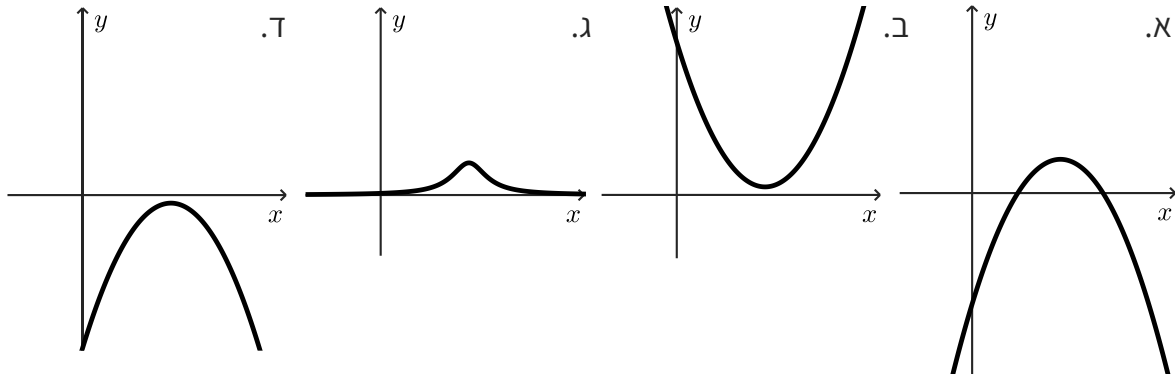
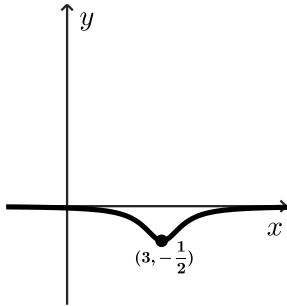


(4) נתונות שתי פונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$, המוגדרות לכל x ,

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

בשרטוט שלפניכם מתוארת הפונקציה $g(x)$.

לפניכם 4 גרפים, בחרו איזה מבין הגרפים מתאים לייצג את הפונקציה $f(x)$, ונמקו.



הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון וסוגה
$f(x)$					
$g(x)$					

(5) לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x , וחיובית לכל x .

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

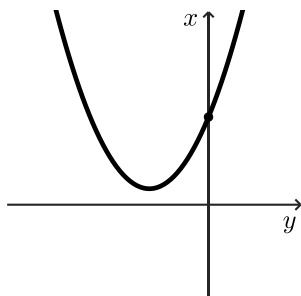
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום ששיעוריה הם $(-3, 2)$,

מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



אסימפטוטה אופקית:

סיכום כללי:

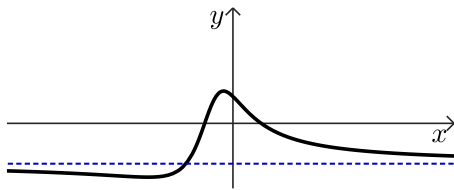
אסימפטוטה אופקית:

ישר מהצורה $y = a$, המקביל לציר ה- x , נקרא **אסימפטוטה אופקית** לפונקציה $f(x)$ אם עבור ערכי x הולכים וגדלים ($x \rightarrow +\infty$) או עבור ערכי x הולכים וקטנים ($x \rightarrow -\infty$) המרחק בין גרף הפונקציה $f(x)$ לישר $y = a$ שואף לאפס.

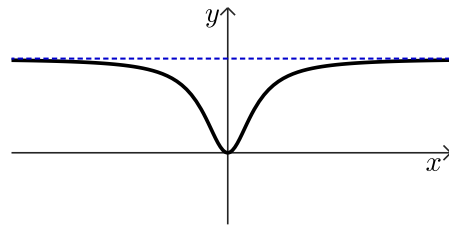
כאשר מדובר בפונקציה מהצורה $\frac{1}{f(x)}$, האסימפטוטה האופקית תהיה $y = 0$ (ציר ה- x)

ישנן פונקציות אחרות, שלהן יהיו אסימפטוטות אופקיות אחרות, למשל:

הפונקציה: $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 6}$



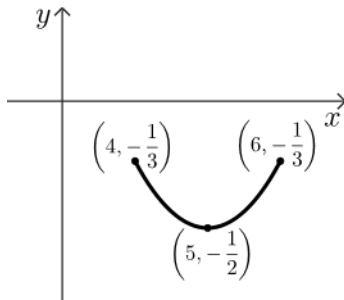
הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$



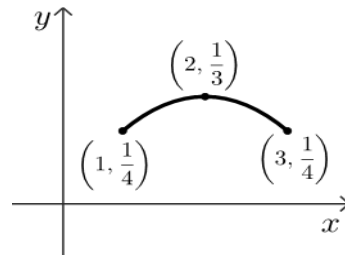
שאלות:

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה פונקציה וגרף חלקי שלה (כל הפונקציות מוגדרות לכל x). השלימו בכל אחד מן הגרפים את האסימפטוטה האופקית, כתבו את משוואתה והשלימו את הסרטוט של גרף הפונקציה.

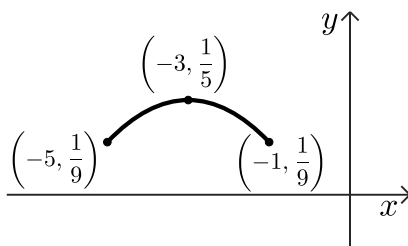
ב. $y = \frac{1}{-x^2 + 10x - 27}$



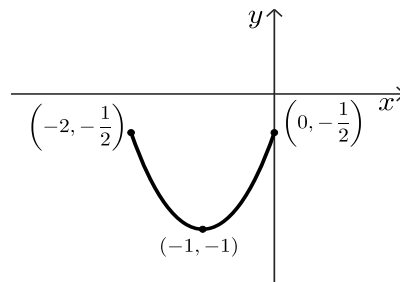
א. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 7}$



ד. $y = \frac{1}{x^2 + 6x + 14}$

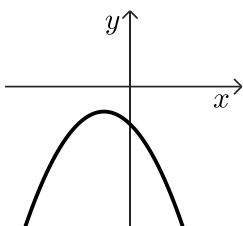


ג. $y = \frac{1}{-x^2 - 2x - 2}$



7) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 - 2x - 3$.

סרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$, המקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.



הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון וסוגה
$f(x)$					
$g(x)$					

חיתוך בין גרף הפונקציה וההופכית לה:

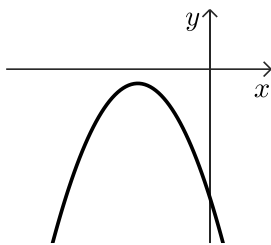
סיכום כללי:

הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ נחתכות כאשר $y = 1$ או $y = -1$.

הערות:

- (1) אם בנקודה שבה $y = 1$ או $y = -1$ יש לפונקציה נקודת קיצון, אז היא תהיה נקודת החיתוך היחידה שלה ושל הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ כאשר עבור $\frac{1}{f(x)}$ נקודה זו תהיה גם קיצון מהסוג השני.
- (2) אם הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(x) > 1$ או $f(x) < -1$ בכל תחום הגדרתה, אז היא לא תחתוך את גרף הפונקציה ההופכית $\frac{1}{f(x)}$ כלל.

שאלות:



(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2 - 4x - 4.5$ ונתון גרף הפונקציה $f(x)$:

א. סרטטו באותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה

ההופכית $\frac{1}{f(x)}$. היעזרו בטבלה הבאה:

הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$					
$\frac{1}{f(x)}$					

ב. מה ניתן לומר על נקודות החיתוך של שתי הפונקציות?

סרטוט גרף הכולל אסימפטוטה אנכית:

סיכום כללי:

אסימפטוטה אנכית:

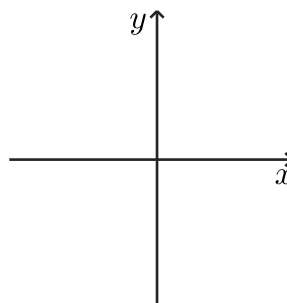
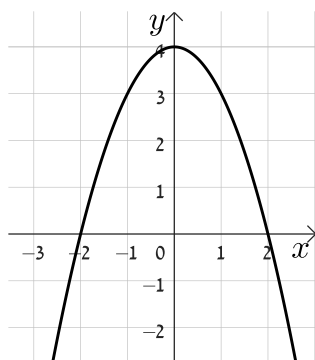
ישר מהצורה $x = a$ המאונך לציר ה- x , נקרא אסימפטוטה אנכית לפונקציה, אם ככל שערכי x מתקרבים ל- a מימין או משמאל, ערכי הפונקציה מתקרבים ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

סיכום תכונות פונקציה והפונקציה ההופכית לה:

$\frac{1}{f(x)}$	$f(x)$	
אם ל- $f(x)$ יש חיתוך עם ציר ה- x , אז $\frac{1}{f(x)}$ לא מוגדרת בנקודות אלו	כל x	תחום הגדרה
תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ ושל $\frac{1}{f(x)}$ נשמרים		חיוביות ושליליות
תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ ושל $\frac{1}{f(x)}$ הם הפוכים (בהתאם לתחום ההגדרה)		עלייה וירידה
(x, y) קיצון של $f(x)$ אז $(x, \frac{1}{y})$ קיצון של $\frac{1}{f(x)}$ כאשר $y \neq 0$. סוג הקיצון מתהפך		נקודות קיצון
אין	ייתכן	חיתוך עם ציר ה- x
בנקודות חיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x , ל- $\frac{1}{f(x)}$ יש אסימפטוטה אנכית	אין	אסימפטוטה אנכית
$y = 0$	אין	אסימפטוטה אופקית
$f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ נחתכות בנקודות שבהן $y = 1$ או $y = -1$.		נקודות משותפות

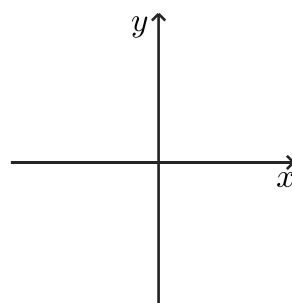
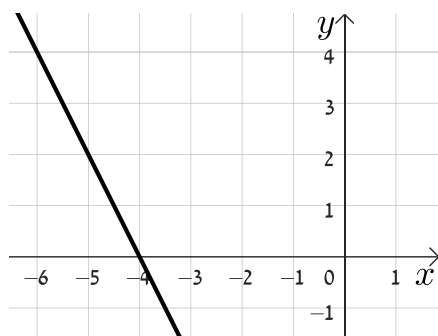
שאלות:

9 נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 4$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.



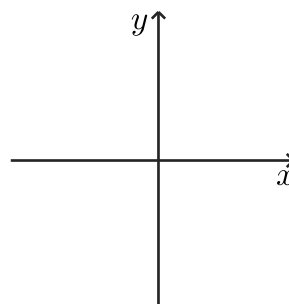
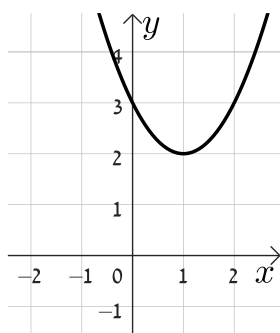
הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

10 נתונה הפונקציה: $g(x) = -2x - 8$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.



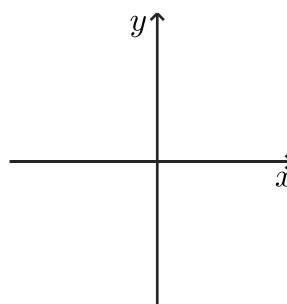
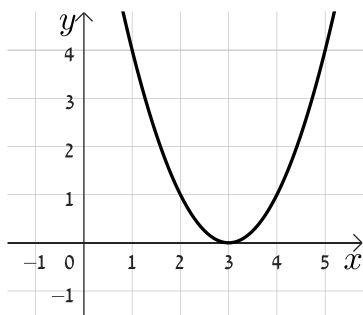
הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

11 נתונה הפונקציה: $h(x) = x^2 - 2x + 3$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.



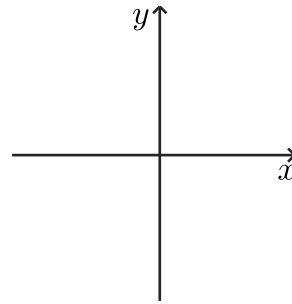
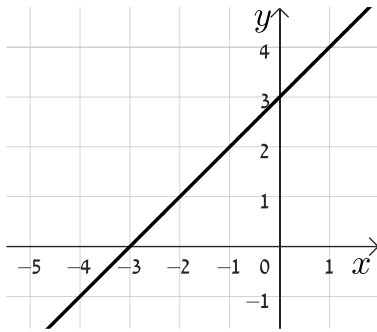
הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

12 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x + 9$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.



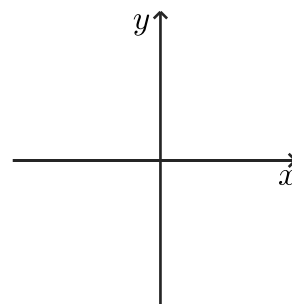
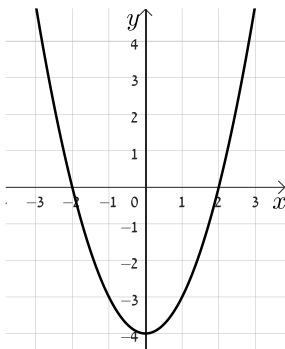
הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

13 נתונה הפונקציה: $g(x) = x + 3$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.



הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

14 נתונה הפונקציה: $h(x) = x^2 - 4$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.



הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

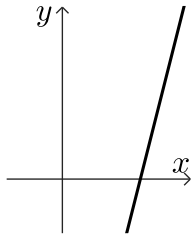
טרנספורמציות עם פונקציה הופכית:

סיכום כללי:

להלן סיכום תכונות הטרנספורמציות שנלמדו עבור פונקציות:

אסימפטוטה אופקית $y = b$	אסימפטוטה אנכית $x = a$	השינוי	
משתנה: $y = b \pm k$	לא משתנה	הזזה אנכית	$f(x) \pm k$
לא משתנה	משתנה: $x = a \pm k$	הזזה אופקית	$f(x \pm k)$
משתנה: $y = b \cdot k$	לא משתנה	כיווץ/מתיחה	$k \cdot f(x)$
משתנה: $y = -b$	לא משתנה	שיקוף ביחס לציר x	$-f(x)$
לא משתנה	משתנה: $x = -a$	שיקוף ביחס לציר y	$f(-x)$
$y = b $	לא משתנה	ערך מוחלט	$ f(x) $

שאלות:

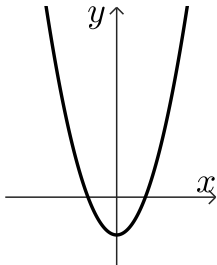


(15) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x) = 3x - 9$.

העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $k(x) = \frac{1}{3x-9} + 3$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

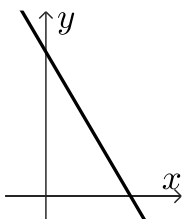


(16) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x) = x^2 - 1$.

העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $h(x) = \frac{1}{(x-2)^2 - 1}$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

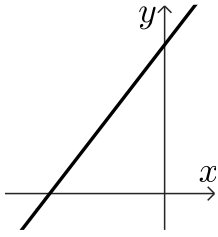


(17) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x) = 6 - 2x$.

העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $h(x) = \frac{6}{6-2x}$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

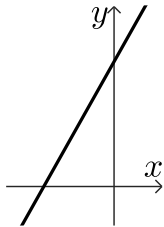


18 בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x) = 2x + 8$.

העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $h(x) = -\frac{1}{2x+8}$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

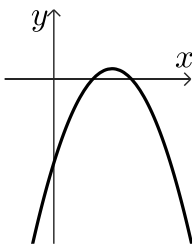


19 בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x) = x + 7$.

העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $h(x) = \frac{1}{-x+7}$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							



20 בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $h(x) = \left| \frac{1}{-x^2+6x-8} \right|$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

תשובות סופיות:

(1) גרף א.

(2) גרף א.

(3) גרף א.

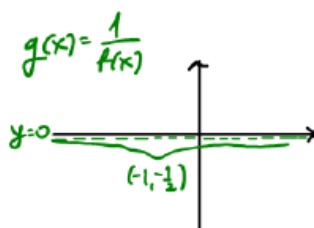
(4) גרף ד.

(5) א. כל x ב. $\max\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

ג. עלייה: $x < -3$, ירידה: $x > -3$

(6) ראו פתרון ואיורי סקיצות בסרטון הוידאו.

(7) להלן סרטוט:



(8) א. ראו סרטוט בצד.

ב. הפונקציות נחתכות בשתי נקודות.

(9) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(10) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(11) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(12) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(13) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(14) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(15) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

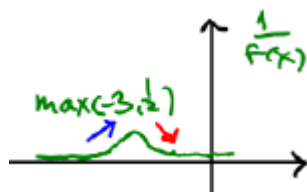
(16) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(17) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(18) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(19) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

(20) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.



ד. להלן סרטוט:

