תוכן עניינים כללי:

פרק 1 – מבוא לאלגברה 1

פרק 2 – משוואות אלגבריות 41

פרק 3 – אי-שוויונים אלגבריים 60

פרק 4 – סדרות 70

פרק 5 – אינדוקציה מתמטית 94

פרק 6 – גאומטריה במערכת הצירים 101

פרק 7 – מושגים יסודיים בפונקציות 124

פרק 8 – תזכורת מחטיבת הביניים - הפרבולה 136

פרק 9 – פונקצית החזקה עם מעריך טבעי 150

פרק 10 – פונקציה זוגית ואי-זוגית 157

פרק 11 – פעולות על פונקציות 162

פרק 12 – מבוא לפונקצית הפולינום 190

פרק 13 – נגזרת של פונקציה 213

פרק 14 – המשיק לגרף הפונקציה 224

פרק 15 – חקירת פונקצית פולינום 235

פרק 16 – נושאים נוספים עם פונקצית פולינום 260

פרק 17 – שאלות קצרות 272

פרק 18 – מבוא לפונקצית שורש 275

פרק 19 – חקירת פונקצית מנה ושורש 284

פרק 20 – מבוא לפונקצית מנה 354

פרק 21 – חקירת פונקציות טריגונומטריות 362
פרק 22 – בעיות קיצון 413
פרק 23 – האינטגרל הכללי 441
פרק 24 – האינטגרל המסוים וחישובי שטחים 449
פרק 25 – הסתברות קלאסית 490
פרק 26 – מבוא לגאומטריה של המישור 551
פרק 27 – משולשים 558
פרק 28 – מרובעים 578
פרק 29 – שטחים והיקפים 601
פרק 30 – המעגל 614
פרק 31 – פרופורציה ודמיון 634
פרק 32 – טריגונומטריה במשולש ישר זווית 655
פרק 33 – זהויות טריגונומטריות 661
פרק 34 – משוואות טריגונומטריות 675
פרק 35 – טריגונומטריה במישור 682

שאלון 571

מבוא לאלגברה

תוכן העניינים:

מבוא לאלגברה..... 1

מספרים מכוונים:.....3

סיכום כללי:.....3

שאלות:.....4

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים: 6

סיכום כללי:.....6

שאלות:.....7

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים: 7

סיכום כללי:.....7

שאלות:.....8

שברים פשוטים ועשרוניים: 8

סיכום כללי:.....8

שאלות:.....9

אחוזים:.....12

שאלות:.....12

כפל וחילוק שברים:.....12

סיכום כללי:.....12

שאלות:.....13

חיבור חיסור שברים: 13

סיכום כללי:.....13

שאלות:.....14

בעיות יסודיות באחוזים: 17

סיכום כללי:.....17

שאלות:.....17

חזרה על תבניות מספר:.....18

סיכום כללי:.....18

שאלות:.....18

כינוס איברים: 19
סיכום כללי: 19
שאלות: 20
פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים: 21
סיכום כללי: 21
שאלות: 21
פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר: 22
סיכום כללי: 22
שאלות: 23
פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים: 24
סיכום כללי: 24
שאלות: 24
פירוק הטרינום: 26
סיכום כללי: 26
שאלות: 26
שברים אלגבריים: 27
סיכום כללי: 27
שאלות: 28
כפל וחילוק של שברים אלגבריים: 29
סיכום כללי: 29
שאלות: 30
חיבור וחיסור של שברים אלגבריים: 30
סיכום כללי: 30
שאלות: 31
שברים כפולים: 33
סיכום כללי: 33
שאלות: 33
תשובות סופיות: 34

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

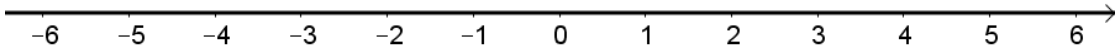
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ -5\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

4) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-25):(-5)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $18:(-6)$

ו. $(-16):4$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים.
סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה.
סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

9) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2

ב. 3^3

ג. $(-3)^3$

ד. $(-2)^3$

ה. 4^3

ו. 3^4

ז. $(-5)^3$

ח. 10^4

ט. $-(-3)^4$

י. -5^4

יא. -4^3

יב. $-(-2)^6$

10) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$

ב. $\sqrt[4]{625}$

ג. $\sqrt[4]{-16}$

ד. $\sqrt[5]{-32}$

ה. $-\sqrt[4]{81}$

ו. $-\sqrt[3]{1000}$

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

11) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

ב. $(-3)^2:9-2\cdot(-4^2)$

ג. $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

ד. $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

ה. $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

ו. $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

ז. $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

ח. $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

ט. $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

י. $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

יא. $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{(5^2\cdot 3-72)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

שברים פשוטים ועשרוניים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שלמים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים:

הגדרה:

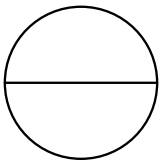
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

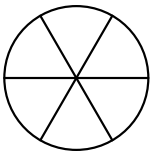
שאלות:

12) צבעו את החלקים המתאימים בכל עיגול:

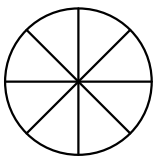
א. צבעו $\frac{1}{2}$ מהעיגול



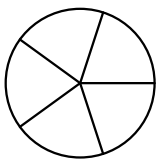
ב. צבעו $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבעו $\frac{3}{8}$ מהעיגול

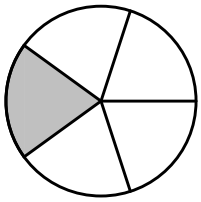


ד. צבעו $\frac{2}{5}$ מהעיגול

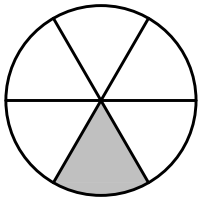


13) כתבו את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

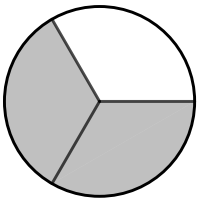
א. שבר:



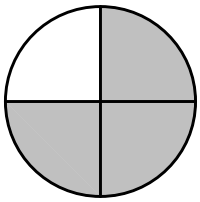
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



14) הרחיבו את השברים הבאים:

א. השבר: $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

15) צמצמו את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

16) המירו את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

17) המירו את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

18) קבעו איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

19) המירו את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

20) המירו את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

21) כתבו את השברים הבאים בצורתם העשרונית

(היעזרו במחשבון וכתבו עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

אחוזים:

שאלות:

22) המירו מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

23) המירו משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

24) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

25) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

חיבור חיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

  דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot6}{30}+\frac{13\cdot5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

26) מצאו את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

27) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$

ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$

ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$

ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$

ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$

י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

28) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

29) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

30) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

- תמורת האחוז = שלם $\cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה:

$120 \cdot \frac{40}{100} = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

31) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.

א. כמה בנות בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

32) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.

א. כמה תלמידים בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

33) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.

א. מהו מחירו בסוף העונה?

ב. מה גודל ההנחה?

34) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.

א. מה מחירו הסופי?

ב. מה גודל ההתייקרות?

35) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

36) מוצר מסוים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

37) ענו על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים. מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

38) חשבו את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

39) חשבו את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$

40) הציבו את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשבו את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית.
כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם.

דוגמה: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

41) כנסו איברים דומים:

א. $5x+7x-4x$

ב. $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

ג. $-10xy+15xy+xy-2yx$

ד. $x^2y-3yx^2+x^2y$

ה. $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

ו. $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

ז. $3xy+y-30y+6yx-7y$

ח. $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

ט. $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

י. $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

יא. $7x^2-3x-4x+2$

יב. $5xy+2x-3yx-x+1$

יג. $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

יד. $x+xy+y-6yx-6y-6x$

טו. $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

טז. $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

יז. $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

יח. $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

יט. $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

כ. $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

כא. $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

כב. $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

כג. $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

כד. $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

כה. $2a^2b+2b+3a^2+5b$

כו. $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

כז. $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

כח. $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

42) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

43) פשטו את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

44) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $7x+\left(-4x-5\right)+3x+\left(-1+7x\right)$

ב. $5x+\left(3x-2\right)+\left(-4-2x\right)$

ג. $8-\left(2x-5\right)-\left(4x+2\right)$

ד. $-6x-\left(-3x-1\right)-\left(-7-4x\right)+1$

ה. $\left(3-2x^2+4\right)2+3\left(x-x^2\right)-6\left(7-5x\right)+4x^2$

ו. $3y^2-\left(y+1-2y^2\right)+6\left(5y-6\right)-\left(-y-4\right)3+5\left(y^2+1\right)-7$

45) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\left(x-1\right)\left(x+2\right)$

ב. $\left(x+3\right)\left(x-7\right)$

ג. $\left(3-x\right)\left(x+4\right)$

ד. $\left(3x+4\right)\left(5x+1\right)$

ה. $3\left(4x+1\right)\left(2x-3\right)$

ו. $-2\left(3x-1\right)\left(5-2x\right)$

46) פשטו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\left(x-1\right)\left(x+3\right)+2\left(3-x\right)$

ב. $\left(a+4\right)\left(a-2\right)-\left(a+5\right)\left(a-3\right)$

ג. $\left(2m-3\right)\left(4m+3\right)+5\left(2m^2-6\right)$

ד. $-x^2y^2\left(x^3y+x^2\right)+2xy\left(2x^3y-x^4y^2\right)$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2$.

שאלות:

47) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

48) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

49) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

50) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

51) פשטו את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

52) פשטו את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

53) פשטו את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$ ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$ ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$ ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

54) פשטו את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$ ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$ ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$ ח. $25x^2+70x+49$

55) פשטו את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25 ב. x^2-81

ג. $25y^2-49$ ד. $121x^2-1$

ה. x^2y^2-4 ו. $9y^4-169x^4$

56) פשטו את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$ ב. x^3-10x^2+25x

ג. m^4-1 ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.
שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.
הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו- $m_1+m_2=b$.
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן הבא:
$m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה:
$ax^2+bx+c=a(x-m_1)(x-m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ אז נכתוב:
$ax^2+bx+c=a(x-m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

57) פרקו את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א.	x^2+5x+4	ב.	$x^2-8x+15$	ג.	$x^2-33x+62$
ד.	$2x^2+7x-15$	ה.	$3x^2-11x+6$	ו.	$6x^2+5x+1$
ז.	$2x^2+x-6$	ח.	$x^2-18x+81$	ט.	x^2+2x+8

58) פרקו את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
הערה: במידה ולא למדתם על נוסחת השורשים התעלמו משאלה זו.

א.	$6x^2+5x+1$	ב.	x^2+5x+4
ג.	$4x^2+20x+25$	ד.	$3x^2-x+20$

שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגבריים:

ניתן לצמצם שברים אלגבריים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

59) מצאו את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

60) צמצמו את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבירו מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

61) צמצמו את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתבו את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

62) צמצמו את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתבו את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

63) צמצמו את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתבו את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

64) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

65) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+\left(x+1\right)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2\left(x+2\right)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2\left(x+2\right)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x\left(x+1\right)}+\frac{x+1}{x\left(x+1\right)}=\frac{x+x+1}{x\left(x+1\right)}=\frac{2x+1}{x\left(x+1\right)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{\left(x-3\right)^2}-\frac{2}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)}=\frac{3\left(x+3\right)-2\left(x-3\right)}{\left(x-3\right)^2\left(x+3\right)}=\frac{x+15}{\left(x-3\right)^2\left(x+3\right)}$$

שאלות:

66) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

67) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

68) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

69) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

70) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

71) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

72) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

ב. $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

ג. $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

ד. $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

ה. $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

ו. $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

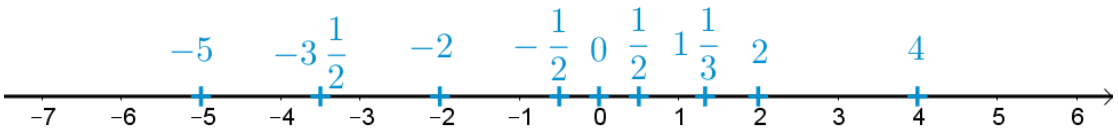
ז. $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

ח. $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

ט. $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5

ו. 17 ז. -1 ח. -4.

3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16

ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18

יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

5) א. + ב. + ג. - ד. -.

6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

9) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81.

ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64.

10) א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10.

11) א. 28 ב. 33 ג. 19 ד. -37 ה. 31 ו. -14

ז. 5 ח. -21 ט. -16 י. -44 יא. 20

12) תשובה מודגמת בסרטון.

13) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$.

14) א. $\frac{4}{8},\frac{18}{36},\frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50},\frac{75}{125},\frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128},\frac{160}{256},\frac{440}{700}$

15) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$

ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

16) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$

ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

17) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$

ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

18) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

19) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$

ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

20) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75

ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875

יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

21) א. $0.\bar{6}$ ב. $0.8\bar{3}$ ג. 0.428 ד. $0.1\bar{8}$

22) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$

ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

23) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

24) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

25) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

26) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12

ז. 30 ח. 24

27) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$

ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

28) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$

ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

29) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$

ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

30) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

31) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

32) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

33) א. 240 ₪ ב. 60 ₪

34) א. 540 ₪ ב. 40 ₪

35) 4.9755 ₪

36) 400 ₪

37) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

38) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5

ז. -10 ח. 45

39) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

40 א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$

ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

41 א. $8x$ ב. $2x^2$ ג. $4xy$ ד. $-x^2y$ ה. $4a^2-a$ ו. x^2

ז. $9xy-36y$ ח. $8mn^2-6nm^2$ ט. $15x^3-19$

טו. $-13n-2m+6mn$ טז. $-5ab^2+22a^2b-3b$ י. 0

יא. $7x^2-7x+2$ יב. $2xy+x+1$ יג. $4x^2+3x-9$

יד. $-5x-5y-5xy$ יז. $4z^2-1$ יח. $14x^2z+5xz^2+6$ יט.

$-3x^2+2x-3$ כ. $-3x^2-x$ כא. $7a^2b+13x^2y$

כב. $-8x^2y^3+15a^2$ כג. $-8y^2-5x^3y^2$ כד. $-6x^3y-x^2$

כה. $2a^2b+3a^2+7b$ כו. $25a^2b-22ab^2$

כז. $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$ כח. $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

42 א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

43 א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

44 א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

45 א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

46 א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

47 א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. x^4+14x^2+49 ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

48 א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

49 א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

50 א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

51 א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

52 א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

53 א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n+3n^2)$

54 א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

55 א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

56 א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$

57 א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

58) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

59) א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 4\ ,\ x\neq 0$ ה. $x\neq -1$

ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 1\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 0$

ח. $x\neq 4\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 0$

60) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

61) א. $x\neq -4\ ,\ 3$ ב. $m\neq -4\ ,\ \frac{m}{4}$ ג. $a\neq 0,6\ ,\ \frac{2}{a}$

ד. $x\neq 5\ ,\ -\frac{x}{3}$ ה. $y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,\ -3$ ו. $x\neq \frac{1}{2}\ ,\ \frac{2x^2}{3}$

ז. $y\neq 0,3\ ,\ \frac{3}{y(y-3)}$ ח. $z\neq 0,-5\ ,\ \frac{3z^2-12z+4}{z+5}$

62) א. $x\neq -5\ ,\ \frac{x+5}{2}$ ב. $n\neq 8\ ,\ \frac{n}{8-n}$ ג. $z\neq 4\ ,\ \frac{z^2}{2(z-4)}$

ד. $m\neq 0,-\frac{5}{2}\ ,\ \frac{2m+5}{2m}$ ה. $y\neq 0,\frac{2}{3}\ ,\ \frac{2(2-3y)}{y}$ ו. $b\neq 0,\ a\neq -2b\ ,\ \frac{a(a+2b)}{3b}$

63) א. $x\neq 5,-2\ ,\ \frac{1}{x-5}$ ב. $m\neq 4\ ,\ m-8$ ג. $x\neq -3,\frac{5}{2}\ ,\ \frac{2}{y+3}$

ד. $z\neq -\frac{2}{3}\ ,\ z+8$ ה. $x\neq 0,-9\ ,\ \frac{x-4}{x^2}$ ו. $n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}\ ,\ \frac{-3n}{2n+1}$

ז. $x\neq -2,-3\ ,\ \frac{x+2}{x+3}$ ח. $x\neq 7,-8\ ,\ \frac{x-7}{x+8}$

ט. $a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a\ ,\ \frac{3a-b}{a(2b-3a)}$ י. $mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0\ ,\ \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}$

64) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

65 א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

66 א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

67 א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

68 א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

69 א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

70 א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

71 א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

72 א. $\frac{x^2}{3}$ ב. 2.5 ג. $\frac{1}{6t^3}$ ד. $\frac{t-9}{54t^2}$ ה. $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

ו. $\frac{x(x+1)}{2}$ ז. $\frac{c}{c-4}$ ח. $\frac{t+4}{-8(t+5)}$ ט. $\frac{5}{x}$.

שאלון 571

משוואות אלגבריות

תוכן העניינים:

משוואות אלגבריות 41

משוואה ממעלה ראשונה:..... 43

סיכום כללי:..... 43

שאלות:..... 43

תשובות סופיות: 44

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:..... 45

סיכום כללי:..... 45

שאלות:..... 45

תשובות סופיות: 45

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:..... 46

סיכום כללי:..... 46

שאלות:..... 47

תשובות סופיות: 48

משוואה ממעלה שנייה:..... 49

סיכום כללי:..... 49

שאלות:..... 49

תשובות סופיות: 50

מערכת משוואות ממעלה שנייה:..... 51

סיכום כללי:..... 51

שאלות:..... 51

תשובות סופיות: 52

משוואות דו-ריבועיות: 53

סיכום כללי:..... 53

שאלות:..... 53

תשובות סופיות: 54

משוואות עם פרמטרים: 55
סיכום כללי: 55
שאלות: 55
תשובות סופיות: 56
משוואות עם שורשים: 57
סיכום כללי: 57
שאלות: 57
תשובות סופיות: 58
משוואות עם ערך מוחלט: 59
סיכום כללי: 59
שאלות: 59
תשובות סופיות: 59

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$ ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$ ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$ ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$ ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$ ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$ ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$ ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$, $x\neq 3$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$
מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $\square+5x=2(x+2)-3$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצאו ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצאו ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ (כאשר k הוא מספר כלשהו חוץ מ-1-).

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1 , b_1 , c_1 ו- a_2 , b_2 , c_2 הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

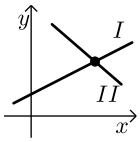
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

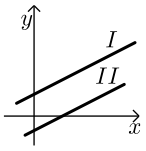
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

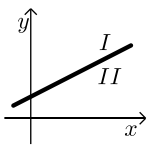
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
  נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
  נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

2) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

3) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$.

4) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$

5) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
   אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
   דוגמא: $x^2+5x-4=0$.
2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
   אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
   דוגמא: $x^2+4x+4=0$.
3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
   אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
   דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$ ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$ ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$ ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$ ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתרו את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתרו את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$

ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1 $(2,4),(4,2)$

2 $(\pm 4,-2)$

3 $(\pm 2,\pm 1)$

4 $(5,-2),(-5,2)$

5 $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6 $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7 $(7,4)$

8 $(5,-3)$

9 $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12 $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13 $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14 $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.

דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$

2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$

3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$

4) $x=\pm 2,\pm 5$

5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$

6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$

7) $x=49$

8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$

9) $x=5,-1$

10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$

11) $x=-1$

12) $x_{1,2}=1,3$

13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$

14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$

15) אין פתרונות.

16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$

17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$

18) $x=-1,2$

19) $x=3,-1$

20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$
אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

3) פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$

ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq\pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$ ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b},-ab$

ז. $a\neq\pm b\ ,\ x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2 \quad \rightarrow \quad x=a^2$$

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.

2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.

3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.

4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$

2) $\sqrt{x+2}=x$

3) $\sqrt{3x+1}+x=13$

4) $\sqrt{2x+7}+4=x$

5) $\sqrt{x-1}+3=x$

6) $\sqrt{10x+6}+9=x$

7) $\sqrt{x+6}-2=2x$

8) $\sqrt{24-x}+3=2x$

9) $\sqrt{x+16}+4=2x$

10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$

11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$

12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$

13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$

14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$

15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$

16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$

17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$

18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$

19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$

2) $x=2$

3) $x=8$

4) $x=9$

5) $x=5$

6) $x=25$

7) $x=0.25$

8) $x=3.75$

9) $x=4.25$

10) $x=5$

11) $x=6$

12) $x=4,-3$

13) $x=3$

14) $x=5$

15) $x=12$

16) $x=2,2\frac{8}{9}$

17) $x=6$

18) $x=1$

19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|3x-24|=x$

3) $|12-x|=3x$

4) $2x-|8-x|=10$

5) $|4x-5|=|2x+13|$

6) $|14-3x|=2|x+5|$

7) $|x|+7=|2x|$

8) $|x+2|+6=|2x-4|$

9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$

2) $x=6,12$

3) $x=3$

4) $x=6$

5) $x=9,-1\frac{1}{3}$

6) $x=24,\frac{4}{5}$

7) $x=\pm 7$

8) $x=12,-1\frac{1}{3}$

9) $x=0,-12$

10) $x=0$

שאלון 571

אי-שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים:

אי-שוויונים אלגבריים 60

אי-שוויונים ממעלה ראשונה: 61

אי-שוויונים ממעלה שנייה: 62

אי-שוויונים ממעלה שלישית: 62

אי-שוויונים עם מנה: 63

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם: 63

שאלות מסכמות – אי-שוויונים: 64

תשובות סופיות: 65

תחום הגדרה: 67

תשובות סופיות: 68

אי שוויונים עם ערך מוחלט: 68

כללים לפתרון אי שוויונים עם ערך מוחלט יחיד: 68

כללים לפתרון אי שוויונים עם מספר ערכים מוחלטים: 68

שאלות: 69

תשובות סופיות: 69

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

9) $x^2<144$

10) $x^2-12x>-32$

11) $(x+2)(x+5)<0$

12) $(x+2)(x+4)<35$

13) $-x^2+13x+30<0$

14) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

15) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

16) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

17) $-3x^2+12x>0$

18) $x^2-10x+25>0$

19) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

20) $2x^2+2x+24\geq 0$

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

21) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

22) $x(x^2+x+1)>0$

23) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\leq 0$

24) $x^3-25x\geq 0$

25) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

26) $(x^2+8x+20)(3x-5)\leq 0$

27) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

28) $x^3-6x^2+9x\leq 0$

29) $(x^2+6)(x+3)>0$

30) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

אי-שוויונים עם מנה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

31 $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

32 $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

33 $\frac{1}{x^2-16}>0$

34 $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

35 $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

36 $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

37 $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

38 $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

39 $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

40 $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

41 $3<x+1<5$

42 $0<\frac{1}{x+4}<2$

43 $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

44 $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

45 $6x-38\leq x-3\leq 5x+7$

46 $6<\frac{2x+10}{3}\leq\frac{7x-20}{5}$

47 $-1\leq\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

48 $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

49) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

50) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

51) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

52) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

53) $x(x+3)(2x-5) < 0$

54) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

55) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

56) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

57) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

58) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

59) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

60) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

61) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

62) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

63) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $x>3$

2) כל x

3) אף x

4) $x>-2$

5) $x<5$

6) אף x

7) $x\geq 12$

8) $x>-13$

9) $-12<x<12$

10) $x<4\,,\,x>8$

11) $-5<x<-2$

12) $-9<x<3$

13) $x<-2\,,\,x>15$

14) $x\leq 7\,,\,x\geq 11$

15) $-4<x<8$

16) $-4\leq x\leq 0$

17) $0<x<4$

18) $x>5\,,\,x<5$

19) $x<3\,,\,x>5$

20) כל x

21) $1<x<2\,,\,x>3$

22) $x>0$

23) $-2\leq x\leq -1\,,\,x\geq \frac{1}{2}$

24) $-5\leq x\leq 0\,,\,x\geq 5$

25) $x>2$

26) $x\leq 1\frac{2}{3}$

27) $x<-2\,,\,1<x<3$

28) $x\leq 0\,,\,x=3$

29) $x>-3$

30) $x<1\,,\,2<x<4$

31) $-3<x<1\,,\,x>3$

32) $x<-\frac{2}{3}\,,\,x\geq -\frac{1}{2}$

33) $x<-4\,,\,x>4$

34) $2<x<3\,,\,x>3$

35) $\frac{1}{2}\leq x<5$

36) $x>1$

37) $x>-2$

38) $2<x<3$

39) $1\leq x\leq 6$

40) $x<2\,,\,x>6$

41) $2<x<4$

42) $x>-3\frac{1}{2}$

43) $x>0$

44) $x<2\frac{2}{5}\,,\,x>2\frac{2}{3}$

45) $-2.5\leq x\leq 7$

46) $x\geq 10$

47) $1\leq x<13$

48) ϕ

49) $x\leq -4$

50) $-4\leq x<2\,,\,x\geq 3$

51) $x<-7\,,\,-\frac{1}{3}<x<2\,,\,x>5$

52) $-1 < x \le 1.5 \ , \ 4 < x \le 12$

53) $x < -3 \ , \ 0 < x < 2.5$

54) $x < -1 \ , \ 2 < x < 6 \ , \ x > 6$

55) $2.5 \le x < 8 \ , \ x > 8$

56) $x > 3$

57) $x < -3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ x > 4$

58) $-1 < x < 0 \ , \ 1 < x < 3 \ , \ x > 3$

59) $x > 7$

60) $x < -2 \ , \ 2 < x < 4$

61) $x \le 0 \ , \ 1 \le x < 2 \ , \ x > 4$

62) $x \ge 7$

63) $-3 < x < -\frac{3}{5} \ , \ x > 3$

תחום הגדרה:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.

מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x\le -2\ ,\ x>2$.

מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.

מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 \, , \, x \geq 6$ ג. $x \leq -4 \, , \, 0 \leq x \leq 3$

ד. $x > 2 \, , \, -5 \leq x < -2$ ה. $x > 2 \, , \, -2 \leq x < 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} \, , \, 1 \leq x < \frac{3}{2} \, , \, x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} \, , \, x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 \, , \, x \leq -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

כללים לפתרון אי שוויונים עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$\lvert x \rvert < a$	$\lvert x \rvert > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x > a$ או $x < -a$

כללים לפתרון אי שוויונים עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

1) פתור את אי השוויונים הבאים:

א. $|x+2|<3$ ב. $|2x+1|>7$

ג. $|6-2x|<x$ ד. $|2x+1|-3x>4$

2) פתור את אי השוויונים הבאים:

א. $1<|4-3x|<7$ ב. $|2x+3|<8<|5-x|$

3) פתור את אי השוויונים הבאים:

א. $|x^2+6x-4|<12$ ב. $|x^2+x-10|>3x-2$

ג. $x^2-6|x|+5\le 0$

תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$ ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$.

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$

ג. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$.

שאלון 571

סדרות

תוכן העניינים:

שאלון 571..... 70

סדרות..... 70

תוכן העניינים: 70

סיכום תכונות הסדרה החשבונית: 71

שאלות לפי נושאים: 72

שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי: 72

שאלות העוסקות בסכום סדרה חשבונית: 73

תשובות סופיות: 77

סיכום תכונות הסדרה ההנדסית: 78

שאלות לפי נושאים: 78

שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי: 78

שאלות העוסקות בסכום סדרה הנדסית: 79

תשובות סופיות: 82

סיכום תכונות של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת: 83

שאלות שונות: 84

שאלות כלליות: 84

שאלות מסכמות: 86

תשובות סופיות: 88

סדרת נסיגה: 90

שאלות כלליות: 90

תשובות סופיות: 93

סיכום תכונות הסדרה החשבונית:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י:

$a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י:

$a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות לפי נושאים:

שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי:

1) נתונה הסדרה החשבונית: $\ldots -7, -1, 5, 11, 17$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $49.5,\ldots,14.5, 12, 9.5, 7, 4.5, 2$.

4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $\ldots 82, 85, 88, 91$.

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_1=5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5 = 0$.

ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את a_1 ואת d.

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

שאלות העוסקות בסכום סדרה חשבונית:

11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, ...$.

12) נתונה הסדרה החשבונית: $5, -1, -7, -13, ...$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

14) נתונה הסדרה החשבונית: $-63, -67, -71, ...$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

15) נתונה הסדרה החשבונית: $31, 22, 13, 4, ...$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

16) נתונה הסדרה החשבונית: $19, 14, 9, 4, ..., 599$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d.
נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

20) נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases} 150\,,144\,,138,... \\ 90\,,93\,,96,... \end{cases}$. לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480.
מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2. ידוע כי: $d_1 = -2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n.

א. מצא את הפרש הסדרה a_n - d_1.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50}.
מצא את a_1 ואת b_1.

22) נתונה הסדרה החשבונית: $-13,...\,,-17\,,-21$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.
הוכח כי $nd = 60$.

24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את a_1.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.

האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

מצא את a_1 ואת d.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

<u>ההצעה הראשונה:</u>

לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

<u>ההצעה השנייה:</u>

לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.

ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.

2) $a_1=-5\,,\,d=4$.

3) 20 איברים.

4) 48 איברים.

5) 15 דקות.

6) 58 מספרים.

7) 31 איברים חיוביים.

8) $x=1\,,\,x=4$.

9) $a_{19}=59$.

10) ב. $a_1=12\,,\,d=-3$ ג. $b_5=-3$.

11) $S_{14}=413$.

12) 21 איברים.

13) 16 דקות.

14) 37 איברים.

15) 3647.

16) 23920.

17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.

18) א. $a_1=6\,,\,a_2=10\,,\,a_3=14$ ב. $d=4$.

19) א. $a_1=50\,,\,d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.

20) א. $n=81$ ב. $n=16$.

21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52\,,\,b_1=95$.

22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.

23) שאלת הוכחה.

24) 29 איברים.

25) א. i. $x=-50$ ii. $d=11$ ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.

26) ב. $a_1=-8\,,\,d=2$ ג. $n=36$.

27) ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.

28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.

סיכום תכונות הסדרה ההנדסית:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q
נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1
נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$.

שאלות לפי נושאים:

שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי:

1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית:
$x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ a_1=3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

שאלות העוסקות בסכום סדרה הנדסית:

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \ldots$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) המספרים: $2x-3$, $x-9$, $x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את x.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.

מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: a_{n+1} ,...., 36 , 12 , 4 . מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6} \quad , \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6} \quad , \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6} \quad , \ldots\ldots , \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8.

16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \ldots$.

בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים.

בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים,
כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

1) $a_9 = 729$.

2) $n = 7$.

3) $a_1 = \pm\frac{1}{4}, q = \pm 2$.

4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$.

5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$.

6) 5 דקות.

7) $x = 11 \to q = 3$, $x = -\frac{2}{3} \to q = -\frac{1}{2}$.

8) $a_8 = 384$.

9) $S_9 = 2555$.

10) 5 דקות.

11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

12) $q = 2$.

13) $n = 6$.

14) א. $x = 14$ ב.i. $a_n = 5^{n-1}$ ב.ii. a_7 , a_6 ג. $S_7^* = 61,034,375$.

15) א. $q = 3$. ג. b_6 , b_5

16) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$.

17) $q = 4$.

18) $\frac{q+1}{q}$.

19) $a_1 = \frac{3}{8}$.

20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_6 , a_5.

21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$.

22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים.

ג. $4,16,64,...,2^{24}$, $S_n = 22,369,620$.

סיכום תכונות של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q|<1$, $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\frac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

שאלות שונות:

שאלות כלליות:

1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \ldots$

2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.

מצא את האיבר הראשון בסדרה.

3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q, $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$ מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1=a_1$ $b_2=a_1+a_2$ $b_3=a_1+a_2+a_3$ $\vdots$ $b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$	$c_1=a_2^2-a_1^2$ $c_2=a_3^2-a_2^2$ $c_3=a_4^2-a_3^2$ $\vdots$ $c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$	$d_1=S_a+a_1$ $d_2=S_a+a_2$ $d_3=S_a+a_3$ $\vdots$ $d_n=S_a+a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n, והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q.

ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(S)}$.
הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q.

מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q} \quad , b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q} \quad , b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q} \quad ,..., b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \quad ,..$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q.

ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n. מצא את a_1 ו- q.

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = 42$.

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n.

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n.

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^*. חשב את סכום הסדרה b_n^*.

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**}. חשב את סכום הסדרה b_n^{**}.

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n. מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b.
הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$.

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

שאלות מסכמות:

7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, \ldots$.

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.

מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n.

ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n.

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n.

9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \ldots$ שמנתה היא q, $(0<q<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+\ldots$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}+\ldots$.

נתון כי: $T=6V$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ שמנתה היא q.

בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.

בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.

ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n.

11) נתונה סדרה הנדסית אינסופית ..... a_1 , a_2 , a_3 , שמנתה היא q , $(q \neq 0 \ , \ |q|<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + ...$, .. , $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}$.

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

1) $S=18$.

2) $a_1=24$.

3) $a_1=50$, $q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}$, $q=\frac{4}{5}$.

4) $S=18\frac{2}{3}$.

5) א. הסדרה b_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

הסדרה: c_n הנדסית: $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2$.

הסדרה d_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$$ היות והיא

תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

ב. $S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}=-a_1^2$.

ג. מההשוואה: $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q=0,\pm1$.

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.

עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

6) א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56$, $q=\frac{1}{3}$ ד. 31.5 ה. 94.5

ו. -63 ז. 63 ח. 7938

ט. הסכום: S^2 משמעו: $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.

הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

7) ב. $a_1=16$, $q=\frac{1}{3}$.

8) א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

9) א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

10) ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

11) א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

סדרת נסיגה:

שאלות כלליות:

1) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n-11 \\ a_1=-6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12}.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k.
הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30}.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

2) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n \\ a_1=0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k=72$. הבע באמצעות k את a_{k+2}.

3) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+n^2-31 \\ a_7=t \end{cases}$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

4) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+6n-2$ מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n=a_{n+1}-a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1.

5) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=3a_n+4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n=a_n+2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5=162$. חשב את a_1.

6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_{n+1}=3a_n+10n-5$, $a_1=3$.

מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n=a_n+5n$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר b_5.

ג. חשב את הסכום: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_{n+1}=8n-a_n+3$, $a_1=k$.

א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.

ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+3}$, $a_1=2$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n=\frac{4-7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{22}$.

9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1}=3n-a_n-7$, $a_1=1$.

א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.

ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+3$.

ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ד. חשב את הסכום הבא: $a_1+a_3+a_5+.....+a_{17}$.

10) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הבע את a_{n+2} באמצעות a_n.

(2) מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

11) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+5}$, $a_1=6$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n=\frac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

תשובות סופיות:

1) א. $a_3=-22$ ב. $a_{14}=33\ ,a_{12}=5$ ג. $a_{32}=k+51\ ,a_{30}=k-49$

ד. a_{72},a_{73}

2) $a_{k+2}=74+4k$

3) $t=-33$

4) א. $d=6$ ב. $b_1=4$

5) א. $q=3$ ב. $a_1=0$

6) א. $b_{n+1}=3b_n$ ב. $b_5=648$ ג. $S=1594320$

7) א. $a_1=k\ ,a_2=11-k\ ,a_3=k+8\ ,a_4=19-k$ ב. 8 ג. 830

8) ב. $S_{11(p)}=267\frac{2}{3}$

9) א. $a_1=1\ ,a_2=-5\ ,a_3=4\ ,a_4=-2\ ,a_5=7$ ג. $S_{n(o)}=1.5n^2-0.5n$

ד. $S_{9(o)}=117$

10) א. 1. $a_{n+2}=a_n+8\cdot 3^n+4$ 2. a_6

ב. $S_{6-11}=265458$ ג. $a_1=5$.

11) א. $q=2.5$ ב. $b_n=1.5\cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^{*}=-4086.74$

שאלון 571

אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים:

אינדוקציה מתמטית 94

סיכום כללי: 95

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה: 95

שאלות לפי נושאים: 96

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות: 96

תזכורת – סדרות: 97

שאלות באינדוקציה העוסקות בסדרות: 98

תזכורת – מושג העצרת: 98

שאלות עם מושג העצרת: 99

שאלות כוללות ומסכמות: 100

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות לפי נושאים:

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב- 5 ללא שארית לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב- 7 ללא שארית לכל n טבעי.

3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8\cdot 7^n+4^{n+2}$ מתחלק ב- 24 ללא שארית לכל n טבעי.

4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5\cdot 3^{2n}-5^{n+1}$ מתחלק ב- 20 ללא שארית לכל n טבעי.

5) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.

6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.

9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 7^n+2^{2n} מתחלק ב- 11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי a^n-b^n מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

תזכורת – סדרות:

- סדרה היא קבוצה סדורה של איברים: $a_1,a_2,....,a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n -י בסדרה.
  - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n והוא מקיים: $S_n=a_1+...+a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n=a_1+d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n}{2}\left[2a_1+d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n=a_1q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.

שאלות באינדוקציה העוסקות בסדרות:

12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$

13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$

14) נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

16) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right]$$

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$, $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

שאלות עם מושג העצרת:

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

שאלות כוללות ומסכמות:

22) נתון השוויון: $4+7+10+13+\ldots=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה- n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+\ldots+85$.

23) נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\ldots=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה- n.

24) נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה- n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

25) חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

26) נתונים השיוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית
אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה סעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית
לכל n טבעי אי-זוגי.

שאלון 571

גיאומטריה במערכת הצירים

תוכן העניינים:

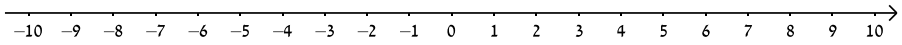
תזכורת מחטיבת הביניים: 102
סיכום כללי: 102
שאלות: 105
תשובות סופיות: 105
מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית: 106
סיכום כללי: 106
שאלות: 107
תשובות סופיות: 109
משוואת הישר: 110
סיכום כללי: 110
שאלות: 111
תשובות סופיות: 113
מצבים הדדיים בין ישרים: 115
סיכום כללי: 115
שאלות: 116
תשובות סופיות: 117
המעגל הקנוני: 118
סיכום כללי: 118
שאלות: 120
תשובות סופיות: 121
הזזה של מעגל קנוני במערכת הצירים: 122
סיכום כללי: 122
שאלות: 123
תשובות סופיות: 123

תזכורת מחטיבת הביניים:

סיכום כללי:

ציר המספרים:

ציר המספרים הוא ישר עליו מסודרים המספרים החיוביים, המספרים השליליים והאפס.

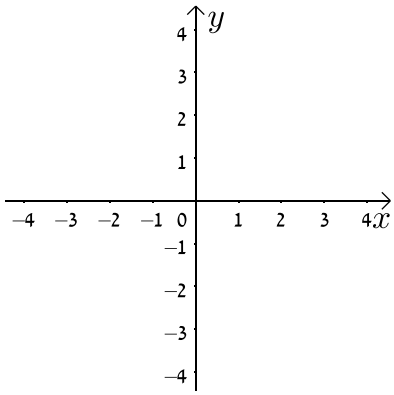


הערות:

- המרווחים בין המספרים לאורך הציר הם קבועים ואורכם הוא יחידת המידה של הציר.
- קווי החלוקה נקראים בשם **שנתות**.

מערכת הצירים:

מערכת הצירים במישור מורכבת משני צירי מספרים המאונכים זה לזה.
לציר האופקי קוראים בשם "ציר ה- x " ולציר האנכי קוראים בשם "ציר ה- y ".



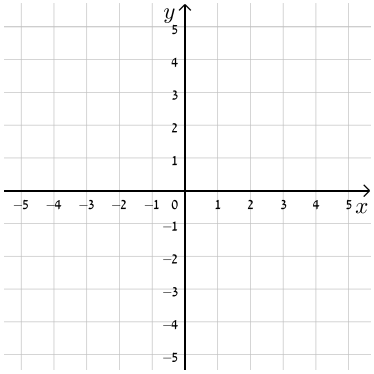
הערות:

- נקודת המפגש שבין הצירים נקראת "ראשית הצירים".
- קנה המידה על הצירים לא חייב להיות זהה על שני הצירים, אך חייב להישמר לאורך כל הציר.
- כאשר משתמשים במערכת צירים לצורך ייצוג צורות הנדסיות שונות חשוב להקפיד על קנה מידה זהה בשני הצירים.

נקודה במערכת הצירים:

שיעורי נקודה במערכת הצירים זוג סדור של שני מספרים הנקראים שיעורי הנקודה.
מהנקודה מעבירים אנכים לצירים.

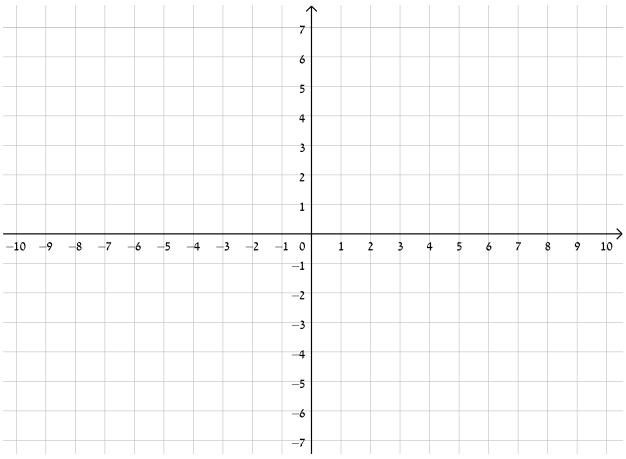
- מפגש האנך עם ציר ה- x יקבע את שיעור ה- x של הנקודה.
- מפגש האנך עם ציר ה- y יקבע את שיעור ה- y של הנקודה.



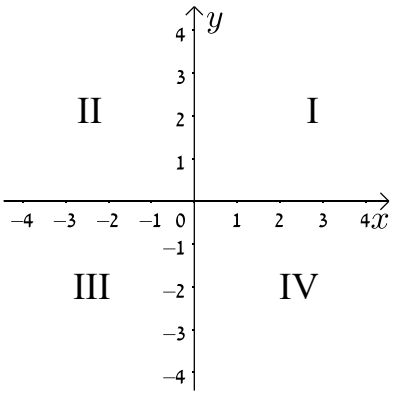
את הזוג הסדור כותבים באופן הבא: (x,y)
ונהוג לסמן אותה באות גדולה באנגלית, כגון A, B וכו'.

קווי רשת:

קווי הרשת במערכת צירים הם אנכים לצירים המאפשרים לחלק את המישור באופן שווה בין יחידות האורך של כל ציר.



רביעים במערכת הצירים:



הצירים מחלקים את המישור ל-4 אזורים הנקראים "רביעים".

- נקודה שבה: $x>0$, $y>0$ נמצאת ברביע ה-I.
- נקודה שבה: $x<0$, $y>0$ נמצאת ברביע ה-II.
- נקודה שבה: $x<0$, $y<0$ נמצאת ברביע ה-III.
- נקודה שבה: $x>0$, $y<0$ נמצאת ברביע ה-IV.

הערה:

- נקודות שעל הצירים אינן שייכות לאף רביע.

קטעים המקבילים לצירים:

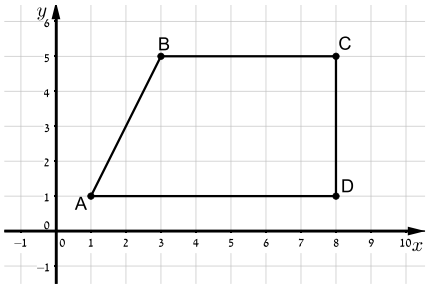
- קטע העובר דרך שתי נקודות עם אותו שיעור y הוא מקביל לציר ה-x.
- קטע העובר דרך שתי נקודות עם אותו שיעור x הוא מקביל לציר ה-y.

שאלות:

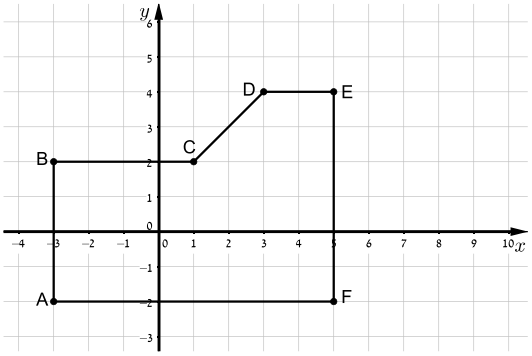
1) קבעו באיזה רביע נמצאות הנקודות.

$A(-1,5)$, $B(-3,8)$, $C(-20,16)$, $D(-13,12)$, $E(-12,13)$, $F(-6,7)$.

2) רשמו את שיעורי הנקודות בצורה הבאה:



3) רשמו את שיעורי הנקודות בצורה הבאה:



4) סרטטו במערכת צירים ריבוע שאורך צלעו היא 5 ואחד מקודקודיו נמצא בנקודה $(-1,4)$.

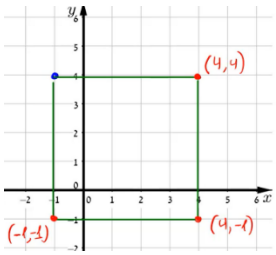
תשובות סופיות:

1) בכל הנקודות מתקבל $x<0$ ו- $y>0$ ולכן הן נמצאות ברביע השני (II).

2) $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(8,5)$, $D(8,1)$

3) $A(-3,-2)$, $B(-3,2)$, $C(1,2)$, $D(3,4)$, $E(5,4)$, $F(5,-2)$

4)



מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

אמצע קטע:

אמצע קטע שקצותיו הם $A(x_1,x_1)$ ו- $B(x_2,x_2)$ יחושב לפי ממוצע של שיעורי נקודות הקצה באופן הבא: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$; $x=\frac{x_1+x_2}{2}$.

הערות:

- מקובל לסמן באות כלשהי את שיעורי נקודת האמצע, למשל P,
  וכך הנוסחאות תיכתבנה באמצעות האותיות כך: $y_P=\frac{y_A+y_B}{2}$; $x_P=\frac{x_A+x_B}{2}$.
- כל נוסחה מתארת קשר בין 3 נעלמים. לכן בידיעת שניים מהם ניתן לחשב את השלישי.
  כאשר נקבל בשאלות את שיעורי אחת מהקצוות ואת שיעורי נקודת האמצע,
  נוכל לחשב את שיעורי נקודת הקצה השנייה.

נוסחת המרחק:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,x_1)$ ו- $B(x_2,x_2)$ יחושב לפי:

$$AB=d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

שיפוע ישר:

שיפוע m של ישר העובר דרך הנקודות $A(x_1,x_1)$ ו- $B(x_2,x_2)$ הוא: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

שאלות:

1) מצאו את אמצעי הקטעים שקודקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$, $B(5,-8)$

ב. $A(-3,0)$, $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$, $B(-4,-5)$

ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)$, $B(-3,-1)$

ו. $A(4,7)$, $B(4,-12)$

2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.

מצאו את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$, $M(2,1)$

ב. $A(-6,-8)$, $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$, $M(4,-7)$

ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

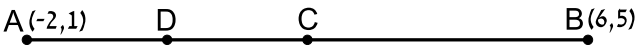
3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.

ידוע כי שיעורי הקודקודים B ו-C הם $C(6,1)$, $B(2,-4)$.

מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצאו את שיעורי הנקודה D.

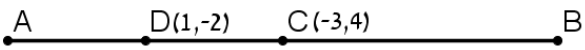
4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.

ידוע כי: $B(6,5)$, $A(-2,1)$. מצאו את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.

ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $A(2,-7)$,$B(-10,4)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קודקודים של מקבילית ABCD.

מצאו את שיעורי הקודקוד הרביעי.

7) מצאו את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7),B(-3,7)$ ב. $A(6,2),B(1,2)$

ג. $A(-3,10),B(0,6)$ ד. $A(6,-9),B(1,3)$

ה. $A(4,7),B(13,-1)$ ו. $A(6,6),B(-9,-9)$

8) חשבו את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$, $B(4,9)$, $A(3,-2)$.

9) נתונות נקודות $B(6,y)$, $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצאו את y.

10) נתונות נקודות $B(15,-2)$, $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצאו את x.

11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצאו את שיעורי הנקודה B.

12) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך.
שיעורי הקודקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- y של הקודקודים B ו-C הוא 2-.
מצאו את קודקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC} = \sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$, $A(-3,-2)$. מצאו את היקף המלבן.

14) מצאו את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)$, $B(4,1)$ ב. $A(3,-2)$, $B(-3,1)$

ג. $A(7,8)$, $B(6,15)$ ד. $A(0,5)$, $B(7,0)$

ה. $A(6,9)$, $B(6,-7)$ ו. $A(4,-1)$, $B(18,-1)$

15) מצאו את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם:
$C(4,-7)$, $B(2,13)$, $A(6,5)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$ ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$

ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$

4) $D(0,2)$

5) $B(-11,16)$, $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$

ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.727 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $C(-3,-2)$, $B(3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$

ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AC}=6$, $m_{BC}=-10$, $m_{AB}=-2$.

משוואת הישר:

סיכום כללי:

הגדרה:

משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+b$ כאשר: m - שיפוע הישר ו- b - איבר חופשי (חיתוך עם ציר ה- y).

ראינו כי:

- $m>0$ (שיפוע הישר הוא חיובי) – הישר עולה.
- $m<0$ (שיפוע הישר הוא שלילי) – הישר יורד.

ישרים המאונכים לצירים:

ישר המאונך לישר אופקי (כלומר מהצורה $y=n$) הוא אנכי (כלומר $x=k$) ולהיפך.

בפרט:

- ישר המאונך לציר ה- x הוא מהצורה $x=k$.
- ישר המאונך לציר ה- y הוא מהצורה $y=n$.

משוואת ישר:

משוואת ישר ששיפועו הוא m והוא עובר בנקודה (x_1,y_1) היא: $y-y_1=m(x-x_1)$.

הערות:

- בהינתן שיפוע ונקודה ניתן למצוא את משוואת הישר ע"י הצבה ישירה בצורה המפורשת $y=mx+b$, חילוץ האיבר החופשי b וכתיבה של המשוואה הסופית.
- כדי למצוא משוואת ישר באמצעות שתי נקודות, נחשב תחילה את שיפועו ולאחר מכן נמצא את משוואתו ע"י לקיחת השיפוע שמצאנו ובחירת אחת מהנקודות.

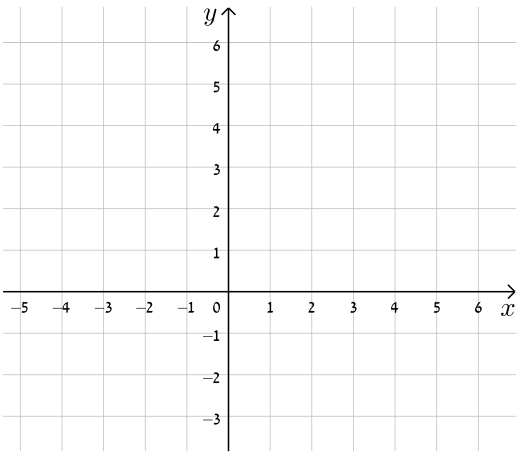
חיתוך של ישר עם הצירים:

- כדי למצוא חיתוך של ישר עם ציר ה- x נציב: $y=0$.
- כדי למצוא חיתוך של ישר עם ציר ה- y נציב: $x=0$.

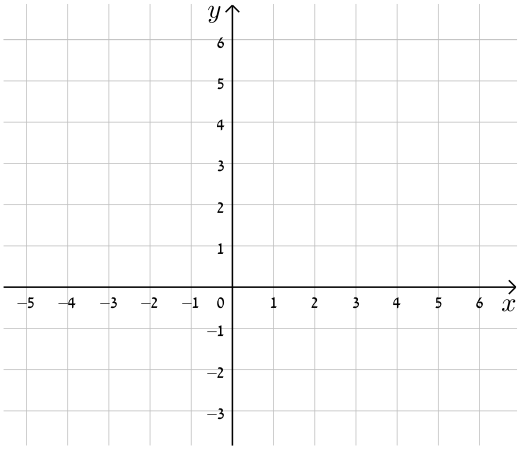
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטטו את הישרים במערכת הצירים שלפניכם.

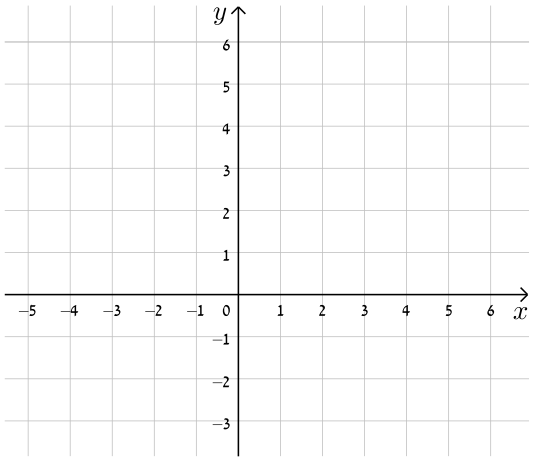
א. $y = x + 4$



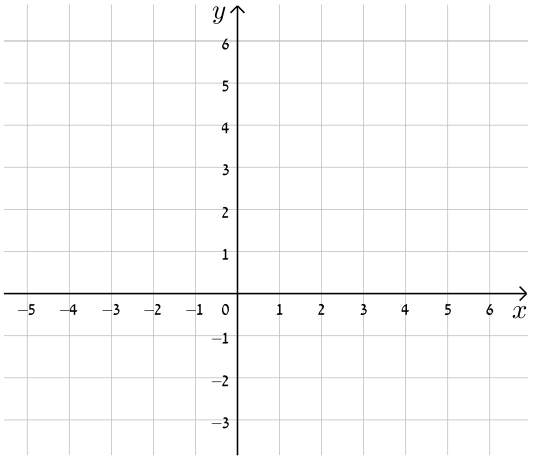
ב. $y = -x + 5$



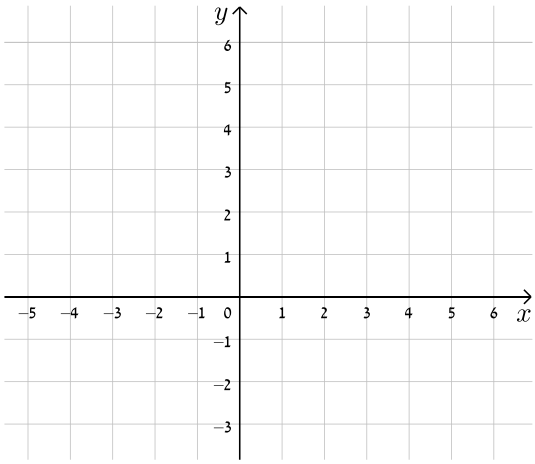
ג. $y = 2x - 3$



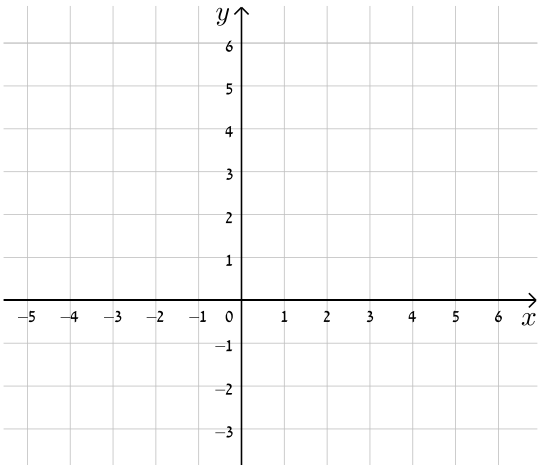
ד. $y = -3x + 5$



ה. $y = 3x - 1$

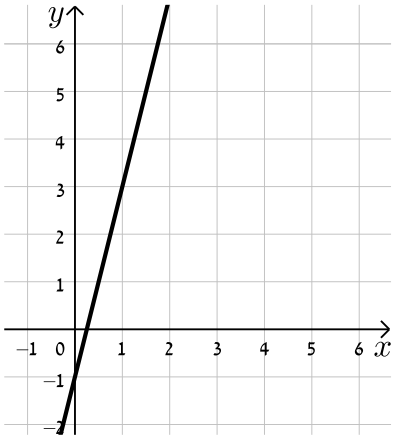


ו. $y = 8 - 4x$

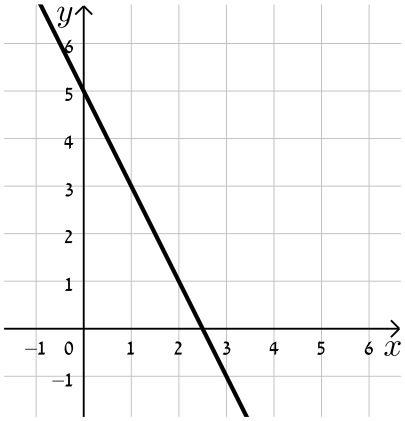


17) כתבו את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

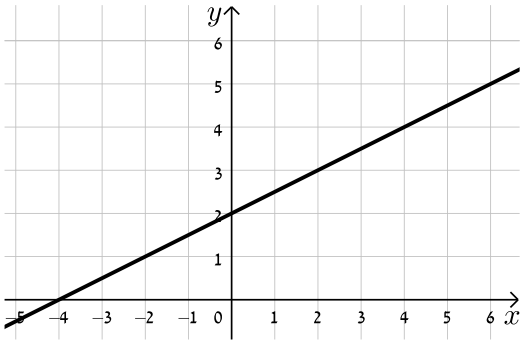
א.



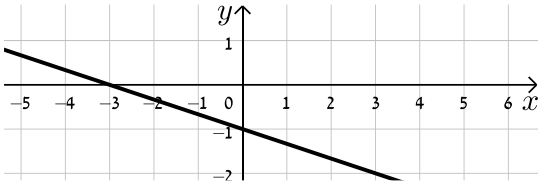
ב.



ג.



ד.



18) התאימו בין משוואות הישרים הבאים לישרים בסרטוט:

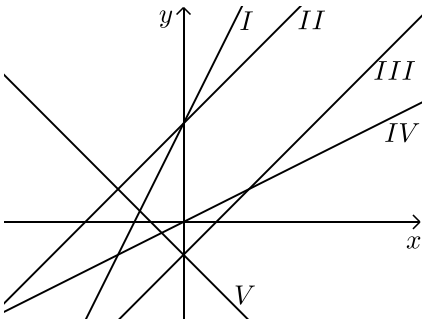
א. $y=x+3$.

ב. $y=-x-1$.

ג. $y=2x+3$.

ד. $y=x-1$.

ה. $y=\frac{1}{2}x$.



19) נתונה משוואה הישר הבאה: $y=2x+3$.

קבעו אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$, $C(0,4)$, $B(3,3)$, $A(-1,1)$.

20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר.

מצאו את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

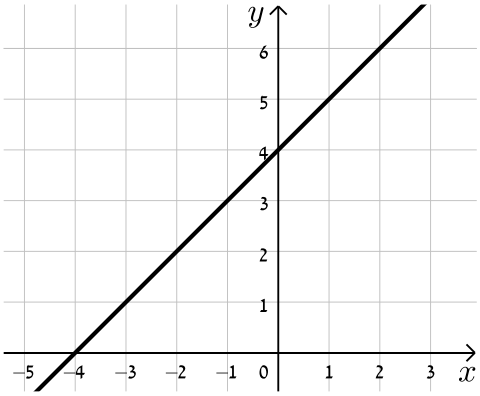
21) הנקודות $B(4,1)$, $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$.

מצאו את m ואת n.

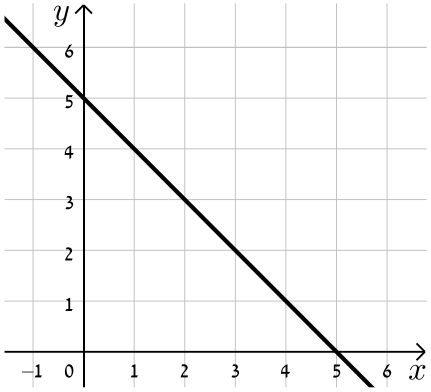
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

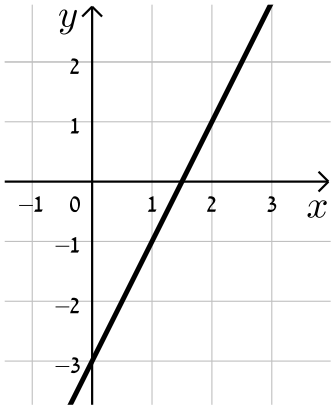
א.



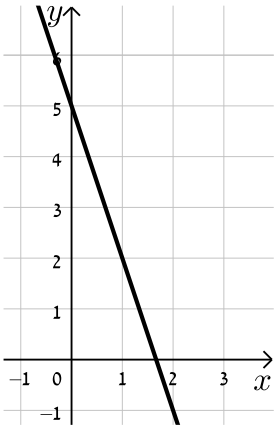
ב.



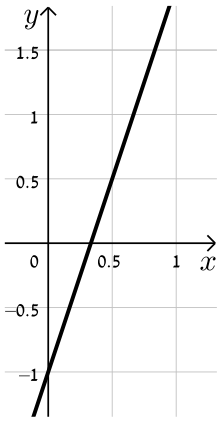
ג.



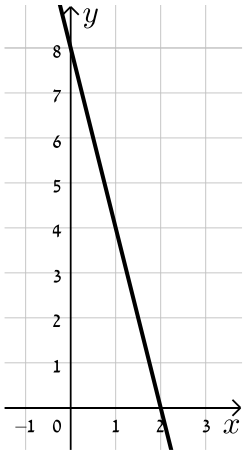
ד.



ה.



ו.



17) א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

18) א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

20) $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

21) $n=17$, $m=-4$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

חיתוך בין שני ישרים:

כדי למצוא חיתוך בין שני ישרים, נפתור מערכת המשוואות הכוללת את משוואותיהם.

ישרים מקבילים:

- ישרים בעלי שיפועים זהים הם מקבילים זה לזה.
- אם לישרים יש אותו שיפוע ונקודת חיתוך שונה עם ציר ה- y אז הם מקבילים זה לזה.

מספרים הופכיים:

זוג מספרים (השונים מאפס) שמכפלתם שווה ל-1 נקראים מספרים הופכיים.

כדי למצוא מספר ההופכי למספר נתון, נחליף את המונה והמכנה.

ישרים מאונכים:

השיפועים m_1 ו- m_2 של שני ישרים המאונכים זה לזה מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$
(כאשר $m_1 \neq 0$ וגם $m_2 \neq 0$).
מכך נובע כי השיפועים של ישרים מאונכים הם מספריים הופכיים ונגדיים.

שאלות:

22) מצאו את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x-1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=x-12 \\ y=4x+6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=x+6 \end{cases}$

23) קבעו את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=2x+4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=x-7 \\ y=x+6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y=6x-15 \\ y=3x+41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y=x+8 \\ y=x+8 \end{cases}$

24) קבעו אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=3x-1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=2x \\ y=\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y=-4x-5 \\ y=\frac{1}{4}x+5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y=x-6 \\ y=-x+6 \end{cases}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $C(-5,5)$, $B(3,7)$, $A(5,-1)$.

הוכיחו שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

22) א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

25) א. $m_{AB}=m_{CD}=6$, $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$.

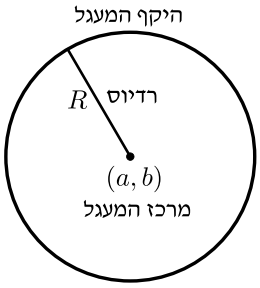
ב. הכל הפוך: $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$, $m_{BC}=m_{AD}=6$.

26) שאלת הוכחה.

המעגל הקנוני:

סיכום כללי:

המעגל:

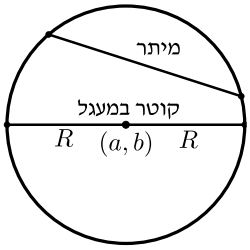


המעגל הוא המקום הגאומטרי (אוסף כל הנקודות) במישור שמרחקן מנקודה קבועה הוא גודל קבועה.

- לנקודה הקבועה קוראים **מרכז המעגל**.
- למרחק הקבוע קוראים **רדיוס המעגל**.

בהנדסת אנליטית נסמן את שיעורי נקודת מרכז המעגל ב-(a,b).
לרוב, מקובל לסמן את נקודת המרכז באות M, כלומר: $M(a,b)$.
את רדיוס המעגל נסמן ב-R.

מושגים נוספים במעגל:



- מיתר - קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר - מיתר העובר דרך מרכז המעגל.

משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוסו R היא: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

המעגל הקנוני:

מעגל שמרכזו נמצא בראשית הצירים, כלומר: $M(0,0)$ ורדיוסו R נקרא מעגל קנוני.
במקרה זה משוואת המעגל תהיה: $x^2+y^2=R^2$.

מעגל המשיק לציר ה- x :

במעגל שמרכזו בנקודה (a,b) המשיק לציר ה- x, נקודה ההשקה היא $(a,0)$ ורדיוסו $R=|b|$.

מעגל המשיק לציר ה- y :

במעגל שמרכזו בנקודה (a,b) המשיק לציר ה- y, נקודת ההשקה היא $(0,b)$ ורדיוסו $R=|a|$.

מעגל המשני לשני הצירים:

במעגל המשיק לשני הצירים לעולם יתקיים: $R=|a|=|b|$.
נקודות ההשקה של מעגל כזה תהיינה: $(a,0)$ ו- $(0,b)$.

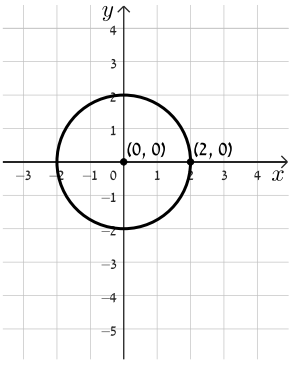
נקודה על המעגל:

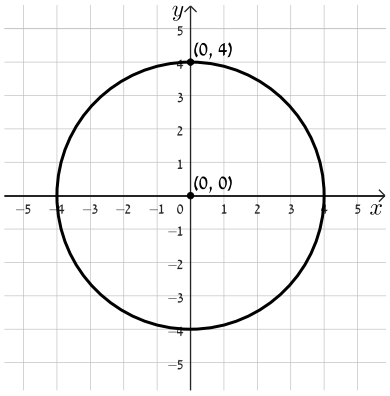
כל נקודה שנמצאת על המעגל (כלומר על היקף המעגל) תקיים את משוואת המעגל.

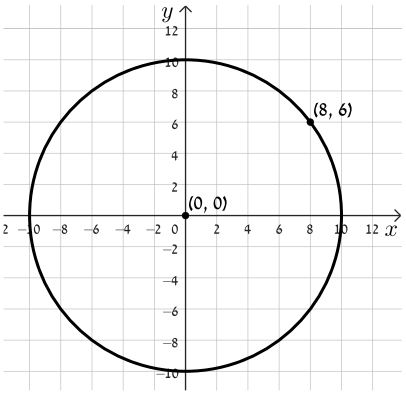
שאלות:

1) כתבו את משוואות המעגלים הבאים:

א. ב. ג.

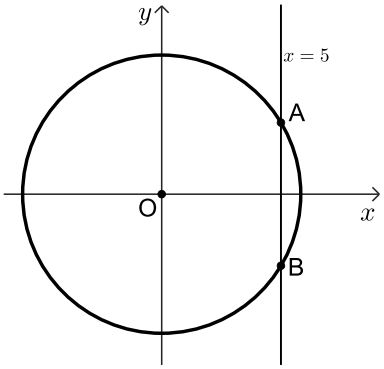






2) מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=34$ חותך את הישר $x=5$ ב-2 נקודות A ו-B.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B נמצאת ברביע הרביעי.



א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. חשבו את אורך הקטע AB.

ג. חשבו את שטח המשולש ABO (O - ראשית הצירים).

3) משולש ישר זווית שאורכי ניצביו הם 10 יחידות אורך ו-14 יחידות אורך חסום במעגל קנוני.

מצאו את משוואת המעגל הקנוני.

4) משולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$) חסום במעגל קנוני.

ידוע כי: $A(-7,6)$.

א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. הניצבים AB ו-BC מקבילים לצירים x ו- y בהתאמה.

מצאו את שיעורי הנקודות B ו-C וכתבו את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות AB ו-BC.

ג. כתבו את משוואת הישר AC.

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+y^2=4$ ב. $x^2+y^2=16$ ג. $x^2+y^2=100$

2) א. $A(5,3)$, $B(5,-3)$ ב. 6 יח"א ג. 15 יח"ש

3) $x^2+y^2=74$

4) א. $x^2+y^2=85$ ב. $B(7,6)$, $C(7,-6)$:AB $y=6$, :BC $x=7$.

ג. $y=-\frac{6}{7}x$

הזזה של מעגל קנוני במערכת הצירים:

סיכום כללי:

עקרונות הזזה:

נתון מעגל קנוני: $x^2+y^2=R^2$.

- עבור הזזה שלו a יחידות באופן אופקי, יתקבל המעגל שמשוואתו: $(x-a)^2+y^2=R^2$
(כאשר $a>0$ תתקבל הזזה ימינה וכאשר $a<0$ תתקבל הזזה שמאלה).
- עבור הזזה שלו b יחידות באופן אנכי, יתקבל המעגל שמשוואתו: $x^2+(y-b)^2=R^2$
(כאשר $b>0$ תתקבל הזזה מעלה וכאשר $b<0$ תתקבל הזזה מטה).

משוואת מעגל כללי כשההזזה של מעגל קנוני:

ניתן להסתכל על משוואת מעגל כללי $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ כהזזה אופקית של מעגל קנוני $x^2+y^2=R^2$ ב-a יחידות והזזה אנכית שלו ב-b יחידות.

על כן, מרכזו של מעגל כללי גם הוא מוזז מהראשית ושיעוריו $M(a,b)$

אך רדיוס המעגל אינו מושפע מן ההזזות ולכן נשאר R.

שאלות:

1) כתבו את משוואות המעגלים הבאים:

א. מזיזים את המעגל הקנוני $x^2+y^2=15$, 4 יחידות מעלה ו-3 יחידות ימינה.

ב. מזיזים מעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{18}$ ב-18 יחידות מעלה.

ג. מרכזו של מעגל עם רדיוס 13 נמצא על ציר ה- x במרחק של 5 יחידות משמאל לציר ה- y.

ד. מזיזים מעגל קנוני שרדיוסו 10 ב-10 יחידות שמאלה ו-10 יחידות מטה.

2) לפניכם משוואות של מעגלים שונים.
קבעו בכל מקרה אלו הזזות בוצעו על מעגל קנוני (רשמו גם את משוואת המעגל הקנוני המקורי) על מנת לקבל את המשוואות הנתונות.

א. $(x-4)^2+(y-1)^2=81$.

ב. $(x+2)^2+(y-19)^2=20$.

ג. $x^2+(y+4)^2=14$.

ד. $(x-3.5)^2+y^2=12.25$.

תשובות סופיות:

1) א. $(x-3)^2+(y-4)^2=15$ ב. $x^2+(y-18)^2=18$ ג. $(x+5)^2+y^2=169$

ד. $(x+10)^2+(y+10)^2=100$

2) א. הזה מעלה ב-2 יחידות, הזזה ימינה ב-4 יחידות.

ב. הזזה מעלה ב-19 יחידות, הזזה שמאלה ב-2 יחידות.

ג. הזזה מטה ב-4 יחידות, אין הזזה אופקית. ד. אין הזזה אנכית, הזזה ימינה ב-3.5 יחידות.

שאלון 571

מושגים יסודיים בפונקציות

תוכן העניינים:

מושגים יסודיים בפונקציות 124

מבוא כללי: 125

סיכום כללי: 125

שאלות: 126

תשובות סופיות: 127

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה: 128

סיכום כללי: 128

שאלות: 128

תשובות סופיות: 128

נקודות אפס ותחומי חיוביות ושליליות של פונקציה: 129

שאלות: 129

תשובות סופיות: 130

נקודות משותפות לשני גרפים: 131

שאלות: 131

תשובות סופיות: 132

סרטוט גרף על פי נתונים: 133

שאלות: 133

תשובות סופיות: 135

מבוא כללי:

סיכום כללי:

הגדרה:

פונקציה היא התאמה של מספר יחיד לכל מספר שנבחר.
המספר הנבחר נקרא בשם "משתנה חופשי" ומסומן ב- x.
המספר המתקבל נקרא בשם "משתנה תלוי" ומסומן ב- y או ב- $f(x)$.

ניתן לייצג פונקציה במספר דרכים:

- ייצוג מילולי.
- ייצוג על ידי טבלת ערכים.
- ייצוג גרפי של פונקציה.
- ייצוג אלגברי של פונקציה.

תחום ההגדרה של פונקציה:

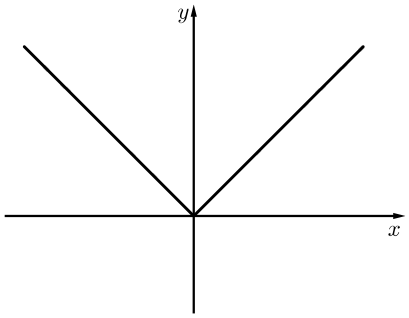
אוסף כל המספרים עבורם המוגדרת מוגדרת.

אם פונקציה איננה מתאימה אף מספר לערך מסוים של המשתנה x, אומרים שהפונקציה איננה מוגדרת עבור ערך זה של x, או כי ערך זה של x איננו שייך לתחום ההגדרה של הפונקציה.

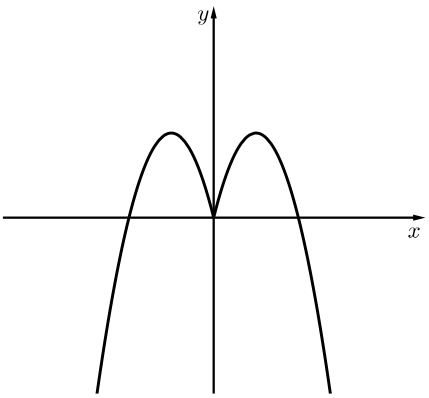
שאלות:

1) קבעו בכל אחד מהמקרים הבאים האם הגרף מייצג פונקציה. נמק.

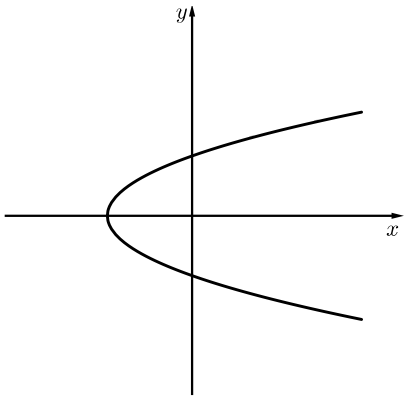
א.



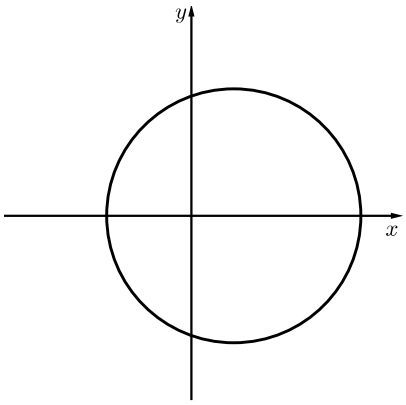
ב.



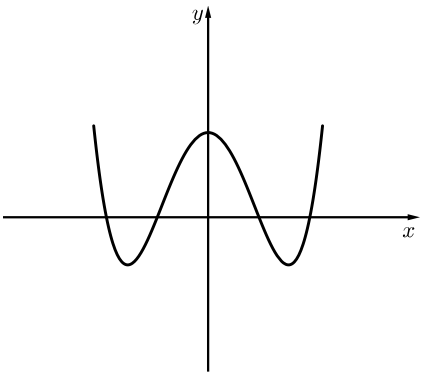
ג.



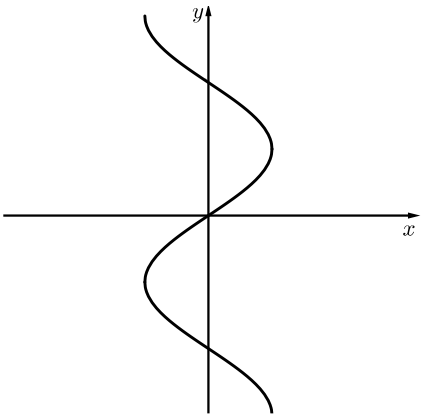
ד.



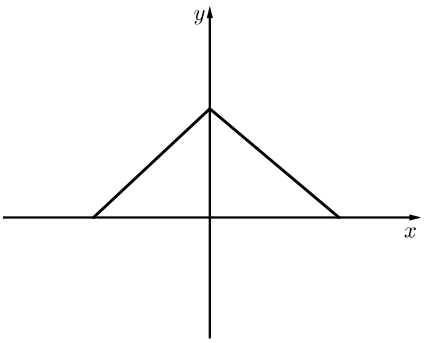
ה.



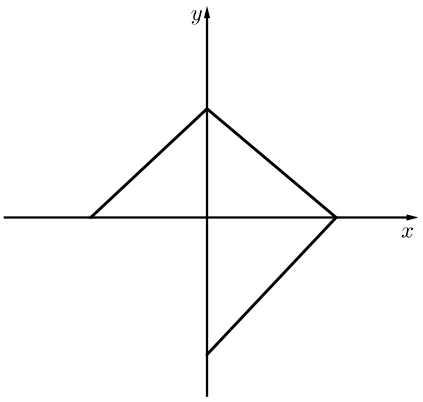
ו.



ז.



ח.



תשובות סופיות:

1) פונקציות: א', ב', ה', ז'. אינן פונקציות: ג', ד', ו', ח'.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה:

סיכום כללי:

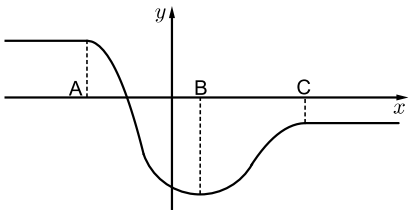
עלייה וירידה של פונקציה:

השתנות של פונקציה היא השינוי בערך ה- y (או $f(x)$) כתוצאה מהשינוי בערך ה- x.

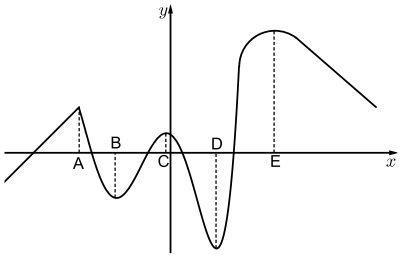
- פונקציה עולה בתחום מסוים כאשר ערך ה- y גדלים ככל שערכי ה- x גדלים.
- פונקציה יורדת בתחום מסוים כאשר ערך ה- y קטנים ככל שערכי ה- x גדלים.
- פונקציה נקראת קבועה אם ערכי ה- y נשארים קבועים ככל שערכי ה- x גדלים.

שאלות:

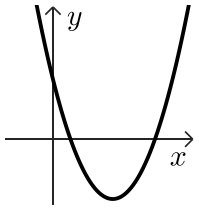
1) בסרטוט שלפניך נתון גרף של פונקציה.
כתוב את תחומי העלייה והירידה שלה.
היעזר בנקודות A, B ו-C.



2) בסרטוט שלפניך נתון גרף של פונקציה.
תאר את השתנות הפונקציה.
היעזר בנקודות A, B, C, D ו-E,
ובמילים: עולה, יורדת, קבועה, תחום.



3) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציית הפרבולה: $f(x)=(x-2)^2-2$.
רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.



תשובות סופיות:

1) כאשר $x<x_A$: הפונקציה קבועה, כאשר: $x_A<x<x_B$ הפונקציה יורדת,
כאשר $x_B<x<x_C$: הפונקציה עולה, כאשר $x>x_C$: הפונקציה קבועה.

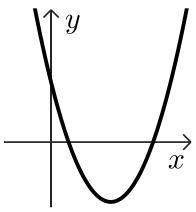
2) עולה בתחומים: לפני A, BC, DE. יורדת בתחומים: AB, CD ואחרי E.

3) עליה: $x>2$, ירידה: $x<2$.

נקודות אפס ותחומי חיוביות ושליליות של פונקציה:

שאלות:

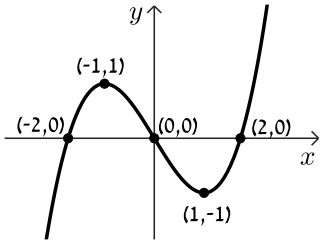
1) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציית הפרבולה: $f(x)=(x-2)^2-2$.



א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

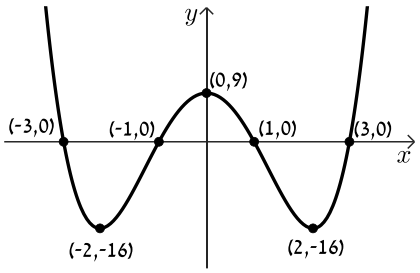
2) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.



א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

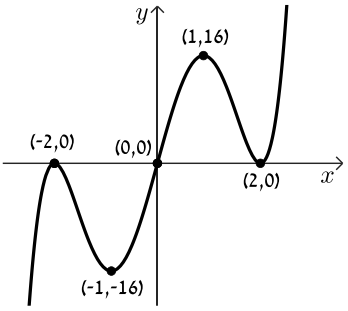
3) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.



א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

4) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.



א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

תשובות סופיות:

1) א. $(3.414,0)$, $(0.585,0)$

ב. חיוביות: $x>3.414$, $x<0.585$, שליליות: $0.585<x<3.414$

2) א. עליה: $x>1$, $x<-1$, ירידה: $-1<x<1$

ב. חיוביות: $x>2$, $-2<x<0$, שליליות: $0<x<2$, $x<-2$

3) א. עליה: $x>2$, $-2<x<0$, ירידה: $0<x<2$, $x<-2$

ב. חיוביות: $x>3$, $-1<x<1$, שליליות: $1<x<3$, $x<-3$, $-3<x<-1$

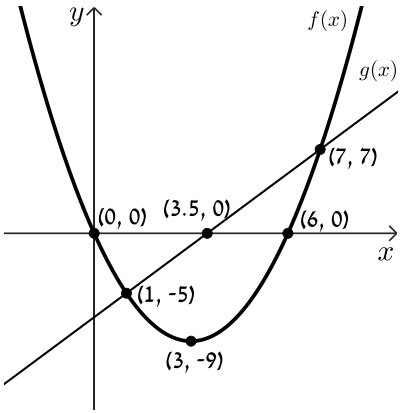
4) א. עליה: $x>2$, $-1<x<1$, ירידה: $1<x<2$, $x<-2$, $-2<x<-1$

ב. חיוביות: $x>2$, $0<x<2$, שליליות: $-2<x<0$, $x<-2$

נקודות משותפות לשני גרפים:

שאלות:

1) בסרטוט נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.



א. מהם ערכי x עבורם $f(x)$ מעל $g(x)$?

ב. מהם ערכי x עבורם $f(x)$ מתחת $g(x)$?

ג. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ עולה?

ד. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ יורדת?

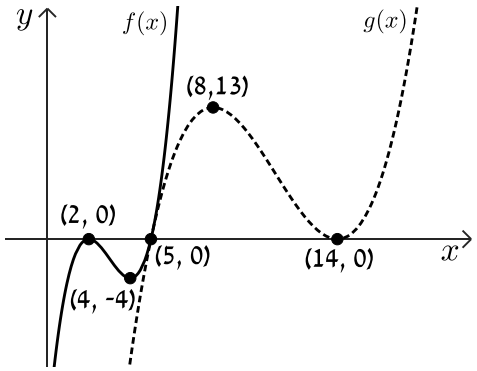
ה. מהו התחום בו שתי הפונקציות חיוביות?

ו. מהו התחום בו שתי הפונקציות שליליות?

ז. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ שלילית?

ח. מהו התחום בו $f(x)$ עולה וגם $g(x)$ חיובית?

2) בסרטוט נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.



ידוע כי לשתי הפונקציות יש נקודת חיתוך אחת בלבד.

א. מהם ערכי x עבורם $f(x)$ מעל $g(x)$?

ב. מהם ערכי x עבורם $f(x)$ מתחת $g(x)$?

ג. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ עולה?

ד. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ יורדת?

ה. מהו התחום בו שתי הפונקציות חיוביות?

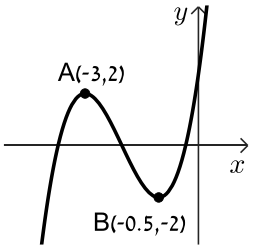
ו. מהו התחום בו שתי הפונקציות שליליות?

ז. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ שלילית?

ח. מהו התחום בו $f(x)$ עולה וגם $g(x)$ חיובית?

3) בציור מתואר גרף של פונקציה.

לפונקציה מינימום מקומי בנקודה $A(-3,2)$ ומקסימום מקומי בנקודה $B\left(-\frac{1}{2},-2\right)$.



היעזרו בגרף וענו על השאלות הבאות:

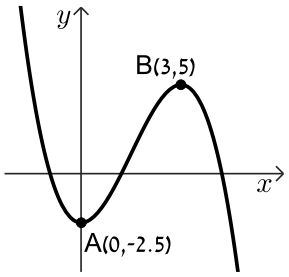
א. בכמה נקודות חותך הישר $y=3$ את גרף הפונקציה?

ב. בכמה נקודות חותך הישר $y=2$ את גרף הפונקציה?

ג. בכמה נקודות חותך הישר $y=-1$ את גרף הפונקציה?

4) בציור מתואר גרף של פונקציה.

לפונקציה מינימום מקומי בנקודה $A(0,-2.5)$ ומקסימום מקומי בנקודה $B(3,5)$.



היעזרו בגרף וענו על השאלות הבאות:

א. בכמה נקודות חותך הישר $y=6$ את גרף הפונקציה?

ב. בכמה נקודות חותך הישר $y=0$ את גרף הפונקציה?

ג. בכמה נקודות חותך הישר $y=-2.5$ את גרף הפונקציה?

תשובות סופיות:

1) א. $x<1\,,\,x>7$ ב. $1<x<7$ ג. $x<3$ ד. אף x.

ה. $x>6$ ו. $0<x<3.5$ ז. $x<3$ ח. $x>3.5$.

2) א. $x\neq 5$ ב. אף x ג. $2<x<4$ ד. אף x.

ה. $x>14\,,\,5<x<14$ ו. $x<2\,,\,2<x<5$.

ז. $2<x<4$ ח. $x>14\,,\,5<x<14$.

3) א. בנקודה אחת ב. ב-2 נקודות ג. ב-3 נקודות.

4) א. בנקודה אחת ב. ב-3 נקודות ג. ב-2 נקודות.

סרטוט גרף על פי נתונים:

שאלות:

1) נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 5$.

לפונקציה יש קיצון בנקודות $(2,4)$ ו-$(4,0)$.

הפונקציה יורדת בתחום: $2 < x < 4$ ועולה בתחומים: $x > 4$, $0 < x < 2$.

א. קבעו את סוג הקיצון בנקודות $(2,4)$ ו-$(4,0)$.

ב. נתון גם כי $f(0) = 0$. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נרחיב את תחום ההגדרה כך ש-$x \ge 0$ ונשאיר את אותם התנאים על הפונקציה.
סרטטו כעת סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $1 \le x \le 5$.

לפונקציה יש קיצון בנקודות $(2,-1)$ ו-$(4,1)$.

הפונקציה יורדת בתחומים: $1 < x < 2$, $4 < x < 5$ ועולה בתחום: $2 < x < 4$.

א. קבעו את סוג הקיצון בנקודות $(2,-1)$ ו-$(4,1)$.

ב. נתון גם כי $f(1) = 0$. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נרחיב את תחום ההגדרה לכל x ונשאיר את אותם התנאים על הפונקציה.
סרטטו כעת סקיצה של גרף הפונקציה.

3) הפונקציה $f(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

- $f(x)$ מוגדרת לכל x.
- הנקודות $(-2,0)$ ו-$(2,0)$ הן נקודות מינימום של הפונקציה.
- הנקודה $(0,2)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה.
- תחומי העלייה של הפונקציה הם: $-2 < x < 0$, $x > 2$.
- תחומי הירידה של הפונקציה הם: $0 < x < 2$, $x < -2$.
- נקודות המינימום הן נקודות האפס היחידות של הפונקציה.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$ על סמך הנתונים.

ב. עברו כל אחד מסעיפים (1)-(3), ענו אם הוא נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת. נמקו את קביעותיכם.

(1) הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

(2) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(3) הפונקציה $f(x)$ היא לא זוגית ולא אי-זוגית.

4) נתונה פונקציה $f(x)$ ולה נקודת קיצון אחת $A(3,4)$.

הנקודה $B(-1,8)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

בנוסף ידוע כי הפונקציה מוגדרת בכל ציר המספרים וניתן לסרטט אותה במשיכת עט אחת.

השלימו 'נכון'/'לא נכון'/'לא ניתן לדעת' בכל אחת מן הטענות הבאות:

א. הנקודה $A(3,4)$ היא נקודת המקסימום של הפונקציה.

ב. הנקודה $C(2,3)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ג. הנקודה $D(2,5)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ד. הנקודה $E(0,8)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ה. הנקודה $F(-2,4)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ו. הפונקציה $f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

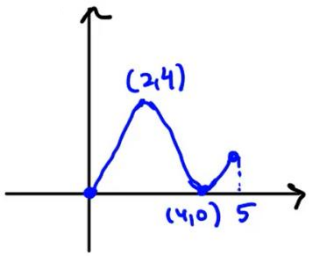
ז. הפונקציה $f(x)$ יורדת כאשר $x < 3$ ועולה כאשר $x > 3$.

ח. לפונקציה $f(x)$ יש 2 נקודות חיתוך עם הצירים.

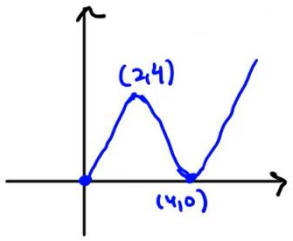
תשובות סופיות:

1) א. $\max(2,4)$, $\min(4,0)$

ב.

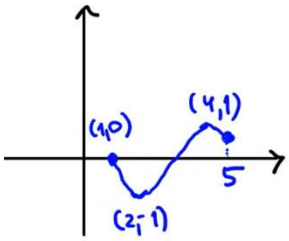


ג.

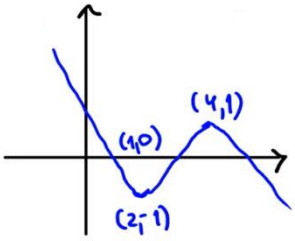


2) א. $\max(4,1)$, $\min(2,-1)$

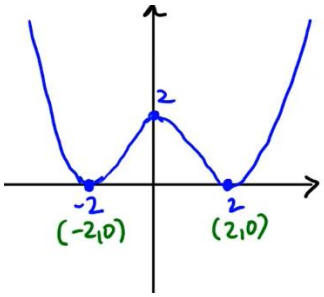
ב.



ג.



3) א.



ב. (1) אי אפשר לדעת ב. (2) לא נכון ב. (3) אי אפשר לדעת, יתכן שהיא זוגית.

4) א. לא נכון ב. לא נכון ג. לא ניתן לדעת ד. לא נכון ה. לא נכון
ו. לא נכון ז. נכון ח. לא נכון

שאלון 571

תזכורת מחטיבת הביניים – הפרבולה

תוכן העניינים:

הגדרות יסודיות בפרבולה: 137
סיכום כללי: 137
שאלות: 139
תשובות סופיות: 140
הזזות ומתיחות של פרבולה: 141
סיכום כללי: 141
שאלות: 142
תשובות סופיות: 146
ייצוגים שונים של הפונקציה הריבועית: 147
סיכום כללי: 147
שאלות: 147
תשובות סופיות: 149

הגדרות יסודיות בפרבולה:

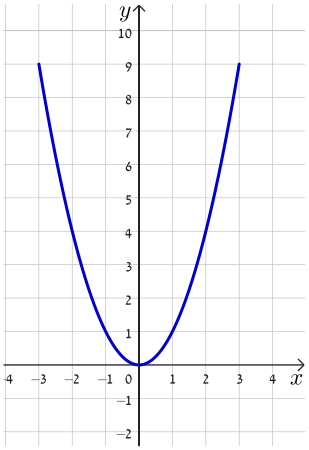
סיכום כללי:

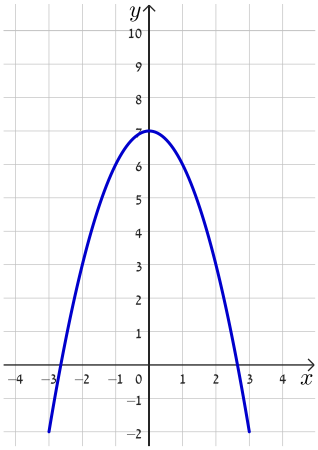
הגדרה:

פונקציה מהצורה: $f(x)=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$ היא **פונקציה ריבועית.**

גרף הפונקציה הריבועית הוא **פרבולה.**

פרבולה ישרה ופרבולה הפוכה:





- <u>פרבולה ישרה:</u>
  מתקבלת כאשר $a>0$
  ולה נקודות מינימום.
- <u>פרבולה הפוכה:</u>
  מתקבלת כאשר $a<0$
  ולה נקודת מקסימום.

קודקוד הפרבולה:

הנקודה הנמוכה/הגבוהה ביותר בפרבולה ישרה/הפוכה נקראת **קודקוד הפרבולה**.

שיעור ה- x של קודקוד הפרבולה הוא: $x_{\text{קודקוד}}=-\frac{b}{2a}$

את שיעור ה- y נמצא ע"י הצבת שיעור ה- x בפונקציה.

ציר הסימטריה של הפרבולה:

ישר אנכי העובר דרך קודקוד הפרבולה נקרא **ציר הסימטריה** של הפרבולה ומשוואתו: $x=-\frac{b}{2a}$.

ענפים של גרף הפרבולה:

ציר הסימטריה מחלק את גרף הפרבולה לשני חלקים. כל חלק נקרא **ענף**.

לגרף הפרבולה **ענף ימני** ו-**ענף שמאלי**.

תחומי עלייה וירידה:

בפרבולה ישרה הענף השמאלי הוא יורד והענף הימני הוא עולה.

בפרבולה הפוכה הענף השמאלי הוא עולה והענף הימני הוא יורד.

תחומי העלייה והירידה, אם כן, הם:

סוג הפרבולה	תחום עלייה	תחום ירידה
ישרה	$x > -\frac{b}{2a}$	$x < -\frac{b}{2a}$
הפוכה	$x < -\frac{b}{2a}$	$x > -\frac{b}{2a}$

נקודות החיתוך עם הצירים:

- כדי למצוא חיתוך עם ציר ה- y , נציב: $x = 0$ במשוואת הפונקציה.
- כדי למצוא חיתוך עם ציר ה- x , נשווה את הפונקציה הריבועית לאפס.
  נקודות החיתוך עם ציר ה- x נקראות גם **נקודות האפס** של הפונקציה.

תחומי חיוביות ושליליות:

תחום חיוביות של פונקציה מקיים: $f(x) > 0$ ותחום שליליות של פונקציה מקיים: $f(x) < 0$.

מקרים מיוחדים:

- אם לפונקציה הריבועית נקודת אפס אחת אז היא אי-שלילית עבור $a > 0$
  ואי-חיובית עבור $a < 0$.
- אם לפונקציה הריבועית אין נקודות אפס אז היא חיובית בכל תחום הגדרתה עבור $a > 0$
  ושלילית בכל תחום הגדרתה עבור $a < 0$.

שאלות:

1) בכל אחד מהמקרים שלפניכם נתון ציר הסימטריה של פרבולה ושיעורי אחת מנקודות האפס שלה. מצאו את שיעורי נקודת האפס הנוספת.

א. $x=4\ ;\ (5,0)$ ב. $x=-1\ ;\ (7,0)$

ג. $x=3\ ;\ (-2,0)$ ד. $x=-4\frac{1}{2}\ ;\ \left(6\frac{1}{2},0\right)$

2) בכל אחד מהמקרים הבאים, קבעו כמה נקודות אפס יש לפונקציה הריבועית לפי הנתונים המתארים את גרף הפרבולה שלה.

א. יש לה נקודת מינימום ברביע השלישי.

ב. יש לה נקודת מקסימום ברביע הרביעי.

ג. יש לה נקודת מינימום המונחת על הישר $y=-3$.

ד. יש לה נקודת מינימום על ציר ה- x.

ה. יש לה נקודת מקסימום ברביע הראשון.

ו. יש לה נקודת מקסימום הנמצאת על ציר ה- y בחלקו השלילי.

3) נתונה הפונקציה: $y=x^2-2x-15$.

א. מהם שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- y?

ב. רשמו פונקציה ריבועית נוספת בעלת אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y.

ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?

ד. כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה עם הישרים הבאים:

(1) $y=-15$.

(2) $y=15$.

(3) $y=-25$.

ה. רשמו פונקציה ריבועית נוספת שיש לה את אותן נקודות האפס כמו לפונקציה הנתונה.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה: $y=-x^2+4x$.

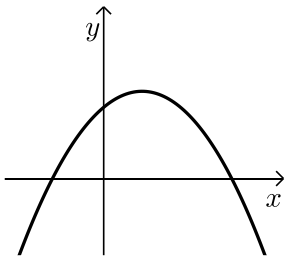
ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה: $y=2x^2-5x$.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה $y=-x^2-x+2$ עם ציר ה- x וסרטטו סקיצה שלה.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה $y=4x^2-10x$ עם ציר ה- x וסרטטו סקיצה שלה.

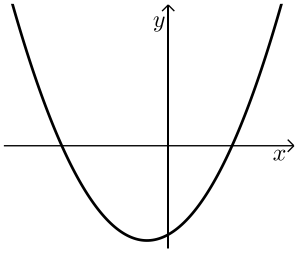
6) נתונה הפרבולה: $y=-x^2+3x+10$.



א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x.

ב. כתבו דוגמא לערך כלשהו של x עבורו הפונקציה חיובית ודוגמא לערך אחר עבורו הפונקציה שלילית. נמקו.

7) נתונה הפרבולה: $y=x^2+2x-15$.



א. לאלו ערכים של x הפונקציה חיובית?

ב. לאלו ערכים של x הפונקציה שלילית?

תשובות סופיות:

1) א. $(3,0)$ ב. $(-9,0)$ ג. $(8,0)$ ד. $\left(-15\frac{1}{2},0\right)$.

2) א. 2 נקודות. ב. אין חיתוכים. ג. 2 נקודות. ד. חיתוך אחד.
ה. 2 נקודות. ו. אין חיתוכים.

3) א. $(0,-15)$ ב. $y=x^2-15$ ג. $(-3,0)$, $(5,0)$.
ד. (1) שתיים. ד. (2) שתיים. ד. (3) אפס.
ה. $y=2x^2-4x-30$.

4) א. עולה: $x<2$, יורדת: $x>2$. ב. עולה: $x>1\frac{1}{4}$, יורדת: $x<1\frac{1}{4}$.

5) א. $(-2,0)$, $(1,0)$ ב. $(2.5,0)$, $(0,0)$.

6) א. $(-2,0)$, $(5,0)$ ב. חיובית: 1,2,3. שלילית: -10,-4,12,7,6.

7) א. $x>3$, $x<-5$ ב. $-5<x<3$.

הזזות ומתיחות של פרבולה:

סיכום כללי:

הזזה אנכית ואופקית:

משפחת הפרבולות מהצורה: $y=(x-p)^2+k$ מתקבלת ע"י שילוב של הזזות של הפרבולה: $y=x^2$.

- הזזה אנכית ב- k יחידות למעלה (כאשר: $k>0$) או למטה (כאשר: $k<0$).
- הזזה אופקית ב- p יחידות ימינה (כאשר: $p>0$) או שמאלה (כאשר: $p<0$).

קדקוד הפרבולה $y=(x-p)^2+k$ הוא (p,k) והוא קדקוד מינימום.

ציר הסימטריה של הפרבולה $y=(x-p)^2+k$ הוא הוא $x=p$, אשר מקביל לציר ה- y.

מתיחה וכיווץ אנכיים:

לפרמטר a במשפחות הפונקציות: $y=a(x-p)^2$, $y=ax^2+c$, $y=ax^2$, $(a\neq 0)$
יש שני תפקידים:

- הוא קובע את כיוון הגרף:

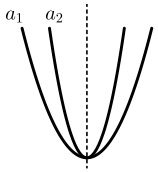


הפרבולה ישרה והקודקוד הוא מינימום.

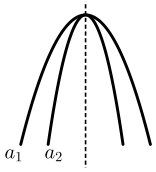


הפרבולה הפוכה והקודקוד הוא מקסימום.

- הוא קובע את מידת המתיחה/כיווץ של הגרף ביחס לציר הסימטריה שלו.
כלומר, ככל ש- $|a|$ גדול יותר, כך ענפי הפרבולה יהיו קרובים יותר לציר הסימטריה.



עבור: $a>0$: $a_2>a_1$



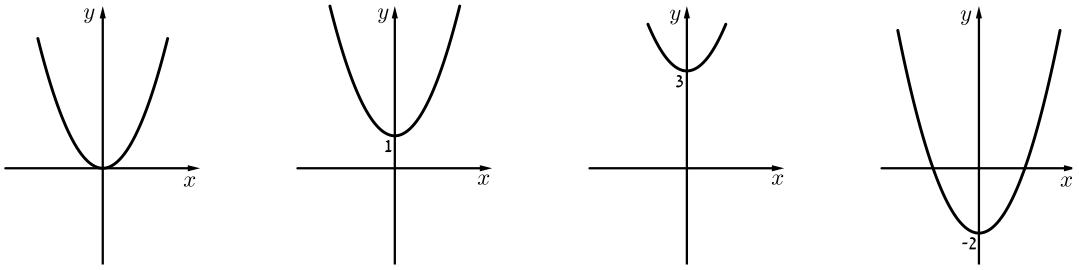
עבור: $a<0$: $a_2<a_1$

שאלות:

1) התאימו בין משוואות הפונקציות הבאות לגרפים:

$$w(x)=x^2 \quad , \quad h(x)=x^2+1 \quad , \quad g(x)=x^2-2 \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

א. ב. ג. ד.



2) רשמו את משוואת הפונקציה הריבועית המתאימה המתקבלת מהפונקציה $y=x^2$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. מזיזים את הגרף שלה ב-6 יחידות למעלה.

ב. מזיזים את הגרף שלה ב-4.5 יחידות למטה.

3) נתונה הפונקציה הבאה: $y=(x+4)(x-4)$.

א. הסבירו מדוע הפונקציה הזו הינה פונקציה ריבועית.

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקודקוד של הפונקציה.

ג. מצאו את ציר הסימטריה של הפונקציה.

ד. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.

ה. סרטטו באופן מקורב סקיצה של גרף הפונקציה.

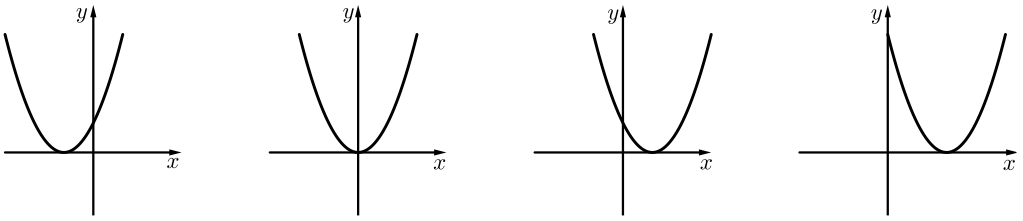
ו. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה והראו אותם באיור שעשיתם.

ז. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה והראו אותם באיור שעשיתם.

4) התאימו לכל אחת מהפונקציות את הגרף המתאים והסבירו את בחירתכם.

$f(x)=x^2$, $g(x)=(x-6)^2$, $h(x)=(x+2)^2$, $w(x)=(x-4)^2$

א. ב. ג. ד.



5) רשמו פונקציה מהצורה $y=(x-p)^2$ המתאימה לכל אחת מהדרישות הבאות:

א. קדקוד הפרבולה הוא $\left(2\frac{1}{5},0\right)$.

ב. ציר הסימטריה הוא $x=-19$.

6) רשמו את הפונקציה המתקבלת מהזזה של הפרבולה $y=x^2$ בכל מקרה:

א. הזזה של 2 יחידות ימינה ו-5 יחידות למעלה.

ב. הזזה של 3 יחידות שמאלה ויחידה אחת למעלה.

7) נתונה הפונקציה: $y=(x+5)^2-13$.

א. תארו במילים את ההזזות שהתבצעו על גרף הפונקציה $y=x^2$ בכדי לקבל את הפונקציה הנתונה.

ב. מצאו את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה.

ג. מצאו את ציר הסימטריה של הפרבולה.

ד. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-y.

ה. כמה נקודות אפס יש לפונקציה הנתונה? נמקו. אין צורך בחישוב.

ו. עבור אילו ערכי x הפונקציה יורדת ועבור אילו היא עולה?

ז. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ח. מצאו נקודה הסימטרית ל-$(3,51)$. הסבירו כיצד מצאתם אותה.

8) נתונה הפונקציה: $y=(x+5.5)^2-16$.

א. מהו ציר הסימטריה של הפרבולה?

ב. מהי נקודת הקודקוד של הפרבולה?

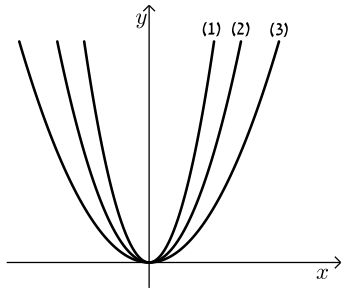
ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

ד. מצאו את נקודות האפס של הפרבולה.

ה. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפרבולה.

9) התאימו גרף לכל פונקציה ונמק.

I. $y=x^2$ II. $y=2x^2$ III. $y=4x^2$



10) התאימו גרף לכל פונקציה ונמק.

א. $y=\frac{1}{3}x^2$

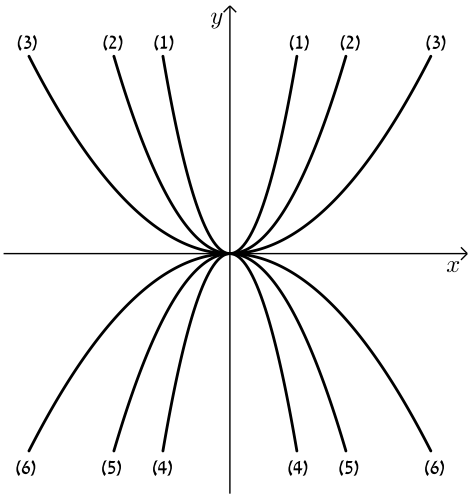
ב. $y=-\frac{1}{3}x^2$

ג. $y=3x^2$

ד. $y=-3x^2$

ה. $y=x^2$

ו. $y=-x^2$



11) סרטטו באופן איכותי בלבד במערכת צירים את הגרפים של הפונקציות הבאות:

$f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=\frac{2}{5}x^2$, $f_3(x)=\frac{5}{2}x^2$, $f_4(x)=-\frac{2}{5}x^2$, $f_5(x)=-\frac{5}{2}x^2$

12) לפניכם הפונקציה הבאה: $y=3(x+1)^2-12$.

א. תארו במילים את הפעולות שהתבצעו על גרף הפונקציה $y=x^2$ לקבלת הפונקציה הנתונה.

ב. מהם שיעורי נקודת הקודקוד של הפרבולה? האם מדובר בנקודת מקסימום או מינימום?

ג. מהי משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה?

ד. מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?

ה. מהם שיעורי נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y?

ו. עבור אילו ערכי x הפרבולה עולה ועבור אילו היא יורדת?

ז. עבור אילו ערכי x הפרבולה חיובית ועבור אילו היא שלילית?

ח. סרטטו סקיצה של גרף הפרבולה במערכת צירים וציינו את ממציאכם מהסעיפים הקודמים.

ט. הוסיפו לסקיצה גרף נוסף של פרבולה עם אותו ציר סימטריה בעלת קדקוד מקסימום אשר נמצא 3 יחידות מעל לקודקוד של הפרבולה הנתונה. כמה אפשרויות שונות ישנן?

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. רשמו את המשוואה המתקבלת מהזזת גרף הפרבולה $y=\frac{1}{3}x^2$ כאשר מתבצעת הזזה של 3 יחידות ימינה ו-2 יחידות למטה.

ב. רשמו את המשוואה המתקבלת מהזזת גרף הפרבולה $y=5x^2$ במקרה הבא: הזזה כך שקודקוד הפרבולה יתקבל בנקודה $(2.5,-3.15)$.

תשובות סופיות:

1) א. $g(x)$ ב. $f(x)$ ג. $h(x)$ ד. $w(x)$.

2) א. $y=x^2+6$ ב. $y=x^2-4.5$.

3) א. כי ניתן לכתוב אותה עם ביטוי הכולל x^2. ב. $(0,-16)$.

ג. $x=0$ ד. $(4,0)$, $(-4,0)$ ה. ראו סרטוט בסרטון.

ו. עלייה: $x>0$, ירידה: $x<0$ ז. חיובית: $x>4$, $x<-4$, שלילית: $-4<x<4$.

4) א. $g(x)$ ב. $w(x)$ ג. $f(x)$ ד. $h(x)$.

5) א. $y=\left(x-2\frac{1}{5}\right)^2$ ב. $y=(x+19)^2$.

6) א. $y=(x-2)^2+5$ ב. $y=(x+3)^2+1$.

7) א. הזזה 5 יחידות שמאלה ו-13 יחידות למטה.

ב. $(-5,-13)$ ג. $x=-5$ ד. $(0,12)$ ה. 2.

ו. עולה: $x>-5$, יורדת: $x<-5$ ז. ראו סרטוט בסרטון. ח. $(-13,51)$.

8) א. $x=-5.5$ ב. $(-5.5,-16)$ ג. עולה: $x>-5.5$, יורדת: $x<-5.5$

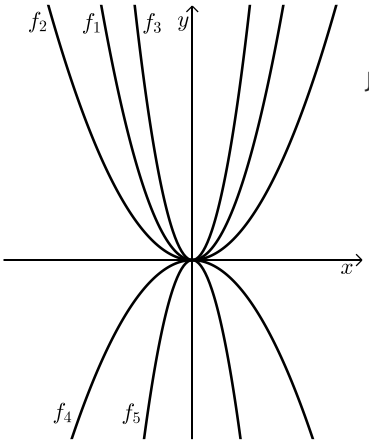
ד. $(-1.5,0)$, $(-9.5,0)$

ה. חיובית: $x>-1.5$, $x<-9.5$, שלילית: $-9.5<x<-1.5$.

9) $(3)\to$ I , $(2)\to$ II , $(1)\to$ III.

10) א. (3) ב. (6) ג. (1) ד. (4) ה. (2) ו. (5).

11) סרטוט בצד.



12) א. הזזה שמאלה ביחידה אחת, כיווץ פי 3 והזזה מטה ב-12 יחידות

ב. $\min(-1,-12)$ ג. $x=-1$ ד. $(-3,0)$, $(1,0)$.

ה. $(0,-9)$ ו. עולה: $x>-1$, יורדת: $x<-1$.

ז. חיובית: $x>1$, $x<-3$, שלילית: $-3<x<1$.

ח. עיינו בסרטון. ט. עיינו בסרטון.

13) א. $y=\frac{1}{3}(x-3)^2+2$ ב. $y=5(x-2.5)^2-3.15$.

ייצוגים שונים של הפונקציה הריבועית:

סיכום כללי:

צורות הצגה של פונקציה ריבועית:

- הצגה סטנדרטית: $y=ax^2+bx+c$ (כאשר: $a\ ,\ b\ ,\ c$ הם פרמטרים ו- $a\neq 0$).
- הצגה קודקודית: $y=a\left(x-p\right)^2+k$ (כאשר: $a\ ,\ p\ ,\ k$ הם פרמטרים ו- $a\neq 0$).
- הצגה כמכפלה: $y=a\left(x-m\right)\left(x-n\right)$ (כאשר: $a\ ,\ m\ ,\ n$ הם פרמטרים ו- $a\neq 0$).

ניתן לעבור מייצוג אחד לשני באמצעות פעולות אלגבריות.

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. רשמו את הפונקציה $y=\left(x-3\right)\left(x+5\right)$ בייצוגים מהצורה:

$y=ax^2+bx+c$ ו- $y=a\left(x-p\right)^2+k$.

ב. רשמו את הפונקציה $y=2x^2-12x+10$ בצורה: $y=a\left(x-m\right)\left(x-n\right)$.

2) נתונה הפונקציה: $y=2\left(x-1\right)\left(x+4\right)$.

א. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?

ב. האם הפרבולה המתאימה לפונקציה זו צרה/רחבה/זהה מזו של הפונקציה $y=x^2$? נמקו.

ג. מהם שיעורי נקודת הקודקוד ומה סוגה?

3) נתונה הפונקציה: $y=-\frac{1}{3}\left(x+5\right)^2+2$.

א. חשבו את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה המתארת את הפונקציה.

ב. האם הפרבולה המתאימה לפונקציה זו צרה/רחבה/זהה מזו של הפונקציה $y=x^2$? נמקו.

4) נתונה הפונקציה: $y=-3x^2+9x+8$.

א. חשב את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה המתארת את הפונקציה.

ב. האם הפרבולה המתאימה לפונקציה זו צרה/רחבה/זהה מזו של הפונקציה $y=x^2$? נמקו.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. רשמו את הפונקציה המתקבלת בצורה של $y=a(x-p)^2+k$ מביצוע הפעולות הבאות על הפונקציה $y=x^2$:

- הזזה של 4 יחידות שמאלה.
- כיווץ פי 2.
- הזזה של 2 יחידות למטה.

ב. כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x?

ג. מצאו את נקודות החיתוך וכתוב את הפונקציה בצורה: $y=a(x-m)(x-n)$.

ד. מהו ציר הסימטריה ונקודת הקודקוד של הפרבולה המתאימה?

6) מצאו כיצד התקבל גרף הפרבולה $y=2x^2-6x+8$ מביצוע פעולות הזזה ומתיחה על גרף הפרבולה $y=x^2$. האם ניתן לכתוב את הפונקציה בייצוג: $y=a(x-m)(x-n)$? נמק.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. כתבו את משוואת הפרבולה $y=ax^2+bx+c$ בעלת התכונות הבאות:

- חותכת את ציר ה- x בנקודות $(-1,0)$, $(3,0)$.
- רחבה פי 3 מגרף הפרבולה $y=x^2$.

ב. כתבו את משוואת הפרבולה הנ"ל בייצוג $y=a(x-p)^2+k$.

8) לפניכם 3 פונקציות: $y=x^2+4x+5$, $y=x^2+4x+4$, $y=x^2+4x+3$.

א. כתבו (במידה ויש) את שני הייצוגים הנוספים של כל אחת מהן.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף כל פונקציה עם הצירים.

ג. מצאו את שיעורי הקודקוד של כל אחת מהפרבולות המתאימות.

ד. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של כל אחת מהפונקציות.

ה. כתבו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מהפונקציות.

תשובות סופיות:

1) א. $y=(x-1)^2-16$, $y=x^2+2x-15$ ב. $y=2(x-1)(x-5)$

2) א. $(-4,0)$, $(1,0)$ ב. צרה יותר. ג. $\min(-1.5,-7.5)$.

3) א. $(-5,2)$ ב. רחבה יותר.

4) א. $(1.5,14.75)$ ב. צרה יותר.

5) א. $y=2(x+4)^2-2$ ב. 2 נקודות.

ג. $(-5,0)$, $(-3,0)$, $y=2(x+3)(x+5)$ ד. $(-4,-2)$, $x=-4$.

6) ($y=2\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2+3\frac{1}{2}$) - הזזה 1.5 יחידות ימינה, כיווץ פי 2 והזזה מעלה ב-3.5 יחידות.

7) א. $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}(x-1)^2-1\frac{1}{3}$.

8) א. עבור: $y=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)=(x+2)^2-1$

עבור: $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$, עבור: $y=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$.

ב. $(0,4)$, $(-2,0)$: $y=x^2+4x+4$; $(0,3)$, $(-3,0)$, $(-1,0)$: $y=x^2+4x+3$

$(0,5)$: $y=x^2+4x+5$

ג. $(-2,1)$: $y=x^2+4x+5$; $(-2,0)$: $y=x^2+4x+4$; $(-2,-1)$: $y=x^2+4x+3$.

ד. עבור $y=x^2+4x+3$: חיובית: $x>-1$, $x<-3$, שלילית: $-3<x<-1$.

עבור $y=x^2+4x+4$: חיובית לכל $x\neq-2$. עבור: $y=x^2+4x+5$ חיובית לכל x.

ה. עולה: $x>-2$, יורדת: $x<-2$ עבור כולן.

שאלון 571

פונקציית החזקה עם מעריך טבעי

תוכן העניינים:

פונקציית החזקה עם מעריך טבעי:..... 151

סיכום כללי:..... 151

שאלות:..... 152

תשובות סופיות: 156

פונקציית החזקה עם מעריך טבעי:

סיכום כללי:

צורה כללית של פונקצית החזקה: $f(x)=x^n$ כאשר נעסוק ב-n טבעי בלבד.

כללים עבור כל n טבעי:

- הפונקציה עוברת בראשית הצירים $(0,0)$.
- בתחום $x>1$ או $x<-1$ ככל ש-n יותר גדול, קצב השינוי של הפונקציה יותר גדול.
- בתחום $-1<x<1$ ככל ש-n יותר גדול, הפונקציה יותר קרובה לציר ה-x.

עבור n טבעי זוגי:

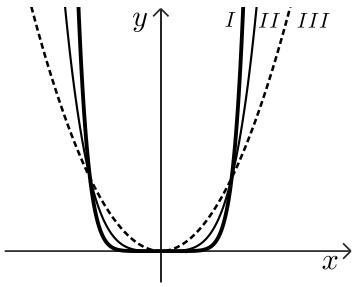
- קיימת סימטריה סביב ציר ה-y.
- הפונקציה מתחילה מלמעלה (באינסוף) ומסתיימת למעלה (באינסוף).
- לפונקציה יש נקודות מינימום בראשית הצירים $(0,0)$.

עבור n טבעי אי-זוגי:

- קיימת סימטריה סביב ראשית הצירים $(0,0)$.
- הפונקציה מתחילה מלמטה (במינוס אינסוף) ומסתיימת למעלה (באינסוף).
- לפונקציה יש נקודת פיתול בראשית הצירים $(0,0)$ - למעט כאשר $n=1$.

שאלות:

1) נתונות הפונקציות: $h(x)=x^2$, $g(x)=x^4$, $f(x)=x^8$.



לפניכם גרפים של שלוש פונקציות I-III.

א. התאימו לכל גרף מבין הגרפים I-III את הפונקציה המתאימה.

ב. עבור הטענות הבאות השלימו: < (גדול מ-), > (קטן מ-), = (שווה):

(1) $h(-1)$ ___ $f(1)$

(2) $h(-0.1)$ ___ $f(-0.1)$ ___ $g(-0.1)$

(3) $h(1)$ ___ $f(1)$ ___ $g(1)$

(4) $h(2)$ ___ $f(2)$ ___ $g(2)$

(5) $h(0)$ ___ $f(0)$ ___ $g(0)$

2) לפניכם גרפים של הפונקציות: $h(x)=x^n$, $f(x)=x^4$ כאשר $n\neq 4$ מספר טבעי וזוגי.

א. קבעו ביחס לכל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או לא. נמקו תשובתכם.

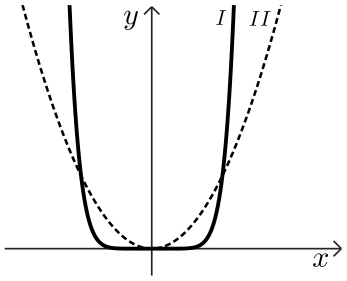
(1) אם: $f(0.5)>h(0.5)$ אז $n>4$.

(2) אם: $f(5)>h(5)$ אז $n>4$.

(3) $h(5)=f(-5)$.

(4) אם: $h(-2)=64$ אז $n=6$.

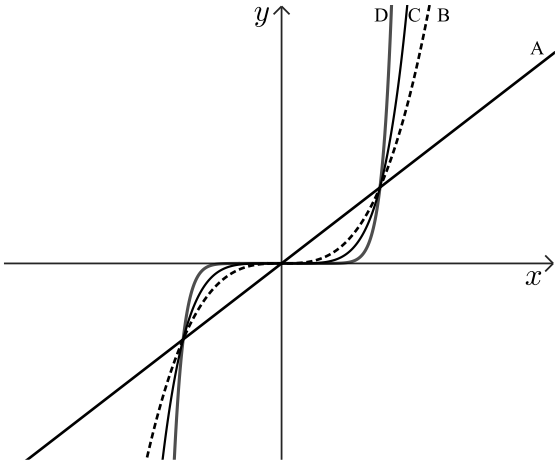
ב. נתון: $n>4$. התאימו לכל גרף מבין הגרפים I-II את הפונקציה המתאימה.



3) נתונות הפונקציות: $f(x)=x$, $k(x)=x^{11}$, $g(x)=x^5$, $h(x)=x^3$.

לפניכם גרפים של ארבע פונקציות A-D.

א. התאימו לכל גרף מבין הגרפים A-D את הפונקציה המתאימה.



ב. עבור הטענות הבאות השלימו: < (גדול מ-), > (קטן מ-), = (שווה):

(1) $k(-0.1)____\ h(-0.1)____\ f(-0.1)____\ g(-0.1)$

(2) $k(0.1)____\ h(0.1)____\ f(0.1)____\ g(0.1)$

(3) $k(2)____\ h(2)____\ f(2)____\ g(2)$

(4) $k(0)____\ h(0)____\ f(0)____\ g(0)$

(5) $|h(5)|____|h(-5)|$

4) נתונות הפונקציות: $h(x)=x^n$, $f(x)=x^5$ כאשר $n>1$ מספר טבעי ואי-זוגי.

א. קבעו ביחס לכל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או לא. נמקו את תשובתכם.

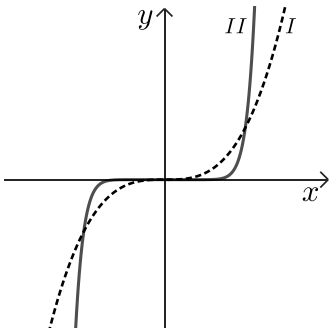
(1) אם: $f(5)>h(5)$ אז: $n>5$.

(2) אם: $f(0.5)>h(0.5)$ אז: $n>5$.

(3) אם: $f(-0.5)>h(-0.5)$ אז: $n>5$.

(4) תמיד מתקיים: $h(5)=f(-5)$.

(5) אם: $h(3)=-27$ אז: $n=3$.



ב. נתון: $n>5$.

התאימו לכל גרף מבין גרפים I-II

את הפונקציה המתאימה.

www.bagrut.co.il

5) לפניכם רשימת היגדים המתאימים לפונקציית החזקה: $f(x)=x^n$.

עבור כל היגד, רשמו האם הוא מתאים לפונקציית חזקה עם מעריך זוגי (n זוגי) או לפונקציית חזקה עם מעריך אי-זוגי (n אי-זוגי).

א. הפונקציה עולה לכל x.

ב. לגרף הפונקציה יש נקודת פיתול.

ג. גרף הפונקציה עובר בנקודה $(-1,1)$.

ד. גרף הפונקציה עובר בנקודה $(0,0)$.

ה. גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה-y.

ו. תחום החיוביות של הפונקציה $x>0$.

ז. גרף הפונקציה סימטרי ביחס לראשית הצירים.

ח. הפונקציה יורדת כאשר $x<0$.

ט. לגרף הפונקציה יש נקודת מינימום.

6) נתונים היגדים המתייחסים לפונקציה מהמשפחה: $f(x)=a\cdot x^n$.

עבור כל אחד מההיגדים הציעו דוגמה לפונקציה מתאימה במידת האפשר.

א. הפונקציה עולה לכל x.

ב. כאשר $x\to\infty$ וגם כאשר $x\to-\infty$ מתקיים: $f(x)\to-\infty$.

ג. הפונקציה עוברת ברביעים השני והרביעי בלבד.

ד. הפונקציה היא אי-שלילית לכל x.

ה. כאשר $x\to\infty$ מתקיים: $f(x)\to-\infty$ וכאשר $x\to-\infty$ מתקיים: $f(x)\to\infty$.

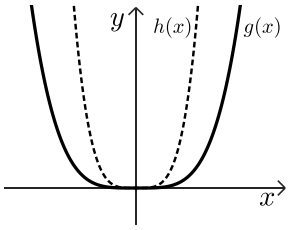
ו. הפונקציה עוברת ברביעים השלישי והרביעי בלבד.

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים מופיעים הגרפים של שתי פונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$.

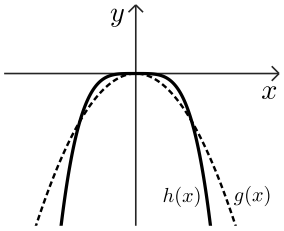
שתי הפונקציות הן ממשפחת הפונקציות: $f(x)=a\cdot x^n$.

הציעו ביטוי אלגברי מתאים לכל אחת מן הפונקציות בכל מקרה.

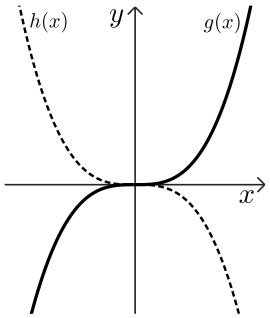
א.



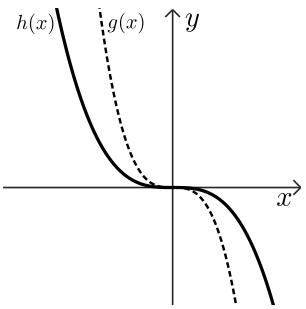
ב.



ג.



ד.



תשובות סופיות:

1) א. גרף 1 - $f(x)$, גרף 2 - $g(x)$, גרף 3 - $h(x)$.

ב. (1) $h(-1)=f(1)$

(2) $h(-0.1)>f(-0.1)<g(-0.1)$

(3) $h(1)=f(1)=g(1)$

(4) $h(2)<f(2)>g(2)$

(5) $h(0)=f(0)=g(0)$

2) א. (1) נכונה א. (2) לא נכונה א. (3) לא נכון א. (4) נכונה.

ב. גרף 1 - $h(x)$, גרף 2 - $f(x)$.

3) א. גרף A - $f(x)$, גרף B - $h(x)$, גרף C - $g(x)$, גרף D - $k(x)$.

ב. (1) $k(-0.1)>h(-0.1)>f(-0.1)<g(-0.1)$

(2) $k(0.1)<h(0.1)<f(0.1)>g(0.1)$

(3) $k(2)>h(2)>f(2)<g(2)$

(4) $k(0)=h(0)=f(0)=g(0)$

(5) $|h(5)|=|h(-5)|$

4) א. (1) לא נכונה א. (2) נכונה א. (3) לא נכונה א. (4) לא נכונה.

א. (5) לא נכונה ב. גרף 1 - $f(x)$, גרף 2 - $h(x)$.

5) א. אי זוגי ב. אי זוגי ג. זוגי ד. זוגי וגם אי זוגי ה. זוגי.

ו. אי זוגי ז. אי זוגי ח. זוגי ט. זוגי.

6) א. $f(x)=x^3, f(x)=2x^3, f(x)=10x^5$ ב. $f(x)=-x^2, f(x)=-8x^4$

ג. $f(x)=-x^3, f(x)=-\frac{1}{2}x^7$ ד. $f(x)=x^2, f(x)=3x^{30}$

ה. אותן פונקציות כמו בסעיף ג' ו. אותן פונקציות כמו בסעיף ב'.

7) א. $g(x)=4x^4, h(x)=8x^4$ ב. $g(x)=-7x^2, h(x)=-7x^4$

ג. $g(x)=2x^3, h(x)=-2x^3$ ד. $g(x)=-10x^3, h(x)=-6x^3$

שאלון 571

פונקציה זוגית ואי-זוגית

תוכן העניינים:

פונקציה זוגית ואי-זוגית: 158

סיכום כללי: 158

שאלות: 158

תשובות סופיות: 161

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

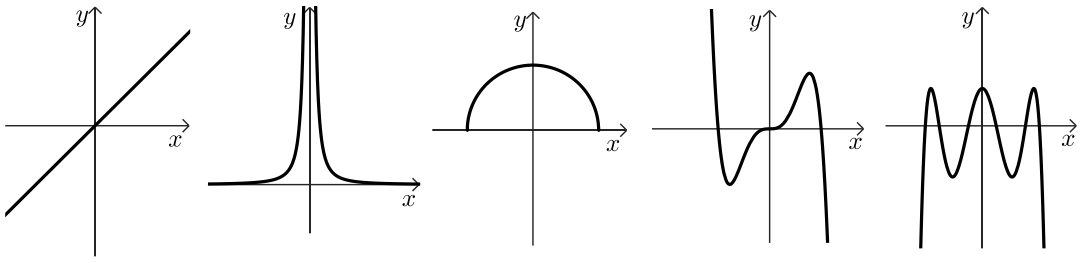
סיכום כללי:

הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

שאלות:

1) לפניכם סרטוטים של פונקציות זוגיות ופונקציות אי-זוגיות.
על סמך הסרטוטים קבעו אילו מהפונקציות הבאות הן זוגיות ואילו הן אי-זוגיות.



(5) (4) (3) (2) (1)

2) השלימו את הטבלה שלפניכם אם ידוע כי $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	14			-5	

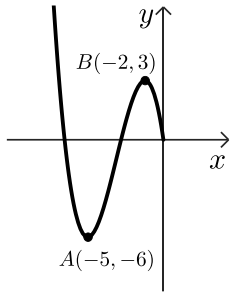
3) נתונה פונקציה זוגית $f(x)$ המקיימת:

- $f(6)=6$.
- $f(-3)=-4$.
- הפונקציה עוברת בראשית הצירים.

היעזרו בנתונים והשלימו את כל הערכים בטבלה הבאה:

x	-9	-6		0		6	9
$f(x)$	52		-4		-4		

4) לפניכם סרטוט גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x\le 0$.



$f(x)$ מוגדרת לכל x והיא פונקציה אי-זוגית.

הנקודות A ו-B המופיעות בסרטוט הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

השלימו את החסר בסעיפים הבאים:

א. שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$ הן: _____ ו-_____.

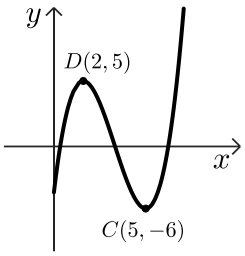
ב. שיעורי נקודות המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הן: _____ ו-_____.

ג. הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום: _____.

ד. הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום: _____.

ה. הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x ב: ____ נקודות.

5) לפניכם סרטוט גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x\ge 0$.



$f(x)$ מוגדרת לכל x והיא פונקציה זוגית.

נקודות C ו-D המופיעות בסרטוט הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

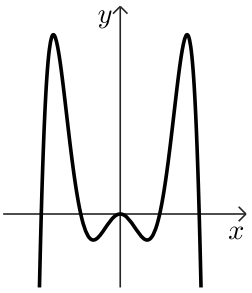
קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה, נמקו קביעתכם.

א. לפונקציה $f(x)$ שלוש נקודות מינימום.

ב. הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה-x ב-4 נקודות.

ג. הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום: $-5\le x\le 2$.

6) לפניכם גרף הפונקציה $g(x)$.

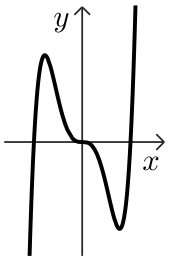


א. בהסתמך על האיור, קבעו האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית.

ב. הנקודות $(2,0)$, $(0.5,-1)$, $(-1.5,6)$ נמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$.

רשמו שיעורי 3 נקודות נוספות הנמצאות על גרף הפונקציה.

7) לפניכם גרף הפונקציה $h(x)$.

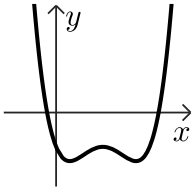


א. האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית?

ב. הנקודות $(-2,0)$, $(1,-1)$, $(1.5,-2.5)$ נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

רשמו שיעורי 3 נקודות נוספות הנמצאות על גרף הפונקציה.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=5(x-1)^4-5(x-1)^2-3$.



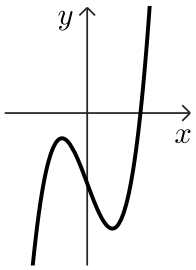
א. האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=f(x+a)$.

האם קיים ערך של a עבורו הפונקציה $g(x)$ תהיה זוגית?

אם כן מהו? נמקו תשובתכם.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=5x^3-5x-3$.



א. האם הפונקציה זוגית, אי זוגית או לא זוגית ולא אי זוגית?

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=f(x)+a$.

האם קיים ערך של a עבורו הפונקציה $g(x)$ תהיה זוגית או אי-זוגית?

אם כן מהו? נמקו תשובתכם.

10) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הסכום של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ב. המכפלה של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. המכפלה של שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. המכפלה של פונקציה אי-זוגיות ופונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

11) קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

א. פונקציה קבועה היא תמיד פונקציה זוגית.

ב. אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל x, אז בהכרח $f(0)=0$.

ג. פונקציה העולה בכל תחום הגדרתה יכולה להיות פונקציה זוגית.

ד. אם $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית המוגדרת לכל x, אז יתכן כי $f(0)=1$.

ה. אם לפונקציה אי-זוגית יש נקודת מינימום ב- $x=3$, אז יש לה נקודת מקסימום ב- $x=-3$.

תשובות סופיות:

1) גרף 1 - פונקציה זוגית, גרף 3 - פונקציה זוגית, גרף 2 - פונקציה אי זוגית, גרף 4 - פונקציה זוגית, גרף 5 - פונקציה אי זוגית.

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	14	**5**	**0**	-5	**-14**

2)

3)

x	-9	-6	**-3**	0	**3**	6	9
$f(x)$	52	**6**	-4	**0**	-4	**6**	**52**

4) א. $A(-5,-6)$ ו- $(2,-3)$ ב. $B(-2,3)$ ו- $(5,6)$ ג. $-5<x<-2\ ,\ 2<x<5$.

ד. $x<-5\ ,\ -2<x<2\ ,\ x>5$ ה. 5.

5) א. נכונה ב. לא נכונה ג. לא נכונה.

6) א. זוגית ב. $(1.5,6)\ ,\ (-0.5,-1)\ ,\ (-2,0)$.

7) א. אי זוגית ב. $(-1.5,2.5)\ ,\ (-1,1)\ ,\ (2,0)$.

8) א. לא זוגית ולא אי זוגית ב. כן, $a=1$.

9) א. לא זוגית ולא אי זוגית ב. כן, $a=3$.

10) ראו פתרון בסרטון הוידאו.

11) א. נכונה ב. לא נכונה ג. לא נכונה ד. לא נכונה ה. נכונה.

שאלון 571

פעולות על פונקציות

תוכן עניינים:

הזזה אנכית: 164
סיכום כללי: 164
שאלות: 164
תשובות סופיות: 166
מתיחה וכיווץ אנכיים: 167
סיכום כללי: 167
שאלות: 167
תשובות סופיות: 168
הזזה אופקית: 169
סיכום כללי: 169
שאלות: 169
תשובות סופיות: 170
מתיחה וכיווץ אופקיים: 171
סיכום כללי: 171
שאלות: 171
תשובות סופיות: 172
שיקופים של פונקציה ביחס לצירים: 173
סיכום כללי: 173
שאלות: 174
תשובות סופיות: 175
פונקציה בריבוע: 176
סיכום כללי: 176
שאלות: 177
תשובות סופיות: 181

ערך מוחלט של פונקציה: 183
סיכום כללי:..... 183
שאלות:..... 185
תשובות סופיות: 189

הזזה אנכית:

סיכום כללי:

בהינתן פונקציה $y=f(x)$, כל הנקודות שעל גרף הפונקציה: $g(x)=f(x)+k$ מתקבלת ע"י הוספת קבוע k לערך ה- y. במילים אחרות, אם נקודה (x_0,y_0) נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ אז הנקודה (x_0,y_0+k) תִּמָּצֵא על גרף הפונקציה $g(x)$.
הוספת קבוע מעלה ומורידה את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- k יחידות.

שאלות:

1) סרטטו במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה: $f(x)=x^2$
ואת הגרף: $y=f(x)+k$ עבור: $k=1$ ו- $k=-4$.

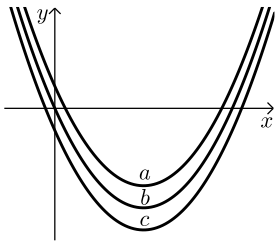
2) נתונה הפונקציה: $f(x)=-2x^2$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+b$

א. מהו ערך הפרמטר b עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יעבור בנקודה $(2,10)$?

ב. מצאו את ערך הפרמטר b עבורו $g(x)$ תקבל ערך מקסימלי של 4.

ג. מצאו את ערך הפרמטר b עבורו $g(x)$ תקבל ערך מקסימלי של -3.

3) לפניכם שלוש גרפים של פונקציות:
$h(x)=x^2-6x+2$, $g(x)=x^2-6x-2$, $f(x)=x^2-6x$.
התאימו כל גרף מבין הגרפים a, b ו- c לכל פונקציה:



4) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x$.
מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+A$
כאשר A הוא פרמטר השונה מאפס.

א. הביעו באמצעות A את הפונקציה $g(x)$.

ב. מהו A עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יהיה נמוך משל $f(x)$ ב-5 יחידות?

ג. מהו A עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יחתוך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=3$?

5) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\frac{3-2x}{x}$ ו- $g(x)=\frac{3}{x}$.

א. הראו כי גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$ לכל ערך של x וחשב בכמה יחידות $f(x)$ מתחת ל-$g(x)$.

ב. כתבו פונקציה שערכיה יהיו גדולים משל $g(x)$ ב-4 יחידות לכל x.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+B$, $B\neq 0$.

א. מהן האסימפטוטות האופקיות של $f(x)$ ושל $g(x)$?

ב. סרטטו במערכת צירים אחת באופן איכותי את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ עבור $B>0$.

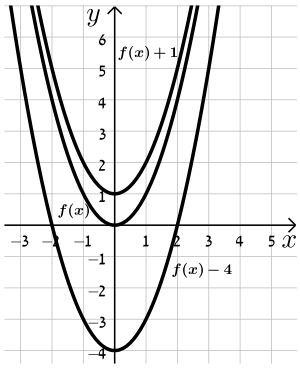
ג. האם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-x עבור $B>0$?
נמקו אלגברית וגרפית (היעזרו בסעיף הקודם).

ד. מצאו את B עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יחתוך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=2$ וקבע איזה גרף מבין השנים יהיה מעל השני ובכמה יחידות.

7) הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+b$, (b פרמטר) חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=9$.
מצאו בכמה יחידות היא נמוכה מהפונקציה: $g(x)=\sqrt{x}$.

תשובות סופיות:

1) להלן סקיצה:



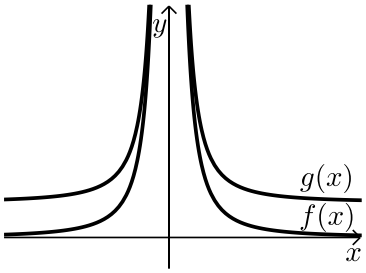
2) א. $b=18$ ב. $b=4$ ג. $b=-3$.

3) התאמה: $h(x)\to a$, $g(x)\to c$, $f(x)\to b$.

4) א. $g(x)=x^3-4x+A$ ב. $A=-5$ ג. $A=3$.

5) א. הוכחה. ב. $h(x)=\dfrac{3+4x}{x}$.

6) א. $f(x)\to y=0$, $g(x)\to y=B$ ב. להלן סקיצה:



ג. לא.

ד. $B=-\dfrac{1}{2}$. $f(x)$ נמצאת מעל $g(x)$ ב-$\dfrac{1}{2}$ יחידה.

7) 3 יחידות.

מתיחה וכיווץ אנכיים:

סיכום כללי:

בהינתן פונקציה $y=f(x)$ ועליה נקודה כללית (x_0,y_0), הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$ מתקבלת ע"י הכפלת $f(x)$ בקבוע k $(k\neq 0)$. נקודה על $g(x)$ תהיה מהצורה: $(x_0,k\cdot y_0)$.

הכפלת פונקציה בקבוע חיובי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית.
הכפלת פונקציה בקבוע שלילי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית והופכת אותו ביחס לציר ה- x.

שאלות:

8) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$, $h(x)=4x^2$.

9) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$, $h(x)=\frac{1}{4}x^2$.

10) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$, $g(x)=-2x^2$, $h(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

11) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=8-x^3$.

א. מגדירים פונקציה חדשה: $g_1(x)=m\cdot f(x)$, $m>1$.
סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g_1(x)$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה: $g_2(x)=m\cdot f(x)$, $0<m<1$.
סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g_2(x)$.

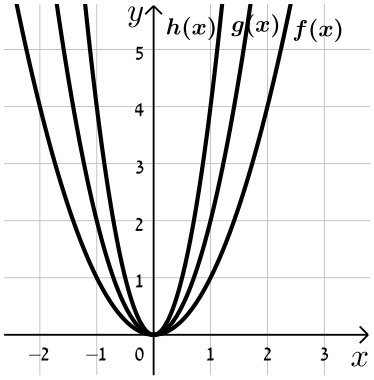
ג. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y,
ב- B_1 את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g_1(x)$ עם ציר ה- y
וב- B_2 את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g_2(x)$ עם ציר ה- y.

(1) מצאו את ערך הפרמטר m עבור סעיף א' שמקיים: $y_{B_1}-y_A=24$.

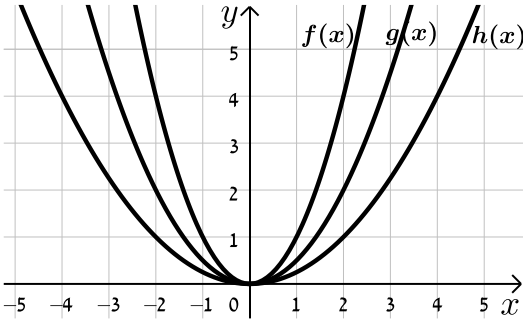
(2) מצאו את ערך הפרמטר m עבור סעיף ב' שמקיים: $y_A-y_{B_2}=4$.

תשובות סופיות:

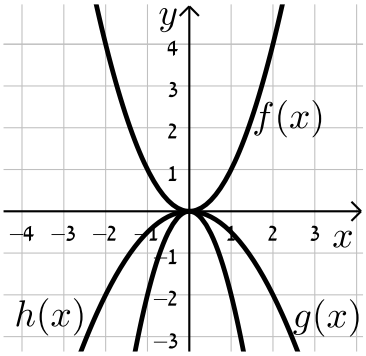
8) להלן סרטוט:



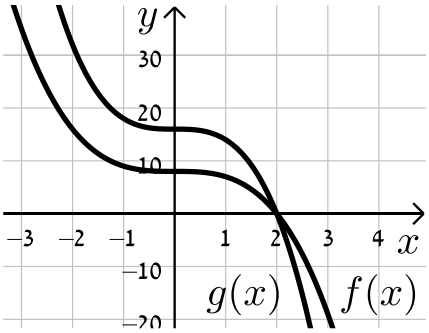
9) להלן סרטוט:



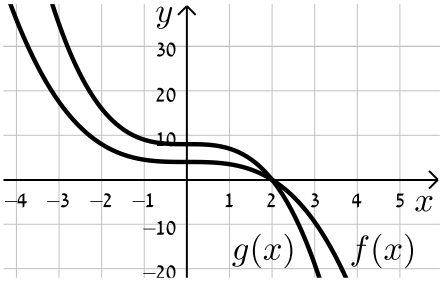
10) להלן סרטוט:



11) א. להלן סרטוט:



ב. להלן סרטוט:



ג. (1). $m=4$ ג. (2). $k=\frac{1}{2}$.

הזזה אופקית:

סיכום כללי:

כדי להזיז פונקציה $y=f(x)$, k יחידות ימינה נציב: $g(x)=f(x-k)$
וכדי להזיז אותה שמאלה ב- k יחידות נציב: $g(x)=f(x+k)$.

שאלות:

12) לפניכם הפונקציה: $f(x)=x^2$.

סרטטו במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)$ ואת הגרפים של הפונקציות: $g(x)=f(x-2)$ ו- $h(x)=f(x+3)$.

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2$.

א. כתבו ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$
3 יחידות ימינה ו-4 יחידות למעלה.

ב. כתבו ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$
4 יחידות שמאלה ו-2 יחידות למטה.

ג. כתבו ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$
$\frac{1}{2}$ יחידה שמאלה ולמעלה.

14) נתונה פונקציה $f(x)=x^2$. מזיזים את הפונקציה ומקבלים: $g(x)=f(x+a)+b$
כאשר a ו- b הם פרמטרים השונים מאפס.

א. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי: $g(x)=x^2+2x$.

ב. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי: $g(x)=x^2-4x+7$.

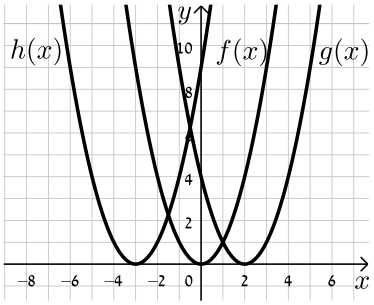
15) מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ 5 יחידות ימינה כך שמתקבלת הפונקציה $g(x)$.

א. כתבו באופן מפורש את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו בכמה יחידות יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$
<u>שמאלה</u> על מנת שיחתוך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=1$.

תשובות סופיות:

12) להלן סרטוט:



13) א. $g(x)=x^2-6x+13$ ב. $g(x)=x^2+8x+14$ ג. $g(x)=x^2+x+\frac{3}{4}$.

14) א. $a=1\,,\,b=-1$ ב. $a=-2\,,\,b=3$.

15) א. $g(x)=\sqrt{x-5}$ ב. 1.

מתיחה וכיווץ אופקיים:

סיכום כללי:

כדי לכווץ פונקציה כלשהי $y=f(x)$ פי k (מניחים $k>1$) נציב: $g(x)=f(k\cdot x)$.
כדי להרחיב פונקציה כלשהי $y=f(x)$ פי k (מניחים $k>1$) נציב: $g(x)=f(x/k)$.

שאלות:

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2$. כתבו באופן מפורש וסרטטו במערכת צירים אחת את הפונקציות הבאות: $g(x)=f(2x)$, $h(x)=f(x/2)$.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=6x-2x^2$. כתבו באופן מפורש וסרטטו במערכת צירים אחת את הפונקציות הבאות: $g(x)=f(2x)$, $h(x)=f(x/4)$.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=12x-3x^3$. רוצים לכווץ את הפונקציה כך שנקודת החיתוך החיובית שלה עם ציר ה- x תקטן פי 4. כתבו פונקציה מפושטת המתארת את הכיווץ הנ"ל.

19) הפונקציה: $f(x)=\frac{x^4-8x}{16}$ חותכת את ציר ה- x בחלקו החיובי בנקודה A.
מצאו כיווץ של הפונקציה כך ששיעורי הנקודה A יהיו $(1,0)$.

20) נתונה הפונקציה: $f(x)=6x-x^2$. רוצים לכווץ אותה פי k כך שנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה ראשית הצירים תקטן פי 3. נסמן את הפונקציה המכווצת ב- g.

א. מצאו את ערכו של הפרמטר k.
ב. כתבו את הפונקציה המכווצת $g(x)$ בצורה מפורשת.
ג. סרטטו את הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ באותה מערכת צירים.
ד. הראו כיצד משתנה נקודת הקיצון במקרה זה.

תשובות סופיות:

16) $g(x)=4x^2$, $h(x)=\frac{x^2}{4}$.

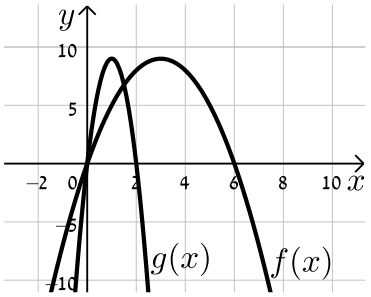
17) $g(x)=12x-8x^2$, $h(x)=1\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}$.

18) $f(4x)=48x-192x^3$.

19) $f(2x)=x^4-x$.

20) א. $k=3$ ב. $g(x)=18x-9x^2$.

ג. להלן סרטוט:



ד. ערך ה- x של נקודת הקיצון מתכווץ פי 3 (במקום $\max(3,9)$ הופך ל- $\max(1,9)$).

שיקופים של פונקציה ביחס לצירים:

סיכום כללי:

שיקוף ביחס ציר y:

כדי לשקף את גרף הפונקציה $y=f(x)$ סביב ציר ה- y נכפיל את ערך ה- x פי 1-.
הגרפים של הפונקציות $y_1=f(x)$ ו- $y_2=f(-x)$ מהווים שיקוף זה לזה ביחס לציר ה- y.

שיקוף ביחס ציר x:

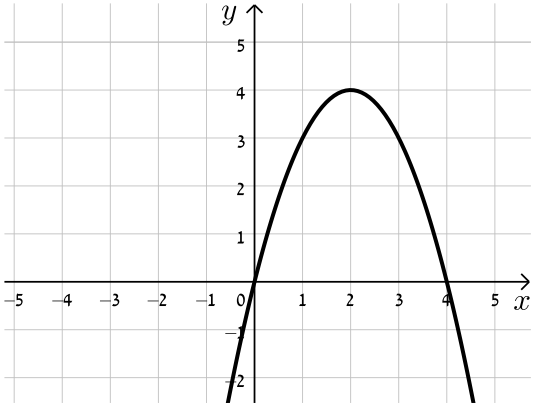
כדי לשקף את גרף הפונקציה $y=f(x)$ סביב ציר ה- x נכפיל את ערך הפונקציה פי 1-.
הגרפים של הפונקציות $y_1=f(x)$ ו- $y_2=-f(x)$ מהווים שיקוף זה לזה ביחס לציר ה- x.

שאלות:

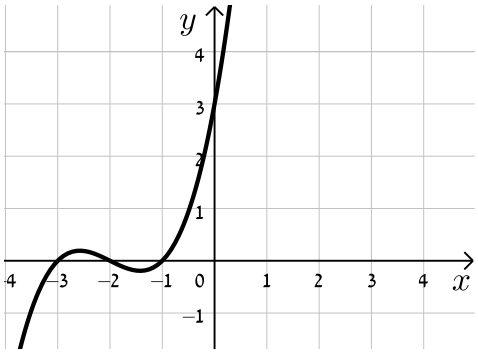
21) סרטטו במערכת צירים אחת את הפונקציות: $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=f(-x)$
והראו כי ציר ה- y מהווה את ציר הסימטריה בין הגרפים.

22) לפניכם סרטוטים של פונקציות שונות.
הוסיפו לכל מערכת צירים גרף משוקף ביחס לציר ה- y.

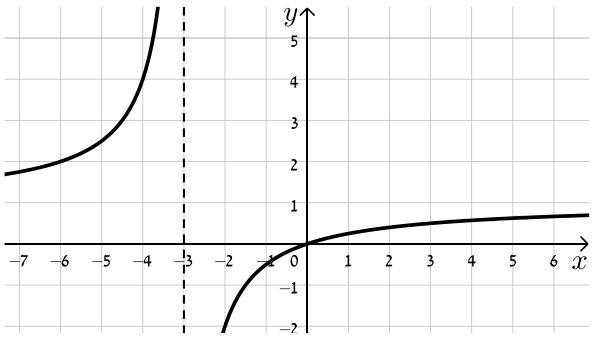
א.



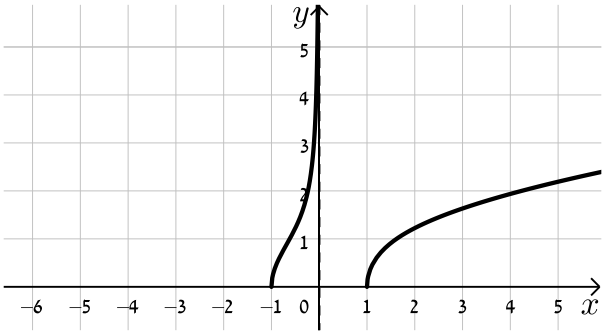
ב.



ג.



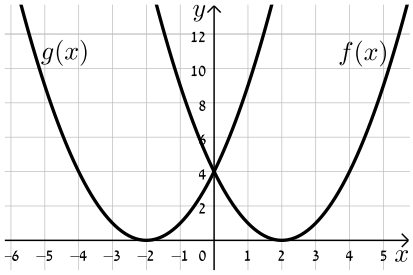
ד.



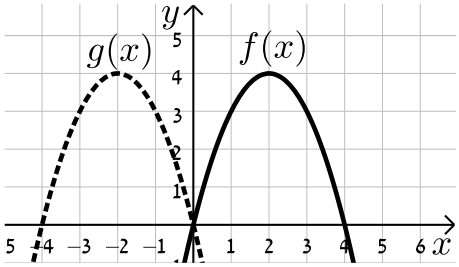
23) הראו כי הפונקציה $f(x)=x^4+\sqrt{x^2+1}$ זהה לפונקציה $g(x)=f(-x)$ והסבירו מה ניתן לומר על הגרפים של הפונקציות הללו ועל הסימטריה שלהן זו לזו ביחס לציר ה- y.

תשובות סופיות:

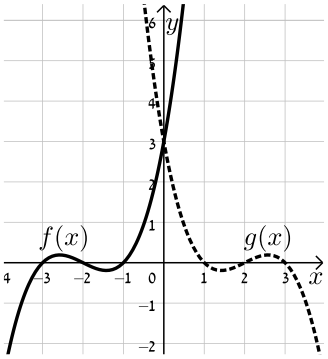
21)



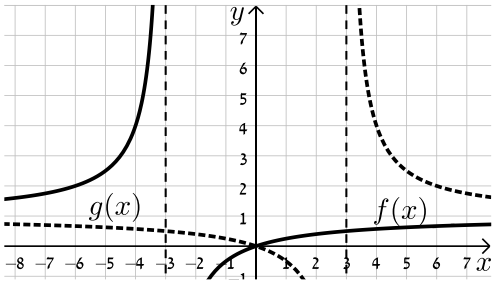
22) סעיף א



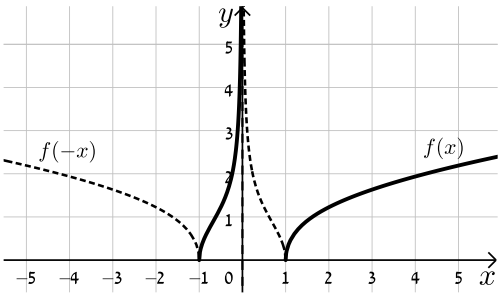
22) סעיף ב



22) סעיף ג



22) סעיף ד



23) הפונקציות זהות. עבור שתיהן ציר ה- y מהווה ציר סימטריה.

פונקציה בריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה:

נתונה פונקציה $f(x)$ ומגדירים: $g(x)=(f(x))^2$. עבור $g(x)$:

- תחומי החיוביות של $f(x)$ יישארו חיוביים עבור $g(x)$.
- תחומי השליליות של $f(x)$ יהפכו לחיוביים עבור $g(x)$.
- כל נקודה (x,y) שעל $f(x)$ תהפוך ל-(x,y^2).

תובנות:

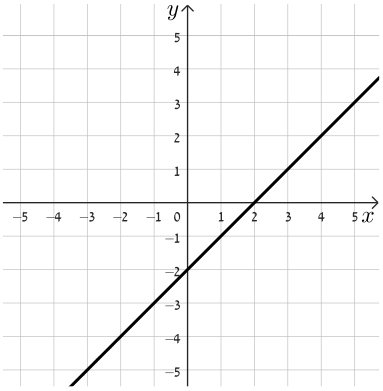
- נקודות שבהן $y=0$ או $y=1$ לא תשתננה.
- בנקודות שבהן $y>1$, ערך ה- y יגדל.
- בנקודות שבהן $0<y<1$, ערך ה- y יקטן.

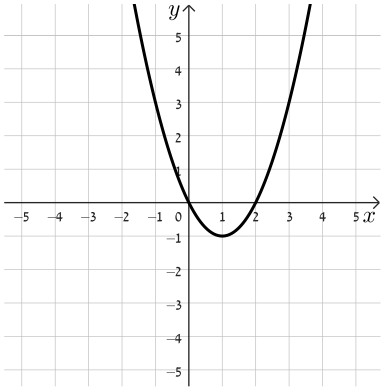
שאלות:

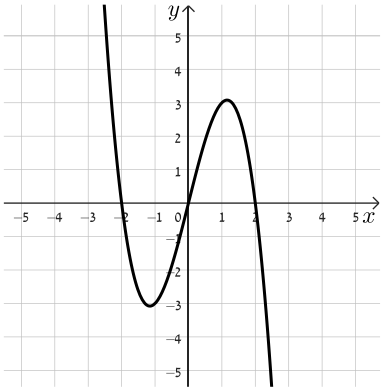
1) בכל אחד מן הסעיפים הבאים נתונה פונקציה $f(x)$.

יש לסרטט באותה מערכת הצירים את הפונקציה $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

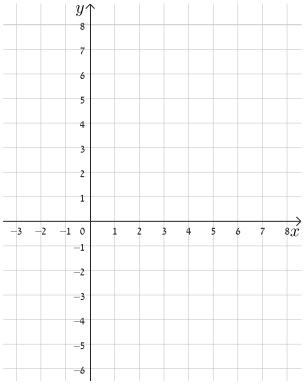
א. $f(x)=x-2$ ב. $f(x)=x^2-2x$ ג. $f(x)=4x-x^3$







2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x-4$.



א. סרטטו במערכת הצירים הבאה את גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מה היא נקודת האפס של הפונקציה $f(x)$?

(2) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

ג. מגדירים פונקציה: $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

(1) כתבו בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

(2) הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$?

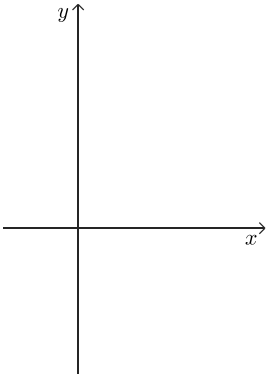
(4) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?

ד.* האם ניתן להסיק כי כאשר פונקציה $f(x)$ היא שלילית בתחום מסוים

אז בהכרח הפונקציה $g(x)$ שמוגדרת: $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ תרד בתחום זה?

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x-x^2$.

מגדירים פונקציה: $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.



א. (1) מה הן נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$?

(2) מה היא נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$? מה סוגה?

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ במערכת הצירים הבאה.

ב. (1) מה הן נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$? מה סוגן?

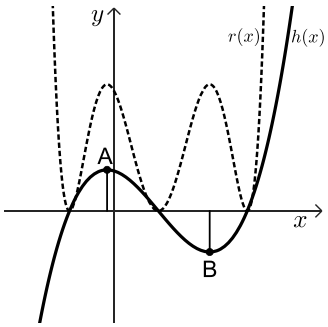
(3) הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הראו כי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ נחתכים בנקודות האפס ובנקודת הקיצון בלבד.

ד. כתבו את התחום בו: $f(x)>g(x)$.

4) באיור שלפניכם מופיעות שתי פונקציות: $h(x)$ (קו רציף) ו-$r(x)$ (קו מקווקו).

ידוע כי פונקציה אחת היא הריבוע של הפונקציה השנייה.



א. קבעו מי מבין הפונקציות $h(x)$ ו-$r(x)$ היא ריבוע של השנייה.

נקודות הקיצון של הפונקציה המתוארת ע"י קו רציף מסומנות ב-A וב-B.

כמו כן, ידוע כי הפונקציה הרציפה חותכת את ציר ה-x בנקודות שבהן: $x=3$, $x=1$, $x=-1$.

שיעור ה-x של הנקודה A, x_A, נמצא בין $x=-1$ ל-$x=1$,

ושיעור ה-x של הנקודה B, x_B, נמצא בין $x=1$ ל-$x=3$.

הוסיפו את נקודות החיתוך לסרטוט וענו על הסעיפים הבאים:

ב. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה עם העקום המתואר ע"י קו רציף?

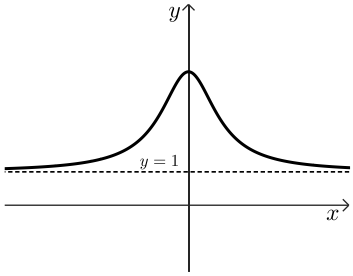
(2) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה עם העקום המתואר ע"י קו מקווקו?

ג. על סמך ממצאיכם מהסעיף הקודם האם נכון לומר כי תחומי העלייה והירידה של פונקציה בריבוע תמיד יהיו הפוכים מתחומי העלייה והירידה של הפונקציה המקורית? נמקו.

ידוע כי הנקודה A נמצאת על הישר $y=3$ וכי הנקודה B נמצאת על הישר $y=-3$.

ד. מה הוא שיעור ה-y של כל אחת מנקודות הקיצון על גרף הפונקציה המקווקות?

ה. בכמה נקודות יחתוך הישר $y=4$ את גרף הפונקציה המקווקות?



5) באיור שלפניכם נתונה הפונקציה $f(x)$ והישר $y=1$.
לפונקציה $f(x)$ נקודת מקסימום על ציר ה- y שבה $y=4$.
מגדירים את הפונקציה $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

א. התייחסו לכל אחת מן הטענות הבאות וקבעו אם היא נכונה או שגויה.
נמקו את קביעתכם בכל מקרה באמצעות הסבר או חישוב מתאים.

(1) לכל x מתקיים: $g(x)>f(x)$.

(2) הנקודה $(0,4)$ היא נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(3) הפונקציה $g(x)$ לא חותכת את ציר ה- x.

(4) תחומי העלייה והירידה של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הם הפוכים.
כלומר, כאשר $f(x)$ עולה אז $g(x)$ יורדת ולהיפך.

ב. התייחסו לתוצאות ממציאכם מהסעיף הקודם
והוסיפו לסרטוט את גרף הפונקציה $g(x)$.

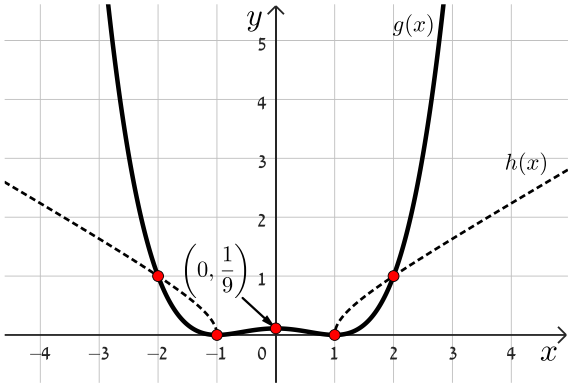
ג. מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $g(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $f(x)$
כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

(1) מהו ערכו המירבי של הקטע AB?

(2)* ידוע כי $f(x)=1+\frac{3}{x^2+1}$.
מצאו את שיעורי הנקודה A הנמצאת ברביע הראשון ומקיימת: $AB=3.75$.

6) נתונה הפונקציה $f(x)$ ולה מגדירים את הפונקציות: $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ ו- $h(x)=\sqrt{f(x)}$.

באיור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$.



א. מה הן נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$?

ב. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? אם כן, מה הן ומה הוא סוגן?

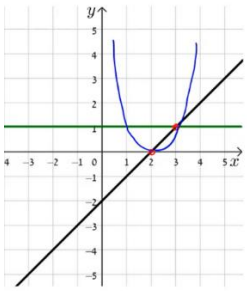
ג. היעזרו בסרטוט וכתבו שתי נקודות, שאינן נקודות האפס,
וגרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרכן.

ד. ידוע כי $f(x)=ax^2+c$, כאשר $a\neq 0$.

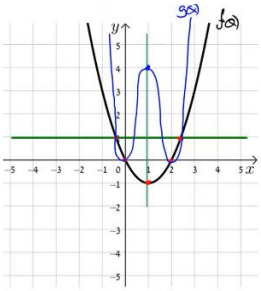
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו-c וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

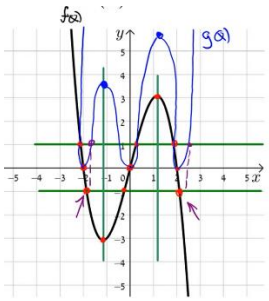
1) א. להלן סרטוט:



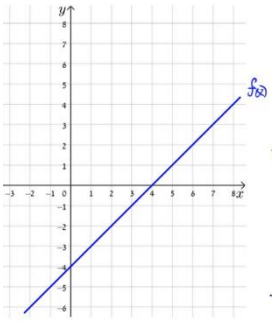
ב. להלן סרטוט:



ג. להלן סרטוט:



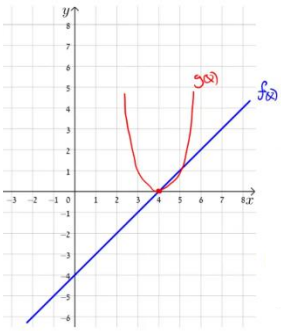
2) א. להלן סרטוט:



ב. (1) $(4,0)$ (2) חיוביות: $x>4$, שליליות: $x<4$.

ג. (1) $g(x)=(x-4)^2$

ג. (2) להלן סרטוט:



ג. (3) חיובית לכל $x\neq 4$.

ג. (4) עולה: $x>4$, יורדת: $x<4$.

ד. לא ניתן.

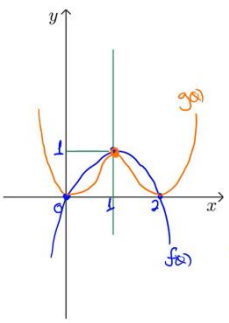
3) א. (1) $(0,0)$, $(2,0)$

א. (2) $\max(1,1)$

ב. (1) $(0,0)$, $(2,0)$

ב. (2) $(0,0)$, $\min:(2,0)$, $\max:(1,1)$

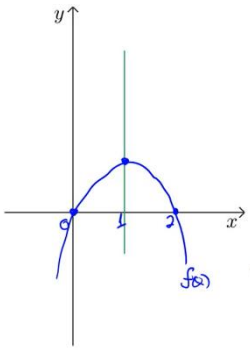
ב. (3) להלן סרטוט:



ג. ראו בסרטון.

ד. $0<x<1$, $1<x<2$

א. (3) להלן סרטוט:

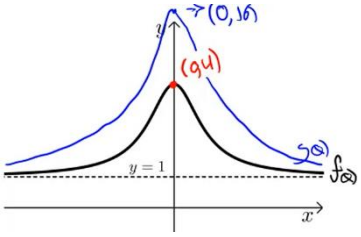


4) א. $r(x)=\left(h(x)\right)^2$ ב. (1) עולה: $x>x_B$, $x<x_A$, יורדת: $x_A<x<x_B$.

ב. (2) עולה: $x>3$, $1<x<x_B$, יורדת: $-1<x<x_A$, $x<-1$, $x_A<x<1$, $x_B<x<3$.

ג. לא נכונה ד. $r(x_B)=9$, $r(x_A)=9$ ה. 6 נקודות.

5) א. נכון: 1,3 לא נכון: 2,4 ב. להלן סרטוט:



ג. (1) $AB=12$ ג. (2) $A(1,6.25)$.

6) א. $(1,0)$, $(-1,0)$ ב. כן, $\min\left(0,-\frac{1}{3}\right)$.

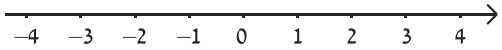
ג. $(2,1)$, $(-2,1)$ ד. $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{3}$.

ערך מוחלט של פונקציה:

סיכום כללי:

ערך מוחלט של מספר:

ערך מוחלט של מספר מתאר את מרחק בציר המספרים מהאפס.
למשל: $|2|=|-2|=2$.



תכונות הערך המוחלט:

- הערך המוחלט הוא גודל אי-שלילי.
- הערך המוחלט של מספרים נגדיים שווה.

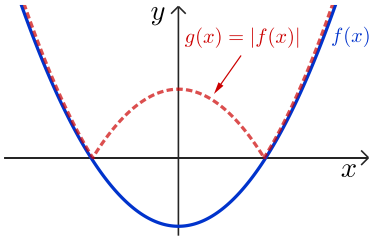
משוואה בערך מוחלט:

מאחר וערך מוחלט נועד לייצג את המרחק של ביטוי מהאפס, נפתור משוואות הכוללות ערך מוחלט מהצורה: $|f(x)|=a$ (כאשר: $a>0$) ע"י המרתן לזוג משוואות: $f(x)=-a$, $f(x)=a$.

סיכום תכונות:

בהינתן פונקציה $f(x)$, נגדיר את פונקציית הערך המוחלט באופן הבא: $g(x)=|f(x)|$.
נקבל את התכונות הבאות:

- פונקציית הערך המוחלט $g(x)=|f(x)|$ היא תמיד אי-שלילית.
- לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)=|f(x)|$ אותן נקודות האפס.
- כאשר: $f(x)\geq 0$:
  - לשתי הפונקציות אותם תחומי עלייה וירידה.
  - לשתי הפונקציות אותן נקודות קיצון (מאותו הסוג).



- כאשר: $f(x)<0$:
  - הפונקציות **סימטריות** זו לזו ביחס לציר ה-x.
    (במילים אחרות: ציר ה-x הוא ציר השיקוף של שתי הפונקציות).
  - לפונקציות תחומי עלייה וירידה הפוכים
    (תחום עלייה של $f(x)$ הוא תחום ירידה של $|f(x)|$ ולהיפך).
  - לפונקציות נקודות קיצון הפוכות
    (נקודת max של $f(x)$ היא נקודת min של $|f(x)|$ והפוך).
- נקודות האפס של $f(x)$ הן נקודות מינימום של $g(x)=|f(x)|$.

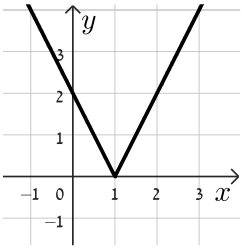
שאלות:

1) לפניכם שלושה גרפים של פונקציות מהצורה: $y=|ax+b|$,
התאימו לכל גרף את הפונקציה המתאימה לו.

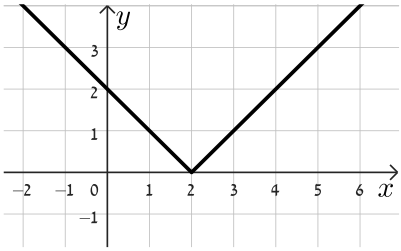
א. $y=|x-2|$

ב. $y=|2x-2|$

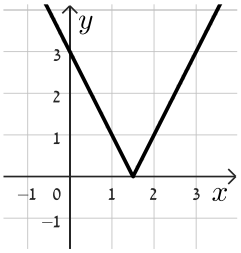
ג. $y=|2x-3|$



(1)



(2)



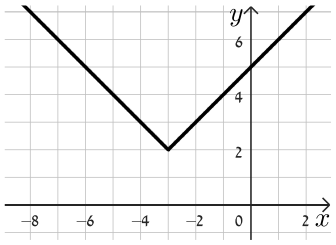
(3)

2) לפניכם שלושה גרפים וארבע פונקציות:

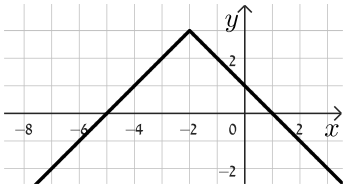
$f(x)=|x-2|+1$, $g(x)=|x+3|+2$, $h(x)=-|x-1|+4$, $k(x)=-|x+2|+3$

א. מצאו איזה גרף מתאים לכל פונקציה ולאיזו פונקציה אין גרף מתאים.

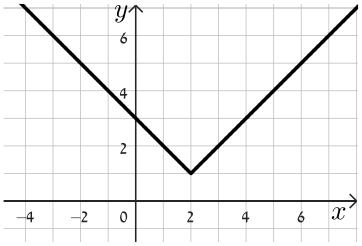
ב. סרטטו את הגרף המתאים לפונקציה החסרה.



(1)

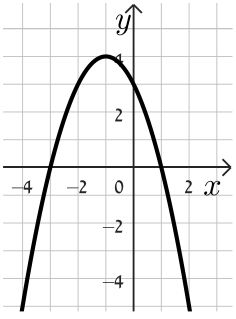


(2)

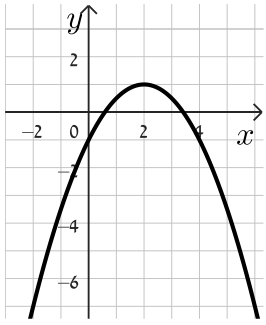


(3)

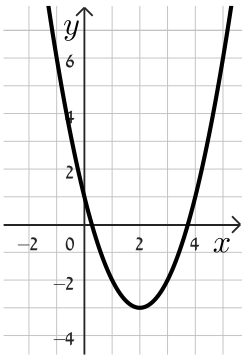
3) סרטטו את הגרפים של פונקציית הערך המוחלט של הפרבולות הבאות:



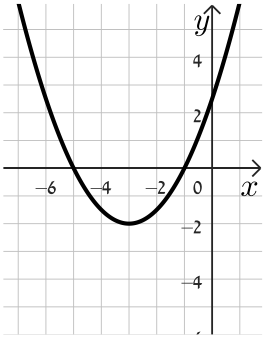
(1)



(2)

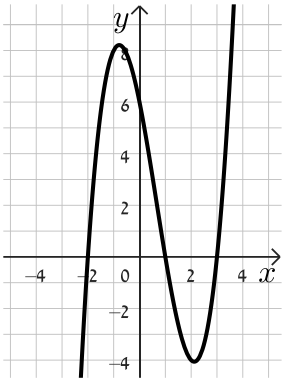


(3)



(4)

4) באיור מופיע גרף הפונקציה $f(x)$ שהיא מוגדרת ורציפה לכל x.



א. לפניכם מספר ייצוגים אלגבריים של פונקציות שונות,
מצאו את הייצוג שמתאים לפונקציה $f(x)$.

(1) $f(x)=x(x-3)(x+2)$

(2) $f(x)=x(x+1)(x-3)$

(3) $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$

(4) $f(x)=x^2(x-3)$

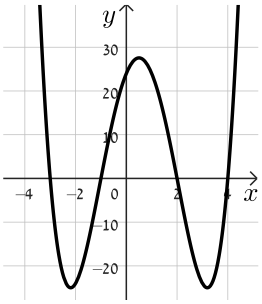
ב. סרטטו גרף אפשרי לפונקציה $g(x)=|f(x)|$.

ג. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$.

ד. מהו תחום החיוביות של הפונקציה $g(x)$?

ה. כמה פתרונות יש למשוואה $g(x)=10$?

5) באיור מופיע גרף הפונקציה $f(x)$ שהיא מוגדרת ורציפה לכל x.



שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:

$\min(-2.2,-25)$, $\max(0.6,27)$, $\min(3.1,-25)$

ונקודות החיתוך שלה עם הצירים הן:

$(-3,0)$, $(-1,0)$, $(2,0)$, $(4,0)$, $(0,24)$

א. יהי $g(x)=|f(x)|$.

(1) סרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

(2) ציינו בגרף את נקודות הקיצון של $g(x)$.

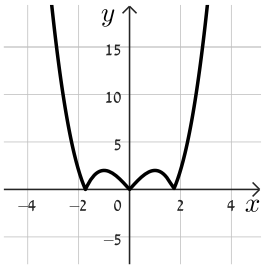
ב. פתרו את אי השוויון: $g(x)>f(x)$.

ג. כמה פתרונות יש למשוואה $g(x)=15$?

(1) 2 פתרונות. (2) 4 פתרונות. (3) 6 פתרונות. (4) 8 פתרונות.

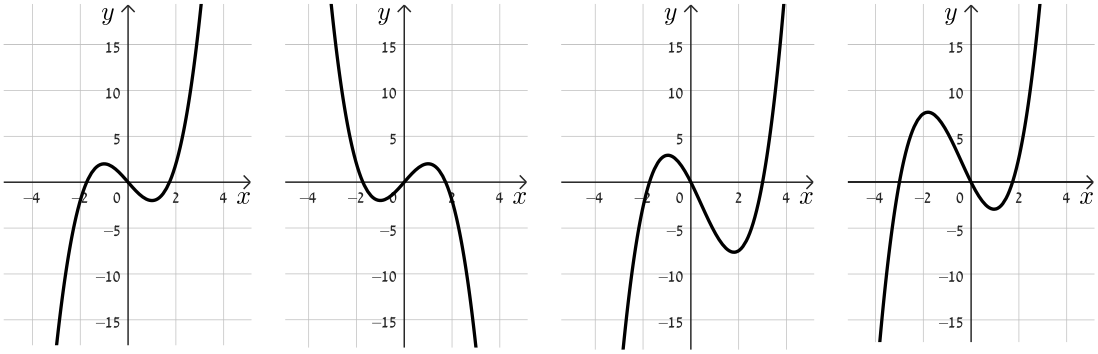
ד. מגדירים פונקציה נוספת: $h(x)=g(x)+c$.

עבור איזה ערך של הקבוע c, הגרף של הפונקציה h יחתוך את ציר ה-x בדיוק 3 פעמים?



6) נתון גרף של פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=|f(x)|$.

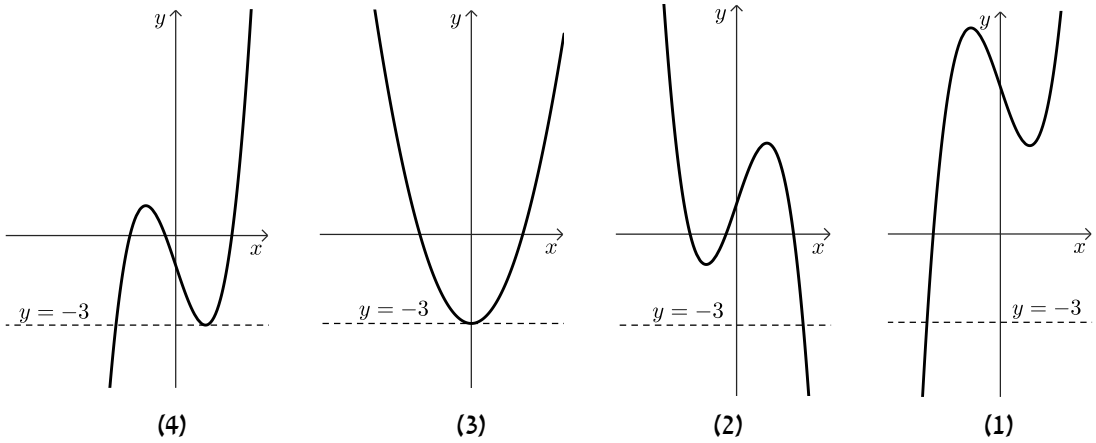
מי מבין הגרפים הבאים יכול להיות הגרף של $f(x)$?



(4) (3) (2) (1)

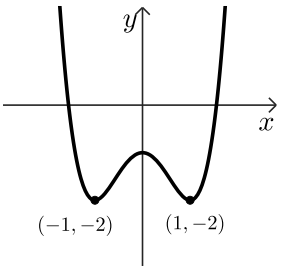
7) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $f(x)+3=|f(x)+3|$ לכל x.

בחרו מבין הגרפים הבאים את הגרף שמתאים לפונקציה $f(x)$.



(4) (3) (2) (1)

8) לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$.



קבעו לאילו מבין הערכים הבאים של a מתקיים:

$$f(x)-a=\left|f(x)-a\right|$$

בחרו את התשובה הנכונה (תיתכן יותר מתשובה נכונה אחת):

$a=5$, $a=3$, $a=-1$, $a=-2$, $a=-3$.

9) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את שיעורי נקודות הקיצון וקבעו את סוגן:

א. $f(x)=\left|x^2+2x-3\right|$

ב. $f(x)=\left|-2x+4\right|$

ג. $f(x)=\left|-x^2-x+2\right|$

ד. $f(x)=\left|-x^2+4\right|$

ה. $f(x)=\left|x^2+1\right|$

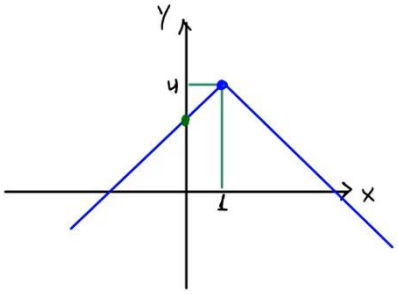
ו. $f(x)=\left|x^2-4\right|+2$

ז. $f(x)=\left|-x^3\right|$

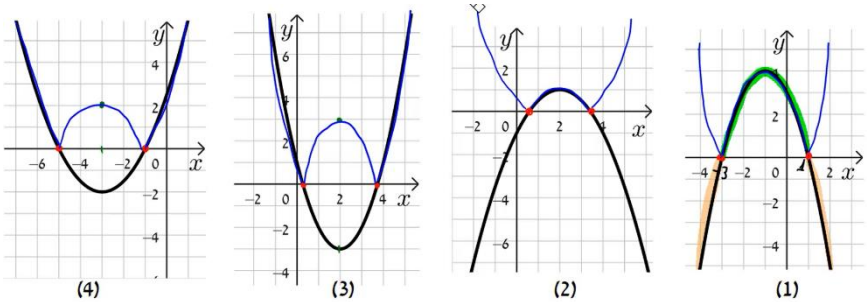
תשובות סופיות:

1) א. גרף 2 ב. גרף 1 ג. גרף 3.

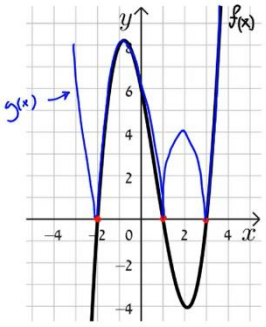
2) א. $f(x)$: גרף 3, $g(x)$: גרף 1, $k(x)$: גרף 3 ב. להלן סרטוט:



3) להלן סרטוטים:



4) א. ייצוג 3 ב. להלן סרטוט:

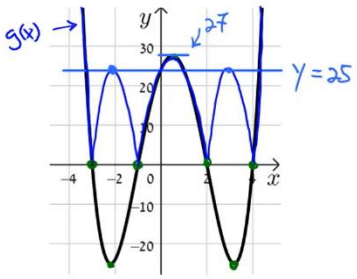


ג. $(3,0)$, $(1,0)$, $(-2,0)$.

ד. $x>3$, $1<x<3$, $-2<x<1$, $x<-2$.

ה. 2 פתרונות.

5) א. להלן סרטוט:



ב. $4>x>2$, $-1>x>-3$.

ג. 8 פתרונות ד. $c=-27$.

6) גרפים 3 או 4.

7) גרף 3.

8) -2 , $a=-3$.

9) א. $\max:(-1,4)$, $\min:(-3,0)$, $(1,0)$.

ב. $\min:(2,0)$ ג. $\max:(-0.5,2.25)$, $\min:(-2,0)$, $(1,0)$.

ד. $\max:(0,4)$, $\min:(-2,0)$, $(2,0)$ ה. $\min:(0,1)$.

ו. $\max:(0,6)$, $\min:(-2,2)$, $(2,2)$ ז. $\min:(0,0)$.

שאלון 571

מבוא לפונקצית הפולינום

תוכן העניינים:

הפולינום: 192
סיכום כללי: 192
שאלות: 193
תשובות סופיות: 194
פירוק פולינום: 195
סיכום כללי: 195
שאלות: 195
תשובות סופיות: 195
נקודות האפס של פולינום: 196
סיכום כללי: 196
שאלות: 196
תשובות סופיות: 197
חיוביות ושליליות של פולינום: 198
סיכום כללי: 198
שאלות: 198
תשובות סופיות: 199
התנהגות באינסוף: 200
סיכום כללי: 200
שאלות: 202
תשובות סופיות: 202
סרטוט גרף פונקצית הפולינום: 203
סיכום כללי: 203
שאלות: 204
תשובות סופיות: 206
תחומי חיוביות ושליליות מתוך גרף הפולינום: 207
סיכום כללי: 207
שאלות: 207
תשובות סופיות: 208

סיכום פונקצית הפולינום: 209
סיכום כללי: 209
שאלות: 210
תשובות סופיות: 212

הפולינום:

סיכום כללי:

פונקציית פולינום ממעלה n מוגדרת כך: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

כאשר $a_n\neq 0$ ו- n מספר טבעי או 0.

x הוא המשתנה של הפולינום.

$a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n$ נקראים מקדמי הפולינום, והם מספרים קבועים.

לשם נוחות ניתן גם לכתוב את פונקציית הפולינום בסדר הפוך:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

n נקרא המעלה של הפולינום.

- **כאשר $n=0$ מתקבל פולינום ממעלה 0.**
  פולינום כזה נקרא גם פונקציה קבועה.
  זו למעשה משוואת קו ישר, המקביל לציר ה- x.
- **כאשר $n=1$ מתקבל פולינום ממעלה ראשונה.**
  פולינום כזה נקרא גם פונקציית קו ישר.
  זו למעשה משוואת קו ישר, שאינו מקביל לציר ה- x.
- **כאשר $n=2$ מתקבל פולינום ממעלה שנייה.**
  פולינום כזה נקרא גם פונקציה ריבועית.
  זוהי פונקציה שהגרף שלה הוא פרבולה.
- **כאשר $n=3$ מתקבל פולינום ממעלה שלישית. וכן הלאה.**
  מקרה מיוחד: הפונקציה $f(x)=0$ היא פולינום ללא מעלה.

שאלות:

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים - סדרו את הפולינום בסדר חזקות יורד וקבעו מה מעלת הפולינום.

א. $f(x)=3x^2-5x^5+2x+7-x^3$

ב. $g(x)=4x+2x^3-1$

ג. $h(x)=x^4-3+2x$

ד. $p(x)=\frac{1}{2}x^3-2x+5x^2-\frac{1}{4}$

ה. $m(x)=\sqrt{3}x^4-2x+\sqrt{2}-x^2$

2) לפניכם רשימה של פולינומים:

א. בחרו מתוך הרשימה את הפולינומים המייצגים קווים ישרים ושרטטו סקיצה מתאימה (אין חובה לשרטט בתוך מערכת צירים)

ב. בחרו מתוך הרשימה את הפולינומים המייצגים פרבולות ושרטטו סקיצה מתאימה (אין חובה לשרטט בתוך מערכת צירים)

(1) $f(x)=x^2-3x^4+5$

(2) $g(x)=4x$

(3) $h(x)=x^3-1+2x$

(4) $p(x)=x^2-5x+6$

(5) $m(x)=-3x+4$

(6) $q(x)=-1$

(7) $n(x)=5x^5+4x^4+3x^3+1$

(8) $r(x)=-x^2+9$

(9) $t(x)=x^6-2x^3-8$

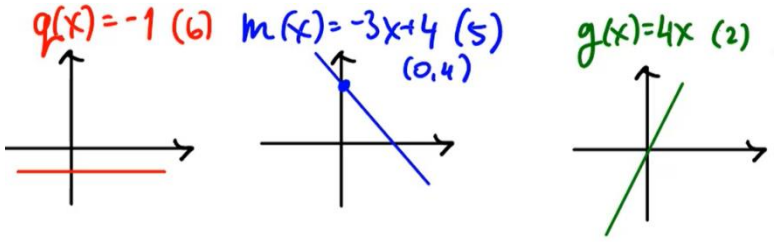
תשובות סופיות:

1) א. $f(x)=-5x^5-x^3+3x^2+2x+7$ ב. $g(x)=2x^3+4x-1$

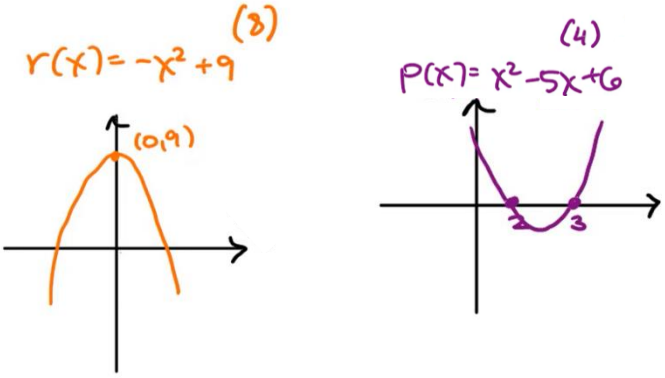
ג. $h(x)=x^4+2x-3$ ד. $p(x)=\frac{1}{2}x^3+5x^2-2x-\frac{1}{4}$

ה. $m(x)=\sqrt{3}x^4-x^2-2x+\sqrt{2}$.

2) א. פונקציות: (2), (5), (6)



ב. פונקציות: (4), (8)



פירוק פולינום:

סיכום כללי:

נוסחאות כפל מקוצר:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

פירוק טרינום:

$$ax^2 + bx + c = a(x-d_1)(x-d_2)$$

שאלות:

3) פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים:

א. $f(x) = 3x^3 - 6x^2$

ב. $g(x) = x^2 - 81$

ג. $h(x) = 5x^2 + 10x + 5$

ד. $p(x) = x^2 - 4x + 3$

ה. $m(x) = 6x^2 + 5x + 1$

ו. $q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

תשובות סופיות:

3) א. $f(x) = 3x^2(x-2)$

ב. $g(x) = (x+9)(x-9)$

ג. $h(x) = 5(x+1)^2$

ד. $p(x) = (x-3)(x-1)$

ה. $m(x) = (2x+1)(3x+1)$

ו. $q(x) = (x-3)(x-1)$

נקודות האפס של פולינום:

סיכום כללי:

המשוואה $f(x)=0$ נקראת משוואת הפולינום $f(x)$.
הפתרונות של המשוואה נקראים נקודות האפס או נקודות האיפוס של הפולינום $f(x)$.
נקודות אלה הן למעשה נקודות החיתוך של **גרף** הפולינום עם ציר ה- x.

שאלות:

4) לפניכם פולינום המפורק לגורמים.
רשמו מתחת לכל אחד מהסוגריים את הריבוי המתאים להם.

$$y=5(x-1)^2(x^2+3)^5(x-4)(x+1)^2$$

5) מצאו את כל נקודות האפס של כל אחד מהפולינומים הבאים:

א. $y=(2x-1)^3(3x^2+1)(x+4)$

ב. $y=(x-2)(3x+5)^2(\sqrt{2}-x)^2$

ג. $y=(x^2+1)(x^2+x+1)$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים, פרקו את הפולינום לגורמים
ומצאו את כל נקודות האפס של הפולינום:

א. $f(x)=-2x^4+5x^3-3x^2$

ב. $g(x)=8x^4-x^2$

ג. $h(x)=x^4-2x^2-8$

7) כל אחד מהפולינומים שלפניכם מוצג בשני אופנים - בסדר חזקות יורד ובאמצעות פירוק לגורמים לינאריים וגורמים ריבועיים שאינם פריקים. עבור כל אחד מהפולינומים:

(1) $f(x)=x^4-2x^3+10x^2-18x+9=(x-1)^2(x^2+9)$

(2) $g(x)=x^5-3x^4+2x^3-6x^2+x-3=(x^2+1)^2(x-3)$

א. קבעו מהי מעלת הפולינום.

ב. סמנו בצבע צהוב את הריבוי של כל אחד מהסוגריים.

ג. סמנו קו אדום מתחת לגורמים שאינם פריקים.

ד. האם ניתן לדעת מה מעלת הפולינום באמצעות התבוננות בפירוק הפולינום לגורמים?

ה. קבעו את מספר נקודות האפס של כל אחד מן הפולינומים.

תשובות סופיות:

4) $(x-1):2\ ,\ (x^2+3):5\ ,\ (x-4):1\ ,\ (x+1):2$

5) א. $(-4,0)\ ,\ \left(\frac{1}{2},0\right)$ ב. $\left(\sqrt{2},0\right)\ ,\ \left(-\frac{5}{3},0\right)\ ,\ (2,0)$ ג. אין נקודות אפס.

6) א. $f(x)=x^2(x-1.5)(x-1)\ ,\ (1,0)\ ,\ (1.5,0)\ ,\ (0,0)$

ב. $g(x)=x^2(8x^2-1)\ ,\ \left(-\sqrt{\frac{1}{8}},0\right)\ ,\ \left(\sqrt{\frac{1}{8}},0\right)\ ,\ (0,0)$

ג. $h(x)=(x^2-4)(x^2+2)\ ,\ (-2,0)\ ,\ (2,0)$

7) (1) א. 4 ב. $(x-1):2\ ,\ (x^2+9):1$ ג. (x^2+9) ד. ניתן לדעת

ה. נקודה אחת.

(2) א. 5 ב. $(x-3):1\ ,\ (x^2+1):2$ ג. (x^2+1) ד. ניתן לדעת

ה. נקודה אחת.

חיוביות ושליליות של פולינום:

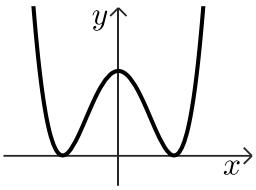
סיכום כללי:

כדי למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של פונקצית פולינום נבצע:

- מציאת נקודות האפס של הפונקציה.
- קביעת סימן הפונקציה בכל תחום שבין שתי נקודות אפס.

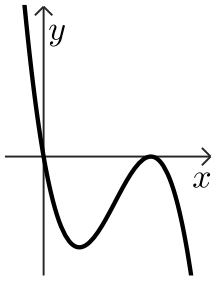
שאלות:

8) לפניכם גרף של פונקצית פולינום הבאה: $f(x)=(x+3)^2(x-3)^2$.



היעזרו בסרטוט וקבעו מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפולינום.

9) לפניכם גרף פונקצית הפולינום הבאה: $f(x)=-x^3+6x^2-9x$.

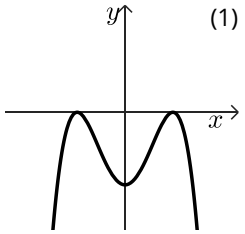


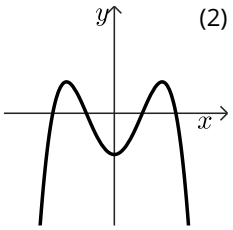
א. פרקו את הפולינום לגורמים.

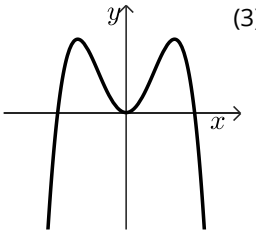
ב. מצאו את נקודות האפס של הפולינום.

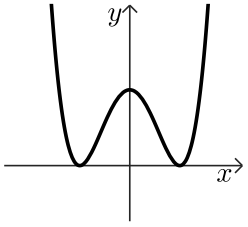
ג. היעזרו בגרף ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפולינום.

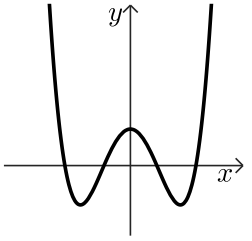
10) לפניכם גרפים של פונקציות פולינום שונות (1)-(6), התאימו בין כל גרף ותחומי החיוביות שלו.

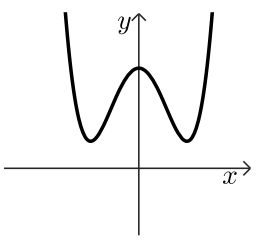
(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


א. כל x.

ב. אף x.

ג. $x \neq 3, x \neq -3$.

ד. $3 > x > 1, -1 > x > -3$.

ה. $3 < x, -1 < x < 1, x < -3$.

ו. $3 > x > 0, 0 > x > -3$.

תשובות סופיות:

8) חיוביות: $3 < x, -3 < x < 3, x < -3$. שליליות: אף x.

9) א. $f(x) = -x(x-3)^2$ ב. $(3,0)$, $(0,0)$.

ג. חיוביות: $x < 0$. שליליות: $3 < x, 0 < x < 3$.

10) (1) אף x (2) $3 > x > 1, -1 > x > -3$ (3) $3 > x > 0, 0 > x > -3$.

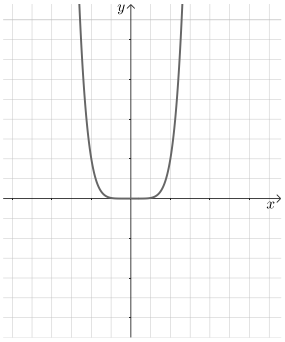
(4) $x \neq 3, x \neq -3$ (5) $3 < x, -1 < x < 1, x < -3$ (6) כל x.

התנהגות באינסוף:

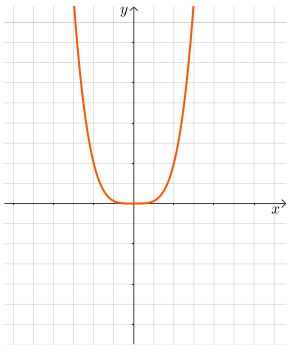
סיכום כללי:

הפונקציה $f(x)=x^n$ כאשר n זוגי:

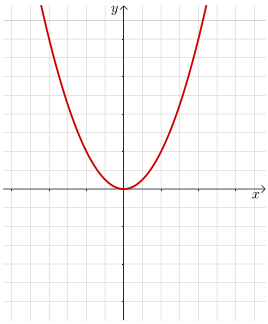
$f(x)=x^6$



$f(x)=x^4$

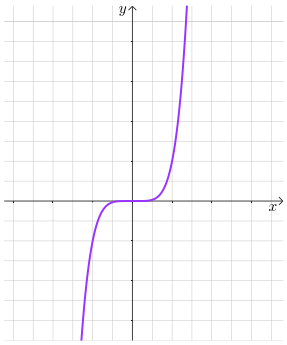


$f(x)=x^2$

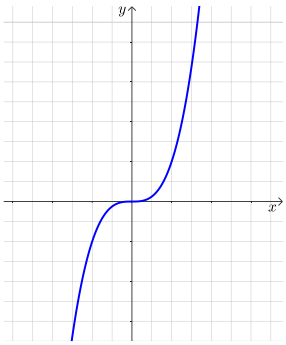


הפונקציה $f(x)=x^n$ כאשר n אי-זוגי:

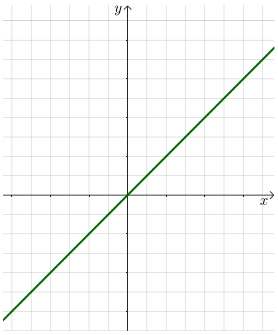
$f(x)=x^5$



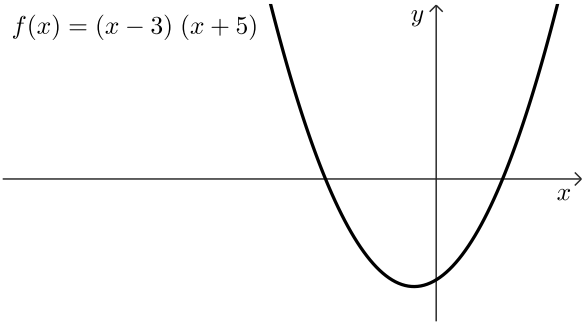
$f(x)=x^3$

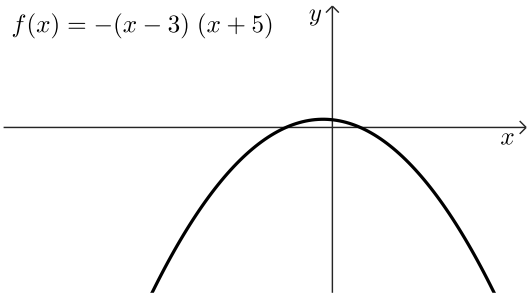


$f(x)=x$

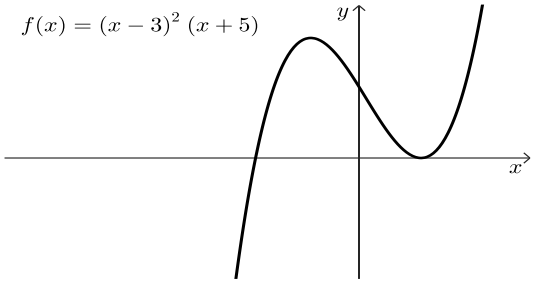


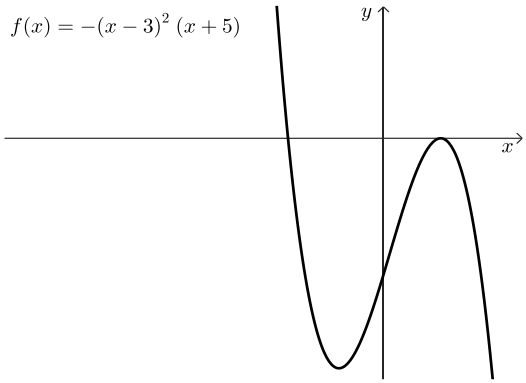
מעלה זוגית





מעלה אי-זוגית





גרף פולינום – התנהגות באינסוף:

- גרף של פולינום **ממעלה זוגית** n, שבו המקדם של x^n חיובי, מתחיל **מלמעלה**, כלומר מאינסוף (רביע II) ומסתיים **למעלה**, כלומר באינסוף (רביע I).
(אם המקדם של x^n שלילי, הגרף יתהפך: יתחיל מלמטה ויסתיים למטה)
- גרף של פולינום **ממעלה אי-זוגית** n, שבו המקדם של x^n חיובי, מתחיל **מלמטה**, כלומר ממינוס אינסוף (רביע III) ומסתיים **למעלה**, כלומר באינסוף (רביע I).
(אם המקדם של x^n שלילי, הגרף יתהפך: יתחיל מלמעלה ויסתיים למטה)

שאלות:

11) לפניכם רשימה של פולינומים:

i. $f(x)=x(x-3)(x+3)$

ii. $f(x)=-(x^2-9)(x^2-4)$

iii. $f(x)=x^2(6-x)^2(8-x)$

iv. $f(x)=x(3x-4)^3$

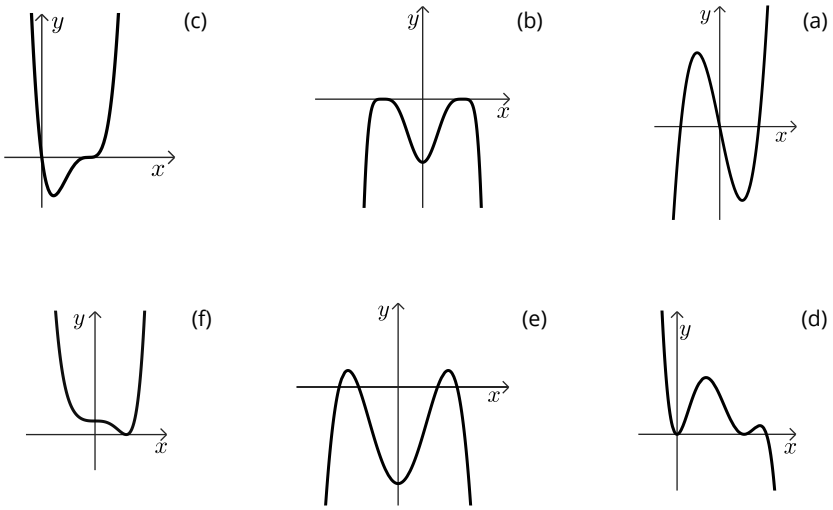
v. $f(x)=(x^3-8)^2$

vi. $f(x)=-(2x^2-1)^4$

א. (1) עבור כל פולינום, קבעו מה מעלת הפולינום.

(2) קבעו את סימן המקדם של החזקה המובילה.

ב. התאימו לכל פולינום מסעיף א' סקיצה מתאימה מתוך הגרפים שלפניכם:



תשובות סופיות:

11) i. מעלה 3, חיובי, גרף a.

ii. מעלה 4, שלילי, גרף e.

iii. מעלה 5, שלילי, גרף d.

iv. מעלה 4, חיובי, גרף c.

v. מעלה 6, חיובי, גרף f.

vi. מעלה 8, שלילי, גרף b.

סרטוט גרף פונקצית הפולינום:

סיכום כללי:

על מנת לשרטט גרף של פונקציית פולינום נמצא:

1) את נקודות האפס של הפולינום
2) את מעלת הפולינום
3) את סימן המקדם של המעלה הגבוהה ביותר בפולינום
4) את הריבוי של כל ביטוי במכפלת הסוגריים המייצגת את הפולינום (זוגי/אי-זוגי/גדול מ-1)

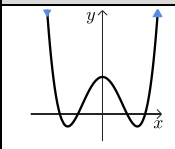
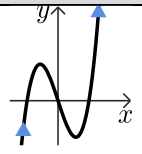
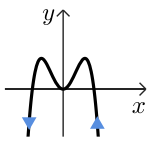
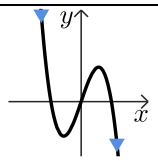
סיכום - שרטוט גרף פולינום ע"פ ריבוי השורשים והתנהגות באינסוף:

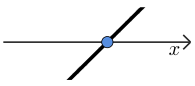
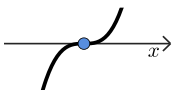
- קובעים אם דרגת הפולינום (החזקה הגבוהה ביותר) היא זוגית\אי זוגית
- קובעים את סימן המקדם של החזקה הגבוה ביותר (חיובי\שלילי)

- מפרקים את הפולינום לגורמים
- מוצאים את שורשי הפולינום (נקודות האפס)
- קובעים את הריבוי של כל שורש

משרטטים את גרף הפונקציה בקצוות ע"פ הטבלה

משרטטים את גרף הפונקציה סביב נקודות האפס ע"פ הטבלה

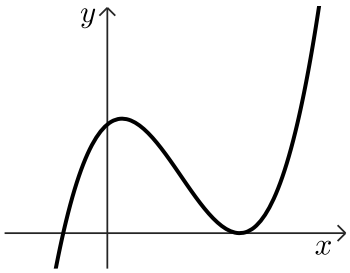
	דרגת פולינום זוגית	דרגת פולינום אי זוגית
מקדם החזקה הגבוהה חיובי		
מקדם החזקה הגבוהה שלילי		

	התנהגות סביב השורש	צורת הגרף
ריבוי שורש 1	גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x	
ריבוי שורש זוגי	גרף הפונקציה משיק לציר ה-x	
ריבועי שורש אי-זוגי (גדול מ-1)	גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x עם פיתול	

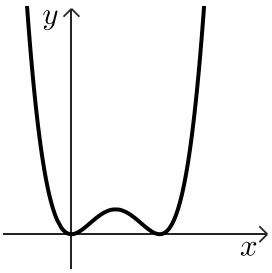
שאלות:

12) לפניכם זוגות של גרפים ופולינומים.
עבור כל אחד מהפולינומים, קבעו האם הגרף מייצג את הפולינום.
אם לא – תקנו את הסרטוט כך שיתאים.

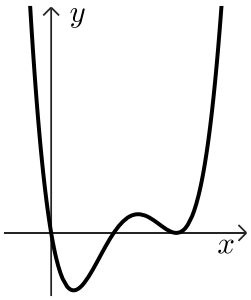
א. הפונקציה: $f(x)=(x+3)^2(x+1)$.



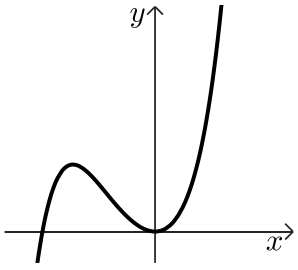
ב. הפונקציה: $f(x)=x^2(x-2)^2$.



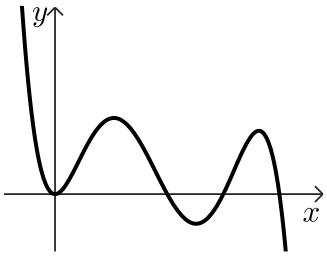
ג. הפונקציה: $f(x)=x^2(x-1)(x-2)^2$.



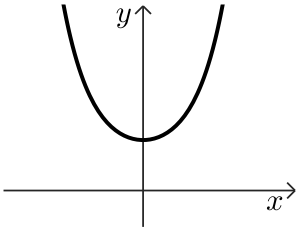
ד. הפונקציה: $f(x)=x^2(x^2+1)(1-x)$.



ה. הפונקציה: $f(x)=(4-x)(3-x)(2-x)x^2$.



ו. הפונקציה: $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2)^2$.



13) סרטטו סרטוט סכמתי עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(2x+1)(x+1)(x+3)$

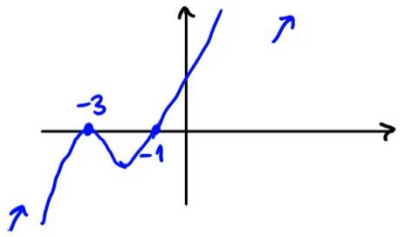
ב. $f(x)=x(4-3x)^3(3+4x)(1-x)^2$

ג. $f(x)=x^4(x+4)^2(2x+1)^2$

ד. $f(x)=(3x^2+4)(x+2)^2(8+x)(10-x)$

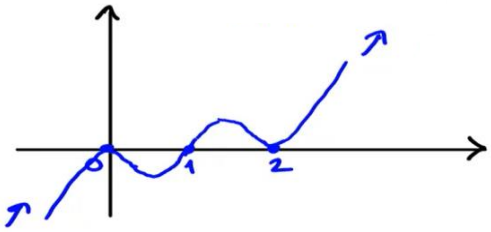
תשובות סופיות:

12) א. הגרף לא מתאים. להלן הגרף המתוקן:

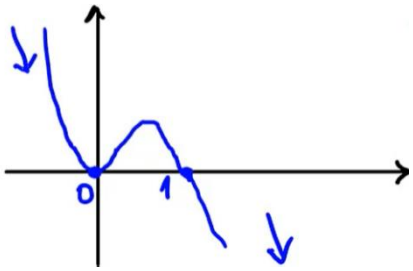


ב. הגרף מתאים.

ג. הגרף לא מתאים. להלן הגרף המתוקן:

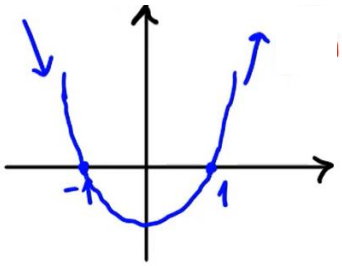


ד. הגרף לא מתאים. להלן הגרף המתוקן:

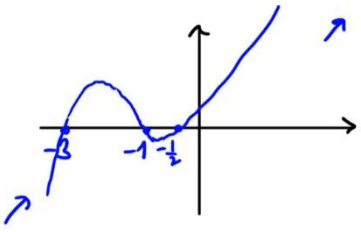


ה. הגרף מתאים

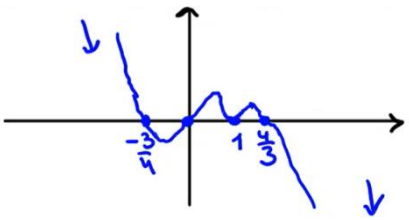
ו. הגרף לא מתאים. להלן הגרף המתוקן:



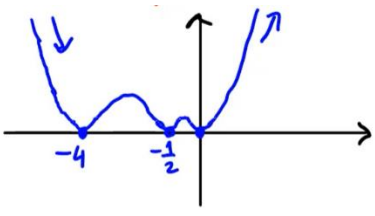
13) א.



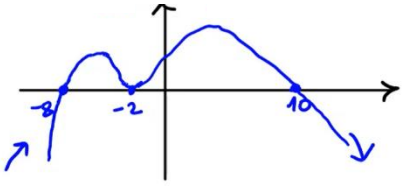
ב.



ג.



ד.



תחומי חיוביות ושליליות מתוך גרף הפולינום:

סיכום כללי:

כדי למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של פולינום מתוך גרף הפונקציה,
יש להתייחס לגורמים הבאים:

- נקודות האפס – יש למצוא את כל נקודות האפס של הפונקציה.
- מעלת הפולינום – נתייחס לשאיפה של פולינום ממעלה זוגית או אי-זוגית באינסוף (לשני הכיוונים).
- סימן המקדם של מעלת הפולינום – יסייע לקבוע את כיוון השאיפה לאינסוף.
- ריבוי הביטויים – שורש מריבוי זוגי לא ישנה את סימן הפונקציה
בעוד ששורש מריבוי אי-זוגי ישנה את סימן הפונקציה לפניו ואחריו.

שאלות:

14) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(2x+1)(x+1)(x+3)$

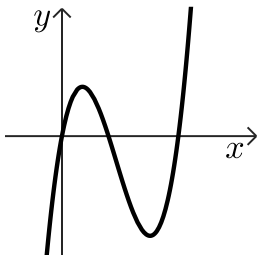
ב. $f(x)=x(4-3x)^3(3+4x)(1-x)^2$

ג. $f(x)=x^4(x+4)^2(2x+1)^2$

ד. $f(x)=(3x^2+4)(x+2)^2(8+x)(10-x)$

15) פתרו את אי-השוויון הבא: $x^3-7x^2+10x\le 0$.

היעזרו בסרטוט סכמתי של גרף הפולינום: $f(x)=x^3-7x^2+10x$.



תשובות סופיות:

14) א. חיובית: $x>-\frac{1}{2}$, $-3<x<-1$, שלילית: $-1<x<-\frac{1}{2}$, $x<-3$.

ב. חיובית: $1<x<\frac{4}{3}$, $0<x<1$, $x<-\frac{3}{4}$, שלילית: $x>\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{4}<x<0$.

ג. חיובית: 0 , $-\frac{1}{2}$, $x\neq -4$, שלילית: אף x.

ד. חיובית: $-2<x<10$, $-8<x<-2$, שלילית: $x>10$, $x<-8$.

15) $2\le x\le 5$, $x\le 0$.

סיכום פונקצית הפולינום:

סיכום כללי:

- מספר הפתרונות של משוואת הפולינום $f(x)=0$ הוא מספר הנקודות המשותפות שיש לפולינום $f(x)$ עם ציר ה- x, כאשר הפתרונות הם שיעורי ה- x של נקודות משותפות אלה.
- גרף של פולינום **ממעלה זוגית** n, שבו המקדם של x^n חיובי, מתחיל **מלמעלה**, כלומר מאינסוף (רביע II) ומסתיים **למעלה**, כלומר באינסוף (רביע I).
(אם המקדם של x^n שלילי, הגרף יתהפך: יתחיל מלמטה ויסתיים למטה)
- גרף של פולינום **ממעלה אי-זוגית** n, שבו המקדם של x^n חיובי, מתחיל **מלמטה**, כלומר ממינוס אינסוף (רביע III) ומסתיים **למעלה**, כלומר באינסוף (רביע I).
(אם המקדם של x^n שלילי, הגרף יתהפך: יתחיל מלמעלה ויסתיים למטה)
- כאשר הפולינום מפורק למכפלות של ביטויים:
  - עבור ביטוי עם ריבוי **אי-זוגי** תתקבל נקודת **חיתוך** של ציר ה- x, כאשר אם הריבוי גדול מ-1 תתקבל נקודת פיתול בגרף.
  - עבור ביטוי עם ריבוי **זוגי** תתקבל נקודת **השקה** עם ציר ה- x.
- בין כל שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x (חיתוך = החלפת סימן) תהיה נקודת קיצון.
- כל נקודת השקה לציר ה- x היא נקודת קיצון.

שאלות:

16) לפניכם הפולינום: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או שאינה נכונה.
נמקו או הביאו דוגמה נגדית.

א. אם n זוגי אז גרף הפולינום בהכרח עובר ברביע השני.

ב. אם a_n שלילי אז גרף הפולינום בהכרח עובר ברביע הרביעי.

ג. אם n אי זוגי אז ייתכן ש $f(x)\le 0$ לכל x.

ד. אם n זוגי אז ייתכן שהפולינום $f(x)$ חיובי לכל x.

ה. עבור n נתון, לפונקציה יש בדיוק n נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

ו. עבור n נתון, ניתן לדעת את המספר המרבי של נקודות הקיצון של הפולינום.

17) כתבו דוגמה לביטוי אלגברי וסרטטו סרטוט סכמתי של פולינום בהתאם למאפיינים הבאים:

א. (1) פולינום ממעלה זוגית שיש לו נקודת פיתול על ציר ה- x.

(2) האם קיים פולינום כזה שלא עובר ברביע השני? אם כן – הדגימו. אם לא – נמקו.

ב. (1) פולינום ממעלה אי זוגית שיש לו שתי נקודות קיצון ונקודת פיתול אחת על ציר ה- x.

(2) האם ייתכן פולינום כזה שיש לו יותר מ־3 נקודות חיתוך עם ציר x?
אם כן – הדגימו. אם לא – נמקו.

ג. (1) פולינום שמתחיל במינוס באינסוף ומסתיים באינסוף ונקודות האפס שלו הן: $(1,0)$, $(0,0)$, $(-4,0)$.

(2) האם ייתכן פולינום כזה ממעלה זוגית?

(3) גיא טוען שקיים ביטוי אלגברי שונה מהביטוי שכתבתם בסעיף ג (1), שהסרטוט שלו מעט שונה מהסרטוט שלכם. האם גיא צודק?
אם כן – רשמו ביטוי אלגברי מתאים וסרטטו גרף מתאים. אם לא – נמקו.

18) לפניכם 2 פולינומים: $f(x)=x^2(x+4)(x-4)$, $g(x)=x^2(x+4)(4-x)$.

שי טען שלשני הפולינומים אותה המעלה ואותן נקודות חיתוך עם ציר x ולכן הם זהים זה לזה.
האם שי צודק? נמקו.

19) לפניכם 2 פולינומים: $f(x)=x(x+6)^2(x-1)$, $g(x)=x^3(x+6)^2(x-1)$.

א. קבעו נכון / לא נכון:

(1) לשני הפולינומים מעלה זהה.

(2) לשני הפולינומים אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

(3) לשני הפולינומים אותו מספר של נקודות קיצון.

(4) לשני הפולינומים אותו מספר של נקודות פיתול על ציר ה- x.

(5) עבור ערכי x מאוד גדולים, שני הפולינומים שואפים ל- ∞.

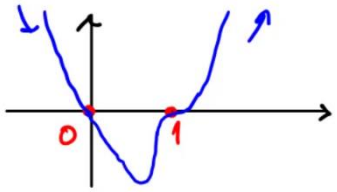
ב. סרטטו גרפים עבור שני הפולינומים.

תשובות סופיות:

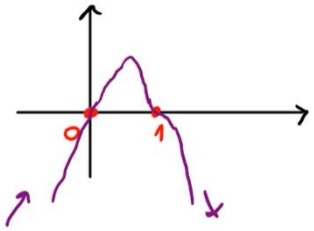
16) נכון: ב, ד, ו.

לא נכון: א, ג, ה.

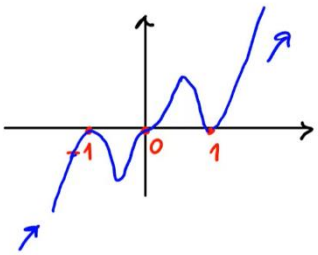
17) א. (1) $f(x)=x(x-1)^3$



א. (2) $f(x)=-x(x-1)^3$.

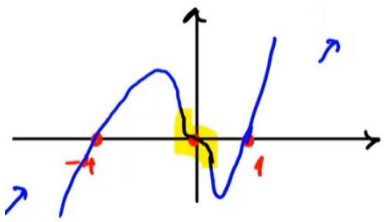


ב. (1) $f(x)=x^3(x-1)^2(x+1)^2$



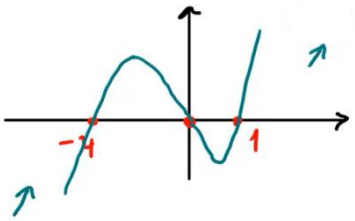
ב. (2) לא ייתכן.

ג. (1) $f(x)=x^3(x+4)(x-1)$



ג. (2) לא ייתכן.

ג. (3) $f(x)=x(x+4)(x-1)$

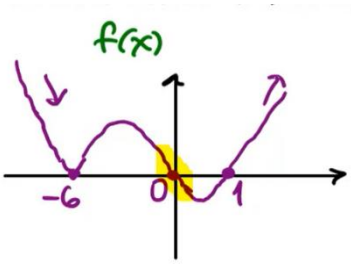


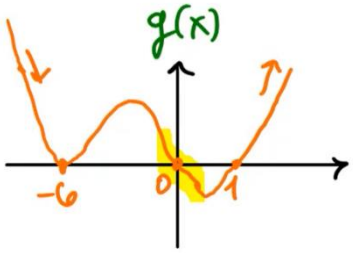
18) שי לא צודק, ניתן לראות שבאינסוף התנהגות שתי הפונקציות שונה.

19) א. נכון: (2), (3), (5)

לא נכון: (1), (4)

ב.





שאלון 571

נגזרת של פונקצית הפולינום

תוכן העניינים:

נגזרת של פונקצית הפולינום..... 213

קצב השתנות של פונקציה:..... 214

סיכום כללי:..... 214

שאלות:..... 214

תשובות סופיות: 216

כללי גזירה: 217

סיכום כללי:..... 217

שאלות:..... 218

תשובות סופיות: 221

קצב השתנות של פונקציה:

סיכום כללי:

קצב ההשתנות של פונקציה הוא היחס בין השינוי בערכי ה- y לבין השינו בערכי ה- x.

- אם מתקבל אותו היחס לכל שני ערכים שונים של x,
  אז קצב השינוי של הפונקציה הוא אחיד.
- בכל מקרה אחר, הפונקציה משתנה בקצב שאינו אחיד.

שאלות:

1) לפניך 3 גרפים שמתארים את הגובה של בן-אדם מרגע היוולדו ועד ליום מותו.
איזה מהגרפים לדעתך הוא המתאים ביותר? נמק.



2) סרטט גרפים לפי כל הנחייה ונמק האם הגרף שסירטטת הוא קבוע, או לא.

א. היווצרות תפוזים בעץ תפוזים במשך מחזור של שנה.

ב. השכר השעתי של עובד חברת "אגד" במשך משמרת עבודה של 8 שעות.

ג. מהירות כדור המשוחרר ממנוחה מקצה בניין ועד לרגע התנגשותו בקרקע.

ד. אורך ציפורן באחת האצבעות של אדם במשך חודש.

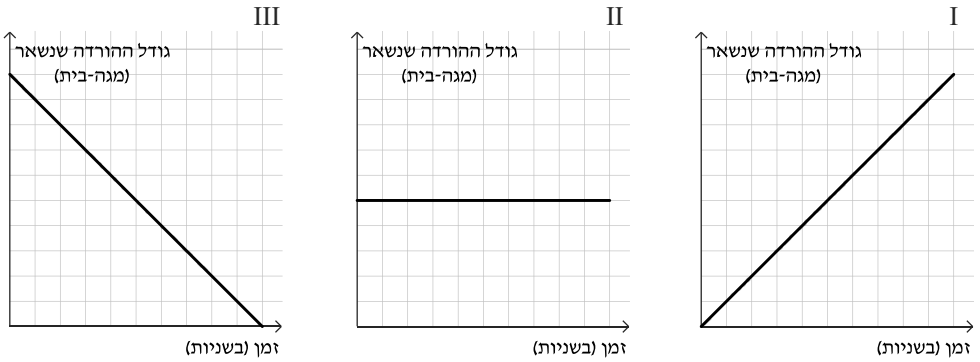
3) מחיר של 1 ק"ג עגבניות הוא 3 ₪. איזה מהגרפים הבאים מתאים לתיאור מחיר העגבניות כפונקציה של מספר הק"ג שנקנו? נמק.





4) נופר מורידה אפליקציה שגודלה הוא 100MB (100 מגה-בית).
חיבור האינטרנט של נופר מאפשר לה להוריד את האפליקציה בקצב קבוע של מגה-בית אחד בשנייה (1MB לשנייה).

א. איזה מבין הגרפים הבאים מתאר את הגודל במגה-בית שנשאר להוריד?



ב. (1) לאחר כמה שניות חצי מההורדה תסתיים?
(2) לאחר כמה שניות ההורדה תסתיים?

ג. כמה מהאפליקציה תרד למחשב של נופר לאחר 20 שניות?

5) האם גרף קבוע מתאר קצב השתנות אחיד?
מצא מקרה שתומך בהחלטתך, הדגם אותו ונמק את הקביעתך.

תשובות סופיות:

1) גרף ב' בלבד.

2) עיין בסרטון עבור דוגמאות של גרפים.

3) גרף א' בלבד.

4) א. גרף III. ב. (1) לאחר 50 שניות. ב. (2) לאחר 100 שניות. ג. 20 מגה-בית.

5) כן, היות וקצב השינוי הוא אפס אשר גם אחיד.

כללי גזירה:

סיכום כללי:

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=x^2$ ב. $y=x^3$ ג. $y=x^6$

ד. $y=4x^3$ ה. $y=12x^4$ ו. $y=\frac{1}{2}x^2$

ז. $y=7$ ח. $y=-3x^2$ ט. $y=-\frac{1}{3}x^3$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=7x^2+23x-6$ ב. $f(x)=6x^2+8x+4$

ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$ ד. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=5x^2-3x$ ב. $y=3x^2+14x$

ג. $y=\frac{1}{3}x^6-\frac{2}{5}x^5$ ד. $y=\frac{1}{6}x^4-\frac{3}{7}x^5$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^2}$ ב. $f(x)=\frac{4x^{10}-2x^8+x}{8x^5}$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=(x-2)(x+3)$ ב. $y=x^2(3-x)$

ג. $y=(x+2)^2$ ד. $y=3x(x-1)^2$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(1-3x^3)^3$ ב. $f(x)=(x(x^2+3)+3)^2$

ג. $f(x)=(2x+7)^8$ ד. $f(x)=\frac{5}{(x^2+4x)^4}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=3x^2\cdot x$

ב. $f(x)=x^2\cdot x^3$

ג. $f(x)=x(3x+7)$

ד. $f(x)=3x^3(3x-1)$

ה. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ו. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$

ז. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

ח. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$

ב. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$

ג. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x+1}{2x+1}$

ב. $f(x)=\frac{5x}{x^2+2x+3}$

ג. $f(x)=\frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+6}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

ו. $f(x)=\frac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$

ז. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2(1-x)}$

ח. $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

ב. $f(x)=\frac{5}{x^2+2x+3}$

ג. $f(x)=\frac{x^2+4x+6}{x^2+4x+5}$

ד. $f(x)=x^2+3x+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}$

11) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ט. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

י. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f(x)=\frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

יב. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x}}$

יג. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

יד. $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

12) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(ax+3)^2$

ב. $f(x)=mx^5+nx^4+45$

ג. $f(x)=\frac{x^4}{a}+\frac{4}{x^4}+a$

ד. $f(x)=\frac{b}{5}x^2+\frac{b}{dx^2}+3x+1$

ה. $f(x)=(x-a)(x^2-b)$

ו. $f(x)=(2-x)(a+x)+bx^2$

ז. $f(x)=\frac{2x+a}{x+3}$

ח. $f(x)=\frac{cx}{(x+1)^2}$

ט. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-a^2}$

י. $f(x)=\frac{-6}{(ax^2+bx+3)^2}$

יא. $f(x)=c\sqrt{c-4x^2}$

יב. $f(x)=\frac{x}{b}\sqrt{2x+a}$

13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

תשובות סופיות:

1) א. $y'=2x$ ב. $y'=3x^2$ ג. $y'=6x^5$ ד. $y'=12x^2$ ה. $y'=48x^3$

ו. $y'=x$ ז. $y'=0$ ח. $y'=-6x$ ט. $y'=-x^2$.

2) א. $y'=14x+23$ ב. $y'=12x+8$ ג. $y'=x-3x^2$

ד. $y'=\frac{1}{2}x^3$.

3) א. $y'=10x-3$ ב. $y'=6x+14$ ג. $y'=2x^5-2x^4$

ד. $y'=\frac{2}{3}x^3-\frac{15}{7}x^4$.

4) א. $f'(x)=-\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^3}$ ב. $f'(x)=2\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2x^5}$.

5) א. $y'=2x+1$ ב. $y'=6x-3x^2$

ג. $y'=2x+4$ ד. $y'=9x^2-12x+3$.

6) א. $f'(x)=-27x^2\left(1-3x^3\right)^2=-27\left(x-3x^4\right)^2$

ב. $f'(x)=6\left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+3\right)$

ג. $f'(x)=16\left(2x+7\right)^7$ ד. $f'(x)=-\frac{40\left(x+2\right)}{\left(x^2+4x\right)^5}$.

7) א. $f'(x)=9x^2$ ב. $f'(x)=5x^4$ ג. $f'(x)=6x+7$

ד. $f'(x)=36x^3-9x^2$ ה. $f'(x)=6x^2-8x+3$ ו. $f'(x)=9x^2+56x-20$

ז. $f'(x)=36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$ ח. $f'(x)=9x^2-20x+8$

8) א. $f'(x)=90x^4+240x^3+150x^2$ ב. $f'(x)=3\left(x^3+2\right)\left(x-1\right)^3\left(3x^3-2x^2+2\right)$

ג. $f'(x)=2\left(2x-1\right)\left(x^2+1\right)^2\left(8x^2-3x+2\right)$.

9) א. $f'(x)=-\frac{1}{\left(2x+1\right)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$

ג. $f'(x)=\frac{2x-4}{\left(x^2+4x+6\right)^2}$ ד. $f'(x)=\frac{2\left(x-1\right)}{\left(x+1\right)^3}$

ה. $f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{\left(x+1\right)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2x\left(x^2+3\right)\left(x^2-7\right)}{\left(x^2-2\right)^2}$

ז. $f'(x)=-x\ ,x\neq 1$ ח. $f'(x)=-\frac{1}{\left(x+2\right)^2}\ ,x\neq\pm 2$.

(10 א. $f'(x)=\frac{-2}{(2x+1)^2}$ ב. $f'(x)=-\frac{5(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}$

ג. $f'(x)=-\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}$ ד. $f'(x)=2x+3-\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^3}$.

(11 א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}$

ג. $f'(x)=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$

ה. $f'(x)=\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$ ו. $f'(x)=6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$

ז. $f'(x)=\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

ט. $f'(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $f'(x)=\frac{3x+1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f'(x)=3x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{-1/2}-\frac{1}{2}x^{-3/2}+5x^{-2}$ יב. $f'(x)=-\frac{3}{2x^2\sqrt{\frac{3-x}{x}}}$

יג. $f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$ יד. $f'(x)=\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$

טו. $f'(x)=-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $f'(x)=-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$

(12 א. $f'(x)=2a^2x+6a$ ב. $f'(x)=5mx^4+4nx^3$

ג. $f'(x)=\frac{4}{a}x^3-\frac{16}{x^5}$ ד. $f'(x)=\frac{2b}{5}x-\frac{2b}{dx^3}+3$

ה. $f'(x)=3x^2-b-2ax$ ו. $f'(x)=2x(b-1)+2-a$

ז. $f'(x)=\frac{6-a}{(x+3)^2}$ ח. $f'(x)=\frac{c(1-x)}{(x+1)^3}$

ט. $f'(x)=\frac{2x(1-a^2)}{(x^2-a^2)^2}$ י. $f'(x)=\frac{12(2ax+b)}{(ax^2+bx+3)^3}$

יא. $f'(x)=-\frac{4cx}{\sqrt{c-4x^2}}$ יב. $f'(x)=\frac{3x+a}{b\sqrt{2x+a}}$

(13 א. $f''(x)=\frac{4}{x^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$.

ב. $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$.

ג. $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$.

ד. $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$.

ה. $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.

ו. $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$, $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

שאלון 571

המשיק לגרף הפונקציה

תוכן העניינים:

שאלון 571 224

המשיק לגרף הפונקציה 224

תוכן העניינים: 224

חישוב ערך הנגזרת בנקודה על גרף הפונקציה: 225

סיכום כללי: 225

שאלות: 225

תשובות סופיות: 226

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: 227

שאלות: 227

תשובות סופיות: 228

מציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה: 229

שאלות: 229

תשובות סופיות: 230

הקשר בין פונקצית טנגנס לשיפוע של ישר: 231

שאלות: 231

תשובות סופיות: 231

חישוב פרמטרים: 232

שאלות: 232

תשובות סופיות: 233

הבעה באמצעות פרמטרים: 234

שאלות: 234

תשובות סופיות: 234

חישוב ערך הנגזרת בנקודה על גרף הפונקציה:

סיכום כללי:

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

שאלות:

1) מצאו את ערך הנגזרת של הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות:

א. $f(x)=x^3+2x^2+5$ בנקודה $(0,5)$.

ב. $g(x)=x^5+5x^3+6x$ בנקודות $(0,0)$, $(1,12)$.

ג. $h(x)=-x^2+2x-4$ בנקודות $(1,-3)$, $(0,-4)$, $(2,-4)$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה $f(x)=4x^2+8x+1$.

חשבו את ערך ה-x שעבורו מתקיים: $f'(x)=0$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+5x^2-2x$.

חשבו את ערכי ה-x שעבורם מתקיים: $f'(x)=11$.

ג. נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-8x^3+16x^2+2x$.

חשבו את ערכי ה-x שעבורם מתקיים: $f'(x)=2$.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3+6x^2+15x-2$.

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה בהן ערך הנגזרת הוא 15.

3) נתונות הפונקציות: $f(x)=5x^3$ ו- $g(x)=3x^5$.

מצאו עבור אלו ערכי x מתקיים: $f'(x)=g'(x)$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=2x^3+x^2+x$.

א. חשבו את ערך הפונקציה בנקודה בה $x=1$.

ב. חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x=1$.

תשובות סופיות:

1) א. $f'(0)=0$ ב. $g'(0)=6\ ,\ g'(1)=26$ ג. $h'(0)=2\ ,\ h'(1)=0\ ,\ h'(2)=-2$

2) א. $x=-8$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=-4\frac{1}{3}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=4\ ,\ x_3=2$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=-4$.

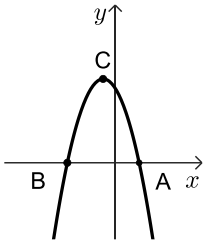
3) $x_1=0\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1$.

4) א. $f(1)=4$ ב. $f'(1)=9$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

5) גרף הפונקציה $f(x)=-x^2-2x+8$ חותך את ציר ה-x בנקודות A ו-B.

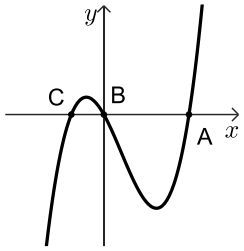


הנקודה C היא נקודת הקיצון של הפונקציה.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו- C.

ב. מצאו את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות אלו.

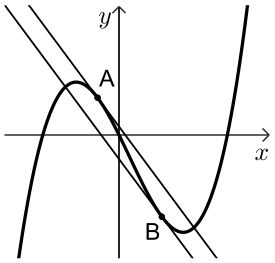
6) גרף הפונקציה $f(x)=x^3-x^2-x$ חותך את ציר ה-x בנקודות A, B ו- C.



א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו- C.

ב. מצאו את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות אלו.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3x^2-36x$.



א. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $A(-1,31)$.

ב. מצאו את נקודה B שהמשיק העובר דרכה מקביל למשיק בנקודה A.

8) עבור אלו ערכי x הישרים המשיקים לגרפים של הפונקציות הבאות מקבילים זה לזה?

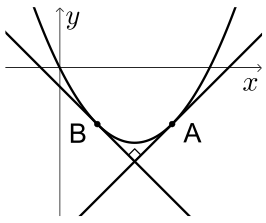
א. $f(x)=2x^3+6x^2+2x+9$

ב. $g(x)=(x+1)(3x+11)$

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-2x-3$.

א. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x=1.5$.

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A מאונך למשיק לגרף הפונקציה בנקודה B.
מצאו את שיעורי הנקודה B.



תשובות סופיות:

5) א. $A(2,0)\ ,\ B(-4,0)\ ,\ C(-1,9)$ ב. $m_A=-6\ ,\ m_B=6\ ,\ m_C=0$

6) א. $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},0\right)\ ,\ B(0,0)\ ,\ C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$ ב. $m_A=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\ ,\ m_B=-1\ ,\ m_C=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

7) א. $m=-24$ ב. $B(2,-68)$.

8) $x=1\ ,\ x=-2$.

9) א. $m_A=1$ ב. $B\left(\frac{1}{2},-3.75\right)$.

מציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+6x^2+2x+2$ בנקודה $x=-1$ עובר בנקודה $(0,-2)$.

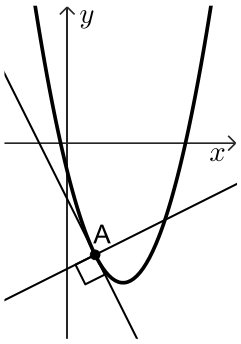
ב. הראו כי המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=2x^4-2x^2-4x-1$ בנקודה $x=2$ עובר בנקודה $(1.5,-11)$.

11) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=2(4x+3)^2$ בנקודה שבה: $x=-1$.

12) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

13) לגרף הפונקציה $f(x)=2x^3-3x^2-36x$ העבירו שני משיקים שהשיפוע שלהם הוא 36-.
מצאו את משוואות המשיקים.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-4x-1$.



מנקודה A שעל גרף הפונקציה שבה $x=1$, מעבירים משיק לפונקציה.
נורמל לגרף הפונקציה: הוא ישר העובר דרך נקודת ההשקה
ומאונך למשיק. מצאו את משוואת הנורמל ל-$f(x)$ בנקודה A.

15) הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3+x^2-2x+8$ ו- $g(x)=2x^2-x+7$
משיקים זה לזה. מצאו את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק המשותף.

16) הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3+6x^2+12x+4$ ו- $g(x)=-2x^2-x-2$ משיקים זה לזה.
מצאו את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק המשותף.

תשובות סופיות:

10) א. $y=-7x-2$ ב. $y=52x-89$

11) $y=24x+22$

12) $y=2x-3$

13) $y=-36x$, $y=-36x-1$

14) $y=\frac{1}{2}x-4.5$.

15) $(1,8)$, משוואת משיק: $y=3x+5$.

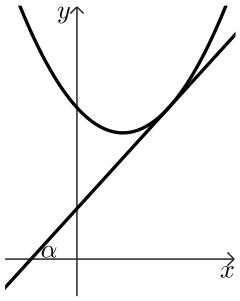
16) $(-1,-3)$, משוואת משיק: $y=3x$.

הקשר בין פונקצית טנגנס לשיפוע של ישר:

שאלות:

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-4x+8$.

עבור כל אחד משיעורי ה-x הבאים, מצאו את שיפוע המשיק לפונקציה העובר באותה נקודה,
ואת הזווית בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר ה-x.



א. $x=5$

ב. $x=2$

ג. $x=0$

18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על גרף הפונקציה $f(x)=x^2-2x+6$
שהמשיק בה יוצר זווית של $135°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

ב. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה $f(x)=3x^3-8x+4$
שהמשיקים בהן יוצרים זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

ג. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה $f(x)=x^4-2x^2+1$
שהמשיקים בהן יוצרים זווית של $0°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

תשובות סופיות:

17) א. $m=6\ ,\ \alpha=80.54°$ ב. $m=0\ ,\ \alpha=0°$ ג. $m=-4\ ,\ \alpha=104.04°$

18) א. $\left(\frac{1}{2},5\frac{1}{4}\right)$ ב. $(1,-1)\ ,\ (-1,9)$ ג. $(0,1)\ ,\ (1,0)\ ,\ (-1,0)$

חישוב פרמטרים:

שאלות:

19) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^2-4x+9$. ערך הנגזרת בנקודה $x=2$ הוא 4.

מצאו את a ואת שיעורי נקודת ההשקה.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3+2x^2+bx+1$. ערך הנגזרת בנקודה $x=-1$ הוא 1.

מצאו את b ואת שיעורי נקודת ההשקה.

20) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^3-3x+1$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=2$ הוא 9.

א. מצאו את a.

ב. מצאו נקודה נוספת על גרף הפונקציה שבה השיפוע הוא 9.

21) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-ax+b$.

דרך הנקודה $(2,-5)$ הנמצאת על גרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו 4-.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x)=x^3-cx^2+dx$.

דרך הנקודה $(1,16)$ הנמצאת על גרף הפונקציה מעבירים משיק ששיפועו 0.

מצאו את ערכי הפרמטרים c ו-d.

22) הישר $y=-7x+9$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=-x^2-3x+k$.

מצאו את k.

23) הישר $y=-24x-18$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=-x^3+6x^2-9x-a$.

נתון כי $a<20$. מצאו את a.

24) נתונה הפונקציה: $g(x)=x^2-3x-c$.

נתון כי שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה $x=4$ הוא 5.

א. האם ניתן למצוא את ערך הפרמטר c?

ב. אם כן, מצאו אותו. אם לא, הסבירו מדוע.

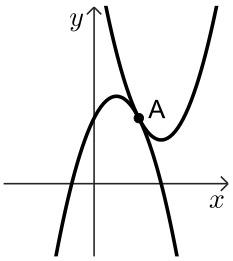
25) נתונה הפונקציה $f(x)=nx^n-2nx^{n-1}+n+5$ ונתון כי $f'(-1)=-8$.

מצאו את n אם ידוע כי n מספר חיובי וזוגי.

26) נתונה הפונקציה $f(x)=x^{n+2}+(n+1)x^{n+1}+x^n$ ונתון כי $f'(-1)=0$.

מצאו את n אם ידוע כי n מספר חיובי ואי-זוגי.

27) הפונקציות $f(x)=x^2-6x+11$ ו- $g(x)=-x^2+2x+k$



משיקות זו לזו בנקודה A.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

ב. מצאו את הערך של k.

28) הפונקציות $f(x)=x^3-6x^2$ ו- $g(x)=-x^2+8x+k$ משיקות זו לזו בנקודה שנמצאת ברביע הרביעי.

א. מצאו את שיעורי הנקודה.

ב. מצאו את הערך של k.

תשובות סופיות:

19) א. $a=2$, $(2,9)$ ב. $b=2$, $(-1,0)$.

20) א. $a=1$ ב. $(-2,-1)$.

21) א. $a=8$, $b=7$ ב. $c=18$, $d=33$.

22) $k=5$.

23) $a=10$.

24) א. לא. ב. ראו הסבר בסרטון הוידאו.

25) $n=2$.

26) $n=1$.

27) א. $A(2,3)$ ב. $k=3$.

28) א. $A(4,-32)$ ב. $k=-48$.

הבעה באמצעות פרמטרים:

שאלות:

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-ax$.

הביעו באמצעות a את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

30) נתונה הפונקציה: $g(x)=x^2-1$.

הביעו באמצעות k את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=k$.

31) לגרף הפונקציה: $h(x)=x^3-bx^2$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x=1$.

הביעו באמצעות b את שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-y.

תשובות סופיות:

29) $y=(1-a)x-3$

30) $y=2kx-k^2-1$

31) $(1,b-2)$

שאלון 571

חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים:

חקירת פונקצית פולינום..... 235

נקודות קיצון של פונקציות:..... 236

סיכום כללי:..... 236

שאלות:..... 237

תשובות סופיות:..... 239

תחומי עלייה וירידה:..... 240

שאלות:..... 240

תשובות סופיות:..... 242

חקירת פונקציה פולינומית:..... 243

שאלות:..... 243

תשובות סופיות:..... 247

נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת ואינה קיצון:..... 249

שאלות:..... 249

תשובות סופיות:..... 251

חקירות עם פונקציה זוגית ואי-זוגית:..... 252

סיכום כללי:..... 252

שאלות:..... 252

תשובות סופיות:..... 256

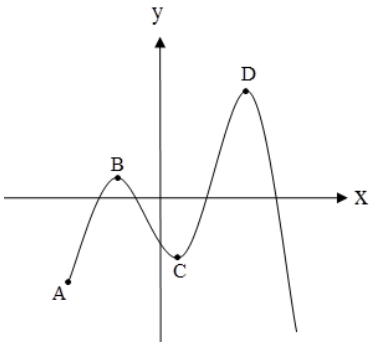
מינימום ומקסימום בתחום סגור:..... 258

שאלות:..... 258

תשובות סופיות:..... 259

נקודות קיצון של פונקציות:

סיכום כללי:



נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y.
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

4) לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$.

מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^3+x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.

מצא את הקבוע a.

6) לפונקציה: $f(x)=Ax^3+Bx^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2,3)$.

מצא את ערכי הפרמטרים B,A.

7) לפונקציה: $f(x)=Ax^3+Bx^2-4x$ יש נקודת קיצון ב- $x=-1$ ו- $x=4$.

מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.

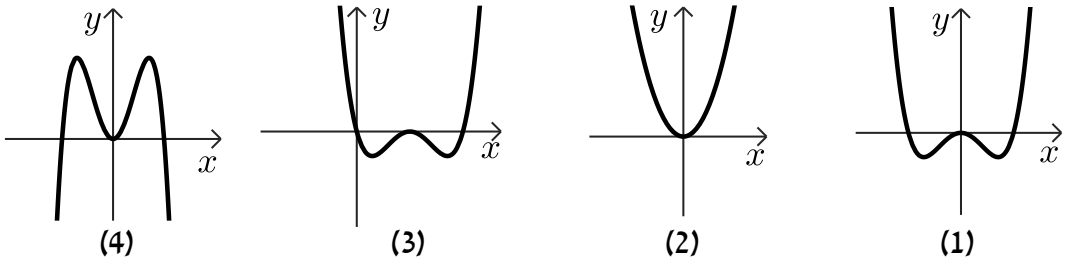
8) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^3+bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.

מצא את הפרמטרים a , b.

9) נתונה המשפחה של פונקציות: $f(x)=x^4-ax^2$, a פרמטר.

א. אילו מבין הגרפים (4)-(1) יכולים להתאים לגרף של הפונקציה $f(x)$?
(תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה).

ב. עבור אילו ערכי a יתקבל גרף עם 3 נקודות קיצון?



10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2$. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)+2$. רשמו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

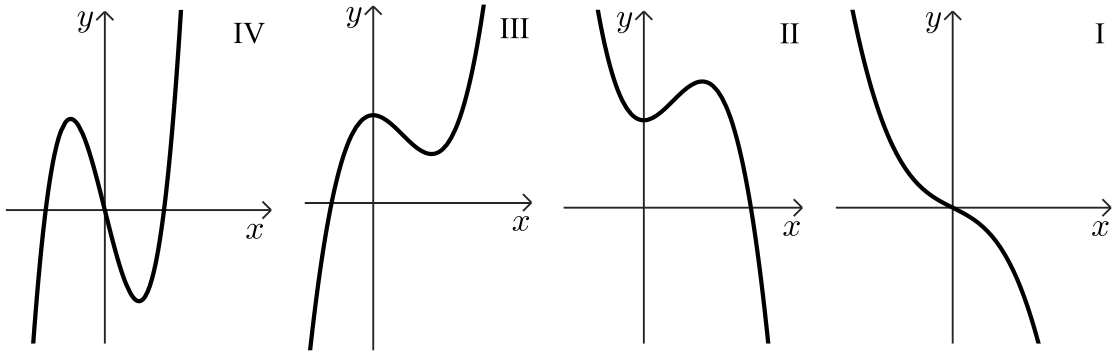
ג. נתונה הפונקציה: $h(x)=f(x)+c$. מה צריך להיות הערך של c על מנת שהפונקציה $h(x)$ תשיק לציר ה-x בנקודת המינימום שלה?

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+3$, $a>0$.

א. הביעו את שיעורי נקודות הקיצון באמצעות a וקבעו את סוגן.

ב. אלו מבין הגרפים I-IV יכולים לתאר את גרף הפונקציה $f(x)$?

ג. עבור אלו ערכים של a, נקודת המינימום משיקה לציר ה-x?



12) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^2+bx+6$ (a ו- b פרמטרים).

הנקודה $(2,2)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

1) א. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$, $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

2) א. $\max(0,9)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\min(-\sqrt{5},-16)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$, $x<-\sqrt{5}$.

3) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

4) $a=3$.

5) $a=-\frac{2}{3}$.

6) $A=-1$, $B=3$.

7) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$, $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$, $B=-\frac{3}{2}$, $A=\frac{1}{3}$.

8) $a=-4$, $b=6$.

9) א. גרף (1). ב. $a>0$.

10) א. $\min\left(4,-10\frac{2}{3}\right)$, $\max(0,0)$ ב. $\min\left(4,-8\frac{2}{3}\right)$, $\max(0,2)$ ג. $c=10\frac{2}{3}$.

11) א. $\max(0,3)$, $\min\left(2,3-\frac{4a}{3}\right)$ ב. גרף III. ג. $a=2.25$.

12) $a=1$, $b=-4$.

תחומי עלייה וירידה:

שאלות:

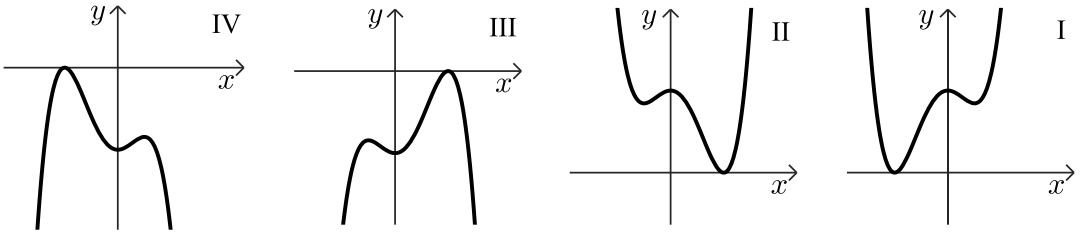
1) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x^4-2x^3-3x^2+2$.

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. אחד מבין הגרפים I-IV הוא גרף של הפונקציה $f(x)$.

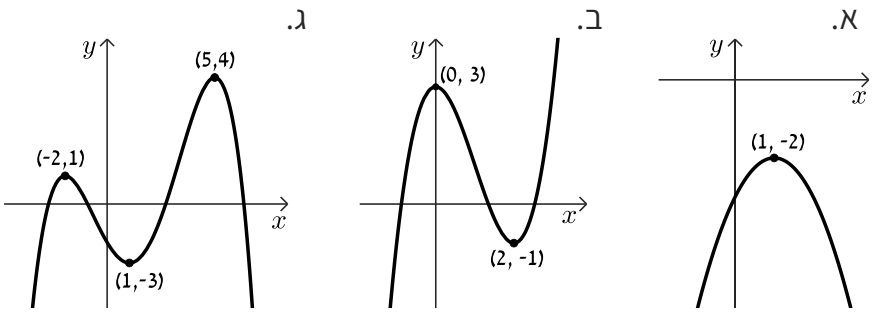
זהו את הגרף המתאים ונמקו את תשובותיכם.



2) בכל אחד מהגרפים שלפניך מסומנות נקודות הקיצון של הפונקציה.

היעזרו בסרטוט ורשמו את ערכי x שעבורם הפונקציה עולה

ואת ערכי x שעבורם הפונקציה יורדת.



3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

א. $f(x)=-x^3+12x^2$

ב. $f(x)=2x^3-15x^2+24x+4$

ג. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+3x^3+7x^2+7$

ד. $f(x)=x^4-32x-9$

4) עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, קבעו האם הפונקציה עולה לכל x או יורדת לכל x.
הוכיחו קביעתכם.

א. $f(x)=x^3+4x+5$

ב. $f(x)=-5x+2$

ג. $f(x)=-4x^3+x^2-7x+5$

ד. $f(x)=5x^5+x^3$

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=-x^3+3x^2-3x+1$.

א. לפניכם מספר טענות, עבור כל טענה קיבעו אם היא נכונה או לא. נמקו קביעתכם.

(1) הנגזרת אי-חיובית לכל ערך של x ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל ערך של x.

(2) הנגזרת יורדת לכל ערך של x ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל ערך של x.

(3) הנגזרת אי-חיובית לכל ערך של x ולכן הפונקציה $f(x)$ שלילית לכל ערך של x.

(4) הנגזרת חיובית לכל ערך של x ולכן הפונקציה $f(x)$ עולה לכל ערך של x.

ב. חשבו את: $f(1)$.

ג. על פי הסעיפים הקודמים קבעו מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+5$.

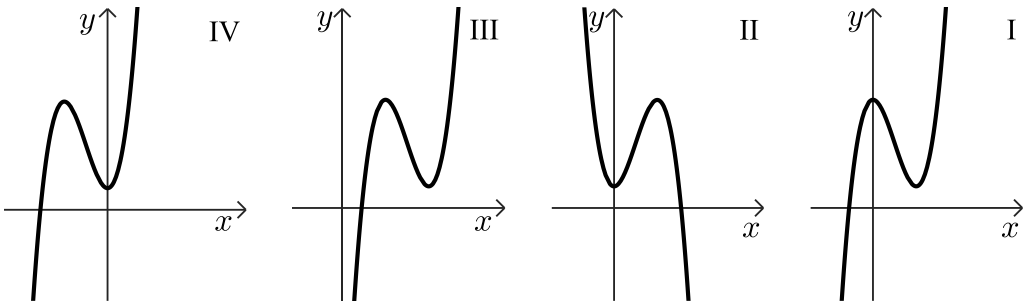
א. האם המשיק בנקודה $x=0$: עולה / יורד / קבוע?

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x+2)$.

בחרו מי מבין הגרפים I-IV שלפניכם יכול לתאר את גרף הפונקציה $g(x)$.



תשובות סופיות:

1) א. $\min\left(-\frac{1}{2},1.69\right)$, $\max(0,2)$, $\min(1,0)$

ב. עולה: $x>1$, $-\frac{1}{2}<x<0$, יורדת: $0<x<1$, $x<-\frac{1}{2}$. ג. גרף II.

2) א. עולה: $x<1$, יורדת: $x>1$ ב. עולה: $x>2$, $x<0$, יורדת: $0<x<2$

ג. עולה: $1<x<5$, $x<-2$, יורדת: $x>5$, $-2<x<1$.

3) א. $\max(8,256)$, $\min(0,0)$, עולה: $0<x<8$, יורדת: $x>8$, $x<0$.

ב. $\max(1,15)$, $\min(4,-12)$, עולה: $x>4$, $x<1$, יורדת: $1<x<4$.

ג. $\min(0,7)$, $\max(-2,15)$, $\min(-7,-78.75$, עולה: $x>0$, $-7<x<-2$,

יורדת: $-2<x<0$, $x<-7$.

ד. $\min(2,-57)$, עולה: $x>2$, יורדת: $x<2$.

4) א. עולה לכל x. ב. יורדת לכל x. ג. יורדת לכל x. ד. עולה לכל x.

5) א. (1) נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה (4) לא נכונה.

ב. $f(1)=0$ ג. חיובית: $x<1$, שלילית: $x>1$.

6) א. קבוע. ב. $\min(2,1)$, $\max(0,5)$ ג. עולה: $x>2$, $x<0$, יורדת: $0<x<2$.

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-10x^2+9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y, סרטוט.

6) נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ (d פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את d.

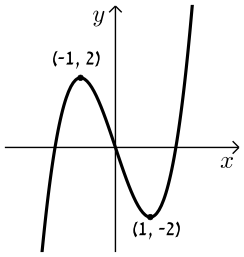
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7) לפניך גרף הפונקציה: $f(x)=x^3-3x$:



א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$.

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$.

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$.

ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד.

ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות.

ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.

ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$.

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקיבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ד. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבעו אם נכון או לא נכון. נמקו קביעתכם.

(1) הנקודה $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) שיעור ה-x של נקודת האפס של הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום: $0<x<2$.

(3) לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

(4) הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)-20$.

לפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-x.

ה. מצאו עבור אילו ערכי k למשוואה $f(x)=k$ יהיה פתרון אחד.

ו. הגדירו פונקציה נוספת: $h(x)=2\cdot f(x)$.

על סמך הסעיפים הקודמים, מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ וקבעו את סוגן.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-2x^2-8$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

(1) שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

(2) שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

(3) תחומי העלייה והירידה.

(4) תחומי החיוביות והשליליות.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מגדירים פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)+k$.

ד. מה צריכים להיות ערכי k עבורם גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה-x.

ה. מגדירים פונקציה נוספת: $h(x)=-f(x)$.

ו. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ז. היעזרו בסעיפים הקודמים וקבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא, נמקו קביעתכם.

(1) הישר $y=8$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.

(2) הישר $y=-8$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.

(3) לגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו-$f(x)$ אין נקודות חיתוך.

10) לגרף הפונקציה: $y=x^3-ax^2+36x$ יש נקודת קיצון ב- $x=2$.

א. חשבו את a.

ב. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. היעזרו בגרף ורשמו את ערכי ה-x שעבורם הפונקציה שלילית.

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3+ax^2+45x$, a פרמטר.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 24.

א. מצאו את a.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

(1) שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.

(2) שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

(3) תחומי העלייה והירידה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=4.5$. נמקו את תשובותיכם.

ה. מצאו עבור אליו ערכי k יהיו למשוואה $f(x)=k$ שני פתרונות. נמקו.

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-ax^2$, a פרמטר.

ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$ מקביל לציר ה-x.

א. מצאו את a.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)+bx^2$.

ג. הוכיחו כי: $g'(2)=4b$.

ד. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה בה $x=2$ הוא 12-, מצאו את b.

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=-x^3+15x^2-63x+a$. a פרמטר.

א. הביעו באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ב. נתון כי שיעור ה-y של נקודת המקסימום של הפונקציה הוא 0, מצאו את a.

ג. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המינימום שלה.

ד. הראו שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x היא $(1,0)$.

ה. עבור איזה ערך של k יש למשוואה $f(x)=k$ שני פתרונות?

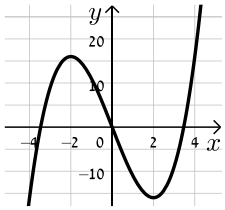
תשובות סופיות:

1) א. כל x ב. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

ג. עלייה: $x<-2$, $x>2$, ירידה: $-2<x<2$

ד. $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$.

ה. ראה גרף בצד.



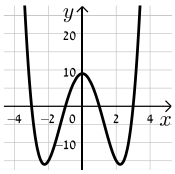
2) א. כל x

ב. $\max(0,9)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\min(-\sqrt{5},-16)$

ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$, ירידה: $x<-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm3,0)$, $(\pm1,0)$, $(0,9)$.

ה. ראה גרף בצד.



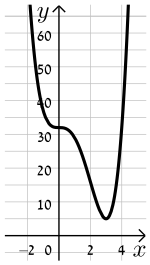
3) א. כל x

ב. $\min(3,5)$

ג. תחומי עלייה: $x>3$, תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$.

ה. ראה גרף בצד.

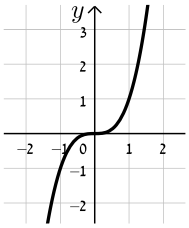


4) א. כל x ב. אין.

ג. עולה לכל x

ד. $(0,0)$.

ה. ראה גרף בצד.



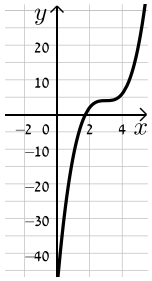
5) א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל x.

נקודות קיצון: אין. תחומי עלייה: כל x.

תחומי ירידה: אין.

נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$.

ראה גרף בצד.



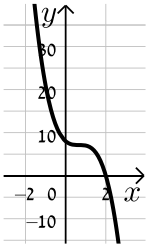
6) א. $d=8$

ב. לא

ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. $(0,8)$.

ה. להלן גרף:



7) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k>2\ ,\ k<-2$

ה. $k=\pm 2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

8) א. $\min(2,-15)\ ,\ \max(-1,12)$ ב. עולה: $x>2\ ,\ x<-1$, יורדת: $-1<x<2$

ג. $(0,5)$ ד. (1), (3) לא נכונות. (2), (4) נכונות.

ה. $k>12\ ,\ k<-15$ ו. $\min(2,-30)\ ,\ \max(-1,24)$.

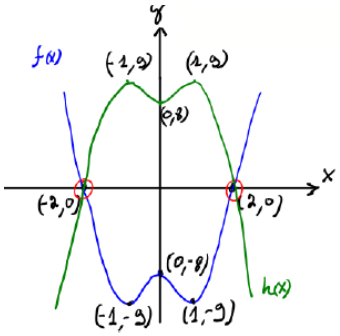
9) א. (1) $(-2,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (0,-8)$ א. (2) $\min(-1,-9)\ ,\ \min(1,-9)\ ,\ \max(0,-8)$

א. (3) עולה: $x>1\ ,\ -1<x<0$, יורדת: $0<x<1\ ,\ x<-1$

א. (4) חיובית: $x>2\ ,\ x<-2$, שלילית: $-2<x<2$. ב. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

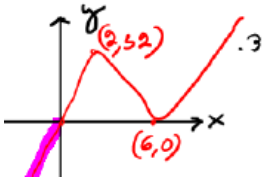
ג. $k=8,9$ ד. ראו סקיצה בצד.

ה. (1) נכונה. (2), (3) לא נכונות.



10) א. $a=12$ ב. $\min(6,0)\ ,\ \max(2,32)$

ג. $(6,0)\ ,\ (0,0)$ ד.



ה. $x<0$.

11) א. $a=-12$

ב. (1) $(0,0)$ ב. (2) $\min(5,50)\ ,\ \max(3,54)$

ב. (3) עולה: $x>5\ ,\ x<3$, יורדת: $3<x<5$ ג. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

ד. פתרון אחד. ה. $k=50,54$.

12) א. $a=3$ ב. $\min(2,-4)\ ,\ \max(0,0)$ ד. $b=-3$.

13) א. $\min(3,a-81)\ ,\ \max(7,a-49)$ ב. $a=49$ ג. $y=-32$ ה. $k=0,-32$.

נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת ואינה קיצון:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+3x+3$.

הוכיחו כי הפונקציה עולה לכל ערך של x.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+4$.

א. מצאו את הנקודות על הגרף שבהן $f'(x)=0$.

ב. קבעו עבור כל אחת מהנקודות שמצאת בסעיף א' האם היא מינימום או מקסימום או שאינה נקודת קיצון.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x^5-5x^3$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את הנקודות החשודות לקיצון של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וסווגו אותן.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=3x^5+5x^3$.

ו. מצאו את תחומי העלייה והירידה (אם יש) של הפונקציה $g(x)$.

ז. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

(1) שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

(2) שיעור נקודת הקיצון ואת סוגה.

אם מצאתם נקודת פיתול - ציינו אותה.

(3) תחומי העלייה והירידה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

אם מצאתם נקודת פיתול - התייחסו אליה בסרטוט.

ג. מצאו עבור אילו ערכי p למשוואה $f(x)=p$ אין פתרונות. נמקו.

הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x+1)+2$.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^4+bx^3-6x^2$. a ו-b פרמטרים.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ היא $y=-1$.

א. מצאו את a ו-b.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

(1) שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.

(2) שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.

(3) תחומי העלייה והירידה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו באיזה תחום הפונקציה שלילית ועולה.

ה. כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=-2$?

הגדירו פונקציה חדשה $g(x)=|f(x)+1|$.

ו. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ ואת סוגן.

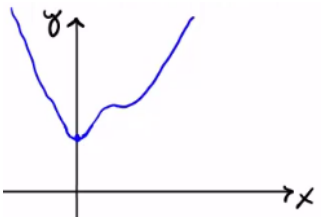
ז. סרטטו סקיצה של הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) א. $(1,5)$, $(0,4)$ ב. $\min(0,4)$, $(1,5)$ פיתול.

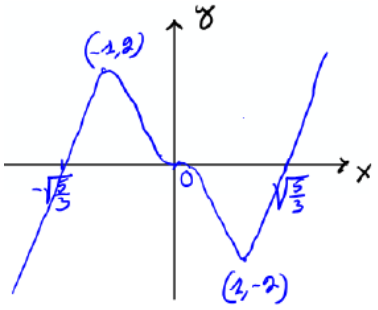
ג. עולה: $x>0$, יורדת: $x<0$ ד. $y=5$ ה. להלן סקיצה:



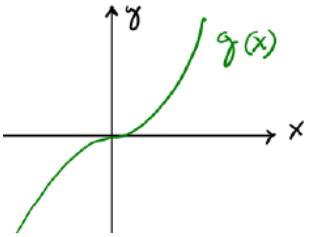
3) א. $(0,0)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},0\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},0\right)$

ג. $\max(1,-2)$, $\min(-1,2)$, $(0,0)$ פיתול. ד. עולה: $x>1$, $x<-1$, יורדת: $-1<x<1$

ה. להלן סקיצה:



ו. עולה לכל x ז. להלן סקיצה:



4) א. (1) $(0,0)$ א. (2) $\min(0,0)$ א. (3) עולה: $x>0$, יורדת: $x<0$.

ב. ראו סקיצה בסרטון הוידאו. ג. $p<0$ ד. $\min(-1,2)$.

ה. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

5) א. $a=-3$, $b=8$ ב. (1) $(0,0)$ ב. (2) $\max(0,0)$, $(1,-1)$ פיתול

ב. (3) עולה: $x<0$, יורדת: $x>0$ ג. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

ד. $x<0$ ה. 2. ו. $\min\left(-\frac{1}{3},0\right)$, $\min(1,0)$, $\max(0,1)$.

חקירות עם פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.

פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$ ב. $f(x)=3x^2$

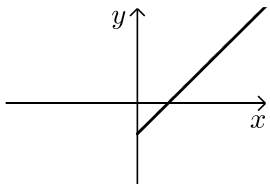
ג. $f(x)=2x^3$ ד. $f(x)=x^3-2x^2$

ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$ ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

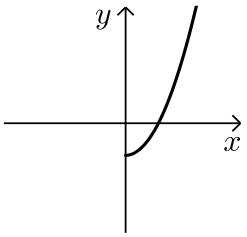
2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

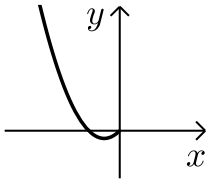
א.



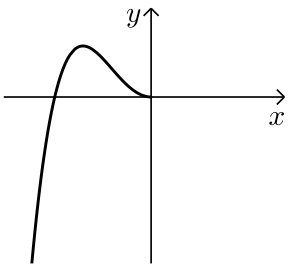
ב.



ג.



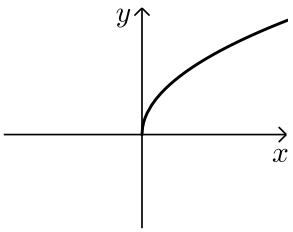
ד.



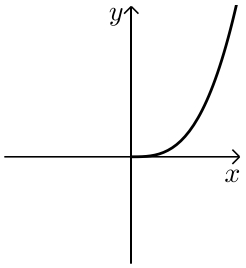
3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

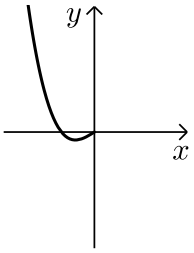
א.



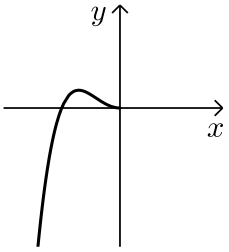
ב.



ג.



ד.



4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:

תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?

נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, a פרמטר.

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$, b פרמטר.

ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמק ע"י חישוב מתאים.

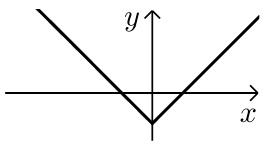
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית
את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

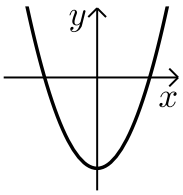
תשובות סופיות:

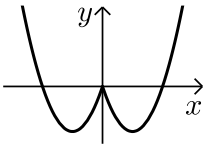
הערה: בסוף התשובות מופיעים כל הסרטוטים לשאלות החקירה במרוכז.

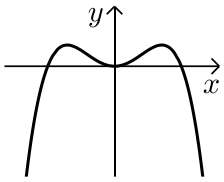
1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

2) להלן הגרפים:

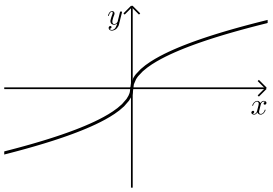
א.


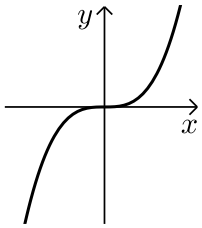
ב.


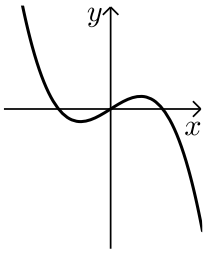
ג.


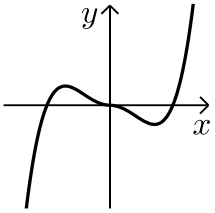
ד.


3) להלן הגרפים:

א.


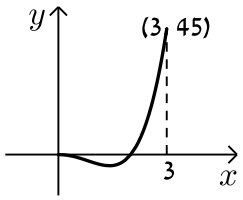
ב.


ג.


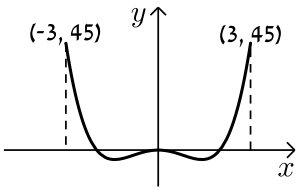
ד.


4) א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,
$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

סרטוט עבור חלק v:

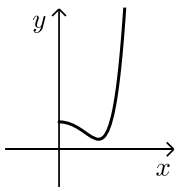


סרטוט עבור סעיף ג:

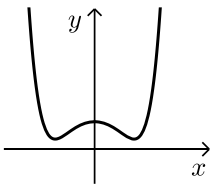


5) א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה-y: $(0,3)$,
נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$, ב. זוגית.
ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף א:

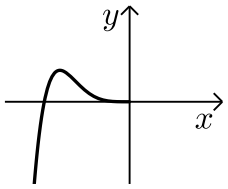


סרטוט עבור סעיף ג:

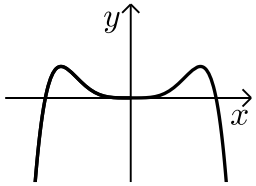


6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(-1.225,0)$,
נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

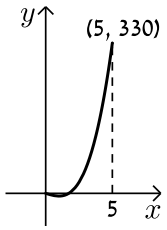


סרטוט עבור סעיף ד:

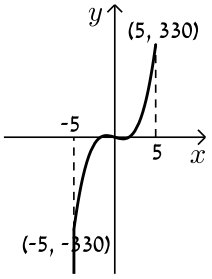


7) א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(\sqrt{3},0)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

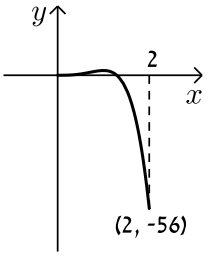


סרטוט עבור סעיף ג:

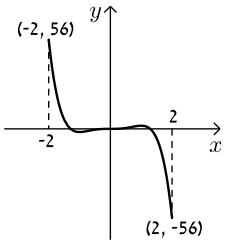


8) א. $b=0$ ב. i $0\le x\le 2$, ii. $(0,0),(1.29,0)$, iii. $\min(2,-56)$ קצה, $\max(1,2)$,
$\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$ ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:

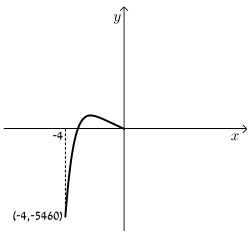


סרטוט עבור סעיף ד:

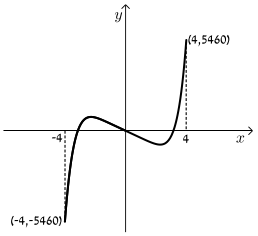


9) א. i $-4\le x\le 0$, ii. $(-1,0),(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$, יורדת: $-0.723<x<0$
ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ד:



מינימום ומקסימום בתחום סגור:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=-x^2+6x+4$ בתחום: $[0,8]$.

ב. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=2x^2+12x-3$ בתחום: $[-8,2]$.

ג. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=3x-16$ בתחום: $[1,5]$.

ד. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=2x^3+12x-5$ בתחום: $[-6,-1]$.

ה. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=3x^3-9x^2-216x$ בתחום: $[-7,12]$.

ו. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{6}x^6-6$ בתחום: $[0,3]$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-8x^2$.

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ב. מגבילים את הפונקציה $f(x)$ בתחום $-3\le x\le 1$. לפניכם מספר טענות המתייחסות לפונקציה **לאחר שהוגבלה בתחום חסום**. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה:

(1) שתי נקודות הקיצון של הפונקציה בקצות התחום הן נקודות מקסימום.

(2) לפונקציה יש שלוש נקודות קיצון פנימיות.

(3) ערך הפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט גדול ב-25 מערכה בנקודת המינימום המוחלט.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-9x^2+24x-16$ בתחום: $0\le x\le 6$.

א. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.

ב. הסבירו מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בשתי נקודות.

ג. הסבירו מדוע הישר $y=4$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

תשובות סופיות:

1) א. $\min(8,-12)$ מוחלט, $\max(3,13)$ מוחלט.

ב. $\min(-3,-21)$ מוחלט, $\max(-8,29)$ מוחלט, $\max(2,29)$ מוחלט.

ג. $\min(1,-13)$ מוחלט, $\max(5,-1)$ מוחלט.

ד. $\min(-6,-509)$ מוחלט, $\max(-1,-19)$ מוחלט.

ה. $\min(6,-972)$ מוחלט, $\max(12,1296)$ מוחלט.

ו. $\min(0,-6)$ מוחלט, $\max(3,115.5)$ מוחלט.

2) א. $\min(-2,-16)$, $\min(2,-16)$, $\max(0,0)$

ב. (1), (2) לא נכונות. (3) נכונה.

3) א. ערך גדול ביותר: 20, ערך קטן ביותר: 16-.

ב. ראו הסבר בסרטון הוידאו. ג. ראו הסבר בסרטון הוידאו.

שאלון 571

נושאים נוספים בפונקצית הפולינום

תוכן העניינים:

נושאים נוספים בפונקצית הפולינום 260

הוכחת אי-שוויונות: 261

שאלות: 261

נגזרת של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי: 262

שאלות: 262

תשובות סופיות: 263

חקירה של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי: 264

שאלות: 264

תשובות סופיות: 265

הקשר שבין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ופונקציה קדומה: 266

סיכום כללי: 266

שאלות: 267

תשובות סופיות: 270

הוכחת אי-שוויונות:

שאלות:

1) הוכיחו כי לכל $0 \le x \le 7$ מתקיים אי השוויון: $-21 \le -x^2+10x-21 \le 4$.

2) פתרו את אי-השוויונות הבאים:

א. $-2x^2+8x \le 8$

ב. $x^4-18x^2+32 \ge -49$

ג. $-3x^4+8x^3-6x^2 \le 0$

3) הוכיחו כי לכל x גרף הפונקציה: $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+5$ נמצא כולו מעל ציר ה-x.

נגזרת של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי:

שאלות:

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו את ערך הנגזרת בנקודות הבאות:

א. הפונקציה: $f(x)=5(3x+1)^3$ בנקודה שבה: $x=0$.

ב. הפונקציה: $f(x)=\frac{(2x+5)^5}{2}$ בנקודה שבה: $x=-1$.

ג. הפונקציה: $f(x)=(x^2+3)^3$ בנקודה שבה: $x=2$.

ד. הפונקציה: $f(x)=\frac{(x-x^3)^4}{4}$ בנקודה שבה: $x=0$.

ה. הפונקציה: $f(x)=(8x^4-1)^7$ בנקודה שבה: $x=-\frac{1}{2}$.

ו. הפונקציה: $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^4+4x^2+4\right)^4$ בנקודה שבה: $x=1$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x^2+x+1)^5$.

העבירו משיק בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו נקודה על גרף הפונקציה בה המשיק לפונקציה מקביל לישר $y=-5$.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=(-2x+2)^6$.

א. עבור איזו נקודה על הפונקציה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 12?

ב. מצאו את משוואת המשיק.

ג. מצאו נקודה על גרף הפונקציה שהמשיק העובר בנקודה זו מקביל לציר ה-x.

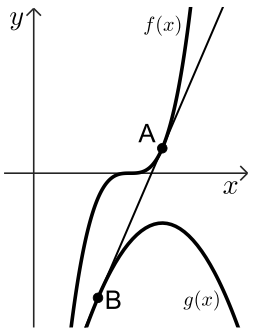
4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(2x-7)^3$.

א. לגרף הפונקציה $f(x)$ מעבירים שני משיקים שהשיפוע שלהם הוא 3,
מצאו את משוואות המשיקים.

נתונה פונקציה נוספת: $g(x)=2(x-8)^3$. המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=5$,
מקביל למשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה A שנמצאת ברביע הרביעי.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=(2x-3)^3$.



א. מצאו את הנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון, בה המשיק לגרף מאונך לישר $x+6y=0$.

ב. המשיק ל-$f(x)$ בנקודה A, משיק לפונקציה: $g(x)=-3x^2+12x-14$ בנקודה B (ראו סרטוט). מצאו את שיעורי הנקודה B.

תשובות סופיות:

1) א. 45 ב. 405 ג. 588 ד. 0 ה. $-\frac{7}{16}$ ו. $\frac{323433}{16}$

2) א. $y=5x+1$ ב. $\left(-\frac{1}{2},\frac{243}{1024}\right)$.

3) א. $(1.5,1)$ ב. $y=12x-17$ ג. $(1,0)$.

4) א. $y=3x-\frac{21}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=3x-\frac{21}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ב. $A(5,-54)$.

5) א. $A(2,1)$ ב. $B(1,-5)$.

חקירה של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x^2-10x+16)^2$.

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה פעמיים?

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x^2+9)^2-36x^2$ המוגדרת לכל x.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)$. בהסתמך על סעיפים קודמים:

ג. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ד. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

ה. בחרו בתשובה הנכונה:

(1) לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)$ יש אותם תחומי עליה וירידה.

(2) לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)$ יש אותן נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

(3) לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)$ יש אותם תחומי חיוביות ושליליות.

(4) לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)$ יש אותן נקודות קיצון.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x^2-4x-12)^2$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתון שהפונקציה $g(x)=f(x+b)$ היא פונקציה זוגית.

(1) מצאו את b.

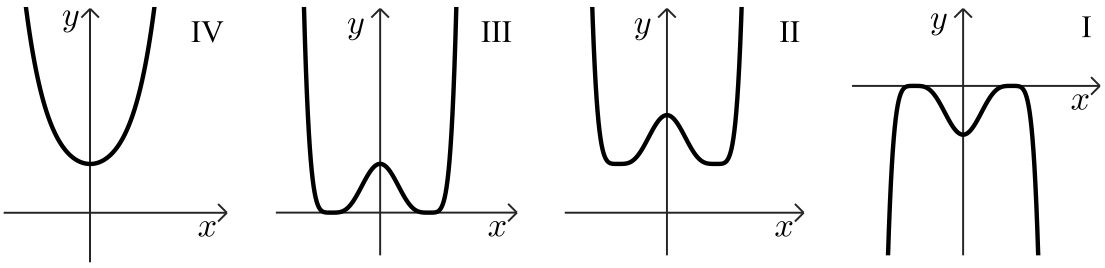
(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x^2-a)^4$, $a<0$.

א. הביעו באמצעות a את נקודות החיתוך עם הצירים (אם קיימות).

ב. הביעו באמצעות a את נקודות הקיצון ואת סוגן.

ג. בחרו מבין סקיצות I-IV את הסקיצה המתאימה ביותר לתיאור גרף הפונקציה $f(x)$.
נמקו את בחירתכם.



ד. נתון כי שיפוע גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-1$ הוא 8, מצאו את a.

תשובות סופיות:

1) א. $\min(8,0)$, $\max(6,81)$, $\min(2,0)$ ב. $(0,256)$, $(8,0)$, $(2,0)$

ג. ראו סקיצה בסרטון הוידאו. ד. $k=0$ או $k>81$.

2) א. $(0,81)$ ב. $\min(3,0)$, $\max(0,81)$, $\min(-3,0)$

ג. $(0,-81)$ ד. $\max(3,0)$, $\min(0,-81)$, $\max(-3,0)$

ה. טענה (2).

3) א. $(-2,0)$, $(6,0)$ ב. $\min(6,0)$, $\max(2,256)$, $\min(-2,0)$

ג. ראו סרטוט בסרטון הוידאו. ד. (1) $b=2$

ד. (2) $\min(4,0)$, $\max(0,256)$, $\min(-4,0)$.

4) א. $(0,a^4)$ ב. $\min(0,a^4)$ ג. IV ד. $a=2$.

הקשר שבין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ופונקציה קדומה:

סיכום כללי:

חוקים כלליים עבור נגזרת ראשונה:

- כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית ולהיפך.
- כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית ולהיפך.
- כאשר ל-$f(x)$ יש קיצון, $f'(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה-x) ולהיפך.

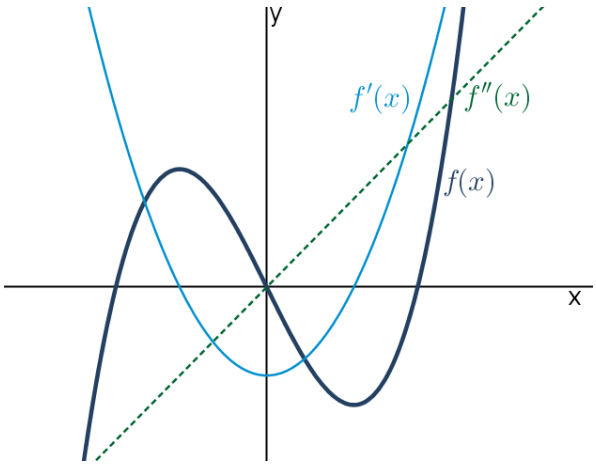
חוקים כלליים עבור נגזרת שנייה:

- כאשר $f'(x)$ עולה אז $f''(x)$ חיובית ו-$f(x)$ קעורה כלפי מעלה.
- כאשר $f'(x)$ יורדת אז $f''(x)$ שלילית ו-$f(x)$ קעורה כלפי מטה.
- כאשר ל-$f'(x)$ יש קיצון, אז $f''(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה-x) ולהיפך.

דוגמא עבור הפונקציה: $f(x)=x^3-12x$.

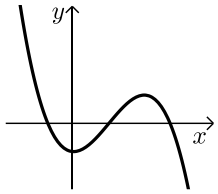
- נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=3x^2-12$.
- הנגזרת השנייה היא: $f''(x)=6x$.

ניתן לראות את החוקים האמורים לעיל באיור הנ"ל:

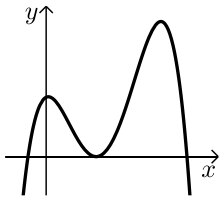


שאלות:

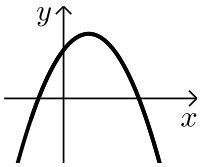
1) נתון גרף של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת.
נמק את שיקוליך בסרטוט.



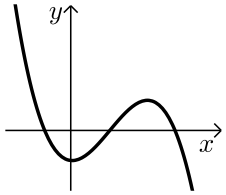
2) נתון גרף של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת.
נמק את שיקוליך בסרטוט.



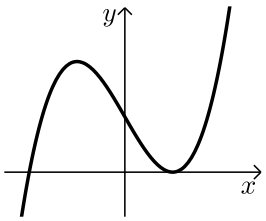
3) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
אם ידוע שהיא עובדת בראשית הצירים.
נמק את שיקוליך בסרטוט.



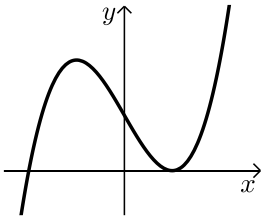
4) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
אם ידוע שהיא עובדת בראשית הצירים.
נמק את שיקוליך בסרטוט.



5) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
אם נתון: $f(0)=0$.
נמק את שיקוליך בשרטוט.

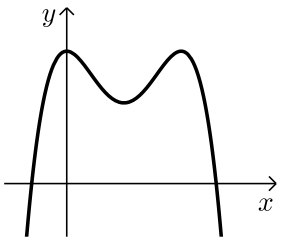


6) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
ואת גרף הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0)=0$.
נמק את שיקוליך בשרטוט.



7) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה ואת גרף הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0)=0$.

נמק את שיקוליך בשרטוט.



8) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-6x+5$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הנגזרת $f'(x)$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הנגזרת $f'(x)$.

10) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת.

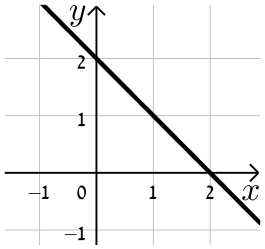
הערך המקסימלי שלה מתקבל בנקודה שבה: $x=2$.

א. מהו סימן הנגזרת עבור: $x<2$?

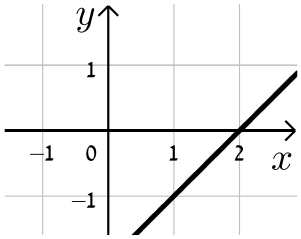
ב. מהו סימן הנגזרת עבור: $x>2$?

ג. איזה מבין הגרפים הנ"ל יכול לתאר את גרף הנגזרת?

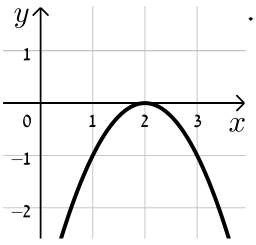
i.



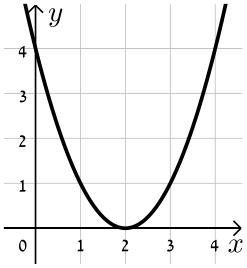
ii.



iii.



iv.

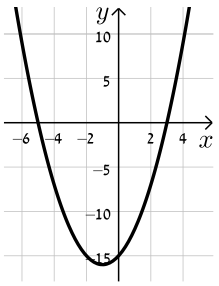


11) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-15x$.

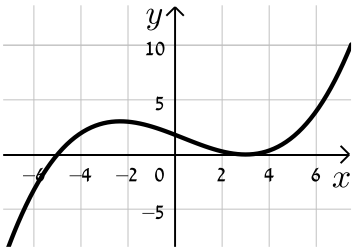
א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. איזה מבין הגרפים הבאים מתאר סקיצה של הנגזרת $f'(x)$? נמק.

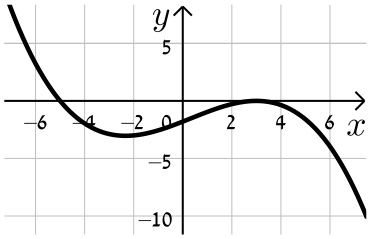
i.



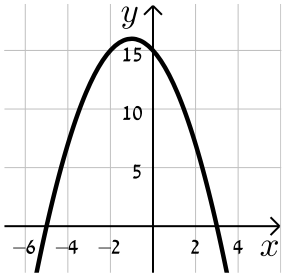
ii.



iii.



iv.



12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-4x^3$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט באמצעות נתונים אלו את הגרף של נגזרת הפונקציה.

13) ענה על הסעיפים הבאים:

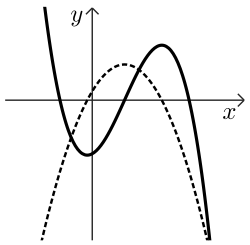
א. סרטט את גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$, של $f(x)$, אם ידוע כי ל-$f(x)$ יש שתי נקודות קיצון: מקסימום כאשר: $x=-1$ ומינימום כאשר: $x=3$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)$ ולה 3 נקודות קיצון: מקסימום כאשר: $x=0,5$ ומינימום כאשר: $x=2$. סרטט את גרף הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

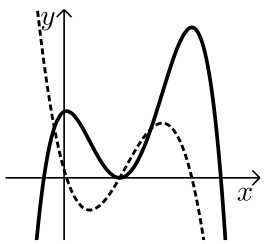
ג. סרטט את גרף הנגזרת $f'(x)$, של $f(x)$, אם ידוע כי היא יורדת לכל x והנגזרת שלה מתאפסת בנקודה שבה: $x=3$.

תשובות סופיות:

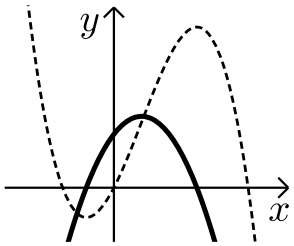
(1



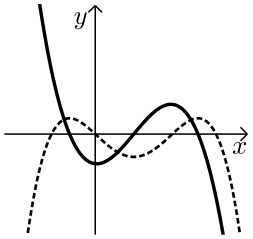
(2



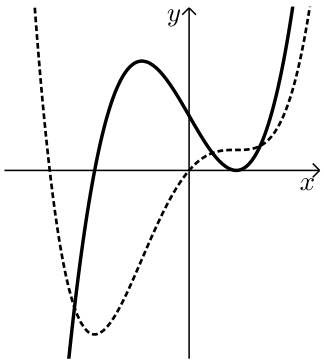
(3



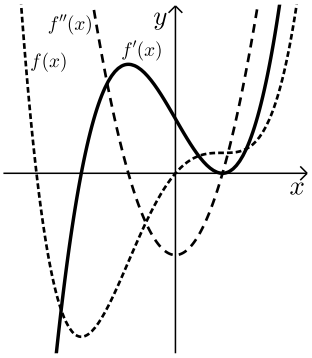
(4



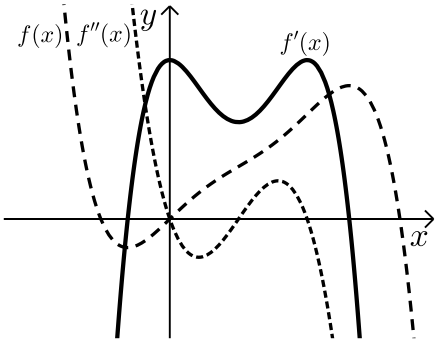
(5



(6

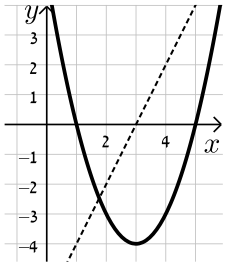


(7



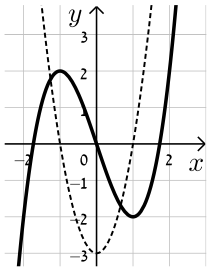
8) א. i. $(5,0)$, $(1,0)$, $(0,5)$ ii. $\min(3,-4)$.

ב.



9) א. i. $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$ ii. $\min(1,-2)$, $\max(-1,2)$.

ב.

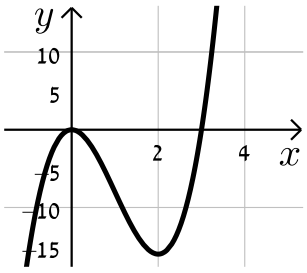


10) א. $f'(x)>0$. ב. $f'(x)<0$. ג. 1.

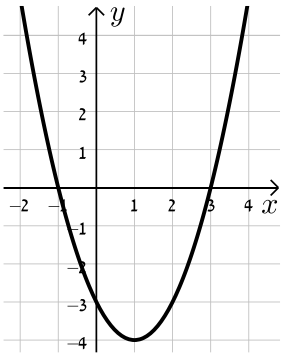
11) א. עולה: $x>3$, $x<-5$, יורדת: $-5<x<3$. ב. 1.

12) א. עולה: $x>3$ יורדת: $0<x<3$, $x<0$.

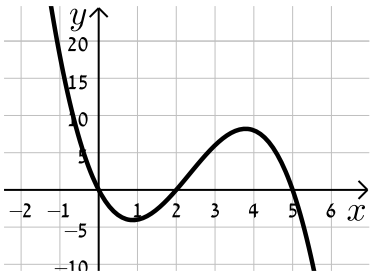
ב.



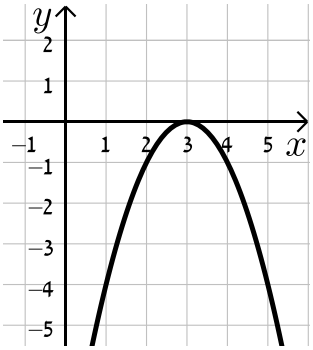
13) א.



ב.



ג.



שאלון 571

שאלות קצרות

תוכן העניינים:

שאלות קצרות.....272

כללי: 273

שאלות:..... 273

תשובות סופיות: 274

כללי:

שאלות:

1) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם הפונקציה $h(x)$ יורדת לכל x אז $h'(x)<0$ לכל x.

2) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם פונקציית פולינום היא אי-זוגית היא בהכרח עוברת בראשית.

ב. אם פונקציית פולינום היא זוגית (ממעלה 2 או יותר) היא בהכרח בעלת נקודת קיצון ב- $x=0$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו פונקציה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית.

ב. האם קיימת יותר מפונקציה אחת כזו? אם כן מצאו אותה. אם לא – הסבירו למה.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=|x^2-4x+3|$.

לפניכם סדרת טענות, קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה. נמקו קביעתכם.

א. לפונקציה 3 נקודות קיצון.

ב. בנקודות הקיצון של הפונקציה הנגזרת שווה אפס.

ג. המרחק בין נקודות המינימום המוחלט של הפונקציה הוא 2.

ד. למשוואה $f(x)=0.5$ יש בדיוק 4 פתרונות.

ה. קיימים אינסוף ערכים של k עבורם למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון.

ו. לכל ערך של $k\geq 0$ למשוואה $f(x)=k$ יש לפחות שני פתרונות.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=|9-x^2|$.

לפניכם סדרת טענות, קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה. נמקו קביעתכם.

א. לפונקציה שתי נקודות שונות המקיימות: $f'(x)=0$.

ב. אין פתרון למשוואה: $f(x)=-1$.

ג. לפונקציה 2 נקודות מינימום מוחלט.

ד. הישר מהצורה $y=k$ חותך את גרף הפונקציה לפחות פעם אחת לכל ערך של k.

ה. קיים ישר מהצורה $y=k$ החותך את גרף הפונקציה 4 פעמים.

6) נתון כי הפונקציה $f(x)$ אינה קבועה, מוגדרת לכל x והיא אי זוגית.

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא זוגית, אי-זוגית, לא זוגית ולא אי זוגית או שלא ניתן לקבוע. נמקו.

א. $h(x)=-f(x)$

ב. $k(x)=(f(x))^2$

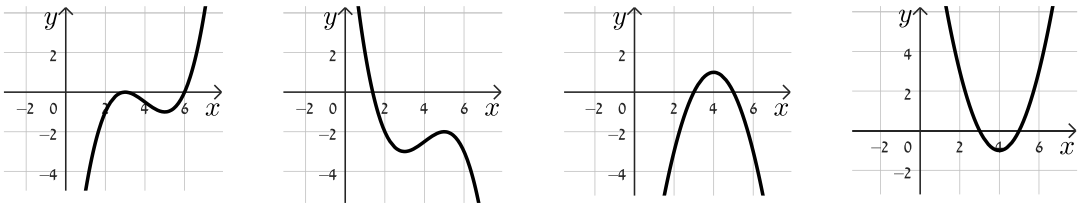
ג. $g(x)=f(x)+4$

7) הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה לכל x ממשי.

נתון כי לפונקציה יש שתי נקודות קיצון בלבד: מינימום עבור $x=3$ ומקסימום עבור $x=5$.

איזה מן הגרפים הבאים יכול לתאר את גרף הפונקציה $f'(x)$?

פרטו מגוון שיקולים בעזרתם ניתן להגיע למסקנה.



(1) (2) (3) (4)

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) א. הפונקציה: $f(x)=0$ ב. לא.

4) א. נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. נכונה. ה. נכונה. ו. נכונה.

5) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.

6) (1) אי-זוגית (2) זוגית (3) לא זוגית ולא אי-זוגית.

7) גרף (2).

שאלון 571

מבוא לפונקצית השורש

תוכן העניינים:

מבוא לפונקצית השורש..... 275

כללי: 276

סיכום כללי:..... 276

שאלות:..... 277

תשובות סופיות: 283

כללי:

סיכום כללי:

פונקצית השורש:

פונקציה הכוללת ביטוי או ביטויים עם שורש נקראת פונקצית שורש.
דוגמאות לפונקציות שונות עם שורשים:

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\ f(x)=\sqrt{x-2}\ ,\ f(x)=\sqrt{3x-1}\ ,\ f(x)=\sqrt{x^2-4}\ ,\ f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$$

תחום ההגדרה של פונקצית שורש:

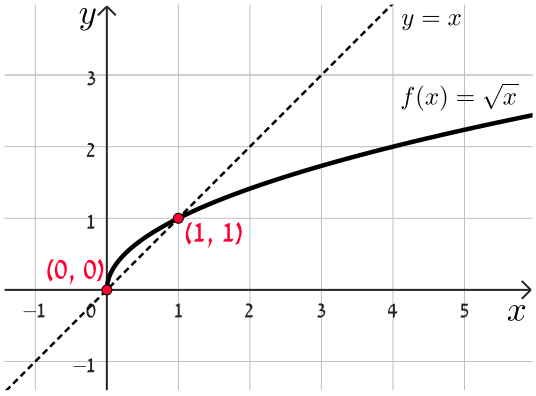
ביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

דוגמאות:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \rightarrow\ x\geq 0$$
$$f(x)=\sqrt{3x-1} \quad \rightarrow\ x\geq \frac{1}{3}$$
$$f(x)=\sqrt{x^2-4} \quad \rightarrow\ x\leq -2\ ,\ x\geq 2$$

גרף פונקצית השורש:

באיור הבא ניתן לראות את הקשר שבין גרף פונקצית השורש לבין גרף פונקצית הקו הישר מהצורה: $y=x$.



- הפונקציות נחתכות ב-$(0,0)$ וב-$(1,1)$.
- עבור $0<x<1$, גרף השורש נמצא מעל לישר.
- עבור $x>1$ גרף השורש נמצא מתחת לישר.

שאלות:

1) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x-5}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x-5}$

ג. $f(x)=2\sqrt{x-5}$

ד. $f(x)=\sqrt{2x}-5$

2) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=x+\sqrt{x}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-7}{2}$

ג. $f(x)=7-\sqrt{x}$

ד. $f(x)=7x-\sqrt{x}$

3) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-1}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-3x}-x}{3}$

ג. $f(x)=\dfrac{1}{5}\cdot(3x)^2+\sqrt{3x}$

ד. $f(x)=x^2-3x+3\sqrt{x}$

4) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{4-x}$

ב. $f(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt{x+4}$

ג. $f(x)=4\sqrt{x-2}+x\sqrt{4-x}$

ד. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{4}-1}+\sqrt{4-\dfrac{x}{2}}$

5) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

ב. $f(x)=\sqrt{49-x^2}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^2+10x}$

ד. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2-10x+25}$

ו. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

ז. $f(x)=\sqrt{x^2+25}$

ח. $f(x)=\sqrt{x^2+3x+4}$

ט. $f(x)=\sqrt{12-x-x^2}$

י. $f(x)=\sqrt{(x+4)(x-2)-7}$

יא. $f(x)=\sqrt{x+(x+2)^2}$

יב. $f(x)=\sqrt{3(x+2)+x(x-1)}$

6) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=x^2-\sqrt{x^2-x-12}$

ב. $f(x)=4+\sqrt{24-5x-x^2}-\frac{x}{3}$

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sqrt{x+a}$, a פרמטר.

ידוע כי הנקודה $A(3,4)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

א. מהו ערכו של הפרמטר a?

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2+\sqrt{bx+4}$, b פרמטר ($b\neq 0$).

ידוע כי הפונקציה מוגדרת בתחום: $x\le 4$.

א. (1) מהו ערכו של הפרמטר b?

(2) כתבו את נקודת קצה תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

(2) כתבו את משוואתו של ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y ונקודת הקצה של הפונקציה שמצאתם בסעיף א (2).

ג. מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax+\sqrt{bx+3}$, a , b פרמטרים ($b\neq 0$).

ידוע כי תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x\ge -1$ וכי הפונקציה מקיימת: $f(2)=5$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

10) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt{kx+1}$, k פרמטר ($k\neq 0$).

א. לפניכם מספר תחומי הגדרה אפשריים עבור הפונקציה $f(x)$.

קבעו אלו מהם עשוי להתקיים עבור הפונקציה $f(x)$ ומצאו את k במידה והוא מתקיים.

אם תחום ההגדרה לא יכול להתקיים, נמקו מדוע.

(1) $x\ge -1$ (2) $x\le -1$ (3) $x\ge 1$ (4) $x\le 1$

ב. ידוע כי תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x\ge -1$.

קיימת נקודה A על גרף הפונקציה המקיימת: $(t+1,t)$ (כאשר t הוא פרמטר).

מצאו את t וכתבו את שיעורי הנקודה A.

11) נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\sqrt{-x}$.

מרכיבים את הפונקציה: $h(x)=f(x)+g(x)$.

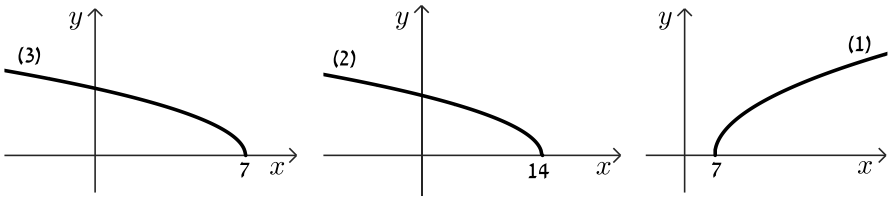
א. כתבו ביטוי מפורש לפונקציה $h(x)$ ומצאו את תחום ההגדרה שלה.

מה תוכלו לומר על הפונקציה $h(x)$?

ב. האם הפונקציה: $j(x)=3f(x)+2g(x)$ תהיה שונה מן הפונקציה $h(x)$? נמקו.

ג. האם הפונקציה: $r(x)=f(x)\cdot g(x)$ תהיה שונה מן הפונקציה $h(x)$? נמקו.

12) נתונות שתי הפונקציות: $f(x)=2x-14$ ו- $g(x)=7-x$.



א. קבעו איזה מבין הגרפים (3)-(1) מתאים לפונקציה $\sqrt{f(x)}$

ואיזה מתאים לפונקציה $\sqrt{g(x)}$.

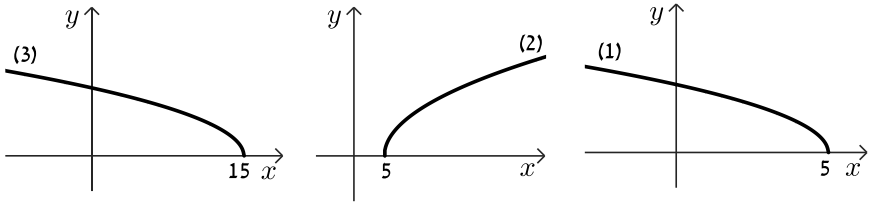
ב. איזו מבין הפונקציות הבאות מתאימה לגרף הנוסף שלא מתאים לפונקציות $\sqrt{f(x)}$ ו- $\sqrt{g(x)}$?

פונקציה 1: $h(x)=\sqrt{7-2x}$.

פונקציה 2: $k(x)=\sqrt{14-2x}$.

פונקציה 3: $j(x)=\sqrt{14-x}$.

13) נתונות שתי הפונקציות: $f(x)=15-3x$ ו- $g(x)=5x-25$.



א. קבעו איזה מבין הגרפים (3)-(1) מתאים לפונקציה $\sqrt{f(x)}$

ואיזה מתאים לפונקציה $\sqrt{g(x)}$.

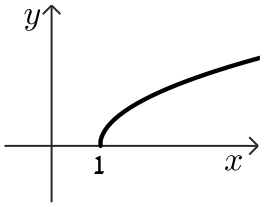
ב. איזו מבין הפונקציות הבאות מתאימה לגרף הנוסף שלא מתאים לפונקציות $\sqrt{f(x)}$ ו- $\sqrt{g(x)}$?

פונקציה 1: $h(x)=\sqrt{3x-45}$.

פונקציה 2: $k(x)=\sqrt{45-3x}$.

פונקציה 3: $j(x)=\sqrt{x+15}$.

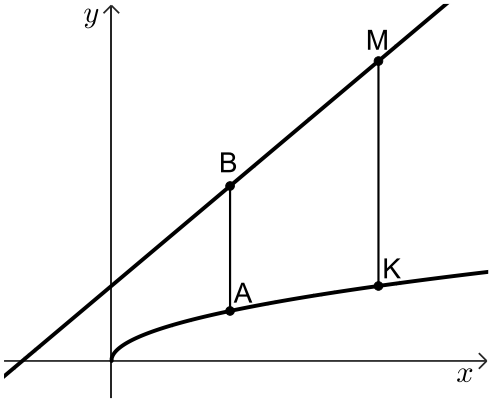
14) נתונות שלוש הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$, $h(x)=\sqrt{x-1}$.



א. הגרף הבא מתאים לאחת מן הפונקציות הנ"ל.
קבעו לאיזו פונקציה מתאים לגרף. נמקו.

ב. באלו מן הפונקציות הבאות הנקודה שבה $x=10$ קיימת על הגרפים שלהם?

15) באיור שלפניכם נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}$ ונתון הישר: $g(x)=2x+3$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הישר $g(x)$
ובה $y=11$. ידוע כי הקטע AB מקביל לציר ה- y.



א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. חשבו את שיעורי הנקודה A.

ג. חשבו את אורך הקטע AB.

ד. מסמנים נקודות K ו-M על הגרפים
של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בהתאמה
כך שהקטע KM מקביל לציר ה- y.
ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה K הוא 9.

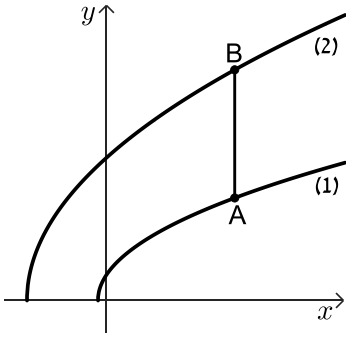
(1) מצאו את שיעורי הנקודה K.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה M.

(3) חשבו את אורך הקטע KM.

(4) חשבו את שטח של טרפז ABMK.

16) נתונות שתי הפונקציות שבאיור הבא: $f(x)=\sqrt{10x+31}$, $g(x)=\sqrt{3x+1}$.



א. קבעו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה.

ב. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה (1)
והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה (2).
שתי הנקודות נמצאות ברביע הראשון.
הקטע AB מקביל לציר ה- y ואורכו הוא 5 יחידות אורך.
מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

17) נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x-3}$ ו- $g(x)=\sqrt{11-x}$.

א. כתבו את תחום ההגדרה של כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות זו עם זו.

ג. באיזה תחום מתקיים: $f(x)>g(x)$ ובאיזו תחום מתקיים: $f(x)<g(x)$?

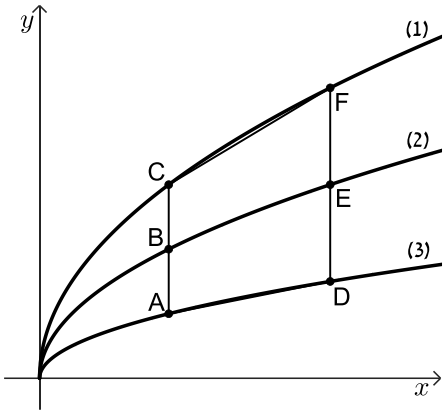
18) באיור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=2\sqrt{x}$, $h(x)=3\sqrt{x}$.

הנקודות A, B, C, D, E ו-F נמצאות על הגרפים של הפונקציות כמופיע באיור.

א. התאימו את גרפים של הפונקציות למשוואות שלהן.

ב. ידוע כי הנקודות A, B ו-C נמצאות על הישר $x=4$.

הוכיחו כי הנקודה B היא אמצע הקטע AC.



ג. מגדירים טרפז ADFC ($AC \parallel DF$).

ידוע כי שיעור ה- y של הנקודה E הוא 6.

(1) כתבו את שיעורי הנקודה E.

(2) מהו אורכו של גובה הטרפז?

(3) מצאו את שיעורי הנקודות D ו-F.

(4) מצאו את שטחו של הטרפז ADFC.

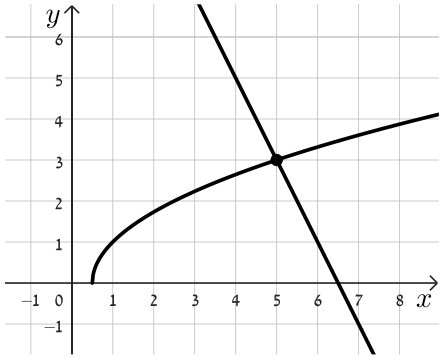
ד. מעבירים את הקטע BE.

הוכיחו כי מתקיים: $\frac{S_{ADEB}}{S_{ADFC}}=\frac{1}{2}$.

19) ברצוננו לפתור את אי השוויון הבא: $\sqrt{2x-1}<13-2x$.

כדי לבצע זאת מגדירים שתי פונקציות: $f(x)=\sqrt{2x-1}$ ו- $g(x)=13-2x$.

הגרפים של שתי הפונקציות מופיעות באיור הבא:



א. היעזרו בתרשים וכתבו את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. כתבו את פתרון אי השוויון על סמך האיור.

ג. נתייחס לאי השוויון באופן אלגברי ונפתור אותו בשתי הדרכים הבאות:

(1) פתרו את אי-שוויון באופן ישיר ע"י העלאה בריבוע ומציאת חיתוך עם תחום ההגדרה.

(2) מצאו את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות וקבעו את הפתרון המתאים.

(3) הסבירו את ההבדל בשתי הגישות, באיזו גישה קיבלתם את הפתרון הנכון? מה הסיבה לפתרון השגוי?

ד. על סמך האיור, מה יהיה פתרון אי השוויון: $\sqrt{2x-1}>13-2x$?

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 5$ ב. $x \geq 2.5$ ג. $x \geq 5$ ד. $x \geq 0$.

2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 0$ ג. $x \geq 0$ ד. $x \geq 0$.

3) א. $x \geq \frac{1}{3}$ ב. $x \leq \frac{1}{3}$ ג. $x \geq 0$ ד. $x \geq 0$.

4) א. $-2 \leq x \leq 4$ ב. $x \geq 0$ ג. $2 \leq x \leq 4$ ד. $4 \leq x \leq 8$

5) א. $x \geq 1$, $x \leq -3$ ב. $-7 \leq x \leq 7$ ג. $x \geq 0$, $x \leq -10$ ד. כל x

ה. כל x ו. כל x. ז. כל x ח. כל x ט. $-4 \leq x \leq 3$.

י. $x \geq 3$, $x \leq -5$ יא. $x \geq -1$, $x \leq -4$ יב. כל x.

6) א. $x \geq 4$, $x \leq -3$ ב. $-8 \leq x \leq 3$.

7) א. $a = -2$ ב. $x \geq 2$.

8) א. (1) $b = -1$ א. (2) $(4,6)$ ב. (1) $(0,4)$.

ב. (2) $y = \frac{1}{2}x + 4$ ג. $(-5,0)$.

9) $a = 1$, $b = 3$.

10) א. (1) ו-(4) ב. $A(3,2)$, $t = 2$.

11) א. $h(x)$: $(0,0)$ ב. לא. ג. לא.

12) א. גרף 1: $\sqrt{f(x)}$, גרף 3: $\sqrt{g(x)}$ ב. פונקציה 3.

13) א. גרף 1: $\sqrt{f(x)}$, גרף 2: $\sqrt{g(x)}$ ב. פונקציה 2.

14) א. $h(x)$ ב. $f(x)$, $h(x)$.

15) א. $B(4,11)$ ב. $A(4,2)$ ג. $AB = 9$ יח"א.

ד. (1) $K(9,3)$ ד. (2) $M(9,21)$ ד. (3) $KM = 18$ יח"א ד. (4) 67.5 יח"ש.

16) א. $f(x)$: 2 , $g(x)$: 1 ב. $B(5,9)$, $A(5,4)$.

17) א. עבור $f(x)$: $x \geq 3$, עבור $g(x)$: $x \leq 11$ ב. $(7,2)$.

ג. עבור $g(x) > f(x)$: $7 < x \leq 11$, עבור $f(x) < g(x)$: $3 \leq x < 7$.

18) א. גרף 1: $h(x)$, גרף 2: $g(x)$, גרף 3: $f(x)$ ב. ראו בסרטון.

ג. (1) $E(9,6)$ ג. (2) 5 יח"א ג. (3) $D(9,3)$ ג. (4) 25 יח"ש.

ד. ראו בסרטון.

19) א. $(5,3)$ ב. $x > 5$ ג. (1) $5 < x < 8.5$.

ג. (2) $f(x) > g(x)$ עבור $x > 5$ ג. (3) ראו בסרטון ד. $\frac{1}{2} \leq x < 5$.

שאלון 571

חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים:

חקירת פונקצית מנה ושורש..... 284

סיכום עיקרי הדברים:..... 285

שאלות – תחומי הגדרה ואסימפטוטות:..... 288

שאלות - חקירת פונקצית מנה:..... 290

שאלות - חקירת פונקצית שורש:..... 295

שאלות עם תחומי קעירות ונקודות פיתול:..... 300

תשובות סופיות:..... 302

חקירת פונקציה עם פרמטר:..... 310

שאלות:..... 310

תשובות סופיות:..... 312

תרגול נוסף:..... 313

פונקציה רציונאלית - שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות:..... 313

פונקציה רציונאלית - שאלות שונות עם משיקים:..... 313

פונקציה רציונאלית - שאלות עם פרמטרים:..... 315

פונקציה רציונאלית - שאלות מסכמות בשימושי הנגזרת:..... 317

פונקציה רציונאלית - שאלות העוסקות בחקירת פונקציה:..... 318

תשובות סופיות:..... 321

פונקציית שורש – שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות:..... 325

פונקציית שורש – שאלות העוסקות במציאת תחום ההגדרה:..... 325

פונקציית שורש – שאלות שונות עם משיקים:..... 327

פונקציית שורש - שאלות עם פרמטרים:..... 333

פונקציית שורש – שאלות מסכמות בשימושי הנגזרת:..... 336

פונקציית שורש – שאלות העוסקות בחקירת פונקציה:..... 338

תשובות סופיות:..... 346

סיכום עיקרי הדברים:

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

- תחום הגדרה.
- נקודות קיצון.
- תחומי עלייה וירידה.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- שרטוט.

תחום הגדרה של פונקציה:

- כל פולינום מוגדר לכל x.
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k)=0$ וגם: $f(k)\neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim\limits_{x\to k^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

או: $\lim\limits_{x\to k^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.
כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה
(על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.
אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית,
אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y=n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x\to\infty^+}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או: $\lim_{x\to\infty^-}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^m+\ldots}{bx^n+\ldots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m>n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m=n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=\frac{a}{b}$.
- אם $m<n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף).
עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x=\infty$ או $x=-\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}="\frac{1}{\infty}"=0$.
- הגבול: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם: $x\to 0^+$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^+}"=+\infty$.
  - אם: $x\to 0^-$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^-}"=-\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty\cdot\infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty\cdot\infty=\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty+\infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty+\infty=\infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\infty-\infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0,x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x)<0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0,x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x)>0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x)=0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות – תחומי הגדרה ואסימפטוטות:

מציאת תחום הגדרה:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

ב. $f(x)=4x^3-x^2+\frac{x}{2}+1$

ג. $f(x)=x^3-x^2-4x+1$

ד. $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

ו. $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$

ז. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ח. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x-8}$

ט. $f(x)=\frac{6}{x^2+1}$

י. $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+1}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

יב. $f(x)=\frac{x^2}{x^3-4x}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=2\sqrt{x-3}$

ג. $f(x)=\sqrt{x-4}$

ד. $f(x)=3x\sqrt{1-2x}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

ו. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ז. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

ח. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ט. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

י. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

יא. $f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-10x+9}$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$.

5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-9}$.

6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$.

7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{x^2-2x-15}$.

8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$.

9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+b}{x-b}$.

10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

ואת נקודת אי הרציפות שלה.

11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{2x^2-4x}$

ואת נקודת אי הרציפות שלה.

12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x}}$.

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$.

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$.

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$.

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1,2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

19) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$.

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16,2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

שאלות - חקירת פונקצית מנה:

הערה: השאלה הבאה הינה שאלה מסכמת המדגימה כיצד לחקור פונקצית מנה:

20) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

21) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

22) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

23) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-5x+4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

24) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{2x^2-5x+2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.

ו. סרטוט סקיצה.

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

28) לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^2}{2x^2-8}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

30) נתונה הפונקציה: $y=\frac{a^2x-4}{2x^2-1}$, (a קבוע).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $m=4$.

א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור a.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

31) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=1.5x-\frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון וסוגן.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה.

32) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.

(2) ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק

לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.

מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x.

33) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x-2}$, (a פרמטר).

ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y.

א. מצא את הערך של a.

ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(4) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?

ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34) נתונה הפונקציה: $y=\frac{x+3}{x-2}+A$, (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A,A)$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y=k$.

האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(0.5,3)$.

א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

36) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y=-1$. נמק את תשובתך.

שאלות - חקירת פונקצית שורש:

37) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

38) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

39) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x?
נמק והראה חישוב מתאים.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.

ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

45) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x-6}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ד. כתוב את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, a פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

47) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$ (k פרמטר חיובי).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.

א. מצא את k.

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה?

אם כן מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

48) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, k פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).

(2) מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.
(בטא באמצעות k).

המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A.
ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: 4 יח"ש $S=$.

ד. מצא את ערך הפרמטר k.

49) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

(1) לפונקציות תחום הגדרה זהה.

(2) שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

(3) שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותה נקודה.

(4) לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y.

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:
היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה- y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50) לפניך הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$.

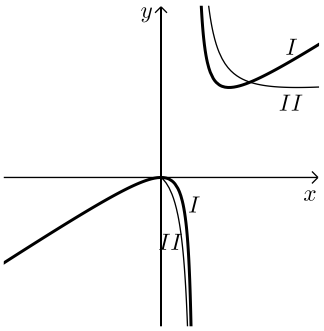
א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.

הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

(1) לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

(2) לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y=x$.

(3) הפונקציות לא חותכות זו את זו.



מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x)=\left(g(x)\right)^2$.

ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות: $h(x)$, $g(x)$, $f(x)$. נמק את בחירותיך.

51) לפניך שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$, $(k>0)$.

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.

הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

(1) לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.

(2) קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה-x כלל.

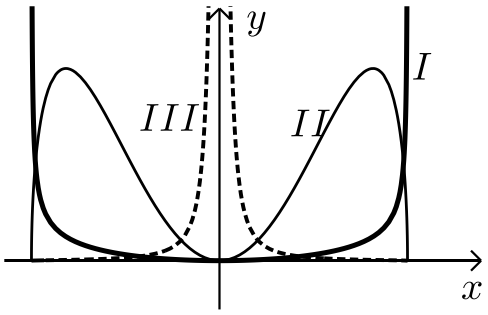
(3) הפונקציות: $h(x)$ ו-$g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן

(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

(4) לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A\left(0,\sqrt{12}\right)$ על ציר ה-y. ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x שאינה בראשית הוא: $d=6$.



ב. מצא את k.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של

שלושת הפונקציות.

קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף

שייך לכל פונקציה.

שאלות עם תחומי קעירות ונקודות פיתול:

52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x)=x^4-6x^3+12x^2$.

53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x-2}{x^2}$.

54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x)=x(x-2)^3$.

56) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2+b}$, a,b פרמטרים.

הנקודה $(-1,1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.

מצא את ערכי הפרמטרים a,b.

57) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.

iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.

vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.

viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

ב. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ג. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

ו. $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

ז. $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

ח. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

תשובות סופיות:

1) א. כל x ב. כל x ג. כל x ד. $x\neq 3$ ה. $x\neq \pm 2$ ו. $x\neq \pm 1$

ז. $x\neq -1,2$ ח. $x\neq 4,-2$ ט. כל x י. כל x יא. $x\neq \pm 1,0$ יב. $x\neq \pm 2,0$.

2) א. $x\geq 0$ ב. $x\geq 3$ ג. $x\geq 4$ ד. $x\leq \frac{1}{2}$ ה. $x\leq -2\ ,\ x\geq 1$

ו. $x>-4$ ז. $x>1\ ,\ -2\leq x<1\ ,\ x\leq -3$ ח. $x\leq -1.5\ ,\ x\geq 1$

ט. $-3<x<0\ ,\ x>3$ י. $-6\leq x<-2\ ,\ x>-2$ יא. $x<1\ ,\ 1<x\leq 2$

3) א. $\max\left(3,-1\frac{1}{2}\right)\ ,\ \min\left(-3,-\frac{3}{8}\right)$.

ב. עולה: $-3<x<3$, יורדת: $x\neq 1\ ,\ 3<x\neq 9\ ,\ x<-3$.

4) $x=2\ ,\ y=3$.

5) $x=\pm 3\ ,\ y=5$.

6) $y=\frac{2}{3}$.

7) $x=-3\ ,\ x=5\ ,\ y=0$.

8) אין.

9) $x=b\ ,\ y=a$.

10) $y=1\ ,\ x=1$, נקודת אי-הגדרה: $(2,4)$.

11) $y=\frac{1}{2}\ ,\ x=2$, נקודת אי-הגדרה: $(0,0)$.

12) $x=2\ ,\ y=0$.

13) $x=4$.

14) $x=1\ ,\ y=-1$.

15) $x=1\ ,\ y=2$.

16) $y=\lim_{x\to -\infty}\left(f\left(x\right)\right)=-3\ ,\ y=\lim_{x\to \infty}\left(f\left(x\right)\right)=3$.

17) $x=4\ ,\ x=-4\ ,\ y=5\ ,\ y=-5$.

18) $a=2\ ,\ b=-3$.

19) $a=2\ ,\ b=1$.

20) א. $x\neq 3\ ,\ x\neq \frac{1}{3}$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right)\ ,\ \min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ וגם $x\neq \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1<x\neq 3$ או $x<-1$.

ד. $(0,2)$ ה. $y=2\ ,\ x=\frac{1}{3}\ ,\ x=3$.

21) א. $x\neq 0$ ב. $\max(-1,-2)$, $\min(1,2)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-1$, יורדת: $-1<x<1$, $x\neq 0$ ד. אין

22) א. $x\neq 3$ ב. אין. ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה

ד. $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ה. $x=3$, $y=2$.

23) א. $x\neq 4$, $x\neq 1$ ב. $\max(2,-6)$, $\min\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-2<x<2$, $x\neq 1$, תחומי ירידה: $x\neq 4$, $x>2$ או $x<-2$

ד. $(0,0)$ (אסימפטוטות: $x=4$, $x=1$, $y=0$).

24) א. כל x ב. $\max\left(-3,1\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-3$, יורדת: $-3<x<1$ ד. $(0,0),(3,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

25) א. $x\neq 0$ ב. $\max(-1,-2.25)$, $\min(1,-0.25)$

ג. עולה: $x>1$, $x<-1$, יורדת: $-1<x<1$, $x\neq 0$ ד. $(2,0),(0.5,0)$ ה. $x=0$.

26) א. $x\neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(2,0),(0,-2)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

27) א. $x\neq\pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(2,0),(0,-2)$ ה. $x=-1$, $y=1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

28) א. $a=1$, $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x>0$, $x<-8$

ג. $(-4,0)$ ד. $x=0$, $y=0$.

29) א. $x\neq\pm 2$ ב. $\max(0,0)$ ג. יורדת: $x>0$, $x\neq 2$, עולה: $x<0$, $x\neq -2$

ד. $(0,0)$ ה. $x=\pm 2$, $y=1.5$.

30) א. $a=\pm 2$ ב. $(0,4)$, $(1,0)$

ג. המשיק: $y=-4x+4$ אשר עובר בנקודה $(1,0)$. נקודת החיתוך: $(1,0)$.

31) א. $x\neq -5$ ב. $\max(-9,-24.5)$, $\min(-1,-0.5)$

ג. עולה: $x>-1$, $x<-9$, יורדת: $-9<x<-1$, $x\neq -5$

ד. $(0,-0.2),\left(\frac{1}{3},0\right),(-2,0)$ ה. $x=-5$.

32) א. $x\neq 1$ ב. $x=1$, $y=1$ ג. $(0,a),(a,0)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

33) א. $a=-3$ ב. i. $x\neq 2$ ii. $(0,-3)$ iii. $\max(0,-3)$, $\min(4,5)$

iv. $x=2$ ג. $x<2$ ד. $-3<k<5$.

34 א. $A=-1$ ב. $x\neq 2$ ד. $(0,-2.5)$ ו. לא

35 א. $a=3$, $f(x)=\frac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$, כל x.

ב. $\max(-2,8)$, $\min\left(3,-\frac{1}{3}\right)$ ג. עולה: $x>3$, $x<-2$, יורדת: $-2<x<3$

ד. $(2,0),\left(0,4\frac{2}{3}\right),\left(4\frac{2}{3},0\right)$ ו. 3 , $-\frac{1}{3}$, $k=8$.

36 ב. $k=-3$ ג. $(3,0),(-3,0)$ ד. $y=-1$ ה. באף נקודה.

37 א. $x\geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

ד. $(3,0)$ ה. אין.

38 א. $x\geq 1$ ב. $\min(2,-2)$, $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x>2$, יורדת: $1<x<2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

39 א. $x\leq 6$ ב. $\max\left(4,4\sqrt{2}\right)$, $\min(6,0)$ קצה

ג. עלייה: $x<4$, ירידה: $4<x<6$ ד. $(0,0),(6,0)$.

40 א. $x\geq 0$ ב. $\max(1,1)$, $\min(0,0)$ קצה

ג. עולה: $0<x<1$, יורדת: $x>1$ ד. $(0,0)$ ה. $y=0$.

41 א. $-3\leq x\leq 3$ וגם $x\neq 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

ג. עולה: אף x, יורדת: $-3\leq x\leq 3$, $x\neq 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$ ה. $x=0$.

42 א. $x<0$, $x\geq 2$ ב. $\max\left(3,\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$, $\min(2,0)$ ג. $(2,0)$.

43 א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y=2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$ ד. $S=4\sqrt{2}$.

44 א. $x\geq 0$, $x\neq 1$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$.

45 א. $x>4$, $0\leq x<4$ ב. הוכחה. ג. $\left(0,-\frac{1}{6}\right)$ ד. $x=4$, $y=0$.

46 א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $\left(-1.5,\sqrt{3}\right)$

ד. יורדת: $-3<x<-1.5$, עולה: $-1.5<x<3$.

47 א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6,0.57)$ ג. $y=0.74x+0.1352$.

48 א. i. $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$ ii. $x=\pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x)=\frac{k^2}{\left(k-x^2\right)^{1.5}}>0$

ג. $y=\sqrt{k}x$ ד. $k=4$.

49) א. $g(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ ב. i. לא נכון ii. נכון iii. נכון iv. נכון

ג. $f(x):\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $g(x):\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ד. אסף צודק.

50) א. i. לא נכון ii. נכון iii. נכון ב. $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$

ג. לא, $h(x):x\neq 1$ ד. $\text{I}=h(x)$, $\text{II}=f(x)$.

51) א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. לא נכון ב. $k=24$

ג. $\min(0,0)$, $\max\left(\pm 4,32\sqrt{2}\right)$ ד. $\text{I}=g(x)$, $\text{II}=f(x)$, $\text{III}=h(x)$.

52) $(1,7),(2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$ או $x<1$, קעירות כלפי מטה: $1<x<2$.

53) $(2,1)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<2$.

54) קיצון: $\min(2,4)$, פיתול: $\left(4,\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

55) קיצון: $\min\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$ פיתול: $(2,0),(1,-1)$.

56) $a=4$, $b=3$.

57) א. $x\neq 0$ ב. $\max\left(2,2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $0<x<2$ יורדת: $x<0$, $x>2$

ד. $\left(\frac{1}{2},0\right),(-1,0)$ ה. $x=0$, $y=2$ ו. $\left(3,2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>3$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<3$.

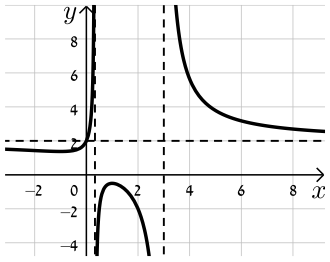
58) א. $1\neq x>0$ ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x=1$, $y=2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$. ו. $\left(\frac{1}{9},-1\right)$.

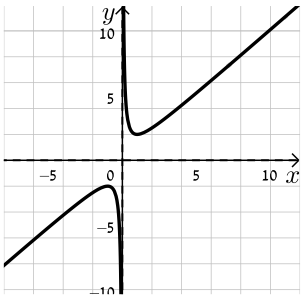
ז. קעירות כלפי מעלה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9}<x<1$.

סקיצות לשאלות החקירה:

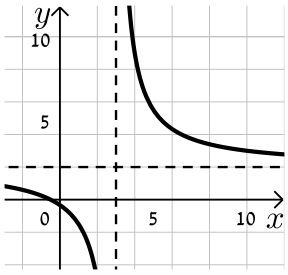
(20



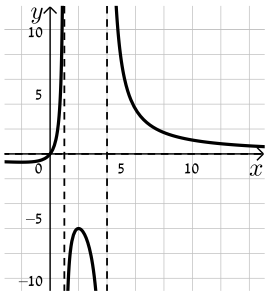
(21



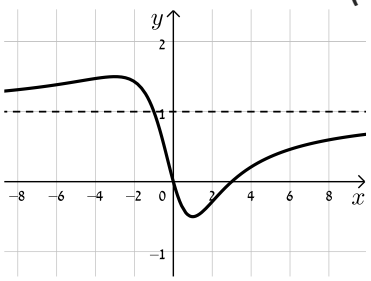
(22



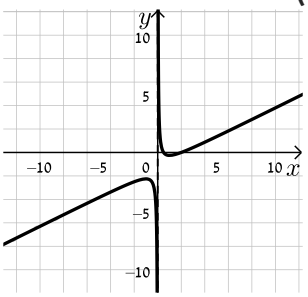
(23



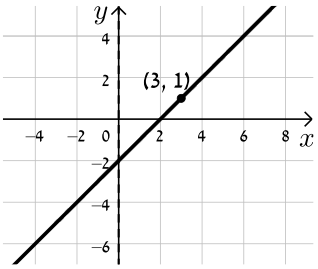
(24



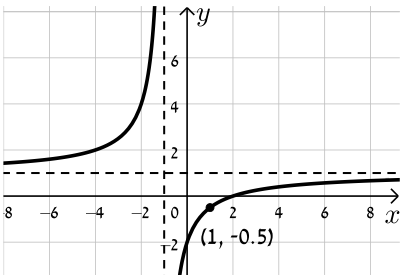
(25



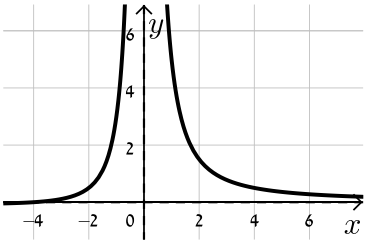
(26



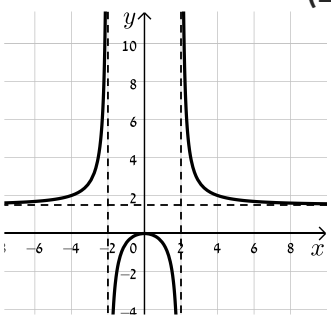
(27



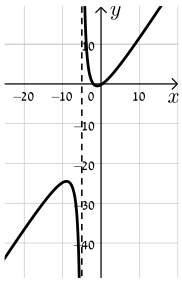
(28



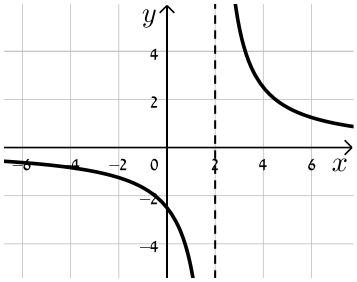
(29



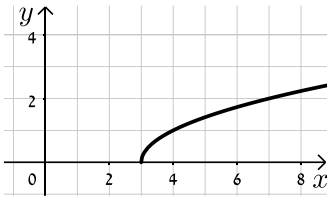
(31



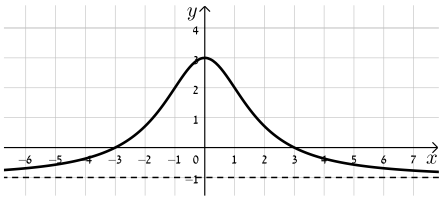
(34



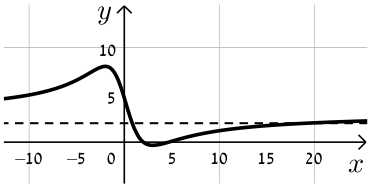
(37



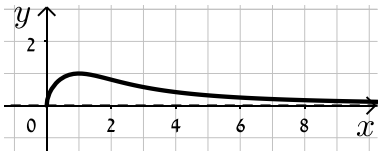
(36



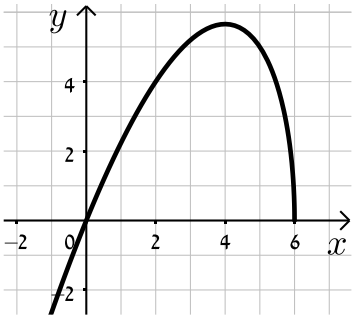
(35



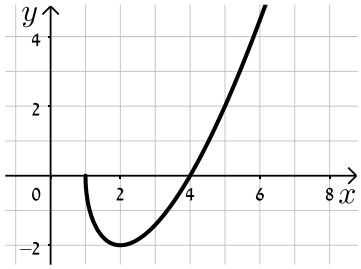
(40



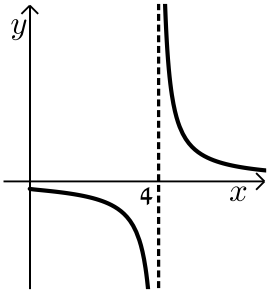
(39



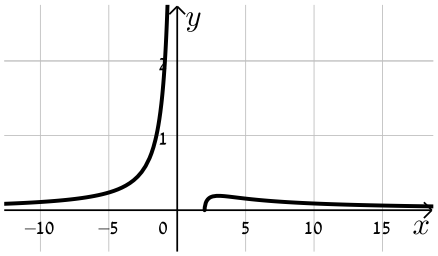
(38



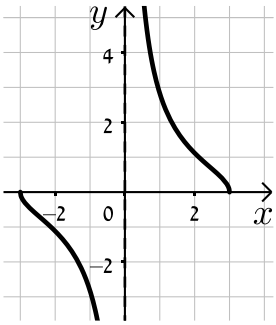
(45



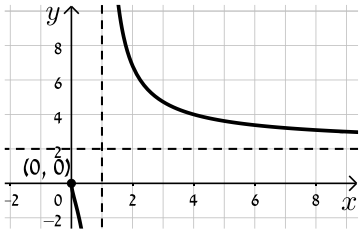
(42



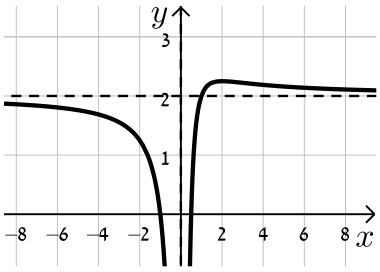
(41



(58



(57



(59 א. i. $x \neq 0$ ii. $(1,0)$ iii. $x=0$, $y=0$ iv. $\max(2,0.25)$

v. עולה: $0<x<2$, יורדת: $x<0$, $x>2$ vi. $\left(3,\frac{2}{9}\right)$

www.bagrut.co.il

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>3$, קעורה כלפי מטה: $0<x<3$, $x<0$.

ב. i. $x\neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$, $y=2$ iv. $\min(0,0)$

v. עולה: $x<-1$, $x>0$, יורדת: $-1<x<0$ vi. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-1<x<\frac{1}{2}$, קעורה כלפי מטה: $x<-1$, $x<\frac{1}{2}$.

ג. i. $x\neq \pm 2$ ii. $(0,0)$ iii. $x=\pm 2$

iv. $\max\left(-\sqrt{12},-5.2\right)$, $\min\left(\sqrt{12},5.2\right)$.

v. עולה: $x>\sqrt{12}$, $x<-\sqrt{12}$, יורדת: $2<x<\sqrt{12}$, $-2<x<2$, $-\sqrt{12}<x<-2$

vi. $(0,0)$.

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>2$, $-2<x<0$, קעורה כלפי מטה: $0<x<2$, $x<-2$.

ד. i. $x\neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-3,-6.75)$

v. עולה: $x>-1$, $x<-3$, יורדת: $-3<x<-1$ vi. $(0,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>0$, קעורה כלפי מטה: $-1<x<0$, $x<-1$.

ה. i. $x\neq 1$ ii. $(-1,0),(0,-1)$ iii. $x=1$, $y=1$ iv. אין.

v. יורדת בכל ת.ה. vi. $\left(-3,\frac{1}{8}\right),(-1,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-3<x<-1$, $x>1$, קעורה כלפי מטה: $-1<x<1$, $x<-3$.

ו. i. $x\neq 2,5$ ii. $(0,-0.1),(-1,0),(1,0)$ iii. $x=2$, $x=5$, $y=1$

iv. $\max(2.78,-3.89)$, $\min(0.359,-0.11)$

v. עולה: $2<x<2.78$, $0.359<x<2$, יורדת: $x>5$, $2.78<x<5$, $x<0.359$.

ז. i. $x\neq \pm 2$ ii. $(3,0),(1,0),(0,-0.75)$ iii. $x=\pm 2$, $y=1$

iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.

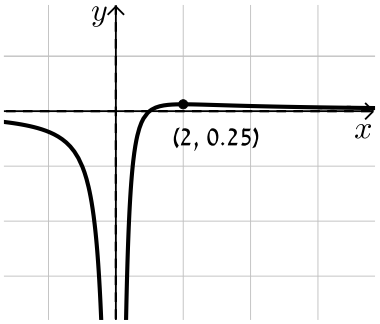
ח. i. $x\neq \pm 1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-2,-4)$, $\min(0,0)$.

v. עולה: $x>0$, $x<-2$, $x\neq 1$, יורדת: $-1<x<0$, $-2<x<-1$ vi. אין.

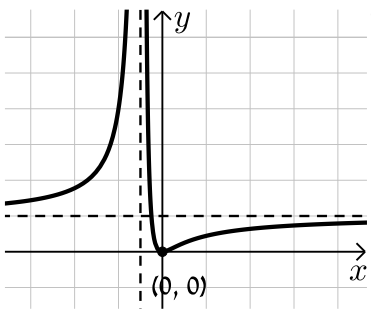
vii. קעורה כלפי מעלה: $x>-1$, $x\neq 1$, קעורה כלפי מטה: $x<-1$.

סקיצות:

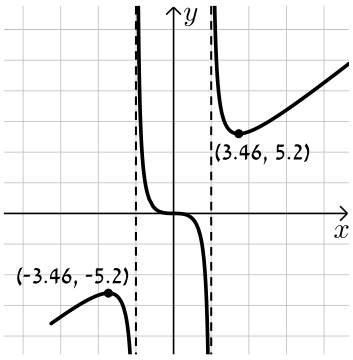
א.



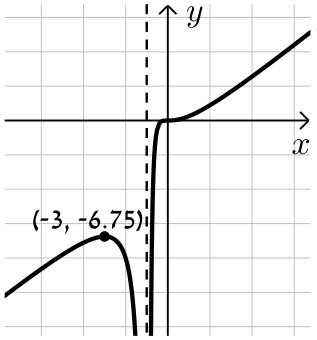
ב.



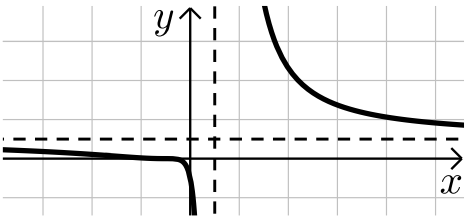
ג.



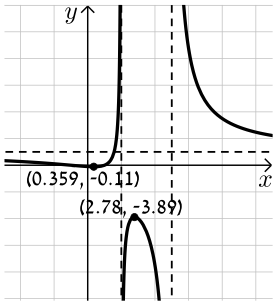
ד.



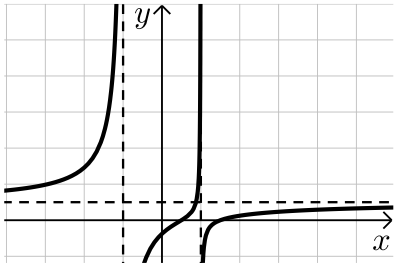
ה.



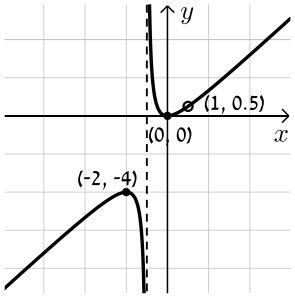
ו.



ז.



ח.



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "y:

אם הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת קיצון אז:

- אם $f''(x_1)>0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1)<0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1-x^2}{(x-b)^2}$, $(b>1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\sqrt{b^2-x^2}$, $(b>0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-m}{ax-4}$, a,m פרמטרים קבועים כאשר: $a>0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y.

א. מצא את הערך של הפרמטר m.

ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות a את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(3) האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.

ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y נמצאת במרחקים שווים מהצירים.
מצא את הערך של הפרמטר a.

ה. נתון הישר: $y=k$. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

1) א. כל x ב. $\min\left(-a,-\frac{1}{a}\right)$, $\max\left(a,\frac{1}{a}\right)$.

ג. עולה: $-a<x<a$ יורדת: $x>a$, $x<-a$.

ד. $(0,0)$ ה. אסימפטוטה אופקית : $y=0$

2) א. $x\neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b^2-1}\right)$ ג. עולה: $x>b$, $x<\frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b}<x<b$.

ד. $\left(0,\frac{1}{b^2}\right)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ה. $x=b$, $y=-1$.

3) א. $-b\le x\le b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-2b^2\right)$, $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}},2b^2\right)$, $\min(-b,0)$ קצה, $\min(b,0)$ קצה.

ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}}<x<\frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}}<x<b$, $-b<x<-\frac{b}{\sqrt{2}}$.

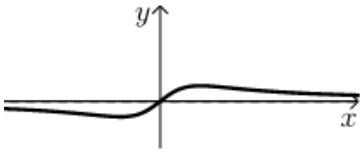
ד. $(0,0)$, $(-b,0)$, $(b,0)$.

4) א. $m=0$ ב. i. $x\neq\frac{4}{a}$ ii. $\min\left(\frac{8}{a},\frac{16}{a^2}\right)$, $\max(0,0)$ iii. $x=\frac{4}{a}$ ב.

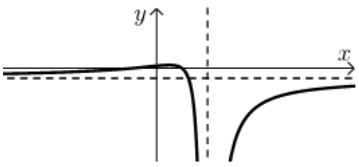
ד. $a=2$ ה. $0<k<4$.

סקיצות לשאלות:

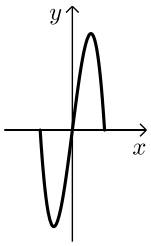
1)



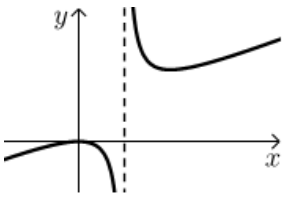
2)



3)



4)



תרגול נוסף:

הערה:

לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בוידאו והן ניתנו כבונוס לתרגול נוסף.

פונקציה רציונאלית - שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

1) $y=\frac{1}{x}$

2) $y=\frac{4x-1}{x}$

3) $y=\frac{x}{6}+\frac{6}{x}$

4) $y=\frac{x^2+5x+4}{x}$

5) $y=\frac{x^2-3x+4}{x^2}$

6) $y=\frac{(x+3)^2}{x^2}$

7) $y=\frac{3x}{2x+1}$

8) $y=\frac{6}{x^2+8x+12}$

9) $y=\frac{x+6}{x^2-6}$

10) $y=\frac{x^2-6x+8}{x^2+2x+1}$

11) $y=3+\frac{(x-9)^2}{(x+9)^2}$

12) $y=\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$

13) $y=\frac{x^3+x}{x^2-1}$

14) $y=\frac{x^2+7x+12}{x^4}$

פונקציה רציונאלית - שאלות שונות עם משיקים:

שאלות העוסקות במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0)=m$.

15) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x=1\ ,f(x)=\frac{x-1}{x-2}$

ב. $x=2\ ,f(x)=\frac{x^2}{3x^2-2}$

ג. $x=-2\ ,f(x)=\frac{3x}{(x-1)^2}$

ד. $x=0\ ,f(x)=\frac{x^2+3x+5}{3x^2-x-2}$

16) לפניך מספר פונקציות. מצא את הנקודות שבהן שיפוע הפונקציה הוא m :

א. $m=-3\ ,f(x)=\frac{x^2}{x-3}$

ב. $m=\frac{5}{9}\ ,f(x)=x+\frac{4}{x+1}$

ג. $m=\frac{1}{36}\ ,f(x)=\frac{x}{x^2+8}$

ד. $m=4\ ,f(x)=x^2+4x-\frac{x-16}{x}$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y-y_1=m(x-x_1)$ **,**

כאשר: (x_1,y_1) **- נקודת ההשקה ו-** m **שיפוע המשיק.**

17) מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x=-1\ ,\ y=\dfrac{x^2+2x}{x+3}$

ב. $x=2\ ,\ y=\dfrac{2x+5}{x^2+5}$

ג. $x=7\ ,\ y=3x-\dfrac{x+6}{x^2-12x+36}$

ד. $x=3\ ,\ y=\dfrac{(x+3)^2}{x^2}$

18) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\dfrac{2x+4}{(x+1)^2}$ העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x ואת הזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

19) נתונה הפונקציה: $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x^2}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.

20) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה שבה $x=3$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים

ג. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

21) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x+4}{2}+\dfrac{5}{2x}$.

א. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x?

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ג. האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם? אם כן, כתוב את משוואתו.

22) נתונה הפונקציה: $y=\frac{x-1}{x+1}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

ב. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

23) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=\frac{4x+2}{2x}$, $g(x)=x^3+2$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה העוברים דרך הנקודה הנמצאת ברביע הראשון.

שאלות העוסקות במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

24) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x-6}{x}$.

א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה שהשיפוע שלהם הוא 6.

ב. מצא את המרחק בין שתי נקודות החיתוך של שני המשיקים עם ציר ה- y.

25) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ היוצרים זווית של $108.43°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ המקבילים לישר: $y+3x=10$.

פונקציה רציונאלית - שאלות עם פרמטרים:

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+kx-5}{x}$.

הישר $y=6x-14$ משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

א. מצא את הפרמטר k.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. האם קיים עוד משיק לגרף הפונקציה המקביל למשיק זה?
אם כן, מצא את משוואתו.

27) המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+3}{x+\text{A}}$ בנקודה שבה $x=1$ מקביל לציר ה- x. מצא את A.

28) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2+kx+3}{x^2}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1$.

א. מצא את הפרמטר k.

ב. האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.

ג. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- x.

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{12}{9-ax^2}$. הישר $x=3$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

א. מצא את הפרמטר a.

ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$.

30) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{8x+4}{x^2+a}$. הישר $x=4$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

א. מצא את הפרמטר a.

ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלו עם הישר $4y+2x+1=0$ הנמצאת על ציר ה- x.

31) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{mx^2+2x+3}{x^2+1}$.

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=3$.

א. מצא את m.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית $y=3$.

32) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+1}{x^2-3}+\text{A}$.

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=3$.

א. מצא את A.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית $y=3$.

33) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+2}+A$.

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=5$.

א. מצא את A.

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

34) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{Ax^2+1}{x^2+1}+B$.

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=1$.

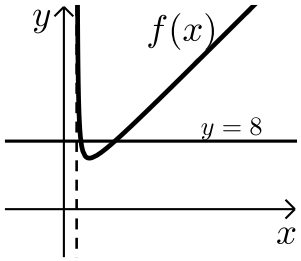
כמו כן, שיפוע הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 1.

א. מצא את A ואת B.

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

פונקציה רציונאלית - שאלות מסכמות בשימושי הנגזרת:

35) באיור שלפניך נתונות הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2}{2x-3}$ והישר: $y=8$.



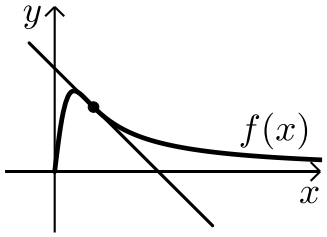
א. מצא את נקודות החיתוך של הישר והפונקציה.

ב. כתוב את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות החיתוך שלה עם הישר.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים לישר $y=8$.

36) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{10x}{x^2+1}$.



מעבירים לפונקציה משיק בנקודה שבה $x=2$.

חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק לצירים.

37) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$.

א. הראה כי הפונקציה עולה תמיד.

ב. מצא את משוואת המשיק המאונך לישר: $y=-9x$ העובר דרך נקודת ההשקה הנמצאת ברביע ראשון.

38) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+3}{x}$ בנקודה שבה: $x=1$.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $g(x)=\frac{x^2-4x}{x+2}$ המקבילים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

ג. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $h(x)=\frac{x^2+1}{x+7}$ המאונכים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

פונקציה רציונאלית - שאלות העוסקות בחקירת פונקציה:

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

39) $y=-\frac{16x^2-3x+4}{x}$

40) $y=\frac{2x^2-5x+2}{x}$

41) $y=\frac{x^2+10x+25}{x}$

42) $y=1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}$

43) $y=5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$

44) $y=1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}$

45) $y=\frac{3x}{5}-\frac{12}{5x}$

46) $y=\frac{3}{x^2-10x+25}$

47) $y=\frac{4}{3x^2-6x-9}$

48) $y=\frac{6}{x^2-9}$

49) $y=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}$

50) $y=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}$

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

51) $f(x)=\frac{2x^2-8x+8}{x^2-5x+4}$

52) $f(x)=\frac{(x+4)^2}{3x-5}$

53) נתונה הפונקציה: $y=ax+\frac{9}{2x}$, (a פרמטר). ידוע כי גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3,7.5)$.

א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

54) נתונה הפונקציה: $y=\frac{-9}{10+ax-2x^2}$.

ידוע כי יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית: $x=5$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. האם יש לפונקציה עוד אסימפטוטות? אם כן, מהן?

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

55) נתונה הפונקציה: $y=\frac{a}{2x^2+5}$, (a פרמטר).

ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=2$.

א. מצא את הפרמטר a.

ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ד. האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? אם כן – מצא אותן.

ה. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

56) הפונקציה: $f(x)=\frac{ax-30}{x^2-6x+a}$, (a פרמטר) מוגדרת לכל x.

ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=2$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

1) $y'=-\frac{1}{x^2}$ **2)** $y'=\frac{1}{x^2}$ **3)** $y'=\frac{1}{6}-\frac{6}{x^2}$

4) $y'=1-\frac{4}{x^2}$ **5)** $y'=\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}$ **6)** $y'=-\frac{6}{x^2}-\frac{18}{x^3}$

7) $y'=\frac{3}{(2x+1)^2}$ **8)** $y'=-\frac{6(2x+8)}{(x^2+8x+12)^2}$ **9)** $y'=-\frac{x^2+12x+6}{(x^2-6)^2}$

10) $y'=\frac{8x^2-14x-22}{(x^2+2x+1)^2}$ **11)** $y'=\frac{36(x-9)}{(x+9)^3}$ **12)** $y'=\frac{2x(4-x^2)}{(x^2+4)^3}$

13) $y'=\frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$ **14)** $y'=-\frac{2x^2+21x+48}{x^5}$

15) א. -1 ב. $-\frac{2}{25}$ ג. $-\frac{1}{9}$ ד. $-\frac{1}{4}$.

16) א. $(1.5,-1.5)$, $(4.5,13.5)$ ב. $\left(2,3\frac{1}{3}\right)$, $\left(-4,-5\frac{1}{3}\right)$ ג. $\left(-2,-\frac{1}{6}\right)$ $\left(2,\frac{1}{6}\right)$ ד. $(2,19)$

17) א. $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$ ב. $y=-\frac{2}{9}x+1\frac{4}{9}$ ג. $y=28x-188$ ד. $y=-\frac{4}{3}x+8$

18) $y=2x+4$, $63.64°$.

19) א. $(-2,0)$ ב. $y=1.5x+3$.

20) א. $y=4-x$ ב. $(0,4)$, $(4,0)$ ג. $135°$ ד. 8.

21) א. לא. ב. $y=-2x+7$ ג. $y=-2x-3$.

22) א. $y=2x-1$ ב. $\frac{1}{4}$.

23) א. $(-1,1)$, $(1,3)$ ב. $y=3x$, $y=4-x$.

24) א. $y=6x+16$, $y=6x-8$ ב. 24.

25) א. $y=-3x+1$, $y=-3x+9$ ב. $y=-3x-2$, $y=-3x-18$.

26) א. $k=-4$ ב. $(-1,0)$, $(5,0)$ ג. כן. $y=6x+6$.

27) $A=1$.

28) א. $k=-5$ ב. כן. $(1.5,0)$ ג. $y=-x+1$, $9y=4x-6$.

29) א. $a=1$. ב. כן. $y=0$, $x=-3$ ג. $y=\frac{4}{3}$.

30) א. $a=-16$ ב. $y=0$, $x=-4$ ג. $63y+32x+16=0$

31) א. $m=3$ ב. $y=2x+3$.

32) א. $A=3$ ב. $y=-0.5x+2.5$.

33) א. $A=3$

34) א. $A=3\ ,\ B=-2$.

35) א. $(2,8)\ ,\ (6,8)$ ב. $9y=8x+24\ ,\ y=-8x+24$ ג. $(2.4,4.8)$ ד. 6.4.

36) $S=17\frac{1}{15}$.

37) א. לכל x מתקיים: $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}>0$ ולכן הפונקציה עולה תמיד.

ב. $9y=x+5$.

38) א. -2 ב. $y=-2x\ ,\ y=-2x-24$ ג. $y=0.5x-0.5\ ,\ y=0.5x-20.5$.

39) א. $x\neq 0$ ב. $\min(-0.5,19)\ ,\ \max(0.5,-13)$.

ג. עולה: $-0.5<x<0.5$ יורדת: $x\neq 0\ ,\ x>0.5\ ,\ x<-0.5$. ד. אין. ה. $x=0$.

40) א. $x\neq 0$ ב. $\min(1,-1)\ ,\ \max(-1,-9)$.

ג. עולה: $x>1\ ,\ x<-1$ יורדת: $-1<x<1\ ,\ x\neq 0$. ד. $(2,0)\ ,\ (0.5,0)$ ה. $x=0$.

41) א. $x\neq 0$ ב. $\min(-5,0)\ ,\ \max(5,20)$.

ג. עולה: $x>5\ ,\ x<-5$ יורדת: $-5<x<5\ ,\ x\neq 0$. ד. $(-5,0)$ ה. $x=0$.

42) א. $x\neq 0$ ב. $\max(2.5,1.8)$ ג. עולה: $0<x<2.5$ יורדת: $x>2.5\ ,\ x<0$.

ד. $(1,0)\ ,\ (-5,0)$ ה. $x=0\ ,\ y=1$.

43) א. $x\neq 0$ ב. $\max\left(3,5\frac{1}{3}\right)$ ג. עולה: $0<x<3$ יורדת: $x>3\ ,\ x<0$.

ד. $(0.6,0)\ ,\ (-1,0)$ ה. $x=0\ ,\ y=5$.

44) א. $x\neq 0$ ב. $\min\left(2\frac{2}{3},-\frac{1}{8}\right)$ ג. עולה: $x>2\frac{2}{3}\ ,\ x<0$ יורדת: $0<x<2\frac{2}{3}$.

ד. $(4,0)\ ,\ (2,0)$ ה. $x=0\ ,\ y=1$.

45) א. $x\neq 0$ ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה.

ד. $(-2,0)\ ,\ (2,0)$ ה. $x=0$.

46) א. $x\neq 5$ ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה: $x<5$ יורדת: $x>5$

ד. $(0,0.12)$ ה. $x=5\ ,\ y=0$.

47) א. $x\neq -1,3$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{3}\right)$ ג. עולה: $-1<x<1\ ,\ x<-1$

יורדת: $x>3\ ,\ 1<x<3$ ד. חיתוך עם ציר ה-y: $\left(0,-\frac{4}{9}\right)$. ה. $x=-1,3\ ,\ y=0$.

48) א. $x \neq \pm 3$ ב. $\max\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ ג. עולה: $x<-3\ ,\ -3<x<0$

יורדת: $x>3\ ,\ 0<x<3$ ד. חיתוך עם ציר ה-y: $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$. ה. $x=\pm 3\ ,\ y=0$.

49) א. $x \neq -3,2$ ב. אין נקודות קיצון. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

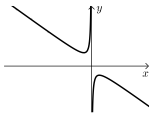
ד. $\left(0,-\frac{1}{6}\right)\ ,\ (-0.5,0)$ ה. $x=-3,2\ ,\ y=0$

50) א. $x \neq -1,-5$ ב. $\max(-3,-1)$ ג. עולה: $x<-5\ ,\ -5<x<-3$

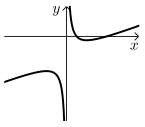
יורדת: $x>-1\ ,\ -3<x<-1$ ד. $(0,0.8)$ ה. $x=-5,-1\ ,\ y=0$.

סקיצות של שאלות 39-50:

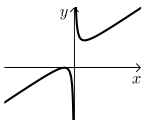
(39)



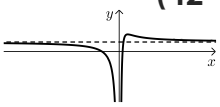
(40)



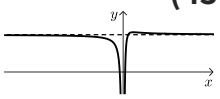
(41)



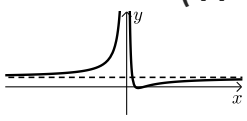
(42)



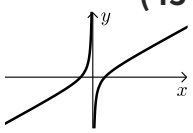
(43)



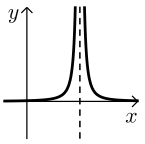
(44)



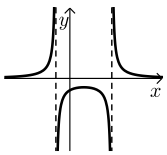
(45)



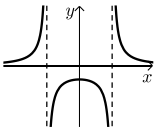
(46)



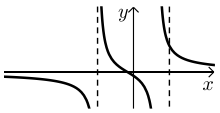
(47)



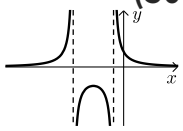
(48)



(49)



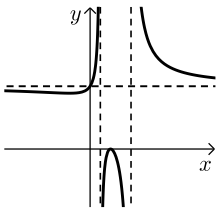
(50)



51) א. $x \neq 1,4$ ב. $\max(2,0)\ ,\ \min\left(-2,1\frac{7}{9}\right)$

ג. עולה: $-2<x<1\ ,\ 1<x<2$. יורדת: $x<-2\ ,\ 2<x<4\ ,\ x>4$.

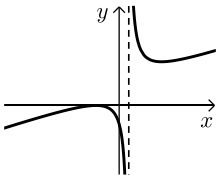
ד. $(2,0)\ ,\ (0,2)$. ה. $x=1,4\ ,\ y=2$. ו. סקיצה:



52) א. $x \neq \frac{5}{3}$ ב. $\max(-4,0)\ ,\ \min\left(7\frac{1}{3},7\frac{5}{9}\right)$

ג. עולה: $x<-4\ ,\ \frac{5}{3}<x<7\frac{1}{3}$ יורדת: $-4<x<\frac{5}{3}\ ,\ x>7\frac{1}{3}$.

ד. $(-4,0)\ ,\ (0,-3.2)$ ה. $x=\frac{5}{3}$. ו. סקיצה:



53) א. $a=2\ ,\ y=2x+\frac{9}{2x}$ ב. $\max(-1.5,-6)\ ,\ \min(1.5,6)$

ג. עולה: $x<-1.5\ ,\ x>1.5$, יורדת: $-1.5<x<0\ ,\ 0<x<1.5$.

54) א. $a=8$ ב. כן. $x=-1$, $y=0$ ג. $\max(2,-0.5)$

ד. עולה: $-1<x<2$, $x<-1$, יורדת: $x>5$, $2<x<5$.

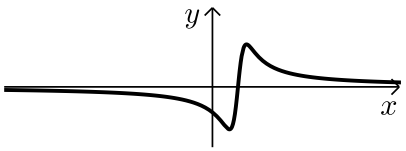
55) א. $a=10$ ב. כל x ג. $\max(0,2)$ ד. אין חיתוך עם ציר ה- x.

ה. חיובית לכל x.

56) א. $a=10$, $f(x)=\frac{10x-30}{x^2-6x+10}$ (הפתרון: $a=-6$ נפסל). ב. כן - $(4,5)$.

ג. עולה: $2<x<4$, יורדת: $x>4$, $x<2$. ד. $(3,0)$, $(0,-3)$.

ה. להלן סקיצה:



פונקצית שורש – שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

1) $y=\sqrt{x}$ **2)** $y=x-3\sqrt{x}$ **3)** $y=x^2-16\sqrt{x}$

4) $y=(2x-1)\sqrt{x}$ **5)** $y=x^2\sqrt{x}$ **6)** $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

7) $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2-1}$ **8)** $y=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}$ **9)** $y=\sqrt{x^2-3x+2}$

10) $y=x\sqrt{5x-2}$ **11)** $y=(x^2+4)\sqrt{x-2}$ **12)** $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2}$

13) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **14)** $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ **15)** $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

16) $y=(x+10)^6\sqrt{x}$ **17)** $y=(3x+1)^8\sqrt{x^2+x}$ **18)** $y=x\sqrt{x^4+6x^2-8}$

19) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ **20)** $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ **21)** $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

פונקצית שורש – שאלות העוסקות במציאת תחום ההגדרה:

22) לפניך מספר פונקציות, מצא את תחום ההגדרה שלהן.

תזכורת:

- תחום הגדרה של פונקציה המכילה ביטוי עם שורש: $y=\sqrt{f(x)}$ הוא: $f(x)\geq 0$.
- תחום הגדרה של פונקציה אי-רציונאלית: $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ הוא: $g(x)\neq 0$.

א. $y=\sqrt{x}$ ב. $y=\sqrt{x-5}$

ג. $y=\sqrt{7-2x}$ ד. $y=\sqrt{x^2-1}$

ה. $y=\sqrt{x^2+2x}$ ו. $y=\sqrt{x^2-4x-5}$

ז. $y=x^2-3\sqrt{x}$ ח. $y=\sqrt{x^3-3x^2-4x}$

ט. $y=2x\sqrt{2-x}$ י. $y=(x^2-3)\sqrt{x^2+x}$

יא. $y=\dfrac{4-\sqrt{x}}{x+2}$ יב. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

יג. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-16}$ יד. $y=\dfrac{x+6}{\sqrt{x}}$

טו. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-8}}$ טז. $y=\dfrac{4}{\sqrt{x^2-25}}$

יז. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{81-4x^2}}$ יח. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

יט. $y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+4}}$ כ. $y=\sqrt{\dfrac{25x-x^2}{x+2}}$

23) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה הבאה: $y=\sqrt{kx^2-18}$ (k פרמטר).

ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא: $x\le -3$, $x\ge 3$. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. נתונה הפונקציה הבאה: $y=\sqrt{k-3x^2}$ (k פרמטר).

ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא: $-1\le x\le 1$. מצא את ערך הפרמטר k.

ג. נתונה הפונקציה הבאה: $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+k}}$, (k פרמטר).

לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x=7$. מצא את ערך הפרמטר k.

ד. נתונה הפונקציה הבאה: $y=\dfrac{6}{\sqrt{x^2+k}}$, (k פרמטר).

לפונקציה יש אסימפטוטות אנכיות: $x=\pm 4$. מצא את k.

24) נתונה הפונקציה הבאה: $y=ax+\sqrt{x-b}$ (a,b פרמטרים).

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(2,2)$ וכי תחום הגדרתה הוא: $x\ge 2$.

מצא את a ואת b.

25) נתונה הפונקציה הבאה: $y=ax^2\sqrt{bx+3}$ (a,b פרמטרים).

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(1,4)$ וכי תחום הגדרתה הוא: $x\ge -3$.

מצא את a ואת b.

26) נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{ax^2+bx+12}$ (a,b פרמטרים).

ידוע כי הפונקציה **אינה** מוגדרת בתחום: $-4<x<-3$.

מצא את a ואת b.

פונקצית שורש – שאלות שונות עם משיקים:

שאלות עוסקות במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0)=m$.

27) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $f(x)=3x+\sqrt{x}$, $x=1$

ב. $f(x)=(x+2)\sqrt{x}$, $x=4$

ג. $f(x)=(x^2-4)\sqrt{x}$, $x=9$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+3}$, $x=1$

ה. $f(x)=\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$, $x=3$

ו. $f(x)=x\sqrt{x^2+4x+8}$, $x=2$

28) לפניך מספר פונקציות.

מצא את שיעורי הנקודות שבעבורם שיפוע המשיק הוא המצוין לידה.

א. $f(x)=\sqrt{3x-2}$, $m=1.5$

ב. $f(x)=\sqrt{4x-7}$, $m=\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=x-\frac{1}{4}\sqrt{x}$, $m=\frac{1}{4}$

ד. $f(x)=\sqrt{x^2-12}$, $m=2$

ה. $f(x)=x\sqrt{x-1}$, $m=2$

ו. $f(x)=(x+3)\sqrt{x}$, $m=5$

29) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y=2x\sqrt{4x+5}$ אשר המשיק העובר דרכה יוצר זווית של $116.57°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x .

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y=3x+\sqrt{3x^2+24}$ אשר המשיק העובר דרכה מקביל לישר: $y=4x-7$.

30) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt{x^2+24}$.

מצא את שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{3x^2+240}$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה שווה לשיפוע הפונקציה שמצאת בסעיף א'. האם קיימת יותר מנקודה אחת?

אם כן, מצא את כולן. אם לא, נמק.

ג. הראה כי לשתי הפונקציה יש את אותו השיפוע בעבור: $x=0$. מהו השיפוע?

31) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{x-3}$ ו- $g(x)=2-\sqrt{5-x}$.

א. מצא את שיעור ה- x בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.

ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

32) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{2x+6}$ ו- $g(x)=6-\sqrt{9-x}$.

א. מצא את שיעור ה- x בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.

ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

33) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=5\sqrt{4x-3}+\frac{1}{3}\sqrt{36x-27}$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה שווה ל-12.

הנחייה: לאחר הגזירה הוצא גורם משותף בתוך השורש שבמכנה השני

וסמן: $t=4x-3$ ופתור משוואה בעבור t.

34) מצא שתי נקודות על גרף הפונקציה $y=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$ ששיפוע המשיק העובר דרכן הוא: $m=-1$.

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y-y_1=m(x-x_1)$,

כאשר: (x_1,y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

35) מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x=1\ ;\ y=3x^2-\sqrt{x}$

ב. $x=7\ ;\ y=\sqrt{2x-5}$

ג. $x=4\ ;\ y=\left(2x^2-8\right)\sqrt{x}$

ד. $x=2\frac{2}{3}\ ;\ y=\sqrt{x^2-2x}$

ה. $x=2\ ;\ y=x\sqrt{x^2+5}$

ו. $x=3\ ;\ y=\frac{\sqrt{x+6}}{x}$

ז. $x=6\ ;\ y=\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}$

ח. $x=1\ ;\ y=\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$

36) נתונה הפונקציה הבאה: $y=x-4\sqrt{x}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה בראשית הצירים.

37) נתונה הפונקציה הבאה: $y=2x-\frac{1}{3}\sqrt{x}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה בראשית הצירים.

38) לגרף הפונקציה: $y=x-2\sqrt{x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $y=3$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של משיק זה עם הצירים.

ג. חשב את הזוויות של המשולש שנוצר בין המשיק והצירים.

ד. חשב את שטח משולש זה.

39) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\sqrt{x^2-4x+9}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

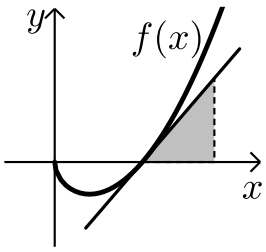
ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

40) נתונה הפונקציה הבאה: $y=3x-\sqrt{25-2x^2}+1$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

41) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-\sqrt{x}$.



א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מהנקודה A שנמצאת על המשיק מורידים אנך לציר ה- x כך שנוצר משולש בין המשיק, האנך וציר ה- x (ראה איור). ידוע כי שטח המשולש הוא $S=12$.
מצא את שיעורי הנקודה A.

42) נתונה הפונקציה הבאה: $y=x\sqrt{x^2+4}$. מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה $x=1.5$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- y.

ג. מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת ההשקה של המשיק.

חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק, האנך וציר ה- y.

43) נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{-x^2+8x-12}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הראה כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=3$ עובר ב- $(0,0)$.

44) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{3}\sqrt{2x+3}$.

א. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=11$.

ב. כתוב את משוואת המשיק הנ"ל.

ג. האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם?
אם כן , כתוב את משוואתו.

45) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{3x+1}}{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ב. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך עם ציר ה- y.

ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק שמצאת לצירים.

47) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
הנחייה: השווה בין שני הביטויים והעלה בריבוע את המשוואה ופתור
משוואה דו-ריבועית על ידי סימון: $x^2=t$.

ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

שאלות העוסקות במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

תזכורת:

בחלק מהתרגילים יש להיעזר בתכונות השיפועים של ישרים מקבילים ומאונכים:

- ישרים מקבילים הם בעלי אותו השיפוע ולהפך.
- מכפלת השיפועים של ישרים מאונכים תמיד 1-.

כגון שני ישרים בעלי שיפועים: m_1 , m_2 אזי: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

48) ענה על הסעיפים הבאים:

א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 4\sqrt{x} - 2$

המקביל לישר: $2y - x = 3$.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{10x + 7}$

המקביל לישר: $y = 5x$.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 3x + \sqrt{x}$

המאונך לישר: $4y = 5 - x$.

ד. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4x+3} - 2x$

המאונך לישר: $y = x$.

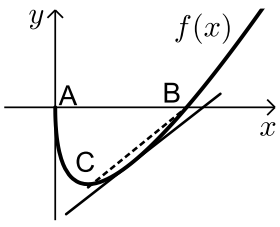
49) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8\sqrt{x} - x$.

א. מצא על גרף הפונקציה נקודה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא 3.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך עם ציר ה- x שאינה ראשית הצירים.

50) נתונה הפונקציה: $f(x) = x - 10\sqrt{x}$ באיור הסמוך.



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B - נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C המקיימת: $f'(x) = 0$.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר BC.

51) נתונות הפונקציה הבאות: $f(x)=x^2\sqrt{x}$, $g(x)=4\sqrt{2x+3}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בעל השיפוע $m=20$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק שמצאת בסעיף הקודם והפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

52) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=4\sqrt{3x-2}$, $g(x)=2x\sqrt{x}+3$.

הראה כי לשתי הפונקציות משיק משותף ששיפועו הוא 3.

53) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=4x\sqrt{10-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המאונך לישר: $y=-0.5x+51$.

ב. הראה כי הישר הנתון בסעיף הקודם הוא נורמל לפונקציה בנקודת ההשקה.

54) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. מצא את הנקודה אשר שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרכה הוא 0.

ד. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות שמצאת בסעיפים ב' ו-ג'.

55) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^2}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x? אם כן, באיזו נקודה?

ג. הראה כי לא קיים ישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לישר: $y=6$.

56) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x? מצא אותן.

ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

57) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{3-3x}$.

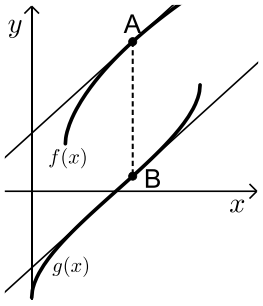
א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. הראה כי הגרפים מאונכים זה לזה בנקודת החיתוך שמצאת.

ג. מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה בנקודת החיתוך שמצאת.

ד. דרך הנקודות A ו-B, הנמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בהתאמה, מעבירים ישר. ידוע כי הישר מקביל לציר ה-y. כמו כן מעבירים משיקים לפונקציות דרך הנקודות A ו-B. משיקים אלו מאונכים זה לזה.
מצא את הנקודות A ו-B.

58) נתונות הפונקציות הבאות: $g(x)=2\sqrt{x}-2\sqrt{10-x}$, $f(x)=2\sqrt{x}+2\sqrt{x-2}$.



מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כמתואר באיור. ידוע כי הישר AB מקביל לציר ה-y. מעבירים מהנקודות A ו-B משיקים לכל פונקציה.
ידוע כי המשיקים מקבילים.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואות המשיקים.

פונקצית שורש - שאלות עם פרמטרים:

59) ענה על השאלות הבאות:

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=A\sqrt{x}+3x^2$, (A פרמטר).
ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=4$ הוא 25.
מצא את A.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{5x+A}$, (A פרמטר).
ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$ הוא 1.
מצא את A.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2+Ax+25}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y הוא 2.
מצא את A.

ד. נתונה הפונקציה: $y=(x+A)\sqrt{x+1}$, A פרמטר.

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x=3$ הוא 3.

מצא את A.

ה. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+A}$, A פרמטר. ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה:

$x=1$ הוא $\frac{1}{18}$.

מצא את A. הבחן בין שני מקרים.

ו. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+Ax+4}}$, A פרמטר.

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y הוא 4.

מצא את A.

60) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt{2x+A}+Bx$, A, B פרמטרים.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y היא: $y=3x+1$.

מצא את A ואת B.

61) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\sqrt{x^2+Ax+B}$, A, B פרמטרים.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת שבה: $x=1$ היא: $y=x+2$.

מצא את A ואת B.

62) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sqrt{x-3}$, a פרמטר.

ידוע כי הפונקציה עוברת ב-$A(12,a+4)$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק לצירים.

63) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sqrt{3x+16}$, a פרמטר.

ידוע כי הישר $y=2x-8$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=11$.

א. מצא את נקודת החיתוך.

ב. מצא את ערך הפרמטר a.

ג. האם הישר חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודה? אם כן, מהי?

ד. האם הישר הנתון הוא המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף א'?

אם כן, נמק. אם לא, מצא את משוואת המשיק.

64) הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2-2x+5$ ו- $g(x)=x^2-k\sqrt{x}$, (k פרמטר)

נחתכים בנקודה שבה: $x=6.25$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ג. האם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ נחתכים בעוד נקודות?

אם כן – מצא אותן.

ד. מצא את משוואות המשיקים לגרפים של שתי הפונקציות בנקודות החיתוך שלהם.

65) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$, (k פרמטר).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה?

אם כן – מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

66) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x+A}}{x+B}$, (A, B פרמטרים).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ הוא: $-\frac{1}{18}$.

א. מצא את A ואת B.

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y והראה כי בעבור שני המקרים מתקבלת אותה הנקודה.

67) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{Ax^2+Bx}}$, (A, B פרמטרים).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ הוא: $\frac{1}{8}$. מצא את A ואת B.

68) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x\sqrt{Ax+3}$. ידוע כי $f'(1)=2.25$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ג. כתוב את משוואת הישר המאונך לגרף הפונקציה ועובר דרך נקודת ההשקה הנ"ל (נורמל לפונקציה).

69) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x+7}}{x^2+A}$, A פרמטר.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x=4$.

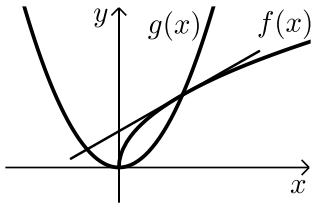
א. מצא את A ואת האסימפטוטה האנכית הנוספת של גרף הפונקציה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $x=2$.

ג. מצא את נקודת החיתוך של המשיק והאסימפטוטה: $x=4$.

פונקצית שורש – שאלות מסכמות בשימושי הנגזרת:

70) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x}$ ו- $g(x)=x^2$.

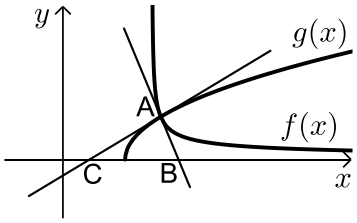


א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

71) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ ו- $g(x)=\sqrt{x-3.5}$.



א. מצא את הנקודה A - נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואות המשיקים לכל גרף העוברים דרך נקודת החיתוך.

ג. המשיקים חותכים את ציר ה- x בנקודות B ו-C כך שנוצר המשולש ABC. חשב את שטח המשולש.

72) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{kx-\sqrt{x}}{2}$. ידוע כי: $f'(9)=\frac{5}{12}$.

א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שבה x חיובי שמצאת בסעיף הקודם.

73) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{A}{\sqrt{x^2+4}}$, A פרמטר.

א. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- x כלל.

ב. מצא את A אם ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=5$.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

74) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{\sqrt{x}}$, (A, B פרמטרים).

מעבירים לגרף הפונקציה שני משיקים. משיק אחד עובר דרך הנקודה שבה $x=4$

ושיפועו הוא: $m=\frac{3}{8}$. משיק שני מעבירים דרך הנקודה שבה $x=1$

וידוע כי הוא מקביל לישר: $2y=5x+3$. מצא את A ואת B.

75) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

א. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את הצירים כלל.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר הוא 0.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=5$.

76) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x?
נמק והראה חישוב מתאים.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

פונקצית שורש – שאלות העוסקות בחקירת פונקציה:

שאלות העוסקות במציאת נקודות קיצון לפי הכלל: $f'(x)=0$

סיווגן ומציאת תחומי עלייה וירידה:

77) לפניך הפונקציות הבאות:

מצא את נקודות הקיצון (כולל נקודות קיצון קצה במידה וישנן) שלהן וקבע את סוגן (זכור למצוא תחילה את תחום ההגדרה ולפסול נקודות שאינן נמצאות בו).

א. $y=x-\sqrt{x}$ ב. $y=x^2\sqrt{x+2}$ ג. $y=\sqrt{x^2-4x+25}$

ד. $y=\sqrt{x^4-8x^2+16}$ ה. $y=\frac{\sqrt{x}}{x+3}$ ו. $y=\frac{\sqrt{x}}{x-3}$

ז. $y=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$ ח. $y=\frac{x}{\sqrt{3x^2-x-2}}$

78) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\sqrt{x^2+3x-4}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

79) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\sqrt{x^2+3x+4.5}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

80) נתונה הפונקציה: $y=\sqrt{x^2+3x}-x$.

א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון מקומיות כלל.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

שאלות העוסקות בחקירה מלאה של פונקציה אי-רציונאלית:

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

81) $y=2\sqrt{x}-x$

82) $y=2x-\frac{\sqrt{16x-1}}{4}$

83) $y=x^2\sqrt{4x+5}$

84) $y=\sqrt{x^3-x}$

85) $y=x\sqrt{x^2+5x+7}$

86) $y=\sqrt{x+8}+\sqrt{x+1}$

87) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+2}$

88) $y=\frac{\sqrt{x}}{x-2}$

89) $y=\frac{\sqrt{x+8}}{x^2}$

90) $y=\frac{x}{\sqrt{10-x}}$

91) $y=\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}}$

92) $y=\frac{x^2-4}{\sqrt{9-x^2}}$

93) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{16x-x^2}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

94) נתונה הפונקציה: $f(x)=-2\sqrt{36x-x^2}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

95) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

96) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2+24x-25}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. כתוב את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

97) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{-x^2+10x-16}+k$, k פרמטר.

ידוע כי לפונקציה יש נקודת מקסימום הנמצאת על ציר ה- x.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן.
אם, לא נמק מדוע והראה חישוב מתאים.

ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

98) נתונה הפונקציה: $f(x)=k\sqrt{9-x^2}$. ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון שבה: $y=12$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן.
אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.

ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

99) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+1-2\sqrt{x+1}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

100) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+k-\sqrt{11-2x}$, k פרמטר. ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(5,6)$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. האם יש לפונקציה נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

101) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x+k\sqrt{x}$, k פרמטר.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=16$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

102) נתונה הפונקציה: $f(x)=k\sqrt{x}-x$, k פרמטר.

ידוע כי הישר $y=3$ חותך את הפונקציה בנקודה שבה $x=9$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. האם הישר $y=3$ חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

103) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{8}-4\sqrt{x}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

104) נתונה הפונקציה: $f(x)=kx+k\sqrt{x}-4$, k פרמטר.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(4,4k)$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

105) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{16-x}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

106) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{kx}-\sqrt{4-x}$. k פרמטר.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x בעוד נקודות?
אם כן, מצא אותן ואם לא נמק.

ד. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.

107) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{9-2x}+m$, m פרמטר.

א. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את m אם ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(3,2)$.

ד. מצא את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.

108) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\sqrt{16-x^2}$.

א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

109) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{8-x^2}+kx$, k פרמטר.

הישר $y=-2x+4$ משיק לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

110) נתונה הפונקציה: $y=\frac{\sqrt{x-2}}{4}+\frac{x}{16}$.

א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון מקומיות (פנימיות)? מצא במידה וכן.

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים? אם כן, מצא אותן.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y=m$.

לאלו ערכים של m יש לישר ולגרף הפונקציה נקודה משותפת אחת בלבד?

111) לפניך שלוש פונקציות: $h(x)=x\sqrt{x+k}$, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $f(x)=\sqrt{x+k}$; $(k>0)$.

א. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו לא נכונות והצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

(1) לכל הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

(2) כל הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

(3) כל הפונקציות חותכות את ציר ה- x פעם אחת בלבד.

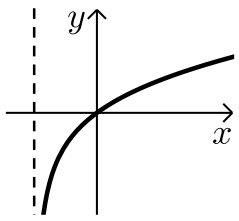
מעבירים משיקים לגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודת החיתוך שלהם עם ציר ה- y. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $g(x)$ גדול ב- $\frac{1}{4}$ משיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$. ענה על הסעיפים הבאים:

ב. בטא באמצעות k את שיפועי המשיקים לכל פונקציה.

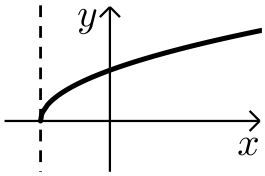
ג. מצא את k.

ד. לפניך 4 איורים I-IV, קבע איזה איור מייצג כל פונקציה. נמק את בחירותיך.

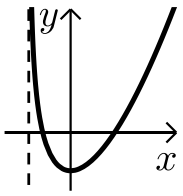
I.



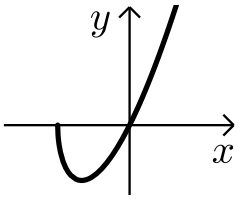
II.



III.



IV.



***הערה: בשאלה הבאה נדרש ידע בפתרון אי-שוויונים ממעלה גבוהה.**

112) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. גזור את הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה נוספת $g(x)$ המקיימת: $g(x)=(f(x))^2$.

לפי כללי הגזירה של פונקציה מורכבת ניתן לכתוב את הנגזרת של $g(x)$

באופן הבא: $g'(x)=2\cdot f(x)\cdot f'(x)$.

ג. כתוב את הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ לפי המכפלה הנ"ל וצמצם במידת האפשר.

הראה כי הביטוי הסופי של הנגזרת הוא: $g'(x)=-\frac{4+x^2}{(x^2-4)^2}$.

ד. באופן כללי, לפי כלל הגזירה הנ"ל, אלו נקודות על גרף הפונקציה $f(x)$

הן נקודות החשודות לקיצון בעבור $g(x)$?

ה. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) האם לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון במקרה שלנו?

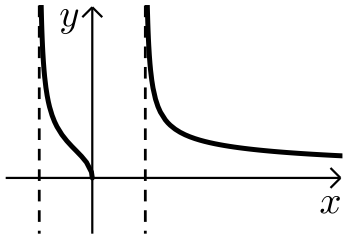
נמק על פי הסעיף הקודם.

(2) מה ניתן לומר על גרף הפונקציה $f(x)$ לפי זה?

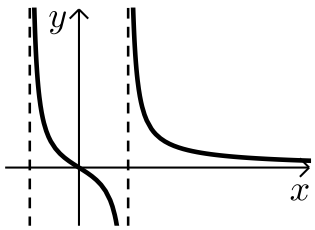
ו. לפניך שתי סקיצות I-II:

קבע איזו סקיצה מתארת את גרף הפונקציה $f(x)$. נמק את בחירתך.

I.



II.



תשובות סופיות:

1) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **2)** $y'=1-\frac{3}{2\sqrt{x}}$ **3)** $y'=2x-\frac{8}{\sqrt{x}}$

4) $y'=2\sqrt{x}+\frac{2x-1}{2\sqrt{x}}$ **5)** $y'=2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}$ **6)** $y'=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

7) $y'=-\frac{3x^2+4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(x^2-1\right)^2}$ **8)** $y'=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ **9)** $y'=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$

10) $y'=\sqrt{5x-2}+\frac{5x}{2\sqrt{5x-2}}$ **11)** $y'=2x\sqrt{x-2}+\frac{x^2+4}{2\sqrt{x-2}}$ **12)** $y'=\frac{8-3x}{2x^3\sqrt{x-2}}$

13) $y'=-\frac{x}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}}$ **14)** $y'=-\frac{4}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}}$ **15)** $y'=\frac{1-x}{2\left(x^2+x+1\right)^{1.5}}$

16) $6\left(x+10\right)^5\sqrt{x}+\frac{\left(x+10\right)^6}{2\sqrt{x}}$ **17)** $8\left(3x+1\right)^7\sqrt{x^2+x}+\frac{\left(2x+1\right)\left(3x+1\right)^8}{2\sqrt{x^2+x}}$

18) $\frac{3x^4+12x^2-8}{\sqrt{x^4+6x^2-8}}$ **19)** $y'=-\frac{3}{2\left(x-2\right)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ **20)** $y'=\frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$

21) $y'=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

22) א. $x\geq 0$ ב. $x\geq 5$ ג. $x\leq 3.5$ ד. $x\leq -1\,,\,x\geq 1$

ה. $x\geq 0\,,\,x\leq -2$ ו. $x\leq -1\,,\,x\geq 5$ ז. $x\geq 0$ ח. $-1\leq x\leq 0\,,\,x\geq 4$

ט. $x\leq 2$ י. $x\leq -1\,,\,x\geq 0$ יא. $x\geq 0$ יב. $x\geq 0\,,\,x\neq 5$

יג. $x\neq \pm 4$ יד. $x>0$ טו. $x>2\frac{2}{3}$ טז. $x<-5\,,\,x>5$.

יז. $-4.5<x<4.5$ יח. $x<-3\,,\,x\geq 1$ יט. $x\geq 0$ כ. $x<-2\,,\,0\leq x\leq 25$

23) א. 2 ב. 3 ג. -7 ד. -16

24) $a=1\,,\,b=2$.

25) $a=2\,,\,b=1$.

26) $a=1\,,\,b=7$.

27) א. 3.5 ב. 3.5 ג. $66\frac{5}{6}$ ד. $\frac{1}{16}$ ה. $-\frac{2}{9}$ ו. $\frac{28}{\sqrt{20}}$

28 א. $(1,1)$ ב. $(8,5)$ ג. $\left(\frac{1}{36},-\frac{1}{72}\right)$ ד. $(4,2)$ ה. $(2,2)$, $\left(\frac{10}{9},\frac{10}{27}\right)$

ו. $\left(\frac{1}{9},\frac{28}{27}\right)$, $(9,36)$.

29 א. $(-1,-2)$ ב. $(2,12)$.

30 א. $m=\frac{2}{\sqrt{28}}$ ב. $\left(2,\sqrt{252}\right)$. הנקודה $x=-2$ נפסלת עקב העלאה בריבוע.

ג. $m=0$.

31 א. $(4,1)$

32 א. $(5,4)$

33 $(1,6)$

34 $(2.25,4.5)$

35 א. $y=5.5x-3.5$ ב. $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ ג. $y=38x-104$.

ד. $y=1.25x-2$ ה. $y=4\frac{1}{3}x-2\frac{2}{3}$ ו. $y=-\frac{5}{8}x+1\frac{5}{6}$

ז. $y=3.74x-4.5$ ח. $y=-2x+4$.

36 א. $(0,0)$, $(16,0)$ ב. $y=0.5x-8$.

37 א. $(0,0)$, $\left(\frac{1}{36},0\right)$ ב. $y=x-\frac{1}{36}$.

38 א. $y=\frac{2}{3}x-3$ ב. $(0,-3)$, $(4.5,0)$ ג. $90°$, $33.69°$, $56.31°$ ד. 6.75

39 א. $(0,3)$ ב. $y=-\frac{2}{3}x+3$

40 א. $(0,-4)$ ב. $y=3x-4$

41 א. $(1,0)$, $(0,0)$. ב. $y=1.5x-1.5$ ג. $A(5,6)$.

42 א. $y=3.4x-1.35$ ב. $(,-1.35)$ ג. 3.825.

43 א. $2\le x\le 6$

ב. משוואת המשיק: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. ניתן לראות כי הגרף עובר ב- $(0,0)$.

44 א. $m=2.4$

ב. $y=2.4x-8\frac{1}{15}$ ג. לא. מתקבל פתרון שנפסל עקב העלאה בריבוע.

45 א. $y=-1\frac{1}{4}x+3\frac{1}{4}$ ב. 4.225

46 א. $(0,1)$ ב. $y=-x+1$ ג. 0.5.

47 א. $(1,2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$.

48 א. $y=0.5x+6$ ב. $y=5x+4$ ג. $y=4x+0.25$ ד. $y=-x+0.75$

49 א. $(1,7)$ ב. $(64,0)$, $(0,0)$ ג. $9y+x=64$.

50 א. $(100,0)$, $(0,0)$ ב. $(25,-25)$ ג. $y=\frac{x}{3}-37.5$

51 א. $y=20x-48$ ב. $(3,12)$ ג. $y=\frac{4}{3}x+8$

52 $y=3x+2$

53 א. $y=2x+36$

54 א. $x\geq 2$ ב. $(-2,0)$ ג. $(-1,0.5)$ ד. $y=0.5x+1$.

55 א. $x\neq 0$, $x\leq 4$ ב. $(4,0)$

56 א. $x\geq 0$, $x\neq 1$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$.

57 א. $\left(0.75,\sqrt{0.75}\right)$ ג. $y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}$, $y=-\sqrt{3}x+1.25\sqrt{3}$

ד. $A\left(0.25,0.25\right)$, $B\left(0.25,1.5\right)$.

58 א. $A\left(6,2\sqrt{6}+4\right)$, $B\left(6,2\sqrt{6}-4\right)$

ב. $y=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{2}\right)x+\sqrt{6}-7$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{2}\right)x+\sqrt{6}+1$.

59 א. 4 ב. 15 ג. 20 ד. 1 ה. 2,5 ו. -64.

60 $A=1$, $B=2$

61 $A=B=4$

62 א. $a=2$ ב. $y=\frac{1}{3}x+2$ ג. $S=6$.

63 א. $(11,14)$ ב. $a=2$ ג. לא. ד. $7y-3x=65$

64 א. $k=3$ ב. $x\geq 0$ ג. אין עוד נקודות חיתוך בניהם.

ד. $y=11.9x-42.8125$, $y=10.5x-34.0625$.

65 א. $k=0.48$ ב. כן. $(0.6,0.57)$ ג. $y=0.74x+0.1352$.

66 א. $A=9$, $B=-9$ ב. $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$

67 $A=B=2$.

68 א. $A=1$ ב. $y=2.25x-0.25$ ג. $y=\frac{4}{9}x+2\frac{4}{9}$.

69 א. $A=-16\ ,\ x=4$ ב. $y=-\frac{7}{72}x-\frac{1}{18}$ ג. $\left(4,-\frac{4}{9}\right)$.

70 א. $(0,0)\ ,\ (1,1)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5,0.25)$

71 א. $A\left(5.5,\sqrt{2}\right)$ ב. $y=6.5\sqrt{2}-\sqrt{2}x\ ,\ y=\frac{x}{\sqrt{8}}-\frac{3}{4\sqrt{2}}$ ג. $S=\frac{5}{\sqrt{2}}$

72 א. $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{2}\ ,\ k=1$ ב. $(0,0)\ ,(1,0)$ ג. $y=0.25x-0.25$

73 ב. $A=10$ ג. $y=5$

74 $A=1\ ,\ B=-7$

75 ב. $\left(3,\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ ג. $y=0.125x+2.375$

76 א. $(2,0)$

ב. לא, מאחר שאין פתרון למשוואה: $f'(x)=0$. ג. $y=\frac{4}{\sqrt{2}}x-4\sqrt{2}$.

ד. $S=4\sqrt{2}$.

77 א. $\min(0.25,-0.25)\ ,\ \max(0,0)$ ב. $\min(-2,0)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \max(-1.6,1.619)$

ג. $\min\left(2,\sqrt{21}\right)$ ד. $\min(-2,0)\ ,\ \min(2,0)\ ,\ \max(0,4)$

ה. $\min(0,0)\ ,\ \max\left(3,\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ ו. $\max(0,0)$ ז. אין קיצונים כלל.

ח. $\max\left(-4,-\frac{4}{\sqrt{50}}\right)$

78 א. $x\le -4\ ,\ x\ge 1$ ב. $\min(-4,0)\ ,\ \min(1,0)$

ג. עולה: $x>1$ יורדת: $x<-4$

79 א. כל x ב. $\min(-1.5,1.5)$ ג. עולה: $x>-1.5$ יורדת: $x<-1.5$

80 א. $x\ge 0\ ,\ x\le -3$ ג. עולה: $x>0$, יורדת: $x<-3$.

81 א. $x\ge 0$ ב. $\min(0,0)\ ,\ \max(1,1)$

ג. עולה: $0<x<1$ יורדת: $x>1$. ד. $(0,0)\ ,\ (0,4)$. ה. אין.

82 א. $x\ge\frac{1}{16}$ ב. $\min\left(\frac{1}{8},0\right)\ ,\ \max\left(\frac{1}{16},\frac{1}{8}\right)$

ג. עולה: $\frac{1}{16}<x<\frac{1}{8}$ יורדת: $x>\frac{1}{8}$. ד. $\left(\frac{1}{8},0\right)$ ה. אין.

83) א. $x \geq -\frac{5}{4}$ ב. $\max(-1,1)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \min\left(-\frac{5}{4},0\right)$

ג. עולה: $x>0\ ,\ -\frac{5}{4}<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$ ד. $(0,0)\ ,\ \left(-\frac{5}{4},0\right)$ ה. אין.

84) א. $x\geq 1\ ,\ -1\leq x\leq 0$ ב. $\min(-1,0)\ ,\ \min(1,0)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \max(-0.57,0.62)$

ג. עולה: $x>1\ ,\ -1<x<-0.57$ יורדת: $-0.57<x\leq 0$

ד. $(-1,0)\ ,\ (1,0)\ ,\ (0,0)$. ה. אין.

85) א. כל x. ב. $\min(-1.75,-2.004)\ ,\ \max(-2,-2)$

ג. עולה: $x<-2\ ,\ x>-1.75$ יורדת: $-2<x<-1.75$ ד. $(0,0)$. ה. אין.

86) א. $x\geq -1$ ב. $\min\left(-1,\sqrt{7}\right)$ ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. אין.

ה. אין.

87) א. $x\geq 0$ ב. $\min(0,0)\ ,\ \max\left(2,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

ג. עולה: $0<x<2$ יורדת: $x>2$ ד. $(0,0)$ ה. $y=0$.

88) א. $x\geq 0\ ,\ x\neq 2$ ב. $\max(0,0)$ ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. $(0,0)$. ה. $y=0\ ,\ x=2$.

89) א. $x\geq -8\ ,\ x\neq 0$ ב. $\min(-8,0)$ ג. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x>0$

ד. $(-8,0)$. ה. $y=0\ ,\ x=0$.

90) א. $x<10$ ב. אין קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה.

ד. $(0,0)$ ה. $x=10$.

91) א. כל x. ב. $\min(0,0)$ ג. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

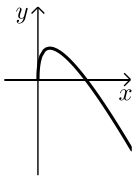
ד. $(0,0)$. ה. אין.

92) א. $-3<x<3$ ב. $\min\left(0,-\frac{4}{3}\right)$ ג. עולה: $0<x<3$ יורדת: $-3<x<0$

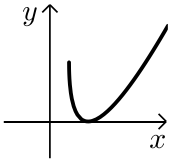
ד. $\left(0,-\frac{4}{3}\right)\ ,\ (\pm 2,0)$ ה. $x=\pm 3$.

סקיצות של שאלות 81-92:

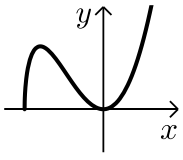
(81)



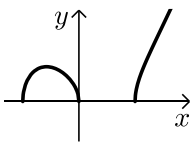
(82)



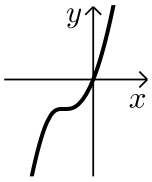
(83)



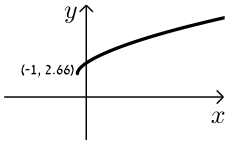
(84)



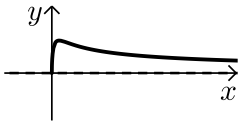
(85)



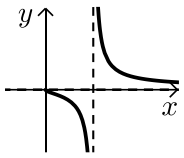
(86)



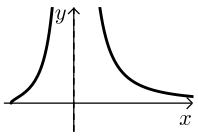
(87)



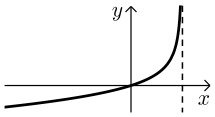
(88)



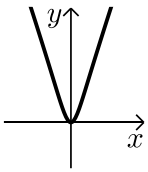
(89)



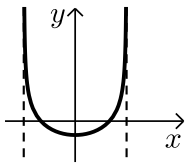
(90)



(91)



(92)



(93) א. $0 \le x \le 16$ ב. $\min(16,0)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \max(8,8)$

ג. עולה: $0 < x < 8$, יורדת: $8 < x < 16$.

(94) א. $0 \le x \le 36$ ב. $\min(18,-36)\ ,\ \max(0,0)\ ,\ \max(36,0)$

ג. עולה: $18 < x < 36$, יורדת: $0 < x < 18$.

(95) א. $x \le 1\ ,\ x \ge 4$ ב. $\min(1,0)\ ,\ \min(4,0)$

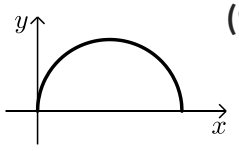
ג. עולה: $x > 4$, יורדת: $x < 1$. ד. $(0,2)$.

(96) א. $x \le -25\ ,\ x \ge 1$ ב. $\min(1,0)\ ,\ \min(-25,0)$

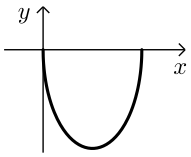
ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $x < -25$.

סקיצות של שאלות: 93-96:

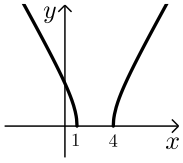
(93)



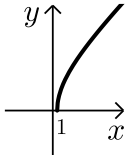
(94)



(95)



(96)



(97) א. $k = -3$ ב. $2 \le x \le 8$

ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה: $\min(8,-3)\ ,\ \min(2,-3)$

ד. עולה: $2 < x < 5$, יורדת: $5 < x < 8$.

(98) א. $k = 4$ ב. $-3 \le x \le 3$

ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה: $\min(3,0)\ ,\ \min(-3,0)$.

ד. עולה: $-3 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 3$.

(99) א. $x \ge -1$ ב. $\max(-1,0)\ ,\ \min(0,-1)$ ג. $(-1,0)\ ,\ (3,0)$.

ד. עולה: $x > 0$, יורדת: $-1 < x < 0$.

ה. חיובית: $x > 3$, שלילית: $-1 < x < 3$.

100) א. $k=2$. ב. $x\le 5.5$.

ג. כן – ישנה נקודת קיצון קצה: $(5.5,7.5)$. לא קיימת נקודת קיצון מקומית מאחר ש- $x=5$ המתקבל בעת השוואת הנגזרת לאפס נפסל כי אינו מקיים את המשוואה המקורית.

ד. $(1,0)$. הנקודה שבה $x=-7$ אינה מקיימת את המשוואה המקורית ולכן נפסלת.

101) א. $k=-12$ ב. $\max(0,0)\ ,\ \min(4,-12)$ ג. עולה: $x>4$ יורדת: $0<x<4$.

102) א. $k=4$ ב. $(1,3)$ ג. $\max(4,4)\ ,\ \min(0,0)$

ד. $(16,0)\ ,\ (0,0)$.

103) א. $x\ge 0$ ב. $\max(0,0)\ ,\ \min(4,-6)$ ג. עולה: $x>4$ יורדת: $0<x<4$.

ד. $\left(\sqrt[3]{1024}\right)\ ,\ (0,0)$.

ו. חיובית: $x>10\ ,$ שלילית: $0<x<10$.

104) א. $k=2$. ב. יש קיצון קצה - $(0,-4)$. ג. עולה בכל תחום הגדרתה.

ד. $(1,0)$.

105) א. $0\le x\le 16$ ב. $\max\left(8,2\sqrt{8}\right)\ ,\ \min(16,4)\ ,\ \min(0,4)$

ג. עולה: $0<x<8\ ,$ יורדת: $8<x<16$.

106) א. $k=1$. ב. $0\le x\le 4$. ג. לא. ד. אין קיצונים.

107) א. יש להראות כי הנגזרת מורכבת מחיבור של שני ביטויים שחיוביים תמיד ומכאן שסימן הנגזרת חיובי והפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה. $\left(f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{9-2x}}\right)$ - הנגזרת בנויה משני ביטויים חיוביים.

ב. $0\le x\le 4.5$ ג. $m=2$ ד. $\max\left(4.5,2+\sqrt{4.5}\right)\ ,\ \min(0,-1)$.

108) א. $-4\le x\le 4$. ב. $\max\left(\sqrt{8},2\sqrt{8}\right)\ ,\ \min(4,4)\ ,\ \min(-4,-4)$.

ג. $\left(-\sqrt{8},0\right)\ ,\ (0,4)$.

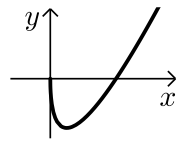
109) א. $k=-1$ ב. $-\sqrt{8}\le x\le\sqrt{8}$ ג. $\max(-2,4)\ ,\ \min\left(\sqrt{8},-\sqrt{8}\right)\ ,\ \min\left(-\sqrt{8},\sqrt{8}\right)$.

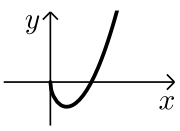
ד. עולה: $-\sqrt{8}<x<2\ ,$ יורדת: $-2<x<-\sqrt{8}$.

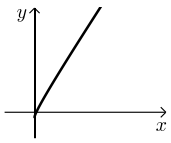
110) א. $x\ge 2$ ב. אין נקודות קיצון ג. $\left(2,\frac{1}{8}\right)$

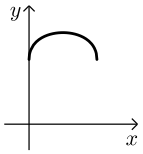
ד. אין נקודות חיתוך עם הצירים ו. $m\ge\frac{1}{8}$.

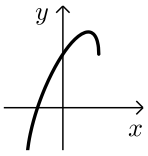
סקיצות של שאלות 101-110 (אלו שיש בהן גרף):

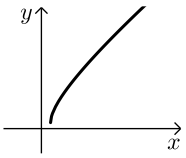
101) 

103) 

104) 

105) 

108) 

110) 

111) א i. <u>הטענה אינה נכונה.</u>

תחומי ההגדרה הם: $h(x):x\ge -k$; $g(x):x>-k$; $f(x):x\ge -k$.

ii. <u>הטענה אינה נכונה.</u> הפונקציה: $f(x)$ עולה תמיד שכן: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+k}}>0$. הפונקציה:

$g(x)$ גם עולה תמיד שכן: $g'(x)=\frac{x+2k}{(x+k)^{1.5}}>0$ כי הנקודה $x=-2k$ אינה בתחום ההגדרה

וערך הנגזרת בתחום ההגדרה חיובי. לפונקציה: $h(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x=-\frac{2}{3}k$ אשר

בתוך תחום הגדרתה ולכן היא יורדת

בעבור: $-k<x<-\frac{2}{3}k$.

iii. <u>הטענה אינה נכונה.</u>

נקודות החיתוך: $h(x):(-k,0),(0,0)$; $g(x):(0,0)$; $f(x):(-k,0)$.

ב. i. $g'(0)=\frac{1}{\sqrt{k}}$, $f'(0)=\frac{1}{2\sqrt{k}}$ ii. $k=4$. ג. $IV=h(x)$, II=$f(x)$, $I=g(x)$.

112) א. $-2<x\le 0$, $x>2$. ב. $f'(x)=-\frac{x^2+4}{2(x^2-4)^2\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}}$.

ד. נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x ונקודות המאפסות את הנגזרת של $f(x)$.

ה. i. לא. ל- $f(x)$ אין נק' קיצון והנקודה $(0,0)$ אינה קיצון בעבור $g(x)$.

ii. יורדת בכל תחום הגדרתה. ו. I.

שאלון 571

מבוא לפונקצית מנה

תוכן העניינים:

מבוא לפונקצית מנה..... 354

כללי: 355

סיכום כללי:..... 355

שאלות:..... 356

תשובות סופיות: 360

כללי:

סיכום כללי:

הגדרה:

נתונה פונקציה $f(x)$ ועבורה מגדירים את הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ אז $g(x)$ נקראת הפונקציה ההופכית של $f(x)$.

תכונות:

- תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $f(x)\neq 0$.
- נקודות האפס של $f(x)$ הן אסימפטוטות אנכיות של $g(x)$.
- תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ ושל $g(x)$ זהים.
- תחומי העלייה והירידה יתהפכו, ולפיכך גם סוגן של נקודות הקיצון יתהפך.
- כל נקודה (x,y) שעל הפונקציה $f(x)$ תהפוך ל-$\left(x,\frac{1}{y}\right)$ על $g(x)$.
  - נקודות שבהן $y=\pm 1$ תישארנה זהות בשתי הפונקציות.
  - נקודות שבהן $y\neq 0,\pm 1$ תהיינה שונות בין הפונקציות בהתאם.

אסימפטוטות:

- אם מתקיים: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ אז ב-$g(x)$ תהיה אסימפטוטה אופקית $y=0$.
- אם ל-$f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x=a$ אז ל-$g(x)$ תהיה נקודת אי-הגדרה $(a,0)$.

שאלות:

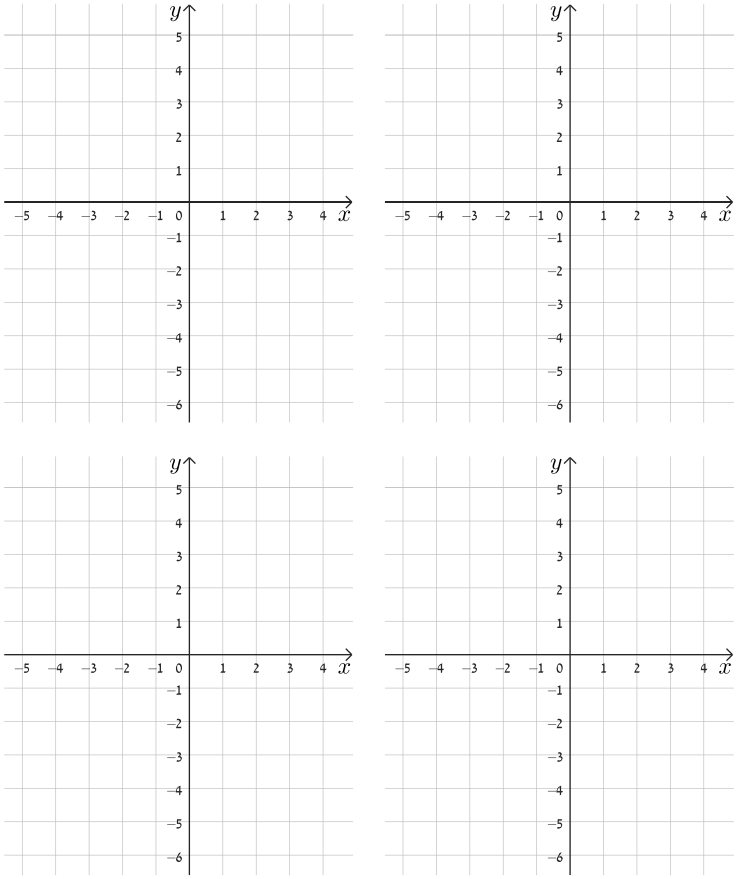
1) בכל אחד מן הסעיפים הבאים, סרטטו את הגרפים של הפונקציות הבאות והפונקציות ההופכיות להן במערכת צירים אחת:

א. $f(x)=x+1$.

ב. $f(x)=x^2+1$.

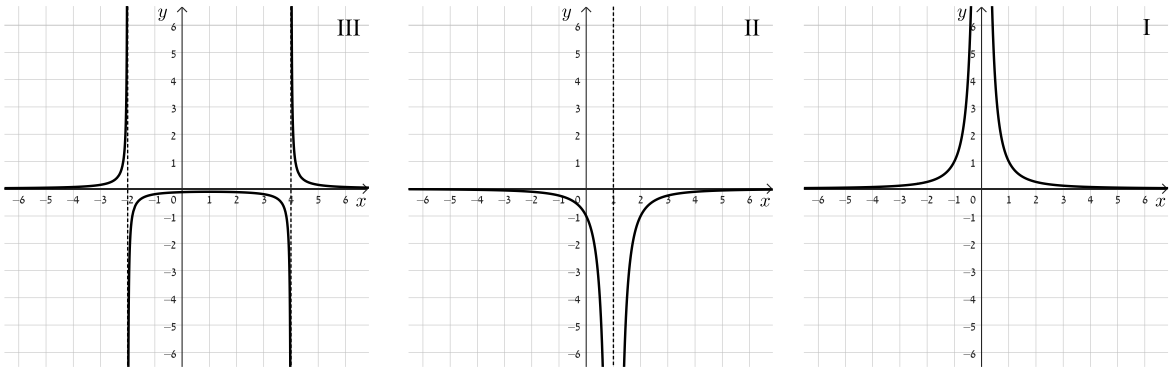
ג. $f(x)=x^2-1$.

ד. $f(x)=x^2-x$.

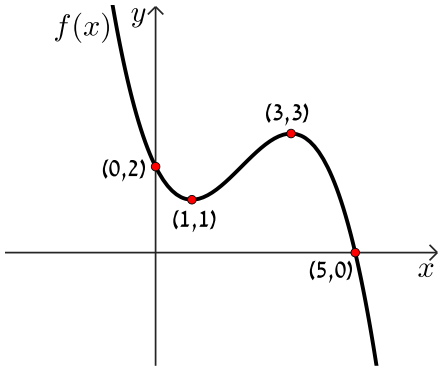


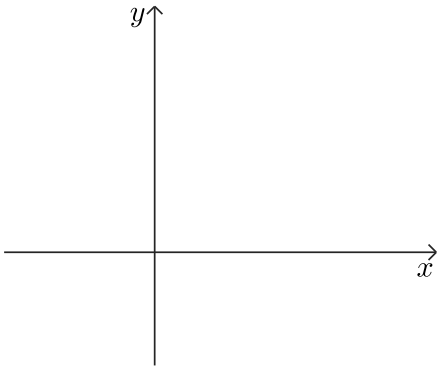
2) נתונות הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ וגרפים של הפונקציות ההופכיות לכל אחת מהן.
הגרפים מסומנים ב-III-I. קבעו איזה גרף מתאים לכל פונקציה ההופכית לפונקציות הנתונות.

א. $f(x)=x^2-2x-8$ ב. $g(x)=x^2$ ג. $h(x)=-x^2+2x-1$

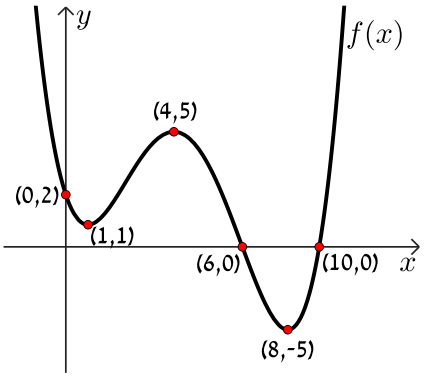


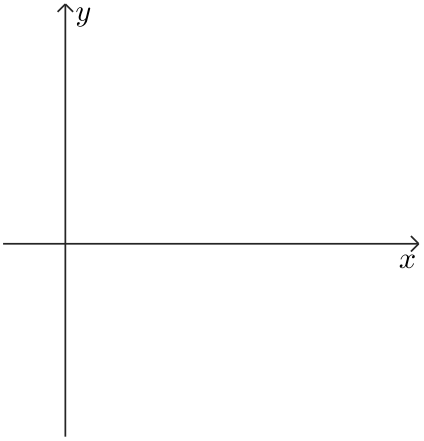
3) סרטטו את הגרף של הפונקציה ההופכית לפונקציה $f(x)$ הנתונה במערכת הצירים הבאה:





4) סרטטו את הגרף של הפונקציה ההופכית לפונקציה $f(x)$ הנתונה במערכת הצירים הבאה:





5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+2}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מה הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים?

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה ההופכית $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ציינו בגרף את נקודות האפס במידה וישנן, ואת האסימפטוטות האנכיות במידה וישנן.

6) נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x)=x^2-1$.

א. מצאו את נקודות האפס של $f(x)$.

ב. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

מגדירים פונקציה חדשה: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

ג. (1) כתבו במפורש את הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?

ד. סרטטו במערכת צירים את גרף הפונקציה $g(x)$.

מגדירים את הפונקציה ההופכית ל-$g(x)$ באופן הבא: $h(x)=\frac{1}{g(x)}$.

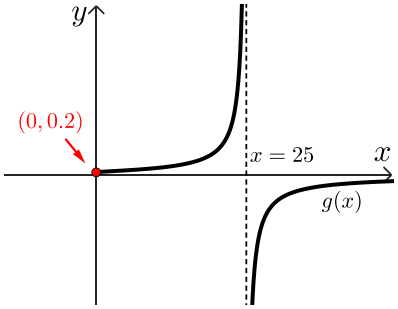
ה. (1) כתבו במפורש את הפונקציה $h(x)$.

(2) הוסיפו את גרף הפונקציה $h(x)$ לאותה מערכת הצירים שבה ציירתם את גרף הפונקציה $g(x)$ והראו נקודות אפס ואסימפטוטות אנכיות.

7) נתונה פונקציה $f(x)$ ולה פונקציה הופכית $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

באיור שלפניכם מופיע גרף הפונקציה $g(x)$.

קבעו אילו מבין הפונקציות הבאות יכול להתאים עבור $f(x)$. נמקו.



א. הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2-25}$.

ב. הפונקציה: $f(x)=5-\sqrt{x}$.

ג. הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+5}$.

8) לפניכם מספר טענות הנוגעות לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה ההופכית לה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

קבעו אלו מהן נכונות ואלו שגויות. נמקו את קביעותכם.

א. אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית אז גם הפונקציה ההופכית לה, $g(x)$, היא זוגית.

ב. אם הפונקציה $f(x)$ היא חיובית בכל תחום הגדרתה אז גם הפונקציה ההופכית לה, $g(x)$, תהיה חיובית בכל תחום הגדרתה.

ג. אם הפונקציה $f(x)$ היא אי-שלילית בכל תחום הגדרתה, אז בוודאות לפונקציה ההופכית לה, $g(x)$, לא תהיה אסימפטוטה אנכית.

ד. אם לפונקציה $f(x)$ נקודת מקסימום שבה $y=4$ אז הפונקציה ההופכית $g(x)$ לא תקבל ערך הנמוך מ- $\frac{1}{4}$.

ה. אם הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית אז בוודאות לפונקציה ההופכית $g(x)$ קיימת אסימפטוטה אנכית אחת לפחות, והיא תהיה ציר ה- y (כלומר הישר: $x=0$).

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^2+5x-3$. מגדירים את הפונקציה ההופכית לה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

א. (1) מה הן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$?

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ וציינו את האסימפטוטות שלה.

ב. מזיזים אופקית את גרף הפונקציה $g(x)$ כך שאחת מן האסימפטוטות שלו תתלכדנה עם ציר ה- y. כיצד תיראה הפונקציה $f(x)$ במקרה זה? (הבחינו בין שני מקרים).

ג. בכמה יחידות יש להזיז אנכית את הפונקציה $f(x)$ על מנת שהפונקציה $g(x)$ תהיה מוגדרת לכל x?

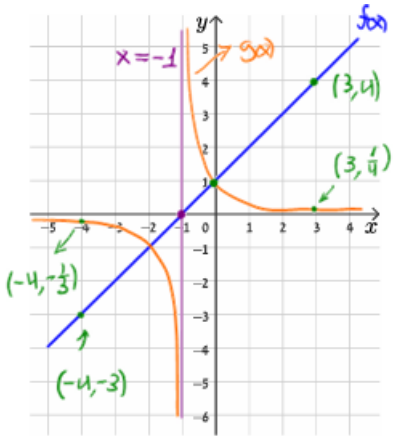
ד. מגדירים פונקציה: $h(x)=f(k\cdot x)$.

(1) מצאו את k עבורו המרחק בין האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $\frac{1}{h(x)}$ יהיה 7.

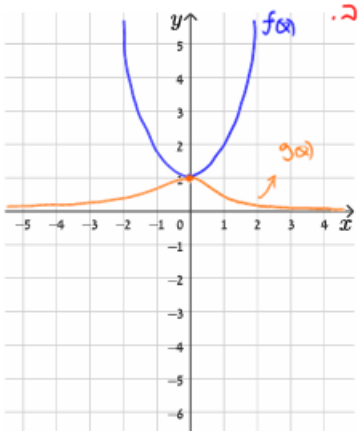
(2) כתבו את משוואות האסימפטוטות האנכיות לפונקציה $\frac{1}{h(x)}$.

תשובות סופיות:

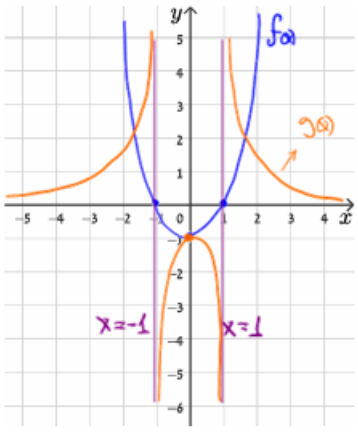
1) א. להלן סקיצה:



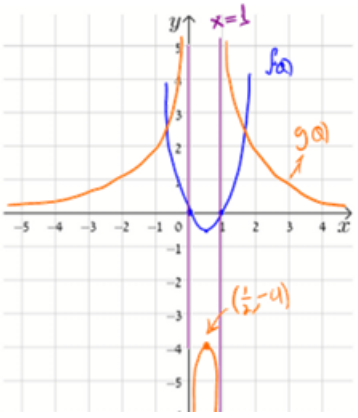
ב. להלן סקיצה:



ג. להלן סקיצה:

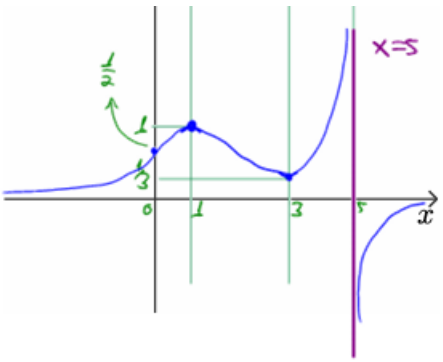


ד. להלן סקיצה:

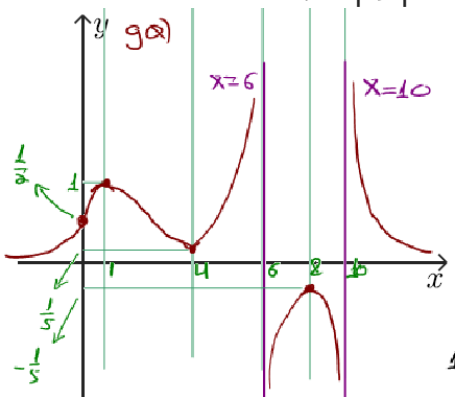


2) גרף I – פונקציה ב, גרף II – פונקציה ג, גרף III – פונקציה א.

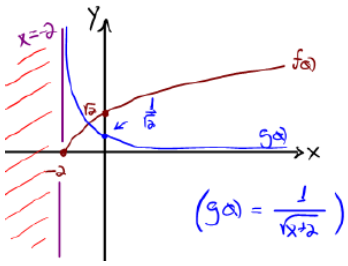
3) להלן סקיצה:



4) להלן סקיצה:



5) א. $x \geq -2$ ב. $(-2,0)$, $\left(0,\sqrt{2}\right)$. ג. להלן סקיצה:



6) א. $(-1,0)$, $(1,0)$

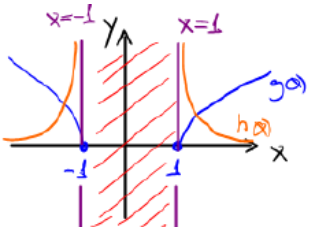
ב. חיובית: $x>1$, $x<-1$, שלילית: $-1<x<1$.

ג. (1) $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ ג. (2) $x \geq 1$, $x \leq -1$

ג. (3) עולה: $x \geq 1$, יורדת: $x \leq -1$.

ד. ראו סקיצה בצד.

ה. (1) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

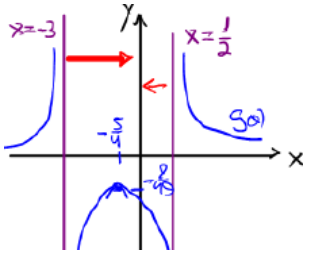


7) פונקציה ב.

8) א. נכונה. ב. נכונה. ג. לא נכונה.

ד. לא נכונה. ה. נכונה.

9) א. (1) $x=-3$, $x=\dfrac{1}{2}$ א. (2) ראו סקיצה:



ב. $\tilde{f}(x)=2x^2+7x$ או $\tilde{f}(x)=2x^2-7x$

ג. ל-$g(x)$ לא תהיינה אסימפטוטות.

ד. (1) $k=\dfrac{1}{2}$ ד. (2) $x=1$, $x=-6$.

שאלון 571

חקירת פונקציות טריגונומטריות

תוכן העניינים:

חקירת פונקציות טריגונומטריות 362

פתרון של משוואות טריגונומטריות (ברדיאנים): 364

הגדרת הרדיאן: 364

קשר בין רדיאנים למעלות: 364

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים: 364

שאלות: 365

תשובות סופיות: 367

תרגול נוסף: 368

פתרון בתחום הנתון: 368

מעבר ממעלות לרדיאנים: 368

משוואות שונות בתחום נתון עם רדיאנים: 369

תשובות סופיות: 372

הפונקציות הטריגונומטריות - הגדרות כלליות: 374

הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות: 374

זוגיות של פונקציות: 375

מחזוריות של פונקציות: 375

שאלות: 376

שאלות העוסקות בגזירה של פונקציות טריגונומטריות: 376

שאלות שונות עם משיקים: 377

שאלות עם מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות: 378

שאלות עם מציאת נקודות קיצון: 378

שאלות עם מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים: 378

מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות: 379

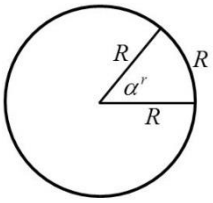
שאלות העוסקות בחקירת פונקציה טריגונומטרית: 379

תשובות סופיות: 384

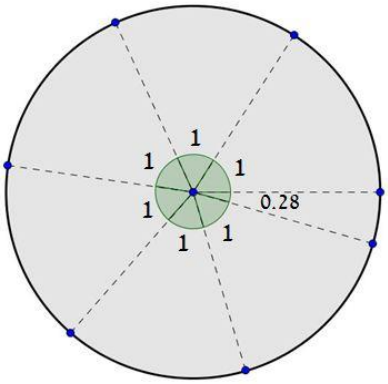
תרגול נוסף : 388
שאלות העוסקות בהצבת ערכים ברדיאנים: 388
שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות: 389
שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת: 391
שאלות עם פרמטרים: 394
שאלות העוסקות בחקירות פונקציה טריגונומטרית: 395
תשובות סופיות: 405

פתרון של משוואות טריגונומטריות (ברדיאנים):

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל. עבור מעגל שרדיוסו R, תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P=2\pi\cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל-$2\pi=6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r=\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ=\frac{180}{\pi}\alpha^r$.

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x=\sin\alpha$	$x_1=\alpha+2\pi k\ ,\ x_2=\pi-\alpha+2\pi k$
$\cos x=\cos\alpha$	$x_{1,2}=\pm\alpha+2\pi k$
$\tan x=\tan\alpha$	$x=\alpha+\pi k$
$\cot x=\cot\alpha$	$x=\alpha+\pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. $30°$	ב. $90°$	ג. $75°$	ד. $120°$
ה. $210°$	ו. $315°$	ז. $18°$	ח. $285°$
ט. $-15°$	י. $-80°$	יא. $510°$	יב. $-390°$

2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π	ב. 2π	ג. 4π	ד. 1.5π
ה. $\frac{1}{2}\pi$	ו. $\frac{\pi}{4}$	ז. $\frac{\pi}{6}$	ח. $\frac{1}{18}\pi$
ט. $\frac{13}{18}\pi$	י. $\frac{19}{12}\pi$	יא. $1\frac{1}{6}\pi$	יב. $2\frac{1}{4}\pi$

3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x=1 \quad , \quad \left[0:\frac{1}{3}\pi\right]$

ב. $\sqrt{3}+2\cos x=0 \quad , \quad [0:\pi]$

ג. $3-3\tan\frac{x}{2}=0 \quad , \quad [0:2\pi]$

ד. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad [0:\pi]$

ה. $4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2=0 \quad , \quad \left[0:\frac{1}{2}\pi\right]$

ו. $\sin x=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right) \quad , \quad \left[-\frac{5\pi}{18}:\frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5-5\tan\left(4x-0.1\pi\right)=0 \quad , \quad \left[0:\frac{\pi}{3}\right]$

ח. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0.7 \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4}\right]$

4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x=\frac{3}{4} \quad , \quad \left[0:\frac{\pi}{2}\right]$

ב. $16\cos^2 2x-1=0 \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x-18=0 \quad , \quad [0:\pi]$

ד. $3\sin x\cos x+3\cos x=0 \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x-5\sin x\cos x=0 \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right]$

ו. $2\sin^2 x-5\sin x+2=0 \quad , \quad [-\pi:\pi]$

ז. $4\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x-1=0 \quad , \quad [-\pi:0]$

ח. $\tan^2 x-7\tan x+10=0 \quad , \quad [0:2\pi]$

5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \le x \le \pi \ , \ \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

ב. $0 \le x \le \pi \ , \ \tan x = 4\sin x$

ג. $0 \le x \le 2\pi \ , \ 2\sin^2 x = 3\cos x$

6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi] \ , \ \sin\left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi] \ , \ \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi \right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi] \ , \ \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} \right] \ , \ \tan x = -\tan 2x$

7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \le x \le \pi \ , \ \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi] \ , \ \cos 4x + 1 = 3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \le x \le \pi \ , \ \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

2) א. $180°$ ב. $360°$ ג. $720°$ ד. $270°$ ה. $90°$

ו. $45°$ ז. $30°$ ח. $10°$ ט. $130°$ י. $285°$

יא. $210°$ יב. $405°$.

3) א. $x=\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

4) א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x=0.398\pi,0.602\pi$

ד. ϕ ה. $x=0,0.437\pi$ ו. $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

ז. $x=-\frac{\pi}{4},-0.615\pi$ ח. $x=0.352\pi,0.437\pi,1.352\pi,1.437\pi$.

5) א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $x=0,0.42\pi,\pi$ ג. $x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$

6) א. $x=\frac{\pi}{12},-\frac{11\pi}{12}$ ב. $x=\frac{23\pi}{72},\frac{59\pi}{72}$

ג. $x=\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{9\pi}{10}$ ד. $x=\pm\frac{\pi}{3},0$.

7) א. $x=\pm\frac{\pi}{2},-0.148\pi,0.852\pi$ ב. $x=-\frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12},\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $x=0,0.38\pi,0.61\pi,\pi$.

תרגול נוסף:

הערה:

לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בוידאו והן ניתנו כבונוס לתרגול נוסף.

פתרון בתחום הנתון:

1) מצא פתרון בתחום $-180° \le x \le 180°$ למשוואות הבאות:

א. $\cos x = 2\cos(x+60°)$

ב. $2\sin x = \sin(x+60°)$

ג. $2\cos x = \cos(x-60°)$

ד. $3\sin x = \sin(x-30°)$

ה. $\sin x = 2\sin(x+45°)$

ו. $3\sin x = 2\sin(x+30°)$

ז. $\sin 2x = 2\sin x$

ח. $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$

ט. $\sin 2x = 2\sin^2 x$

מעבר ממעלות לרדיאנים:

2) לפניך מספר זוויות הנתונות ברדיאנים, כתוב את ערכן במעלות:

א. π

ב. 0.5π

ג. $\frac{\pi}{3}$

ד. $\frac{\pi}{4}$

ה. $\frac{\pi}{5}$

ו. $\frac{\pi}{6}$

ז. $\frac{\pi}{9}$

ח. $\frac{\pi}{12}$

ט. $\frac{5\pi}{12}$

י. $\frac{3\pi}{2}$

יא. $\frac{7\pi}{3}$

יב. $\frac{7\pi}{6}$

3) לפניך מספר זוויות הנתונות במעלות, כתוב את ערכן ברדיאנים:

א. $90°$

ב. $45°$

ג. $30°$

ד. $20°$

ה. $10°$

ו. $115°$

ז. $135°$

ח. $225°$

ט. $315°$

י. $345°$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ב. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ד. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ה. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ו. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ז. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ח. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ט. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ י. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ יא. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ יב. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

משוואות שונות בתחום נתון עם רדיאנים:

5) מצא פתרון בתחום הרשום ליד כל משוואה:

א. $\cos 2x = \sin x$ בתחום $[0, 2\pi]$.

ב. $5\sin x = 3 - \cos 2x$ בתחום $[0, \pi]$.

ג. $3\cos 2x + 21\cos x = 9$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ד. $3\sin 3x - \cos 6x = 1$ בתחום $[0, \pi]$.

6) מצא למשוואות הטריגונומטריות הבאות את הפתרונות שבתחום $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = -1$

ג. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

ה. $\sin x = 0$ ו. $2\sin x - 1 = 0$

ז. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ ח. $\sin(2x + 25°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ט. $\sin(3x - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ י. $\sin(5x + 30°) = -1$

יא. $2\sin(2x + 20°) = 2$ יב. $3\sin(2x + 20°) - 1 = 0$

7) מצא למשוואות הטריגונומטריות הבאות את הפתרונות שבתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

א. $\cos x=\frac{1}{2}$

ב. $\cos x=1$

ג. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ד. $\cos x=0$

ה. $2\cos x+1=0$

ו. $\cos 2x=\frac{1}{2}$

ז. $\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ח. $\cos\left(2x+35°\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ט. $\cos\left(3x-30°\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

י. $\cos\left(5x-30°\right)=-1$

יא. $3\cos\left(2x+20°\right)=1$

8) מצא למשוואות הטריגונומטריות הבאות את הפתרונות שבתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

א. $\tan x=1$

ב. $\tan x=2$

ג. $\tan x+1=0$

ד. $2\tan x-1=0$

ה. $3\tan x-6=0$

ו. $\tan\left(2x+15°\right)=1$

ז. $\tan\left(3x+10°\right)=3$

ח. $2\tan\left(3x+20°\right)=8$

ט. $3\tan\left(4x+10°\right)=1$

י. $4\tan\left(2x+25°\right)-4=0$

9) מצא למשוואות הטריגונומטריות הבאות את הפתרונות שבתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

א. $\sin 2x=\sin x$

ב. $\sin 3x=\sin 5x$

ג. $\sin\left(2x+20°\right)=\sin\left(3x+10°\right)$

ד. $\sin\left(3x+30°\right)-\sin\left(3x\right)=0$

ה. $\sin 3x=-\sin x$

ו. $\sin 4x=-\sin 6x$

ז. $\sin 4x+\sin\left(x+30°\right)=0$

10) מצא למשוואות הטריגונומטריות הבאות את הפתרונות שבתחום $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

א. $\cos 2x = \cos x$

ב. $\cos 5x = \cos 3x$

ג. $\cos(3x+10°) = \cos(2x+20°)$

ד. $\cos 3x = -\cos x$

ה. $\cos 6x = -\cos 4x$

ו. $\cos 2x + \cos 6x = 0$

11) מצא למשוואות הטריגונומטריות הבאות את הפתרונות שבתחום $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

א. $\sin 3x = \cos x$

ב. $\cos 4x = \sin x$

ג. $\sin x = \cos(2x+60°)$

ד. $\sin 2x = \cos 4x$

ה. $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

ו. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

ז. $\sin x - \cos x = 0$

ח. $\sin x + \cos x = 0$

תשובות סופיות:

1) א. $x=-180°,0°,180°$ ב. $x=-150°,30°$ ג. $x=-120°,60°$

ד. $x=-13.19°,166.8°$ ה. $x=-73.68°,106.32°$ ו. $x=-141.74°,38.26°$

ז. $x=-180°,0°,180°$ ח. $x=-90°,60°,90°,120°$ ט. $x=\pm180°,0°,45°,-135°$.

2) א. $180°$ ב. $90°$ ג. $60°$ ד. $45°$ ה. $36°$ ו. $30°$

ז. $20°$ ח. $15°$ ט. $75°$ י. $270°$ יא. $420°$ יב. $210°$.

3) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{4}$ ג. $\frac{\pi}{6}$ ד. $\frac{\pi}{9}$ ה. $\frac{\pi}{18}$ ו. $\frac{23\pi}{36}$

ז. $\frac{3}{4}\pi$ ח. $\frac{5\pi}{4}$ ט. $\frac{7\pi}{4}$ י. $\frac{23\pi}{12}$.

4) א. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. -1 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. 0

ז. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ח. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ט. $\sqrt{3}$ י. $\varnothing$ יא. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ יב. 1.

5) א. $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ ג. $-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$

6) ד. $\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{18},\frac{13\pi}{18},\frac{17\pi}{18}$.

7) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{-\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{3}$ ד. $-\frac{\pi}{6}$ ה. 0 ו. $\frac{\pi}{6}$

ז. $\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$ ח. $\frac{\pi}{18},\frac{11\pi}{36}$ ט. $\frac{-\pi}{2},\frac{-7\pi}{18},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{18}$ י. $\frac{-2\pi}{15},\frac{4\pi}{15}$

יא. $\frac{7\pi}{36}$ יב. $0.39\pi,-0.0014\pi$.

8) א. $\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3}$ ב. 0 ג. $\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}$ ד. $\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}$. ה. אין.

ו. $\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{6}$ ז. $\frac{-11\pi}{24},\frac{-\pi}{24},\frac{\pi}{24},\frac{11\pi}{24}$ ח. $\frac{-2\pi}{9},\frac{\pi}{36}$ ט. $0,\frac{\pi}{9}$

י. $\frac{-\pi}{6},\frac{7\pi}{30}$ יא. $0.14\pi,-0.251\pi$.

9) א. $\frac{\pi}{4}$ ב. 0.35π ג. $\frac{-\pi}{4}$ ד. 0.148π ה. 0.35π

ו. $\frac{-5\pi}{12},\frac{\pi}{12}$ ז. $0.447\pi,0.114\pi,-0.219\pi$ ח. $0.437\pi,0.104\pi,-0.23\pi$

ט. $0.2617\pi,0.0117\pi,-0.2382\pi,-0.488\pi$ י. $\frac{\pi}{18},\frac{-4\pi}{9}$.

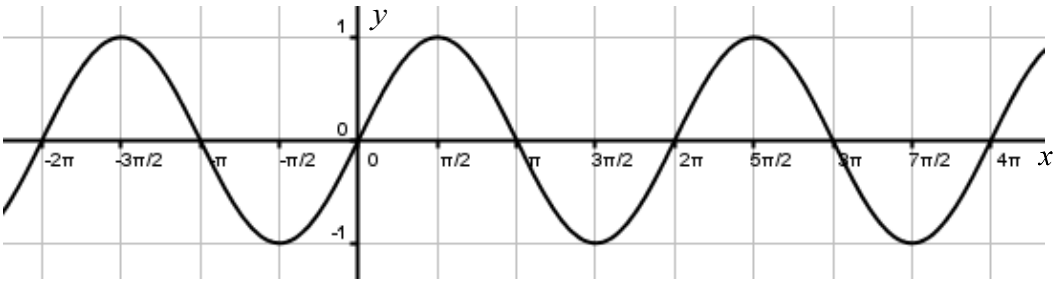
10) א. $\frac{-\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$.
ב. $\frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, 0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$.
ג. $\frac{-7\pi}{30}, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{6}$.
ד. $-\frac{7\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}, \frac{17\pi}{36}$.
ה. $\frac{-\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$.
ו. $-\frac{\pi}{2}, \frac{-2\pi}{5}, \frac{-\pi}{5}, 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$.
ז. $\frac{-13\pi}{30}, \frac{-5\pi}{18}, \frac{-\pi}{30}, \frac{11\pi}{30}, \frac{7\pi}{18}$.

11) א. 0
ב. $\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.
ג. $\frac{-13\pi}{30}, \frac{-\pi}{30}, \frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{30}$.
ד. $\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.
ה. $\frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{10}, \frac{-\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}$.
ו. $\frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$.

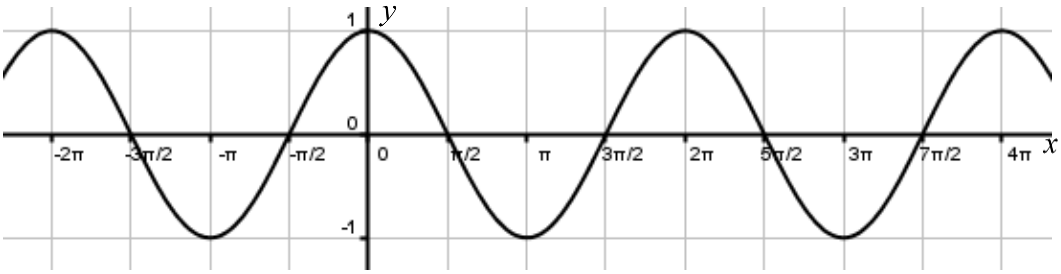
12) א. $\frac{-3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}$.
ב. $\frac{-3\pi}{10}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}$.
ג. $\frac{\pi}{18}$.
ד. $\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.
ה. $\frac{\pi}{3}$.
ו. $\frac{\pi}{6}$.
ז. $\frac{\pi}{4}$.
ח. $\frac{-\pi}{4}$.

הפונקציות הטריגונומטריות - הגדרות כלליות:

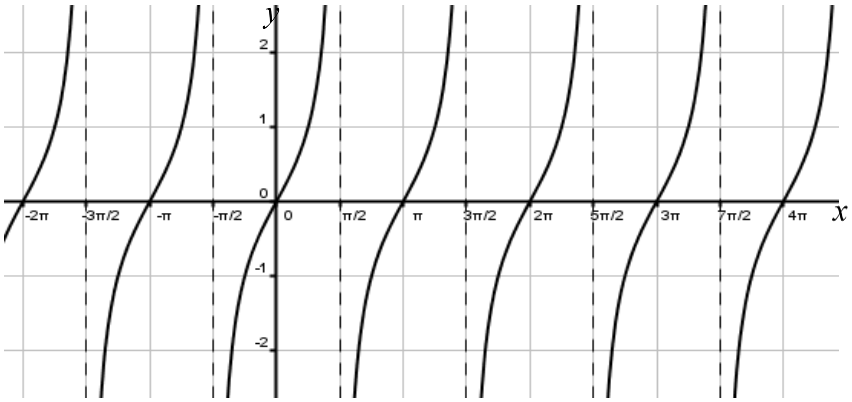
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס $y=\sin x$:



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס $y=\cos x$:



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס $y=\tan x$:



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=\cot x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

זוגיות של פונקציות:

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=-f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת: $f(x+T)=f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.

2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x)=\sin x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
- הפונקציה $f(x)=\cos x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi)=\cos x$.
- הפונקציה $f(x)=\tan x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\tan(x+\pi)=\tan x$.
- הפונקציה $f(x)=\cot x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\cot(x+\pi)=\cot x$.

שאלות:

שאלות העוסקות בגזירה של פונקציות טריגונומטריות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin x+3\cos x+x$

ב. $f(x)=2x\sin x+4\tan x$

ג. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin 3x+2\cos 5x$

ב. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^3 x$

ב. $f(x)=2\cos^4 x$

ג. $f(x)=\sin^2 x$

ד. $f(x)=\sin^3 2x$

ה. $f(x)=\cos^2 2x$

ו. $f(x)=\tan^2 4x$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$

ב. $f(x)=\sin^4 2x-\cos^4 2x$

ג. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

שאלות שונות עם משיקים:

6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\sin 2x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{2}$.

8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\tan 3x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{9}$.

9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x)=4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=1$ בתחום $[0,\pi]$.

10) שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sin x+a}$, (a פרמטר) בנקודה שבה $y=1$ בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$. מצא את ערך הפרמטר a.

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin^2 x-5\sin x+ax$, (a פרמטר) בתחום: $0\le x\le\pi$.

ידוע כי הישר: $y=ax-2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m=2$.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2?
נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

12) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2+\cos^2 x$, $g(x)=x^2+\sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x)-g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi<x<\pi$.

ג. ישר $x=t$, $(0<t<1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1. מצא את כל הערכים האפשריים עבור t.

שאלות עם מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

13) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos 2x}$, $[0,2\pi]$ ב. $f(x)=\frac{1}{\sin x-\cos x}$, $[-\pi,\pi]$

ג. $f(x)=\tan x$, $[0,2\pi]$

שאלות עם מציאת נקודות קיצון:

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

16) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

17) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{3}\sin^3 x-2\sin x$

בתחום: $[0,1.5\pi]$.

18) לפונקציה: $f(x)=a\sin x+b\sin^3 x$ (a,b פרמטרים) יש נקודת קיצון

ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6},-1\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

שאלות עם מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\tan x$ בתחום: $[-\pi,\pi]$.

מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

22) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

שאלות העוסקות בחקירת פונקציה טריגונומטרית:

23) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

24) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ בתחום $[0,\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sin 2x-2$ בתחום: $0\le x\le \pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מעבירים את הישר $y=k$ היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ה. העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה.
כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x.
מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

27) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x+\frac{1}{m}\sin mx$, $1<m<3$ (m פרמטר) בתחום: $-2\pi\le x\le 0$.

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ מתאפסת עבור: $x=-\frac{\pi}{2}$.

א. מצא את ערך הפרמטר m.

ב. האם ישנן נקודות נוספות המקיימות: $f'(x)=0$ בתחום הנתון?
אם כן, כתוב אותן. אם לא, נמק.

ג. האם הנקודה שבה $x=-\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? נמק.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ה. מצא מתי $f(x)<0$ בתחום הנתון.

28) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\cos x\cdot(\sin x+1)$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא בתחום $[0,\pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

30) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

31) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi\le x\le 0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

32) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan\left(x^2-4x\right)$ בתחום $[0,4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

33) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cos x-x$ בתחום: $-3\pi\le x\le 3\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

ג. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ד. ידוע גם כי: $f'(-3.67)=0$, $f'(3.67)=0$ וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

34) נתונה הפונקציה: $y=(\cos x+k)^2$, k פרמטר, בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{2\pi}{3}$.

א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.

ג. האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

35) נתונה הפונקציה: $f(x)=m\sin x+k\cos^2 x$ (m פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\pi$ שמשוואתו: $y=-6x+6\pi+\sqrt{7}$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m.

ב. מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi\le x\le 1.5\pi$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנ"ל.

36) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan x+kx$, (k פרמטר) בתחום: $0\le x\le\pi$.

א. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.

הפונקציה: $g(x)=\tan^2 x+kx$ חותכת את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

ב. מצא את ערך הפרמטר k , $(k\ne 0)$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

37) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{-\cos x}$, $g(x)=\sqrt{\cos x+1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \le x \le 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם הגרפים חותכים את ציר ה- x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.

ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.

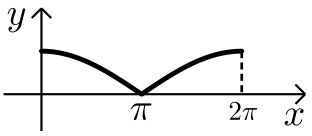
ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.

ד. לפניך ארבעה איורים: i , ii , iii , iv.

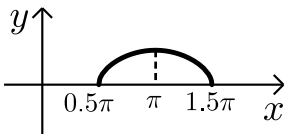
קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$

ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.

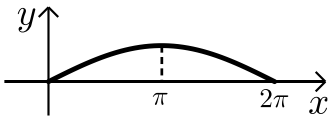
i.



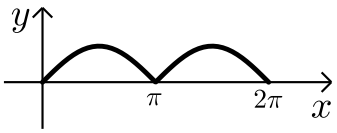
ii.



iii.



iv.



תשובות סופיות:

1) א. $\cos x-3\sin x+1$ ב. $2\sin x+2x\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}$ ג. $\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

2) א. $3\cos 3x-10\sin 5x$ ב. $-\frac{2}{1+\sin 2x}$.

3) א. $3\sin^2 x\cdot\cos x$ ב. $-8\cos^3 x\sin x$ ג. $\sin 2x$

ד. $6\sin^2 2x\cos 2x$ ה. $-2\sin 4x$ ו. $\frac{8\tan 4x}{\cos^2 4x}$.

4) א. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$ ב. $\frac{\cos^2 2x+1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

5) א. $2\sin 2x$ ב. $4\sin 4x$ ג. $-\sin 4x$.

6) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7) $y=-2x+\pi$.

8) $y=12x-\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$.

9) $y=2\sqrt{3}x-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+1$, $y=-2\sqrt{3}x+\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}+1$.

10) $a=\frac{1}{2}$.

11) א. $a=2$, $f(x)=2\sin^2 x-5\sin x+2x$ ב. $\left(\frac{\pi}{2},\pi-3\right)$ ג. לא. ד. $y=2x-3$.

12) ב. $\left(\frac{\pi}{4},1.11\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4},6.05\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4},1.11\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4},6.05\right)$ ג. $t=\frac{\pi}{12}$.

13) א. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ ב. $-\pi\le x\le\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$.

ג. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

14) $\min(0,1)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $\min\left(\frac{5}{4}\pi,-\sqrt{2}\right)$, $\max(2\pi,1)$ קצה.

15) $\min(0,0)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$, $\min\left(\frac{5}{3}\pi,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{6}\pi\right)$, $\max(2\pi,-\pi)$ קצה.

16) $\min(2\pi,-1)$ קצה, $(0,-1)$ קצה, $\max\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$ מוחלט.

17) $\min\left(\frac{\pi}{2},-2\frac{2}{15}\right)$, $\max\left(\frac{3}{2}\pi,2\frac{2}{15}\right)$.

18) $a=3\ ,\ b=-4$.

19) $x=\pi\ ,\ x=\frac{2\pi}{3}\ ,\ x=\frac{\pi}{3}\ ,\ x=0$.

20) $x=\pi\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=0$.

21) $x=-\frac{\pi}{2}\ ,\ x=\frac{\pi}{2}$.

22) נקודות פיתול: $\left(\frac{11}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$, קעור מעלה: $0<x<\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

קעור מטה: $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$.

23) א. $0\le x\le 2\pi$.

ב. $\max\left(2\pi,2\pi+2\right)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$, $\min\left(0,2\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$.

ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$, קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

24) א. $\frac{\pi}{2}<x<\pi$; $0<x<\frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=0$.

25) א. $\left(\frac{5}{12}\pi,0\right)$, $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$, $(0,-2)$.

ב. $\max\left(\pi,-2\right)\min\left(\frac{3\pi}{4},-6\right),\max\left(\frac{\pi}{4},2\right)\min\left(0,-2\right)$.

ד. $-6<k<2$ וגם $k\ne -2$ ה. $\frac{\pi}{2}$.

26) א. $(\pi,0),(0,-2)$.

ב. $\max\left(2\pi,-2\right),\min\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right),\max\left(\pi,0\right),\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right),\max\left(0,-2\right)$.

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$, $\frac{\pi}{3}<x<\pi$, יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$, $0<x<\frac{\pi}{3}$.

27 א. $m=2$ ב. כן: $\left(-\frac{7\pi}{6},-1.3\right)$, $\left(-\frac{11\pi}{6},1.3\right)$ ג. לא.

ד. $(0,1)$ $(-0.5\pi,0),(-1.5\pi,0)$ ה. עבור: $-1.5\pi<x<-0.5\pi$.

28 א. $(0,1)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ ב. $(0,1),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),(1.5\pi,0)$

ד. 2 פתרונות.

29 א. חיתוך: $(0,0),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה, $\min(0,0),\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ קצה.

30 א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right),\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$ קצה

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$, קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

31 א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$. ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.

32 א. $0\le x\le 4$ וגם $x\ne 3.56$, $x\ne 0.44$

ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(2,-1.16)$, $\max(4,0)$ קצה.

33 א. $(0,0),(2\pi,0),(-2\pi,0)$

ב. ii. $\min(-2\pi,0)$, $\max(2\pi,0)$, $(0,0)$ פיתול.

34 א. $k=0.5$, $y=(\cos x+0.5)^2$ ב. $(\pi,0.25)$

ג. לא.

35 א. $k=\sqrt{7}$, $m=6$ ב. $(-0.5\pi,-6),(0.5\pi,6),(1.5\pi,-6)$. ג. בשתי נקודות.

36 א. $x=0.5\pi$ ב. $k=-\frac{4}{\pi}\approx -1.27$

ג. $\min(\pi,-4)$ $\max(0.84\pi,-3.9)$, $\min(0.15\pi,-0.09)$, $\max(0,0)$.

37 א. כן. $(0.5\pi,0),(1.5\pi,0)$, $f(x)$: $(\pi,0)$, $g(x)$.

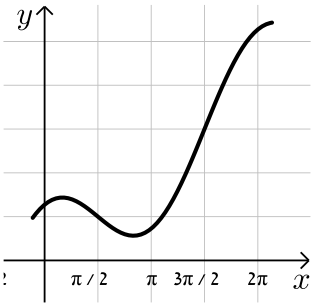
ב. כן, $\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

ג. $\max(\pi,1)$ $\min(1.5\pi,0)$, $\max(0.5\pi,0)$

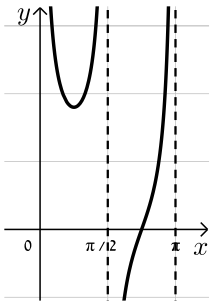
ד. איור I - $g(x)$, איור II - $f(x)$.

סקיצות לשאלות החקירה:

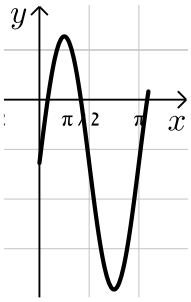
(23



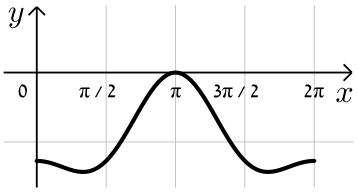
(24



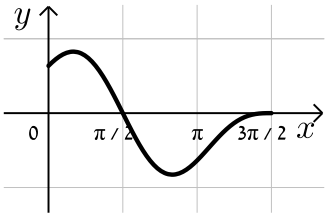
(25



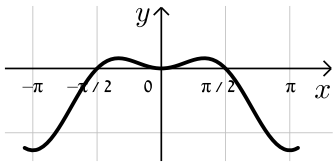
(26



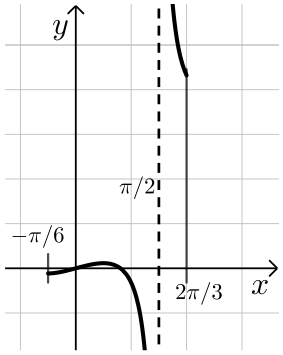
(28



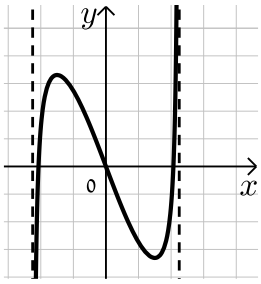
(29



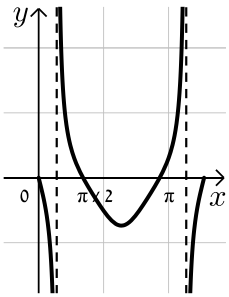
(30



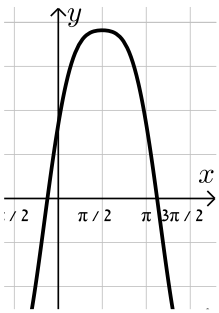
(31



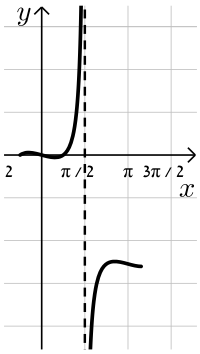
(32



(35



(36



תרגול נוסף:

הערה:

השאלות בחוצץ זה ניתנו כבונוס ואינם חלק מהקורס המוקלט.

שאלות העוסקות בהצבת ערכים ברדיאנים:

1) הצב בכל פונקציה את הערכים שלידה וחשב (הזווית נתונה ברדיאנים):

א. $y=2\sin x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{2}$

ב. $y=3\cos x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{2}$

ג. $y=\sin 2x$: $x=-\pi\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{8}$

ד. $y=\cos 2x$: $x=-\pi\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{8}$

ה. $y=3\sin x$: $x=\pi\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}$

ו. $y=4\cos x+\sin 4x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

ז. $y=\sin^2 x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

ח. $y=\cos^2 x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

ט. $y=\sin^2 2x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

י. $y=\cos^2 2x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

יא. $y=\tan x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

יב. $y=\tan 2x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

יג. $y=\tan^2 x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

יד. $y=\sin x+\tan x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

טו. $y=\cos x+\tan x$: $x=\pi\ ,\ -\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{2}$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים (הזווית נתונה ברדיאנים):

א. $x=1,2,3 : y=\sin x$

ב. $x=1,2,3 : y=\cos x$

ג. $x=1,2,3 : y=\tan x$

ד. $x=-1,-2.5,-5 : y=\sin x$

ה. $x=-1,-2.5,-5 : y=\cos x$

ו. $x=-1,-2.5,-5 : y=\tan x$

ז. $x=2,4,5 : y=\tan 2x-\sin 3x$

ח. $x=-1,-0.5,3 : y=\cos 2x+\sin 2x$

3) הצב בפונקציות הבאות את ערכי הזוויות שלידן (הזויות ברדיאנים):

א. $x=0,1,2 : y=x+\sin x$

ב. $x=0,1,2 : y=x+\cos x$

ג. $x=1.5,2.5,-3 : y=x^2-\sin x$

ד. $x=1.5,2.5,-3 : y=x^2-\cos x$

ה. $x=1,-3,0.5 : y=x^2+\tan x+1$

ו. $x=-6,-0.3,0.25 : y=\left(x-\sin x\right)^2$

ז. $x=-0.5,1,2.6 : y=\left(2x+\cos 2x\right)^2$

ח. $x=1,2,3 : y=x\sin x$

ט. $x=1,2,3 : y=x\cos x$

י. $x=1,-1,2,-2,3,-3 : y=x\tan x$

יא. $x=1,-1,2,-2,3,-3 : y=x^2\sin x$

יב. $x=1,-1,2,-2,3,-3 : y=x^2\cos x$

שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות:

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=3\sin x$

ב. $y=2\cos x$

ג. $y=2\tan x$

ד. $y=\cos x+5\sin x$

ה. $y=4\sin x-3\cos x$

ו. $y=\tan x+3\sin x$

ז. $y=\sin x+2x$

ח. $y=x^2-2\cos x$

ט. $y=3x-3\tan x$

י. $y=\sin x+3\cos x+x$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=\sin 3x$

ב. $y=\cos 4x$

ג. $y=\tan 2x$

ד. $y=\sin 3x+2\cos 5x$

ה. $y=4\sin 3x-\cos 2x$

ו. $y=\tan 5x+\sin 3x$

ז. $y=\sin 3x+x^2-3x$

ח. $y=3x-3\cos 2x$

ט. $y=\sin\left(3x-\pi\right)$

י. $y=\cos\left(0.4\pi-4x\right)$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=x\sin x$

ב. $y=x\cos x$

ג. $y=2x\tan x$

ד. $y=x^2\cos x$

ה. $y=2x\sin x+4\tan x$

ו. $y=x\left(3-\sin x\right)$

ז. $y=\cos x\sin x$

ח. $y=\left(\cos x+1\right)\left(\sin x-2\right)$

ט. $y=\cos x\left(\sin x+1\right)$

י. $y=\left(\cos x-1\right)\left(\tan x-1\right)$

יא. $y=\sin 3x\left(\cos 2x-1\right)$

יב. $y=\left(x^2-3\right)\tan 4x$

יג. $y=\dfrac{\sin x}{x}$

יד. $y=\dfrac{\sin x}{\cos x+2}$

טו. $y=\dfrac{\cos x}{\tan x-3}$

טז. $y=\dfrac{\sin x}{\sin x-5}$

יז. $y=\dfrac{\cos x+2}{\sin x}$

יח. $y=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

יט. $y=\dfrac{\cos 3x+1}{\sin x+2}$

כ. $y=\dfrac{\sin x}{\sin x+1}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y=\sin^2 x$

ב. $y=\cos^2 x$

ג. $y=\tan^2 x$

ד. $y=\sin^3 x$

ה. $y=2\cos^4 x$

ו. $y=\tan^2 4x$

ז. $y=\sin^3 2x$

ח. $y=\cos^2 2x$

ט. $y=\left(x\cos x\right)^2$

י. $y=x\sin^2 x$

יא. $y=x^2\sin x-\cos^2 x$

יב. $y=\sin^2 x-\cos^2 x$

יג. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

יד. $y=\sin^4 2x-\cos^4 2x$

טו. $y=\left(x+\sin x\right)^2$

טז. $y=x\left(3-\sin x\right)^2$

יז. $y=\dfrac{\cos^2 x+1}{\sin x}$

יח. $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x+1}$

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

8) מצא את שיפוע הפונקציה: $y=\sin x$ בנקודות הבאות:

א. $x=0$ ב. $x=\pi$ ג. $x=-0.5\pi$

9) מצא את שיפוע הפונקציה: $y=3\cos 2x$ בנקודות הבאות:

א. $x=0$ ב. $x=0.5\pi$ ג. $x=\pi$

10) מצא את שיפוע הפונקציה: $y=\tan x-\cos x$ בנקודות הבאות:

א. $x=0$ ב. $x=\frac{\pi}{3}$ ג. $x=\frac{\pi}{4}$

11) מצא את שיפוע הפונקציה: $y=x+\sin 3x$ בנקודות הבאות:

א. $x=\frac{\pi}{6}$ ב. $x=-\frac{2\pi}{3}$ ג. $x=\frac{\pi}{4}$

12) חשב את הזווית הנוצרת בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $y=\frac{x}{2}-\cos 2x$

בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{3}$ וציר ה- x.

13) חשב את הזווית הנוצרת בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $y=\sin x-\tan x$

בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{4}$ והכיוון החיובי של ציר ה- x.

14) מצא את הזווית הנוצרת בין המשיק לגרף הפונקציה: $y=\sin x-\cos x$ בנקודות הבאות והכיוון החיובי של ציר ה- x:

א. $x=0$ ב. $x=\frac{\pi}{2}$ ג. $x=\frac{\pi}{4}$ ד. $x=\frac{\pi}{6}$

15) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\cos x$ בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{6}$.

16) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\sin 2x$ בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{2}$.

17) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\tan 3x$ בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{9}$.

18) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\frac{\sin x+1}{2}$ בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{4}$.

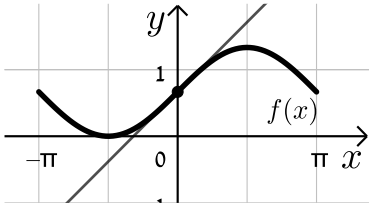
19) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\tan 3x-x$ בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{4}$.

20) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=x^2\cos x$ בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{2}$.

21) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=(\sin x+\cos x)^2$ בנקודה שבה: $x=\pi$.

22) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\frac{\sin x}{\sin x+1}$ בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{4}$.

23) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2\sin x+2}{3}$ בתחום: $[-\pi,\pi]$.



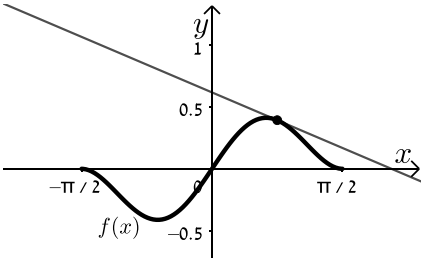
מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

א. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x.

24) נתונה הפונקציה: $y=x\cos^2 x$ בתחום: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.



מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ מהנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{4}$.

א. כתוב את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

25) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=1$ בתחום: $[0,\pi]$.

26) נתונות הפונקציות: $f(x)=4\cos x$, $g(x)=\sin 2x$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך שלהן בתחום הנתון.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

27) נתונות הפונקציות: $f(x)=2\sin^2 x$, $g(x)=\sin x+1$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך שלהן בתחום הנתון.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

28) מצא את משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות הבאות בעלי השיפוע הנתון:

א. $f(x)=2\sin x$, $m=2$ בתחום: $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ב. $f(x)=\sin 4x$, $m=2$ בתחום: $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

ג. $f(x)=3x-\cos x$, $m=2$ בתחום: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

ד. $f(x)=\sin^2 x-\cos 2x$, $m=1.5\sqrt{3}$ בתחום: $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

29) נתונה הפונקציה: $f(x)=1-\sin 2x$. מצא עבור אלו ערכים של x בתחום: $[0,2\pi]$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 1-.

30) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\cos 2x+3$ המקביל לישר: $y=x\sqrt{3}+\pi$ בתחום: $[0,\pi]$.

31) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=3\tan x-2$ המקביל לישר: $y=3x+2\pi$ בתחום: $[0,\pi]$.

32) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{3}{2}\cos 2x$

בתחום: $[0,\pi]$ בעלי השיפוע 1-.

שאלות עם פרמטרים:

33) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin x+\cos 3x$ (a פרמטר) בתחום: $[0,2\pi]$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{3}$ הוא 2. מצא את a.

34) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos 2x+\cos 3x$ (a פרמטר) בתחום: $[0,2\pi]$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{3}$ הוא $\sqrt{3}$. מצא את a.

35) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=a\tan x$ בנקודה שבה $x=\pi$ הוא 3.

א. מצא את a.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\pi$.

36) לגרף הפונקציה: $f(x)=\sin x+a\cos x$ (a פרמטר חיובי) מעבירים משיק מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

א. הבע באמצעות a את משוואת המשיק.

ב. מצא את a אם ידוע כי שטח המשולש שנוצר בין המשיק וצירים הוא 2 יחידות שטח וכתוב את משוואת המשיק.

37) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{\sin x+k}$ (k פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{6}$ הוא: $-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

א. מצא את k וכתוב את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

ג. חשב את שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים.

38) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{k}{\cos x}+2\sin 2x$ (k פרמטר חיובי).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=\frac{2\pi}{3}$.

א. הבע באמצעות k את שיפוע המשיק.

ב. המשיק מאונך לישר: $8y=x+4$. מצא את k.

ג. כתוב את משוואת המשיק.

39) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{2}{a\tan x}$ (a פרמטר).

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=-\frac{2}{a\sin^2 x}$.

ב. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=-\frac{\pi}{6}$ הוא 4-. מצא את a.

שאלות העוסקות בחקירות פונקציה טריגונומטרית:

תחומי הגדרה:

40) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום $[0,2\pi]$:

א. $y=\sin 2x-5$

ב. $y=\sqrt{3}\cos x$

ג. $y=\tan x$

ד. $y=\tan x+\sin x$

ה. $y=\tan 2x-2\cos x$

ו. $y=\tan^2 x+\tan x$

ז. $y=\frac{1}{\sin 2x}$

ח. $y=\frac{3}{\cos x}$

ט. $y=\frac{x}{\sin x-1}$

י. $y=\frac{\sin x}{\sin 2x+0.5}$

יא. $y=\frac{\cos x}{4\sin^2 x-3}$

יב. $y-\frac{\cos x+2}{\cos^2 x-1}$

יג. $y=\frac{x^2-4\sin x+\cos x}{\sin^2 x+1}$

יד. $y=\frac{6}{\cos^2 x+4}$

טו. $y=\frac{12}{\tan x}$

טז. $y=\frac{7}{\tan 2x}$

יז. $y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$

יח. $y=\frac{1}{\sin x\cos x}$

41) הפונקציה: $y=\tan(ax)+3$ (a פרמטר) אינה מוגדרת עבור: $x=\frac{\pi}{4}$. מצא את a.

42) הפונקציה: $y=\frac{2}{\sin x+a}$ (a פרמטר) אינה מוגדרת עבור: $x=\frac{\pi}{6}$. מצא את a.

43) הפונקציה: $y=\frac{\sin x}{a^2-\cos^2 x}$ (a פרמטר חיובי) אינה מוגדרת עבור: $x=0$. מצא את a.

נקודות קיצון:

44) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $[0,2\pi]$, $y=\sin x$

ב. $[0,2\pi]$, $y=\cos x$

ג. $[-\pi,\pi]$, $y=\tan x$

ד. $[0,\pi]$, $y=2\sin 2x$

ה. $[0,0.5\pi]$, $y=2\cos 3x-3x$

ו. $[0,\pi]$, $y=2\sin x-x\sqrt{3}$

45) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y=\frac{2}{\sin x}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

46) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y=\frac{4}{\cos x}$ בתחום: $[-\pi,\pi]$.

47) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y=\sin^2 x$ בתחום: $[0,\pi]$.

48) מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $y=\cos^2 x+2$ בתחום: $[0,\pi]$.

49) מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה: $y=\sin x+\cos x$
בתחום: $[0,2\pi]$ וקבע את סוגן.

50) מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה: $y=\sin x-\frac{x}{2}$
בתחום: $[0,2\pi]$ וקבע את סוגן.

51) מצא את נקודות הקיצון המקומיות וקיצון הקצה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $[0,\pi]:\ y=3\sin 2x$ ב. $[0,\pi]:\ y=2\cos x+x$

ג. $[0,\pi]:\ y=\sin^2 x-5$ ד. $[0,\pi]:\ y=\cos^2 x-\cos x$

52) מצא את נקודות הקיצון המקומיות וקיצון הקצה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון וקבע את סוגן.

א. $[0,0.5\pi]:\ y=\cos 4x+3$ ב. $[0,\pi]:\ y=\sin x+\cos x$

ג. $[0,\pi]:\ y=\sin^2 x-2\cos x$ ד. $[0,0.5\pi]:\ y=\cos^2 x+\sqrt{2}\sin x$

53) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\sin^2 2x-x$ בתחום: $\left[0,\frac{2}{3}\pi\right]$.

54) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{3}\sin^3 x-2\sin x$ בתחום: $[0,1.5\pi]$.

55) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

56) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $f(x)=\sin 2x$ בתחום: $[0,\pi]$.

57) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos x-1}{3}$ בתחום: $[0,\pi]$.

58) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $f(x)=\tan x-\sin x$ בתחום: $0<x<\pi$.

59) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x$ בתחום: $[-\pi,\pi]$.

60) הוכח כי הפונקציה: $f(x)=\tan x-\sin x$ אינה יורדת כלל.

61) הוכח כי הפונקציה: $f(x)=\sin x-2x$ יורדת לכל x.

62) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin x+ax$ (a פרמטר).

א. מצא תחום ערכים של a עבורם הפונקציה תמיד עולה.

ב. מצא תחום ערכים של a עבורם הפונקציה תמיד יורדת.

ג. האם בקצוות התחומים שמצאת עבור a בסעיפים הקודמים, הנקודות שמקיימות: $f'(x)=0$ הן נקודות קיצון?

63) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos x+x\sqrt{3}$ (a פרמטר).

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=\frac{2}{3}\pi$. מצא את a.

64) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin 2x-\cos x$ (a פרמטר).

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=\frac{\pi}{6}$. מצא את a.

65) לפונקציה: $f(x)=a\sin x+b\sin^3 x$ יש נקודת קיצון ששיעוריה הם: $\left(\frac{7}{6}\pi,-1\right)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a,b.

אסימפטוטות אנכיות:

66) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציות הבאות בתחום המצוין לידן:

א. $f(x)=\frac{1}{\sin 3x}$: $[0,\pi]$.

ב. $f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$: $[0,\pi]$.

ג. $f(x)=\tan x$: $[-\pi,\pi]$.

67) לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin ax-0.5}$ (a פרמטר בתחום: $[0,3]$) אסימפטוטה אנכית: $x=\frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a.

ב. הראה כי אם האסימפטוטה הייתה: $x=\frac{\pi}{18}$ אז היה מתקבל ערך a הגדול פי 3 מזה שמצאת בסעיף הקודם.

68) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\cos 2x+a}$ (a פרמטר).

א. הסבר מדוע עבור: $a>1$ הפונקציה מוגדרת לכל x.

ב. האם הפונקציה מוגדרת לכל x עבור תחום ערכים נוסף של a?
אם כן – מהו? אם לא – נמק.

ג. מצא את a אם ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x=0.5\pi$.

69) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos x}{a\sin^2 x-3}$ (a פרמטר) בתחום: $[-0.5\pi,0.5\pi]$.

א. מצא את a אם ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x=\frac{\pi}{3}$.

ב. הראה כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית הנגדית ל-$x=\frac{\pi}{3}$ בתחום הנתון.

חקירות חלקיות שונות ללא פרמטרים:

70) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{3}-2\sin^2 x$ בתחום: $[-0.5\pi,0.5\pi]$.

א. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=\sqrt{3}-2\sin 2x$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

71) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cos x-x$ בתחום: $[-3\pi,3\pi]$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x מאפסות את הנגזרת של הפונקציה.

ג. קבע אלו נקודות מנקודות החיתוך הן קיצון ואלו אינן קיצון.
מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

72) נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sin^2 2x-\sin 4x$ בתחום: $[0,\pi]$.

א. בכמה נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר ה-x בתחום הנתון?

ב. כמה נקודות קיצון יש לגרף הפונקציה בתחום הנתון? מצא אותן וקבע את סוגן.

73) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$ בתחום: $[-0.5\pi,0.5\pi]$.

א. מצא את כל הנקודות על גרף הפונקציה בתחום הנתון ששיפוע המשיק העובר דרכן הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ב. הראה כי הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום הנתון הוא 1.

ג. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך נקודת המקסימום המוחלטת של הפונקציה בתחום הנתון ודרך הנקודה שמצאת בסעיף א' הנמצאת ברביע השני.

74) נתונה הפונקציה: $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$.

א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x)=2\cos 2x$.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה לא יורד מתחת לציר ה-x.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום: $[-2\pi,2\pi]$.

75) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x+\sin x)(x-\sin x)$.

א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x)=2x-\sin 2x$.

ב. הראה כי הנקודה שבה $x=0$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפרבולה: $g(x)=x^2$ בתחום: $[-1.2\pi,1.2\pi]$.

76) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2+\cos^2 x$, $g(x)=x^2+\sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x)-g(x)$ שווה ל-$\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $[-\pi,\pi]$.

ג. ישר $x=t$ (t פרמטר בתחום: $-2<t<0$) חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בנקודות A ו-B בהתאמה. דרך הנקודות A ו-B מעבירים משיקים לפונקציות.
ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ ושיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ הוא 1. מצא את כל הערכים האפשריים עבור t.

חקירות חלקיות שונות עם פרמטרים:

77) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos 2x+2\sin x$ (a פרמטר) בתחום: $[0,\pi]$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{4}$ הוא: $m=\sqrt{2}-2$.

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

78) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+a\sin x$, (a פרמטר) בתחום: $[0,\pi]$.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=\frac{\pi}{4}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את שאר נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

79) נתונה הפונקציה: $f(x)=-\frac{1}{a}\sin x+\cos ax$ (a פרמטר שלם ושונה מ-0).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=\pi$ הוא 0.5.

א. מצא את a.

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מצא את נקודת הקיצון המקומית של גרף הפונקציה בתחום: $0<x<\pi$.

80) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^3 x+k\sin x$ (k פרמטר) בתחום: $[-\pi,\pi]$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{3}$ הוא $-\frac{3}{8}$.

א. מצא את k.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע האם יש למשוואה: $\sin^3 x-3\sin x=3$ יש פתרון. אם כן מהו?

81) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos(ax)$, a הוא מספר שלם זוגי וחיובי.

הנגזרת של הפונקציה היא 4- כאשר $x=\frac{\pi}{4}$.

א. האם a הוא כפולה של 4? נמק.

ב. מצא את a.

ג. מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0\le x\le\pi$.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום: $0\le x\le\pi$.

82) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin^2 x-5\sin x+ax$ (a פרמטר) בתחום: $[0,\pi]$.

ידוע כי הישר: $y=ax-2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא 2.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק העובר דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

חקירת מלאות:

83) חקור את הפונקציות הבאות בתחום המצוין לידן לפי הסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה.
2. נקודות קיצון (מקומיות וקצה).
3. תחומי עלייה וירידה.
4. נקודות חיתוך עם הצירים (במידה ויש).
5. אסימפטוטות אנכיות.
6. שרטוט.

*** הערה: אין צורך למצוא נקודות חיתוך עם ציר ה- x במקרים א' ו-ג'.**

א. $f(x)=x+2\cos x$ $[0,2\pi]$

ב. $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$ $[-\pi,\pi]$

ג. $f(x)=4x-3\tan x$ $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$

ד. $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ $[0,\pi]$

84) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+1-2\sin x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

א. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

85) נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sin^2 x+\sin x-1$ בתחום: $[0,1.5\pi]$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

86) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $[0,2\pi]$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

87) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin 2x-\cos 2x$ בתחום: $\left[\frac{-3\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

88) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x+x\sqrt{2}$ בתחום: $0<x<\pi$.

א. מצא את נקודות הקיצון המקומיות של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ג. האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנתון?

ד. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע כמה פתרונות יש למשוואה: $\frac{2}{3}\sin 3x+x\sqrt{2}=1$?

89) נתונה הפונקציה: $f(x)=(\sin x+1)\cos x$ בתחום: $[0,1.5\pi]$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של גרף הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $(\sin x+1)\cos x=1$ עבור x בתחום הנתון?

90) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+2}$ בתחום: $-\pi<x<\pi$.

א. מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

91) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-1}{\sin x}$ בתחום: $-0.5\pi<x<0.5\pi$.

א. מצא את האסימפטוטה אנכית של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

1) א. $0,0,\sqrt{3},2$ ב. $-3,-3,-1.5,0$ ג. $0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ד. $1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$ ה. $-3,3,-1.59,-1,1$ ו. $-4,-4,4,0,0,0,0$

ז. $0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,1,1,1$ ח. $1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,0,0,0$

ט. $0,0,0,1,1,\frac{3}{4},\frac{3}{4},0,0,0,0$ י. $1,1,1,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,0,0,0$

יא. $0,0,0,1,-1,\sqrt{3},-\sqrt{3},\varnothing,\varnothing,\varnothing,\varnothing$ יב. $0,0,0,\varnothing,-\sqrt{3},\sqrt{3},0,0,0,0$.

יג. $0,0,0,1,1,3,3,\varnothing,\varnothing,\varnothing,\varnothing$

יד. $0,0,0,1.707,-1.707,2.59,-2.59,-1.23,\varnothing,\varnothing,\varnothing,\varnothing$

טו. $-1,-1,1,1,1.707,-0.2928,2.23,-1.23,\varnothing,\varnothing,\varnothing,\varnothing$

2) א. $0.841,0.9,0.141$ ב. $0.54,-0.416,-0.989$ ג. $1.55,-2.18,-0.142$

ד. $-0.841,-0.598,0.958$ ה. $0.54,-0.801,0.283$ ו. $-1.55,0.747,3.38$

ז. $1.43,-6.26,0$ ח. $-1.325,-0.301,0.68$

3) א. $0,1.84,2.909$ ב. $1,1.54,1.583$ ג. $1.252,5.654,9.14$

ד. $2.179,7.05,9.989$ ה. $3.55,10.14,1.796$ ו. $39.43,0,0$

ז. $0.211,2.5,32.132$ ח. $0.841,1.818,0.423$ ט. $0.54,-0.832,-2.969$

י. $1.577,1.577,-4.37,-4.37,-0.427,-0.427$

יא. $0.84,-0.84,3.63,-3.63,1.27,-1.27$

יב. $0.54,0.54,-1.66,-1.66,-8.9,-8.9$

4) א. $y'=3\cos x$ ב. $y'=-2\sin x$ ג. $y'=\frac{2}{\cos^2 x}$

ד. $y'=-\sin x+5\cos x$ ה. $y'=4\cos x+3\sin x$ ו. $y'=\frac{1}{\cos^2 x}+3\cos x$

ז. $y'=\cos x+2$ ח. $y'=2x+2\sin x$ ט. $y'=3-\frac{3}{\cos^2 x}$

י. $y'=\cos x+3\sin x+1$.

5) א. $y'=3\cos 3x$ ב. $y'=-4\sin 4x$ ג. $y'=\frac{2}{\cos^2 2x}$

ד. $y'=3\cos 3x-10\sin 5x$ ה. $y'=12\cos 3x+2\sin 2x$ ו. $y'=\frac{5}{\cos^2 5x}+3\cos 3x$

ז. $y'=3\cos 3x+2x-3$ ח. $y'=3+6\sin 2x$ ט. $y'=3\cos(3x-\pi)$

י. $y'=4\sin(0.4\pi-4x)$

6) א. $y'=\sin x+x\cos x$ ב. $y'=\cos x-x\sin x$ ג. $y'=2\tan x+\frac{2x}{\cos^2 x}$

ד. $y'=2x\cos x-x^2\sin x$ ה. $y'=2(\sin x+x\cos x)+\frac{4}{\cos^2 x}$

ו. $y'=3-\sin x-x\cos x$ ז. $y'=\cos 2x$

ח. $y'=\cos 2x+\cos x+2\sin x$ ט. $y'=\cos 2x-\sin x$ י. $y'=\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x$

יא. $y'=3\cos 3x(\cos 2x-1)-2\sin 3x\sin 2x$

יב. $y'=2x\tan 4x+\frac{4(x^2-3)}{\cos^2(4x)}$ יג. $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ יד. $y'=\frac{1+2\cos x}{(\cos x+2)^2}$

טו. $y'=\frac{3\sin x\cos x-\sin^2 x-1}{\cos x(\tan x-3)^2}$ טז. $y'=\frac{-5\cos x}{(\sin x-5)^2}$ יז. $y'=\frac{1+2\cos x}{\sin^2 x}$

יח. $y'=\frac{-2(\sin 2x+1)}{(1+\sin 2x)^2}$ יט. $y'=-\frac{3\sin 3x\sin x+6\sin 3x+\cos x\cos 3x+\cos x}{(\sin x+2)^2}$

כ. $y'=\frac{\cos x}{(\sin x+1)^2}$

7) א. $y'=\sin 2x$ ב. $y'=-\sin 2x$ ג. $y'=\frac{2\sin x}{\cos^2 x}$ ד. $y'=3\sin^2 x\cos x$.

ה. $y'=-8\cos^3 x\sin x$ ו. $y'=\frac{8\sin 4x}{\cos^3 4x}$ ז. $y'=6\sin^2 2x\cos 2x$

ח. $y'=-2\sin 4x$ ט. $y'=2(x\cos x)(\cos x-x\sin x)$

י. $y'=x\sin 2x+\sin^2 x$ יא. $2x\sin x+x^2\cos x+\sin 2x$ יב. $y'=2\sin 2x$

יג. $y'=-\sin 4x$ יד. $y'=4\sin 4x$ טו. $y'=2(x+\sin x)(1+\cos x)$

טז. $y'=(3-\sin x)^2-2x(3-\sin x)\cos x$ יז. $y'=\frac{\sin 2x\sin x+\cos^3 x+\cos x}{\sin^2 x}$

יח. $y'=\frac{\cos^3 x+\cos x+\sin 2x\sin x}{(\cos^2 x+1)^2}$

8) א. 1 ב. -1 ג. 0

9) א. 0 ב. 0 ג. 0

10) א. 1 ב. 4.866 ג. 2.7

11) א. 1 ב. 4 ג. -1.12

12) 65.86°

13) 127.72°

14) א. 45° ב. 45° ג. 54.73° ד. 53.8°

(15 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(16 $y=-2x+\pi$

(17 $y=12x+\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

(18 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+0.603$

(19 $y=5x-1-1.5\pi$

(20 $y=-\frac{\pi^2}{4}x+\frac{\pi^2}{8}$

(21 $y=2x+1-2\pi$

(22 $y=0.2426x+0.2236$

(23 א. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ ב. $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ ג. $(-1,0)$

(24 א. $y=-0.285x+0.6168$ ב. $(2.164,0)$, $(0,0.6168)$

(25 $y=2\sqrt{3}x-0.813$, $y=-2\sqrt{3}x+10.06$

(26 א. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ ב. $y=4x-6\pi$, $y=-4x+2\pi$

(27 א. $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ ב. $y=2$, $y=x\sqrt{3}-5.848$

(28 א. $y=2x$ ב. $y=2x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ ג. $y=2x-0.5\pi$

ד. $y=1.5\sqrt{3}x+3.97$, $y=1.5\sqrt{3}x-1.51$

(29 $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

(30 $y=\sqrt{3}x-1.034$, $y=\sqrt{3}x+2.5-\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$

(31 $y=3x-2$, $y=3x-3\pi-2$

(32 $y=-x-0.009$, $y=-x+1.657$

(33 $a=4$

(34 $a=-1$

(35 א. $a=3$ ב. $y=3x-3\pi$

(36 א. $y=x+a$ ב. $a=2$, $y=x+2$

(37 א. $y=-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{48}\pi$, $k=1.5$ ב. $(0,0.613)$, $(2.83,0)$ ג. $S=0.868$

(38 א. $-2\left(k\sqrt{3}+1\right)$ ב. $k=\sqrt{3}$ ג. $y=-8x+\frac{16}{3}\pi-3\sqrt{3}$

39) ב. $a=2$

40) א. כל x ב. כל x ג. $x\neq\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$ ד. $x\neq\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$

ה. $x\neq\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$. ו. $x\neq\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$ ז. $x\neq0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$

ח. $x\neq\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$ ט. $x\neq\frac{\pi}{2}$ י. $x\neq\frac{19}{12}\pi,\frac{7}{12}\pi,\frac{23}{12}\pi,\frac{11}{12}\pi$

יא. $x\neq\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi$ יב. $x\neq0,\pi,2\pi$ יג. כל x

יד. כל x טו. $x\neq0,\pi,2\pi$ טז. $x\neq0,0.5\pi,\pi,1.5\pi,2\pi$

יז. $x\neq0,0.5\pi,\pi,1.5\pi,2\pi$ יח. $x\neq0,0.5\pi,\pi,1.5\pi,2\pi$

41) $a=2$

42) $a=-\frac{1}{2}$

43) $a=1$

44) א. $\left(\frac{3}{2}\pi,-1\right),\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ ב. $(0,1),(2\pi,1),(\pi,-1)$ ג. אין

ד. $\left(\frac{\pi}{4},2\right),\left(\frac{3}{4}\pi,-2\right)$ ה. $\left(\frac{7}{18}\pi,-5.39\right)$ ו. $\left(\frac{\pi}{6},0.09\right)$

45) $\left(\frac{3}{2}\pi,-2\right),\left(\frac{\pi}{2},2\right)$

46) $(-\pi,-4),(\pi,-4),(0,4)$

47) $(\pi,0),(0,0),\left(\frac{\pi}{2},1\right)$

48) $\left(\frac{\pi}{2},2\right),(\pi,3),(0,3)$

49) $\min(0,1)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right),\min\left(\frac{5}{4}\pi,-\sqrt{2}\right),\max(2\pi,1)$ קצה.

50) $\min(0,0)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right),\min\left(\frac{5}{3}\pi,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{6}\pi\right),\max(2\pi,-\pi)$ קצה.

51) א. $\max(\pi,0)$ קצה, $\min\left(\frac{3}{4}\pi,-3\right),\max\left(\frac{\pi}{4},3\right),\min(0,0)$ קצה.

ב. $\max(\pi,\pi-2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,0.886\right),\max\left(\frac{\pi}{6},2.25\right),\min(0,2)$ קצה.

ג. $\min(\pi,-5)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{2},-4\right),\min(0,-5)$ קצה.

ד. $\max(\pi,2)$ קצה, $\min\left(\frac{\pi}{3},-0.25\right),\max(0,0)$ קצה.

52) א. $\max(0,4)$ קצה, $\min\left(\frac{\pi}{4},2\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},4\right)$ קצה.

ב. $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $\min(0,1)$ קצה, $\min(\pi,-1)$ קצה.

ג. $\min(0,-2)$ קצה, $\max(\pi,2)$ קצה.

ד. $\min\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{2}\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4},1.5\right)$, $\min(0,1)$ קצה.

53) $\max\left(\frac{5}{24}\pi,0.28\right)$ מוחלט, $\min\left(\frac{13}{24}\pi,-1.63\right)$ מוחלט.

54) $\min\left(\frac{\pi}{2},-2\frac{2}{15}\right)$ מוחלט, $\max\left(\frac{3}{2}\pi,2\frac{2}{15}\right)$ מוחלט

55) $\max\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$ מוחלט.

56) עולה: $0<x<\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi<x<\pi$, יורדת: $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$.

57) יורדת בכל התחום.

58) עולה בכל התחום.

59) עולה: $\frac{3}{4}\pi<x<\pi$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3}{4}<x<-\frac{\pi}{2}$.

יורדת: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{4}\pi$, $0<x<\frac{\pi}{4}$, $-\pi<x<-\frac{3}{4}\pi$.

60) שאלת הוכחה.

61) שאלת הוכחה.

62) א. $a>1$ ב. $a<-1$ ג. לא.

63) $a=2$

64) $a=-\frac{1}{2}$

65) $b=-4, a=3$

66) א. $x=0,\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi$ ב. $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ ג. $x=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$

67) א. $a=1$ ב. $a=3$

68) א. היות ו- $|\cos x|\le 1$. ב. כן - $a<-1$ ג. $a=1$

69) א. $a=4$

70) ב. $\max\left(\frac{\pi}{2},0.72\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},0.314\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.4\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{2},-4.72\right)$

ג. עולה: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6}$, יורדת: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$

71) א. $(0,0),(2\pi,0),(-2\pi,0)$ ג. $\min(-2\pi,0)$, $\max(2\pi,0)$, $(0,0)$ פיתול.

72) א. 5 נקודות שונות.

ב. $\min\left(\frac{\pi}{16},-0.414\right)$, $\max\left(\frac{5\pi}{16},2.41\right)$, $\min\left(\frac{9\pi}{16},-0.414\right)$, $\max\left(\frac{13\pi}{16},2.41\right)$

73) א. $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{\pi}{12},\frac{3}{4}\right)$ ג. $y=\frac{9}{7\pi}+\frac{5}{14}$

74) ג. $(-1.25\pi,0)(-0.25\pi,0),(0.75\pi,0),(1.75\pi,0)$

75) ג. $(\pi,\pi^2),(-\pi,\pi^2)$

76) ב. $\left(\frac{\pi}{4},1.11\right),\left(-\frac{3}{4}\pi,6.05\right)$ ג. $t=-\frac{5}{12}\pi,-\frac{\pi}{12}$

77) א. $a=1$

ב. $\min(\pi,1)$, $\max\left(\frac{5\pi}{6},1.5\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},1.5\right)$, $\min(0,1)$

ג. עולה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{6}\pi$, $0<x<\frac{\pi}{6}$ יורדת: $\frac{5}{6}\pi<x<\pi$, $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$

78) א. $a=-\sqrt{2}$, $f(x)=\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x$

ב. $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{3\pi}{4},-0.5\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},-0.414\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{4},-0.5\right)$, $\max(0,0)$

ג. $(0,0),(\pi,0)$

79) א. $a=2$ ב. $y=0.5x-0.57$ ג. $(0.5\pi,-1.5)$

80) א. $k=-3$ ב. $\max(\pi,0)$, $\min(0.5\pi,-2)$, $\max(-0.5\pi,2)$, $\min(-\pi,0)$ ג. לא.

81) א. לא, כי אז הנגזרת תתאפס כאשר $x=\frac{\pi}{4}$ בניגוד לנתון השאלה.

ב. $a=2$ ג. נקודה אחת. ד. $(0.75\pi,0)$, $(0.25\pi,0)$

82) א. $a=2$, $f(x)=2\sin^2 x-5\sin x+2x$ ב. $\left(\frac{\pi}{2},\pi-3\right)$ ג. לא. ד. $y=2x-3$

83) א. i. $0<x<2\pi$

ii. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$, $\min(0,2)$ קצה.

iii. עולה: $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$, $0<x<\frac{\pi}{6}$ יורדת: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ iv. $(0,2)$ v. אין.

ב. i. $-\pi<x<\pi$

ii. $\min(\pi,-2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{4}\right)$, $\min(0,0)$, $\max\left(-\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $\min(-\pi,-2)$ קצה

iii עולה: $0<x<\frac{\pi}{3}$, $-\pi<x<-\frac{\pi}{3}$ יורדת: $\frac{\pi}{3}<x<\pi$, $-\frac{\pi}{3}<x<0$

iv. $\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right),(0,0)$ v. אין.

ג. i. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ii. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

iii. עולה: $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$ יורדת: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$ iv. $(0,0)$ v. $x=\frac{\pi}{2}$

ד. i. $0<x<\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$ ii. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$

iii. עולה: $\frac{\pi}{4}<x<\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$ יורדת: $0<x<\frac{\pi}{4}$ iv. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ v. $x=\frac{\pi}{2}$

84) א. $\min\left(\frac{\pi}{3},0.315\right)$, $\max(0,1)$, $\min(2\pi,7.28)$, $\max\left(\frac{5}{3}\pi,7.96\right)$

ב. עולה: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$, יורדת: $0<x<\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$

85) א. $(0,-1),\left(\frac{\pi}{6},0\right),\left(\frac{5}{6}\pi,0\right),(1.5\pi,0)$

ב. $\min(0,-1)$, $\max(0.5\pi,2)$, $\min(1.08\pi,-1.24)$, $\max(1.5\pi,0)$

ג. עולה: $0.5\pi<x<1.08\pi$, יורדת: $0<x<0.5\pi$, $1.08\pi<x<1.5\pi$

86) א. $(\pi,0),(0,-2)$

ב. $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{3}{2}\pi,-2.25\right)$, $\max(2\pi,-2)$, $\max(0,-2)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right)$

ג. עולה: $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$, $\frac{\pi}{3}<x<\pi$, יורדת: $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$, $0<x<\frac{\pi}{3}$

87) א. $\left(-\frac{3}{8}\pi,0\right),\left(\frac{\pi}{8},0\right),\left(\frac{5}{8}\pi,0\right)$ ב. $\min\left(-\frac{\pi}{8},-1.41\right)$, $\max\left(\frac{3}{8}\pi,1.41\right)$

88) א. $\max\left(\frac{11\pi}{12},4.54\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{12},1.38\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4},1.58\right)$ ב. לא. ג. פתרון אחד.

89) א. $(1.5\pi,0)$, $(0.5\pi,0)$ ב. $\max(1.5\pi,0)$ $\min\left(\frac{5}{6\pi},-1.29\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},1.29\right)$, $\min(0,1)$

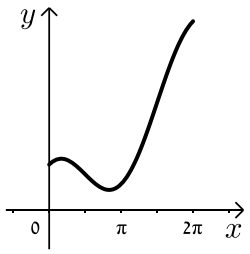
ד. 2 פתרונות.

90) א. $\min(-0.5\pi,-1)$, $\max\left(0.5\pi,\frac{1}{3}\right)$ ב. $(0,0)$

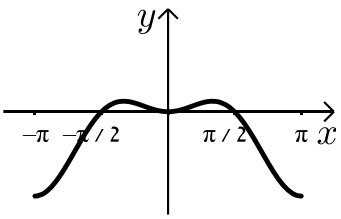
91) א. $x=0$

סרטוטים עבור שאלות 83-91:

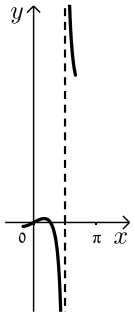
83) א.



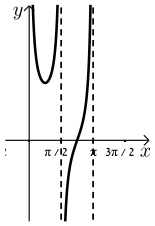
ב.



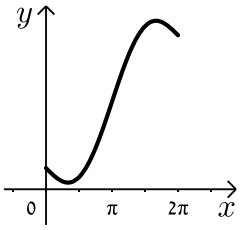
ג.



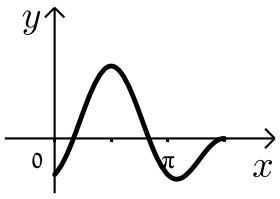
ד.



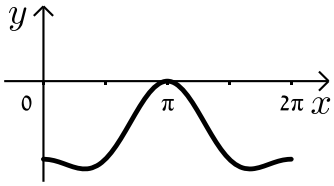
84)



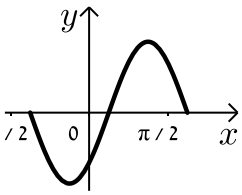
85)



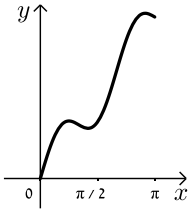
86)



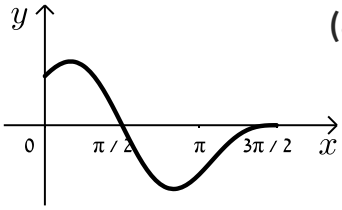
87)



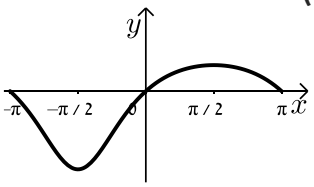
88)



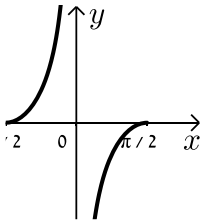
89)



90)



91)



שאלון 571

בעיות קיצון

תוכן העניינים:

בעיות קיצון 413

בעיות קיצון עם מספרים: 414

שלבי עבודה: 414

שאלות: 414

תשובות סופיות: 415

בעיות בהנדסת המישור: 416

שאלות: 416

תשובות סופיות: 419

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים: 420

שאלות: 420

תשובות סופיות: 423

תרגול נוסף: 424

שאלות עם פונקציה פולינומית: 424

תשובות סופיות – פונקציה פולינומית: 429

שאלות עם פונקציה רציונאלית: 430

תשובות סופיות – פונקציה רציונאלית: 435

שאלות עם פונקציית שורש: 436

תשובות סופיות – פונקציית שורש: 440

בעיות קיצון עם מספרים:

שלבי עבודה:

כדי לענות על בעיית קיצון נבצע את השלבים הבאים:

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x.
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x.
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x.
- נוודא שערך ה- x מהסעיף הקודם הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "y" (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

שאלות:

1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
המספרים הם אי-שליליים.

2) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

3) נתונים שלושה מספרים אי שליליים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.

א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?

ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

4) x ו- y הם שני מספרים אי שליליים המקיימים: $x+6y=60$.

א. הבע את y באמצעות x.

ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?

ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות:

1) .7,7

2) .1

3) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'.

4) א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30\ ,\ y=5$ ג. $M=22500$.

בעיות בהנדסת המישור:

שאלות:

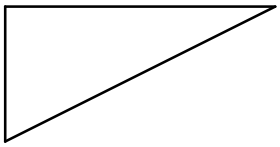
1) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a, מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.

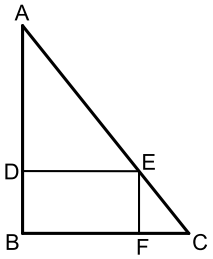


א. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי שטח המשולש יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי?

ג. מה יהיה אורך היתר במשולש במקרה זה?

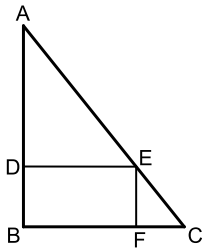
4) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.



נתון: 20 ס"מ $=AB$, 16 ס"מ $=BC$.

מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

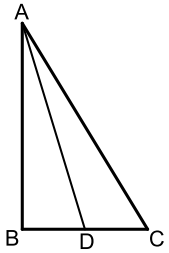
5) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.



נתון: $AB=a$, $BC=b$.

מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

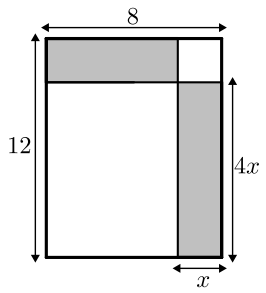
6) במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), AD הוא תיכון לניצב BC.



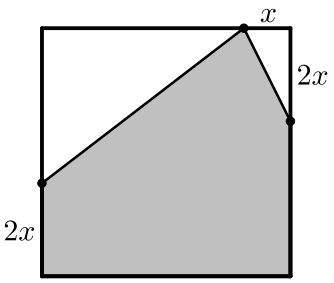
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.

מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.

7) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו- 12 ס"מ
כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$
על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים המסומנים.
מצא את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



8) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים
שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך
שנוצר המחומש המסומן.
מצא מה צריך להיות ערכו של x עבורו שטח המחומש
יהיה מקסימלי.

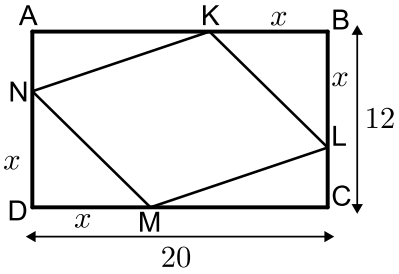


9) הנקודות K , L , M , N מקצות קטעים שווים
במלבן ABCD כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

א. הבע באמצעות x את סכום שטחי
המשולשים: $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצא מה צריך להיות x כדי ששטח
המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מה הוא השטח של המרובע LKNM במקרה זה?

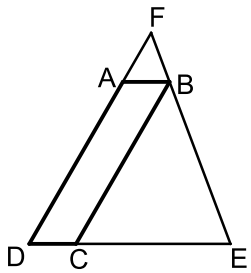


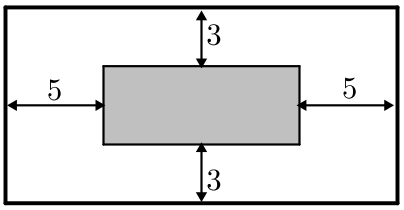
10) המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי
הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן: $AB = 2$ ס"מ , $AD = 8$ ס"מ.
מסמנים את אורך הצלע DE ב- x.

א. הבע באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצא את x עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?

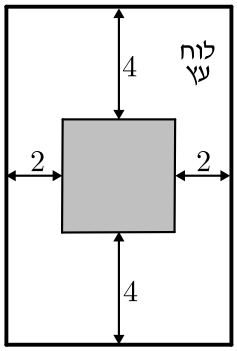




11) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ".
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).
יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.

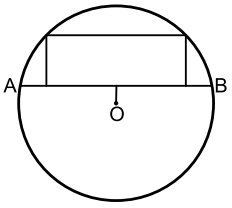
ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?



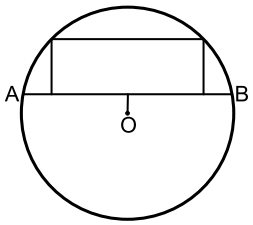
12) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת מלבנית לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון - 4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?



13) במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



14) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

תשובות סופיות:

1) 8 ס"מ.

2) א. $a/3$ ב. הוכחה.

3) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס"מ.

4) 80 סמ"ר $=S$.

5) $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

6) 4 ס"מ, 16 ס"מ.

7) $x=2.75$.

8) $x=6$.

9) א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. 128 סמ"ר $=S$.

10) א. $\mathrm{DF}=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6$, $L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$.

11) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.

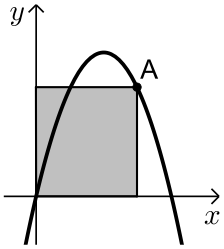
12) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ ב. $S=98$.

13) 92 ס"מ.

14) $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

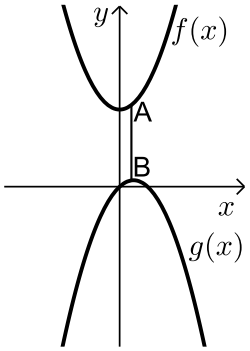
שאלות:



1) נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$.

מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.

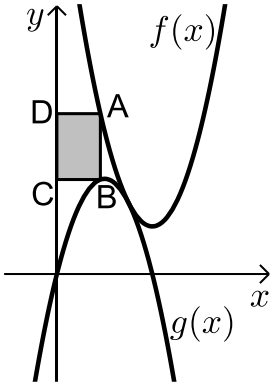
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



2) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$

כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



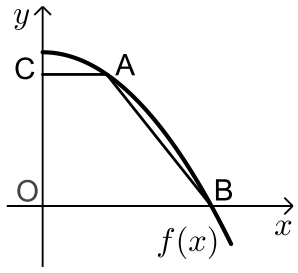
3) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y. מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.

ב. מצא את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.

ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



4) נתונה הפונקציה: $f(x)=36-x^2$.

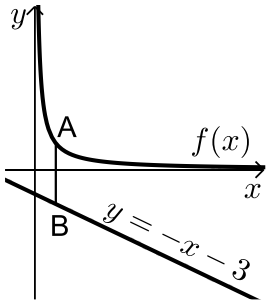
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.

מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x שחותך את ציר ה- y בנקודה C.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו- O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?

ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$ ונתון הישר: $y=-x-3$.

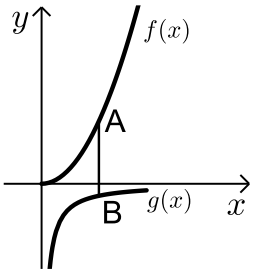
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB

מקביל לציר ה-y.

מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי

שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



6) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ ו- $g(x)=-\frac{1}{x}$

בתחום: $x>0$. מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$

ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB

מקביל לציר ה-y.

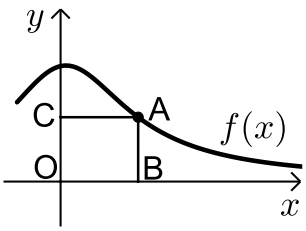
מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבורן אורך

הקטע AB מינימלי.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x-1}$ והישר $y=2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.

מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x\geq 0$.

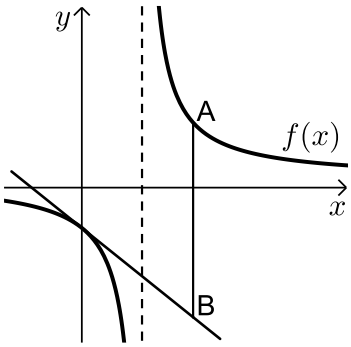
מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים

אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$.



מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

א. מצא את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

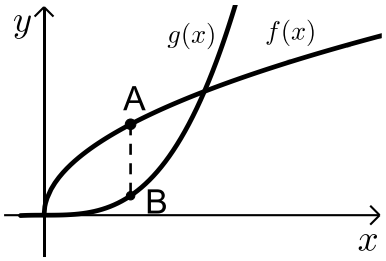
ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

10) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

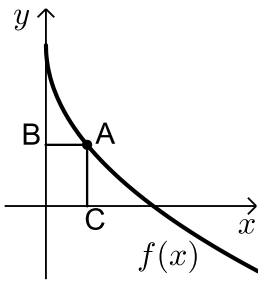
11) נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.



את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

12) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=6-3\sqrt{x}$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB.

ב. מצא את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

תשובות סופיות:

1) $A(4,8)$.

2) $A(0.5,12.25)$.

3) א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$.

4) א. $A(2,32)$ ב. $S=128$.

5) $A(2,2)$.

6) א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=$ 12.88 ס"מ.

7) $2\cdot 1$.

8) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$.

9) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$.

10) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

11) $A(1,2)$.

12) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$.

תרגול נוסף:

הערה:

לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטוני הוידאו באתר והם ניתנו כבונוס לתרגול נוסף.

שאלות עם פונקציה פולינומית:

1) נתונים שלושה מספרים חיוביים שסכומם הוא 45. ידוע שמספר אחד זהה לשני.

א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום זהה לו?
באיזה מקרה (א' או ב') המכפלה תהיה גדולה יותר? הראה דרך חישוב.

2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המספרים האי-שליליים המקיימים: $3x+y=60$
מצא את המספרים x ו- y שמכפלת ריבועיהם מקסימלית.

ב. מהי המכפלה הנ"ל?

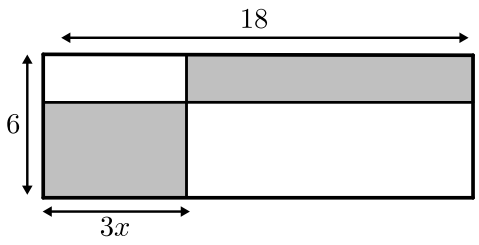
3) סכום שלושה מספרים חיוביים הוא 11. ידוע כי המספר הראשון גדול ב-4 מהמספר השני.
הראה כי המספרים שמכפלתם היא מקסימלית מקיימים:

א. מכפלת שני המספרים הקטנים שווה למספר הגדול.

ב. ערך המכפלה של שלושת המספרים שווה לריבוע המספר הגדול מבניהם.

4) סכום שלושה מספרים אי-שליליים הוא 26. מספר אחד גדול פי 3 מהשני.
מצא את שלושת המספרים שסכום ריבועיהם הוא מינימלי.

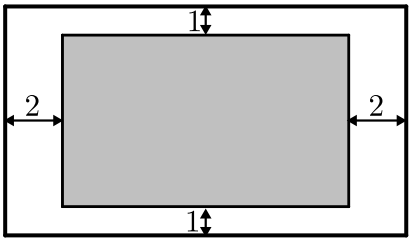
5) במלבן שצלעותיו הן 6 ס"מ ו-18 ס"מ חסומים שני מלבנים מסומנים.
אורך אחד המלבנים המסומנים גדול פי 3 מרוחב המלבן השני כמתואר באיור.



א. מה צריך להיות האורך x כדי שסכום שטחי שני המלבנים יהיה מקסימלי.

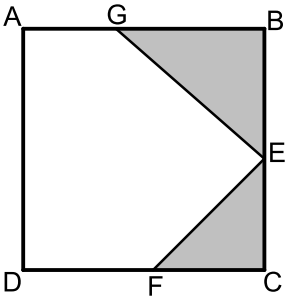
ב. בעבור ה- x שמצאת מהו סכום השטחים הללו?

6) יוסי רוצה לקנות דף מחשב צבעוני ומיוחד בעל היקף של 60 ס"מ כדי להכין ברכה ליום הולדתה של חברתו רחל. המדפסת של יוסי אינה מדפיסה עד גבולות הדף אלא משאירה מרחק של ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון, ומרחק של 2 ס"מ מצידי הדף (ראה איור). יוסי רוצה לבחור דף שבו השטח שהמדפסת תוכל להדפיס יהיה מקסימלי.



מה הן מידות הדף שיוסי צריך לקנות כדי שהשטח המודפס יהיה מקסימלי?

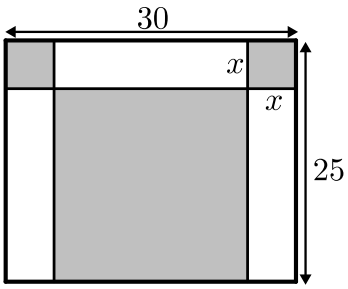
7) בריבוע ABCD חסומים שני משולשים ישרי-זווית GBE ו- ECF כמתואר באיור. ידוע שאורך הקטע AG הוא 5 ס"מ ואורך צלע הריבוע ABCD הוא 13 ס"מ.
המשולש ECF הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים (CE=CF).



א. מצא מה צריך להיות אורך שוק המשולש ECF בעבורו סכום שטחי שני המשולשים הנ"ל יהיה מינימלי?

ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?

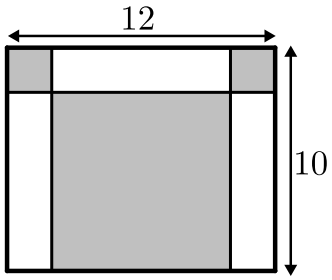
8) במלבן שצלעותיו הן 30 ס"מ ו- 25 ס"מ חסומים שני ריבועים ומלבן (המסומנים) כמתואר באיור.
מסמנים את צלע הריבוע ב- x.



א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.

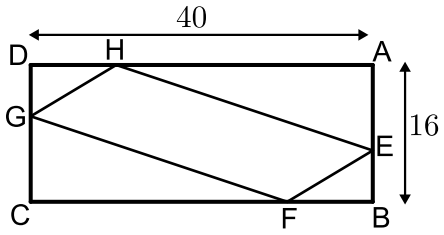
ב. בעבור אורך הצלע שמצאת מהו סכום השטחים המינימלי?

9) במלבן שמידותיו הן 12 ס"מ ו- 10 ס"מ חסומים בצדדים למעלה שני ריבועים ומלבן מתחתיהם במרכז.



א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.

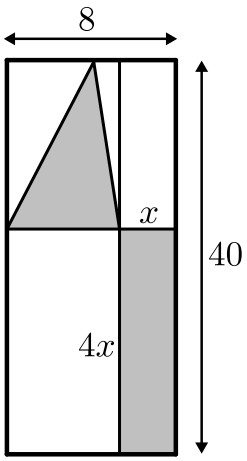
ב. מה יהיה השטח שלהם במקרה זה?



10) במלבן ABCD שמידותיו הן 40 ס"מ ו-16 ס"מ מקצים נקודות על צלעות המלבן כך שמתקיים: $AE = BF = CG = DH = x$.

א. הבע באמצעות x את שטחי ארבעת המשולשים: $\Delta AEH + \Delta BEF + \Delta CGF + \Delta DGH$.

ב. מצא מה צריך להיות x בעבורו שטח המרובע EFGH יהיה מינימלי. מה יהיה שטח המרובע EFGH במקרה זה?

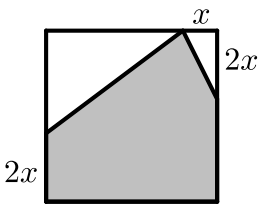


11) נתון מלבן שמידותיו הן 8 ס"מ על 40 ס"מ.
מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן כך שנוצרים 4 מלבנים. מסמנים צלע אחת של המלבן הימני ב- x, כך שהצלע הסמוכה לה גדולה פי 4 ממנה כמתואר באיור ובמלבן השמאלי בונים משולש.

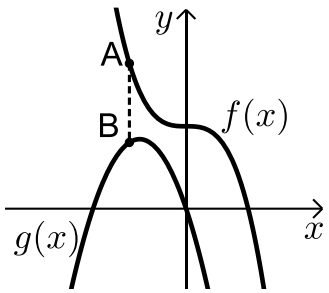
א. בטא באמצעות x את סכום השטחים של המלבן והמשולש המסומנים.

ב. מצא מה צריכות להיות מידות המלבן הימני כדי שסכום השטחים הנ"ל יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



12) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם הוא $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המסומן.
מצא מה צריך להיות ערכו של x בעבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

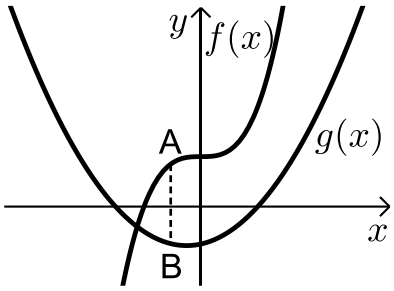


13) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x) = -6x^2 - 18x$, $f(x) = 16 - 2x^3$.
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני ומותחים ממנה ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

א. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

14) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^3+8$, $g(x)=x^2+x-6$.

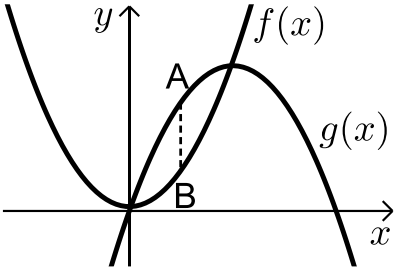


מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ומורידים ממנה ישר המקביל לציר ה-y שחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה האורך המקסימלי?

15) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x)=x^2+3$, $g(x)=20x-x^2$.



מעבירים קטע AB המקביל לציר ה-y כך שהנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

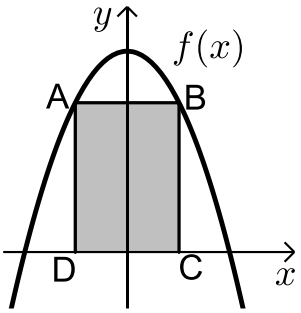
נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.

א. הבע באמצעות t את אורך הקטע AB.

ב. מה צריך להיות t כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

ג. מהו האורך AB במקרה זה?

16) מעבירים ישר AB המקביל לציר ה-x כך שהנקודות A ו-B נמצאות על גרף הפונקציה: $f(x)=48-x^2$.

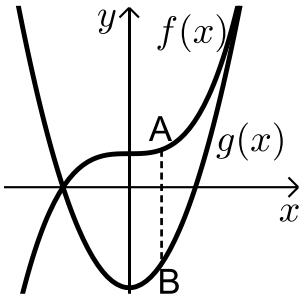


מהנקודות A ו-B מורידים אנכים לציר ה-x כך שנוצר מלבן ABCD.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B בעבורם שטח המלבן ABCD יהיה מקסימלי.

ב. בעבור שיעורי הנקודה B שמצאת מה יהיה השטח?

17) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=x^3+8$ ו- $g(x)=6x^2-24$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

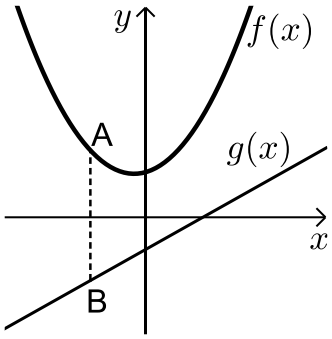
א. מצא את שיעורי הנקודה A בתחום: $x_A<4$

עבורם הקטע AB יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

18) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=x^2+x+7$ ו- $g(x)=2x-5$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

ונקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

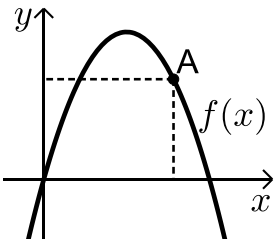
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הבע באמצעות t את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את t בעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ג. בעבור הערך של t שמצאת בסעיף הקודם, מה יהיה אורך הקטע AB?

19) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=-x^2+7x$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A

בעבורם היקף המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם

היקף המלבן יהיה מינימלי?

תשובות סופיות – פונקציה פולינומית:

1) א. 15, 15, 15 ב. 10, 20, 15 ג. מקרה א'.

2) א. $y=30$, $x=10$ ב. $M=90000$.

3) המספרים: 2, 3, 6.

4) 4, 10, 12.

5) א. $x=3$. ב. $S=54$.

6) 14 ס"מ, 16 ס"מ.

7) א. 4 ס"מ ב. $S=125$.

8) א. $x=10$ ב. $S=350$.

9) א. 4 ס"מ ב. $S=56$.

10) א. $-2x^2+56x$ ב. $x=14$ ג. $S=248$.

11) א. $6x^2-36x+160$ ב. 3 ס"מ על 12 ס"מ ג. $S=214$.

12) $x=6$.

13) א. $A(-1,18)$ ב. 6.

14) א. $A\left(-\frac{1}{3},7\frac{26}{27}\right)$ ב. $AB=14\frac{5}{27}$.

15) א. $-2t^2+20t-3$ ב. $t=5$ ג. $AB=47$.

16) א. $B(4,32)$ ב. $S=256$.

17) א. $A(0,8)$ ב. $AB=32$.

18) א. $B(t,2t-5)$ ב. $t=0.5$ ג. $AB=11.75$.

19) א. $A(4,12)$ ב. $A(0,0)$.

שאלות עם פונקציה רציונאלית:

1) נתונים שני מספרים חיוביים x ו- y שמקיימים: $2x^2y=27$.

א. הבע את y באמצעות x.

ב. מה צריכים להיות המספרים כדי שסכומם יהיה מינימלי?

2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים ששטחם הוא 128 סמ"ר מצא את אורך הבסיס ואורך גובהו במשולש שבו סכום אורך הבסיס וגובהו הוא מינימלי.

ב. מה יהיה הסכום במשולש זה?

3) מכפלת שלושה מספרים חיוביים היא 27. ידוע כי המספר הראשון זהה לשני.

נסמן ב- x את המספר הראשון.

א. הבע באמצעות x את המספר השלישי.

ב. מצא את שלושת המספרים שסכומם מינימלי.

4) נתונים שני מספרים חיוביים. ידוע כי המספר הראשון גדול פי 4 מהמספר השני.

מחברים את המספר השני עם ההופכי של המספר הראשון.

א. מצא מה יהיו המספרים בעבורם חיבור זה יהיה מינימלי.

ב. מה הוא ערך החיבור?

5) נתונים שלושה מספרים חיוביים כך שהמספר השני גדול פי 3 מהמספר הראשון והמספר השלישי גדול פי 9 מהמספר הראשון.

המספר הראשון יסומן ב- x.

א. הבע באמצעות x את המספרים השני והשלישי.

ב. הבע באמצעות x את הסכום בין המספר הראשון למספרים ההופכיים של המספרים השני והשלישי.

ג. מצא את שלושת המספרים בעבורם הסכום שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.

6) נתונים שני מספרים שוני-סימן. ידוע כי המספר הראשון גדול ב- 14 מהמספר השני.

סמן ב- x את המספר הקטן.

מצא את המספרים בעבורם ההפרש בין המספר ההופכי של המספר הקטן למספר ההופכי של המספר הגדול הוא מקסימלי.

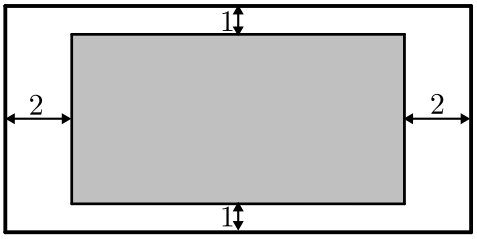
7) x ו-y הם שני מספרים חיוביים המקיימים: $xy+y=16$.

א. הבע את y באמצעות x.

ב. מצא מה צריכים להיות x ו-y בעבור הסכום: $x+y$ יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה הסכום במקרה זה?

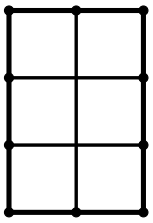
8) בבית הדפוס "עמירן" רוצים לעצב גלויה על גבי קרטון ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר.
הנהלת החברה החליטה שיש להשאיר רווחים של ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון ו-2 ס"מ מצדי הדף (ראה איור).



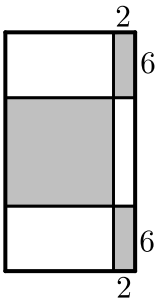
א. מצא מה צריכות להיות מידות הקרטון כדי שהשטח של התמונה יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה השטח במקרה זה?

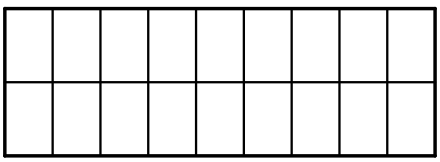
9) בחלון מלבני ששטחו הכולל הוא 192 מ"ר בונים סורגי מתכת מ-7 מוטות: 3 מאונכים ו-4 אופקיים (ראה איור).
מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים שיחסמו חלון זה.



10) נתון מלבן ששטחו 1176 סמ"ר. מקצים בצדדי המלבן העליון והתחתון קטעים שאורכם 2 ס"מ ובצדדי המלבן הימניים קטעים שאורכם 6 ס"מ כך שנוצרים שישה מלבנים. מסמנים שלושה מלבנים כמתואר באיור.
חשב מה צריכות להיות מידות המלבן כדי שסכום שטחי המלבנים המסומנים יהיה מקסימלי.

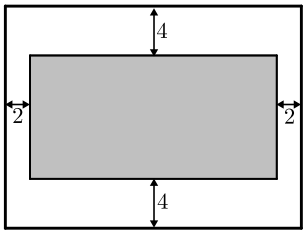


11) בתור תשתית לקיר עץ, קנו רפי וחבריו מוטות מתכת.
מחיר המוטות נקבע בהתאם לאורכם.
החבורה העמידה 10 מוטות מתכת מאונכים ולאחר מכן תפסו אותם עם שלושה מוטות נוספים אופקים כמתואר בתרשים.



אחד מחבריו של רפי מדד וגילה ששטח המלבן שנוצר הוא 120 מ"ר. רפי בתגובה שמח ואמר "איזה יופי! עכשיו אני יודע שהשקעתנו הייתה מינימלית".
מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים בעבור השטח שמדד חברו של רפי.

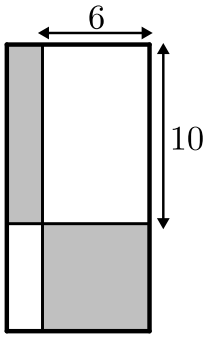
12) לרותי צבעי מים ומשטח עץ ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר.
רותי רוצה לצייר מלבן במרכז המשטח כך שמרחקו
מצדי המשטח 2 ס"מ ומהקצוות העליון והתחתון של
המשטח 4 ס"מ.
רותי ראתה שהמשטח שברשותה לא עומד בתנאים
אלו ולכן החליטה לקנות משטח חדש.
כשהגיעה רותי לנגר הוא אמר לה שמחיר העץ נקבע לפי מידותיו.
איזה מידות רותי צריכה לבקש כדי לקבל משטח שבו
היא תוכל לצייר מלבן בעל שטח מקסימלי לפי דרישותיה?



13) נתון מלבן ששטחו הוא 135 סמ"ר.
מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן ומקצים
עליהם קטעים באורכים של 6 ו-10 ס"מ (ראה איור).
על ידי הקצאת קטעים אלו נוצרים מלבנים נוספים המסומנים באיור.

א. מצא מה צריכות להיות מידות המלבן הנתון
בעבורם סכום שטחי מלבנים אלו יהיה מינימלי.

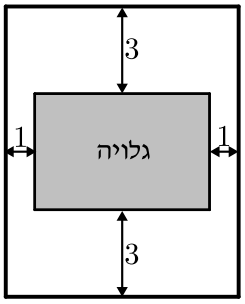
ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



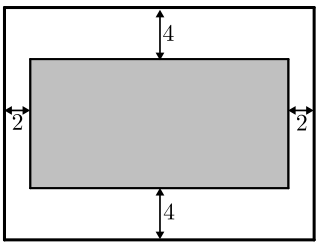
14) לדני גלויה מלבנית במידות לא ידועות ששטחה הכולל הוא 12 סמ"ר.
דני רוצה לקנות קרטון כדי להדביק את הגלויה במרכזו.
כשהלך דני לחנות כלי מלאכה אמר לו המוכר שניתן לבחור
קרטון על פי שטח. דני הדגיש למוכר שהוא רוצה שהגלויה תהיה
מודבקת במרכז הקרטון כך שמרחקה מצדי הקרטון יהיה 1 ס"מ
בלבד ומרחקה מהקצוות העליון והתחתון יהיה 3 ס"מ.
המוכר נתן לדני קרטון בעל שטח מינימלי בעבור הגלויה שלו.

א. מה הן מידות הגלויה בעבורן שטח הקרטון הוא מינימלי?

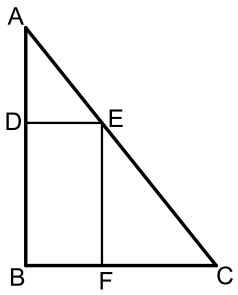
ב. מה הוא שטח הקרטון שנתן המוכר לדני.



15) לרבקה קרטון מלבני ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר.
רבקה רוצה לחתוך מלבן במרכז הקרטון כדי שתוכל
להשתמש בשארית הקרטון כמסגרת לתמונה.
כדי שהקרטון לא יקרע רבקה צריכה לשמור על רווחים
של 2 ס"מ מצדי הקרטון ו-4 ס"מ מקצותיו העליון והתחתון.
מה הן מידות הקרטון בעבורן שטח המלבן שרבקה תחתוך יהיה מקסימלי?



16) במשולש הישר זווית ABC חוסמים מלבן BDEF כמתואר באיור.



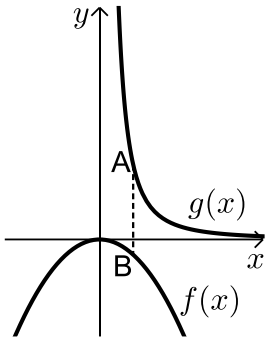
מידות המלבן הן: $EF=12$, $DE=6$.

מסמנים את אורך הצלע AB ב- x.

א. הבע באמצעות x את אורך הצלע BC.

ב. מצא את אורכי הניצבים AB ו-BC של המשולש בעל השטח המינימלי?

17) נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{-x^2}{16}$ ו- $g(x)=\frac{1}{x^2}$ בתחום: $x>0$.

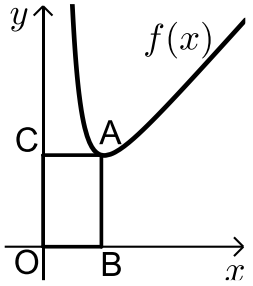


הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . (A ברביע הראשון).

א. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

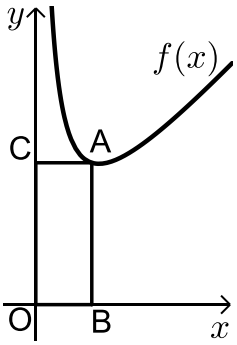
18) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=x+\frac{16}{x^3}$ ברביע הראשון. מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כפי שמתואר באיור כך שנוצר המלבן ABOC.



מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.

19) באיור שלפניך נתונה הפונקציה $f(x)=x+\frac{8}{x}$ ברביע הראשון.

מנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך שמתקבל מלבן ABOC.



א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן ABOC יהיה מינימלי.

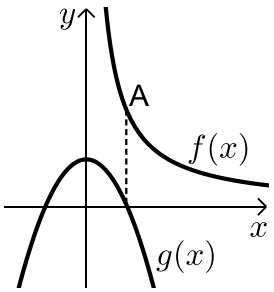
ב. מה הוא ההיקף המינימלי?

20) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{1}{x}$ עבור: $x>0$

ו- $g(x)=-4x^2+1$. מעבירים ישר המקביל לציר ה- y

שחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A

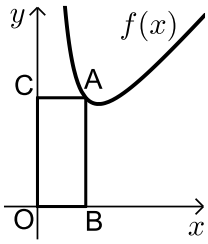
ואת גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.



א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה בעל אורך מינימלי.

ב. מה יהיה האורך AB במקרה זה והיכן תמוקם הנקודה B ?

21) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=x+\frac{16}{x^2}$



ברביע הראשון. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה

וממנה מורידים אנכים לצירים שיוצרים את

המלבן ABCO (O - ראשית הצירים).

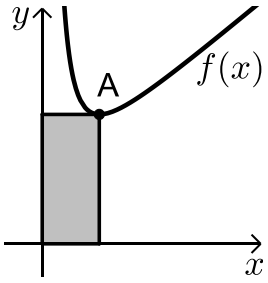
נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

א. בטא באמצעות t את שיעור ה- y של הנקודה A ואת שטח המלבן ABOC.

ב. מצא מה צריך להיות ערכו של t בעבורו שטח המלבן יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

22) באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x)=x+\frac{8}{x^2}+3$



ברביע הראשון. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה זו מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן

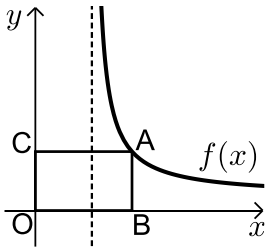
(בעל השטח המסומן). הנקודה A תסומן ב- $A\left(t,t+\frac{8}{t^2}+3\right)$

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את ערכו של t בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.

ג. בעבור הערך של t שמצאת בסעיף הקודם, מה יהיה שטחו של המלבן?

23) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+5}{x-4}$ בתחום: $x>4$.



מהנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים

לצירים כך שנוצר המלבן ABOC. מצא מה צריכים

להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.

תשובות סופיות – פונקציה רציונאלית:

1) א. $y=\frac{27}{2x^2}$ ב. $x=3\ ,\ y=1.5$.

2) א. 16 , 16 ב. 32.

3) א. $\frac{27}{x^2}$ ב. 3 , 3 , 3.

4) א. 2 , 0.5 ב. 1.

5) א. $9x\ ,\ 3x$ ב. $S=x+\frac{1}{3x}+\frac{1}{9x}$ ג. $\frac{2}{3}$, 2 , 6.

6) 7 , -7.

7) א. $y=\frac{16}{x+1}$ ב. $x=3\ ,\ y=4$ ג. $S=7$.

8) א. 11 ס"מ ו-22 ס"מ.

9) 12 ס"מ ו-16 ס"מ.

10) 14 ס"מ ו-84 ס"מ.

11) 6 מטרים ו-20 מטרים.

12) 9 ס"מ על 18 ס"מ.

13) א. 15 ס"מ על 9 ס"מ ב. $S=75$.

14) א. 2 ס"מ על 6 ס"מ ב. $S=48$.

15) 9 ס"מ על 18 ס"מ.

16) א. $BC=\frac{6x}{x-12}$ ב. 12 ס"מ ו-24 ס"מ.

17) א. $A(2,0.25)$ ב. $AB=\frac{1}{2}$.

18) $A(2,4)$.

19) א. $A(2,6)$ ב. $p=16$.

20) א. $A(0.5,2)$ ב. 2, הנקודה B ממוקמת על ציר ה- x.

21) א. $t+\frac{16}{t^2}\ ,\ S=t^2+\frac{16}{t}$ ב. $t=2$ ג. $S=12$.

22) א. $P=4t+\frac{16}{t^2}+6$ ב. $t=2$ ג. $S=14$.

23) $A(10,2.5)$.

שאלות עם פונקצית שורש:

1) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x+y=15$.

א. הבע את y באמצעות x.

ב. מצא את x ו- y בעבורם סכום השורשים שלהם יהיה מקסימלי.

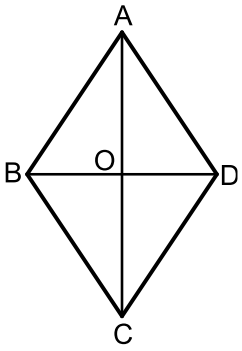
2) נתונים שני מספרים חיוביים x ו- y המקיימים: $3x+y=36$.

א. הבע את y באמצעות x.

ב. מצא את המספרים בעבורם סכום השורשים שלהם מקסימלי.

ג. מה יהיה סכום השורשים שלהם במקרה זה?

3) נתון המעוין ABCD.



ידוע כי סכום אורכי האלכסונים של המעוין הוא 80 ס"מ.

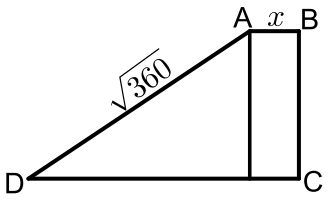
הנקודה O היא נקודת מפגש האלכסונים במעוין.

הקטע AO יסומן ב- x.

א. הבע את אורכי האלכסונים באמצעות x.

ב. מה צריך להיות ערכו של x בעבורו אורך צלע המעוין היא מינימלית?

4) באיור שלפניך מתואר טרפז ישר זווית ABCD המחולק למלבן ומשולש ישר זווית. גובה הטרפז BC גדול פי 3 מהבסיס הקטן AB ואורך השוק הארוכה AD הוא $\sqrt{360}$.



הבסיס הקטן יסומן ב- x.

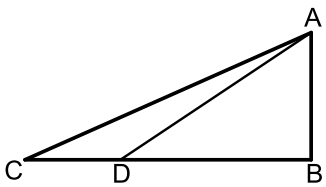
א. הבע באמצעות x את אורך הבסיס הגדול DC.

ב. מצא את ערכו של x בעבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.

5) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית.

הנקודה D נמצאת על הניצב BC כך שהקטע BD גדול פי 2 מהקטע CD.

ידוע כי סכום הניצבים הוא 13 ס"מ.



א. מצא את אורכי הניצבים בעבורם אורך הקטע AD יהיה מינימלי.

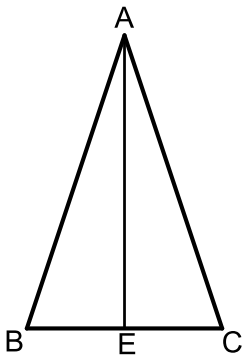
ב. מה יהיה אורך היתר AC במקרה זה?

6) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB=AC).

הקטע AE הוא גובה לבסיס BC.

ידוע כי סכום אורכי הבסיס והגובה הוא 20 ס"מ.

הגובה AE יסומן ב- x.



א. הבע באמצעות x את היקף המשולש ABC.

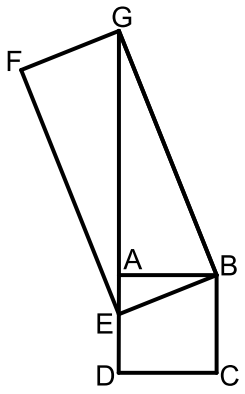
ב. מצא את x בעבורו ההיקף שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.

ג. בעבור הערך של x שמצאת בסעיף הקודם מה הוא השטח של המשולש?

7) המרובע ABCD הוא ריבוע. הנקודה E נמצאת על הצלע AD של הריבוע והנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.

מעבירים את הקטעים BE ו-BG ומוסיפים את הנקודה F, כך שהמרובע BEFG הוא מלבן כמתואר באיור.

הקטע AG גדול פי 2 מהצלע BE של המלבן וסכום הצלע BE ואלכסון המלבן GE הוא 16 ס"מ. הקטע BE יסומן ב- x.



א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE.

ב. מצא את x בעבורו אורך צלע הריבוע תהיה מקסימלית.
(היעזר במשולש ABE).

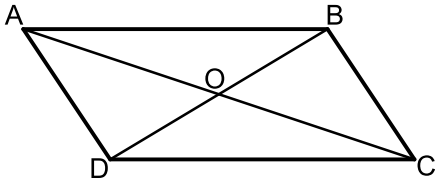
8) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הנקודה O היא פגישת האלכסונים AC ו-BD.

ידוע כי האלכסון BD מאונך לצלעות BC ו-AD של המקבילית.

כמו כן האלכסון AC גדול ב- 27 ס"מ מהצלע BC.

סמן את הצלע BC ב- x וענה על השאלות הבאות:



א. הבע באמצעות x את אורך הקטע CO.

ב. הבע באמצעות x את אורך הקטע BO.

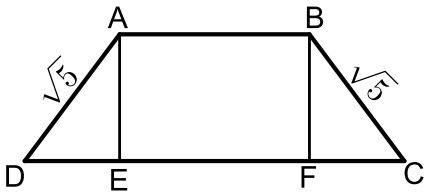
ג. מצא בעבור איזה ערך של x יהיה אורך הקטע BO מקסימלי.

9) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

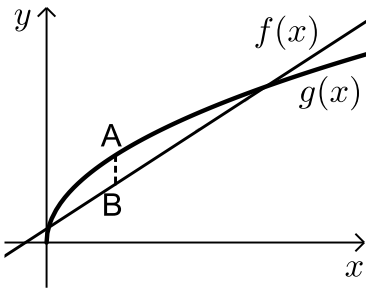
מורידים את הגבהים לטרפז AE ו-BF כך שהמרובע ABFE הוא ריבוע.

ידוע כי אורך שוק בטרפז הוא $\sqrt{5}$ ס"מ.

מצא מה צריך להיות אורך הבסיס הקטן AB בעבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.



10) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x+3$ ו- $g(x)=4\sqrt{x}$.

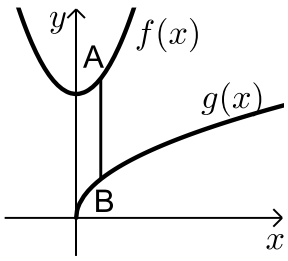


מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $g(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

11) נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=2x^2+30$ ו- $g(x)=8\sqrt{x}$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

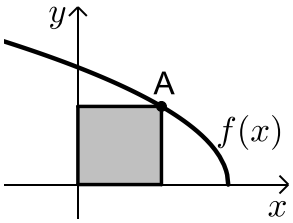
א. הבע באמצעות t את:

(1) שיעורי הנקודה B.

(2) אורך הקטע AB.

ב. מצא את t בעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{4-x}$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המסומן).

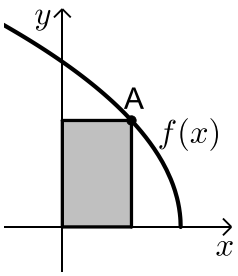
מסמנים את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את t בעבורו היקף המלבן יהיה מקסימלי.

ג. מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sqrt{5-x}$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המסומן).

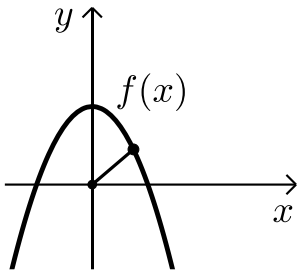
מסמנים את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את t בעבורו היקף המלבן יהיה מקסימלי.

ג. מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?

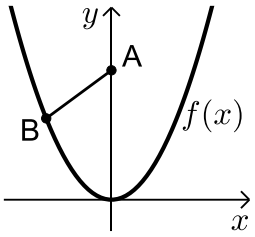
14) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=6\frac{3}{4}-x^2$.



א. מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה מראשית הצירים הוא מינימלי.

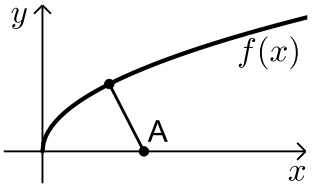
ב. האם קיימת נקודה על גרף הפונקציה שמרחקה מראשית הצירים הוא מקסימלי? אם כן היכן היא ממוקמת?

15) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{4}x^2$.



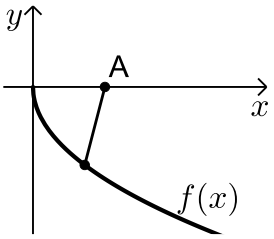
הנקודה $A(0,6)$ נמצאת על ציר ה-y והנקודה B היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה ברביע השני.
מצא את שיעורי הנקודה B בעבורם המרחק בין A ל-B יהיה מינימלי.

16) נתון גרף הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x}$.



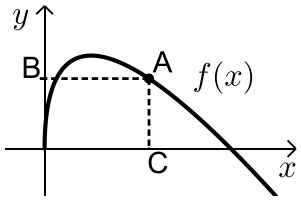
מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה מהנקודה $A(6,0)$ מינימלי.

17) נתון גרף הפונקציה: $f(x)=-3\sqrt{x}$.



מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הרביעי שמרחקה מהנקודה $A(5.5,0)$ הוא מינימלי.

18) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=8\sqrt{x}-2x$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.
מהנקודה A מותחים אנכים לצירים AB ו-AC כמתואר באיור.
מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם סכום הקטעים AB+AC יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות – פונקצית שורש:

1) א. $y=15-x$ ב. $x=y=7.5$.

2) א. $y=36-3x$ ב. $x=3\ ,\ y=27$ ג. $4\sqrt{3}-6.92$.

3) א. $AC=2x\ ,\ BD=80-2x$ ב. $x=20$.

4) א. $DC=x+3\sqrt{40-x^2}$ ב. $x=2$.

5) א. $AB=4\ ,\ BC=9$ ב. $AC=\sqrt{97}$.

6) א. $P=2\sqrt{1.25x^2-10+100}+20-x$ ב. $x=8$ ג. 48.

7) א. $AE=16-3x$ ב. $x=6$.

8) א. $CO=0.5x+13.5$ ב. $BO=\sqrt{-\frac{3x^2}{4}+\frac{27x}{2}+182\frac{1}{4}}$ ג. $x=9$.

9) $AB=1$.

10) א. $A(4,8)$ ב. $AB=1$.

11) א. i. $B\left(t,8\sqrt{t}\right)$ ii. $AB=2t^2-8\sqrt{t}+30$ ב. $t=1$.

12) א. $P=2t+4\sqrt{4-t}$ ב. $t=3$ ג. $P=10$.

13) א. $P=2t+8\sqrt{5-t}$ ב. $t=1$ ג. $P=18$.

14) א. $(2.5,0.5)$ ב. כן, הנקודה $(0,6.75)$ והיא נמצאת על ציר ה- y.

15) $B(-4,4)$.

16) $(4,4)$.

17) $(1,-3)$.

18) $(16,0)$.

שאלון 571

האינטגרל הכללי

תוכן העניינים:

האינטגרל הכללי..... 441

האינטגרל הלא-מסוים: 442

סיכום כללי:..... 442

שאלות העוסקות בחישובי אינטגרלים: 442

שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה: 444

תשובות סופיות:..... 447

האינטגרל הלא-מסוים:

סיכום כללי:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- עבור מקדם קבוע a נקבל: $\boxed{\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + c} \ , \ \boxed{\int \cos x dx = \sin x + c} \ , \ \boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c} \ , \ \boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c}$$

שאלות העוסקות בחישובי אינטגרלים:

1) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$

ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$

ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$

ו. $\int 7 dx$

ז. $\int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$

ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

2) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$

ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$

ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

3) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{\frac{1}{2}}dx$

ב. $\int \sqrt{x}dx$

ג. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ד. $\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)dx$

4) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int(5x-1)^3\,dx$

ב. $\int 3(2-7x)^4\,dx$

ג. $\int \frac{18}{(6x+5)^2}dx$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}}dx$

ה. $\int \sqrt{ax+b}dx$

5) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int -\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$

ב. $\int \frac{x^2}{(x^3+6)^2}dx$

ג. $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2}dx$

ד. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ה. $\int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$

ו. $\int 8x(x^2+1)^3\,dx$

ז. $\int(2-x^2)(6x-x^3)^2dx$

6) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin x-3\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}+5\right)dx$

ב. $\int\left(\cos 3x-2\sin 4x+\frac{4}{\cos^2 3x}\right)dx$

ג. $\int\left(\sin(\pi-x)+\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$

7) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות):

א. $\int(2\sin x\cos x)dx$

ב. $\int(\sin 3x\cos 3x)dx$

ג. $\int(\sin^4 x-\cos^4 x)dx$

ד. $\int(\sin^2 x)dx$

8) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$

ב. $\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

ג. $\int\left(\cos x\sin^2 x\right)dx$

9) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin 2x-4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

ב. $\int\frac{1}{\cos^2 4x}dx$

ג. $\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$

ד. $\int\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx$

ה. $\int\left(\cos x+\sin x\right)^2 dx$

ו. $\int\left(\sin x\cos x\cos\left(2x\right)\right)dx$

ז. $\int\tan^2 xdx$

ח. $\int\cos^2 xdx$

ט. $\int\sin^2 4xdx$

10) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

א. $\int\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)dx$

ב. $\int\cos^4 xdx$

ג. $\int\sin^4 4xdx$

ד. $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה:

11) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצא את הפונקציה.

12) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=x^2-8x+2$. נתון: $f(-2)=1$.

א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

13) נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x)=9x^2-4$.

ערך הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

14) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-3$.

לפונקציה משיק ששיפועו הוא 3-.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

15) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-6x-5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 6-.

ג. מצא את משוואת המשיק.

16) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x-4$.

הישר $y=2x+5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

17) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$. שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא 12- וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1. מצא את הפונקציה.

18) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=8x-6$.

א. מצא את $f'(x)$ אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x=2$.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא $\frac{2}{3}$.

19) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=2x-3$.

א. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 4. מצא את $f'(x)$.

ב. ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצא את $f(x)$.

20) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.

המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$. מצא את הפונקציה.

21) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$ הוא 3. מצא את הפונקציה.

22) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\cos x+4\sin 2x$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\frac{\pi}{6},1\frac{1}{2}\right)$.

23) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=-4\sin 2x-\cos x$.

שיפוע הפונקציה בנקודה (π,π) הוא 3. מצא את הפונקציה.

24) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=\sin x+\cos x$.

א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים.
הוכח כי הנגזרת $f'(x)$ והפונקציה המקורית $f(x)$ מקיימות את המשוואה: $f(x)+f'(x)=2\sin x+1$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ באופן הבא: $g(x)=f(x)+f'(x)$.

i. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה-y של הפונקציה $g(x)$.

ii. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה-y של הפונקציה $f(x)$.

iii. כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת.

תשובות סופיות:

(1 א. $\frac{x^4}{4}+c$ ב. $2x^6+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+c$ ד. $\frac{x^4}{2}+c$ ה. $\frac{x^6}{9}+c$ ו. $7x+c$

ז. $\frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c$ ח. $\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c$.

(2 א. $-\frac{x^{-2}}{2}+c$ ב. $-\frac{1}{2x^2}+c$ ג. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c$ ד. $2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c$.

(3 א. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ ג. $2\sqrt{x}+c$ ד. $8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c$.

(4 א. $\frac{(5x-1)^4}{20}+c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35}+c$ ג. $-\frac{3}{6x+5}+c$

ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c$ ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c$.

(5 א. $\frac{1}{x^2-1}+c$ ב. $-\frac{1}{3(x^3+6)}+c$ ג. $-\frac{1}{2(x^2-4x+1)}+c$

ד. $\sqrt{x^2+2}+c$ ה. $-6\sqrt{x-x^2}+c$ ו. $(x^2+1)^4+c$

ז. $\frac{(6x-x^3)^3}{9}+c$.

(6 א. $-\cos x-3\sin x+4\tan x+5x+c$ ב. $\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4\tan 3x}{3}+c$

ג. $\cos(\pi-x)+\tan x+x+c$.

(7 א. $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ב. $-\frac{\cos 6x}{12}+c$ ג. $-\frac{\sin 2x}{2}+c$

ד. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$.

(8 א. $2\sqrt{\sin x}+c$ ב. $\frac{1}{\cos x}+c$ ג. $\frac{1}{3}\sin^3 x+c$.

(9 א. $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$ ב. $\frac{1}{4}\tan 4x+c$ ג. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

ד. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ה. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ו. $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

ז. $\tan x-x+c$ ח. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$ ט. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$

(10 א. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$ ב. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

ג. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$ ד. $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$.

(11 $f(x)=x^2-6x+14$.

(12 א. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+23\frac{2}{3}$ ב. $y=-5x+27$.

(13 א. $y=5x-2$ ב. $f(x)=3x^3-4x+4$ ג. $(0.4,0)$, $(0,-2)$.

(14 א. $x=0$ ב. $f(x)=x^2-3x+7$.

(15 א. $x=-1$ ב. $f(x)=-3x^2-5x-8$ ג. $y=x-5$.

(16 $f(x)=\frac{3x^2}{2}-4x+11$.

(17 $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$.

(18 א. $f'(x)=4x^2-6x-4$ ב. $f(x)=\frac{4x^3}{3}-3x^2-4x+10$.

(19 א. $f'(x)=x^2-3x+6$ ב. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{1}{6}$.

(20 $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x}+3x+2$.

(21 $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$.

(22 $f(x)=\sin x-2\cos 2x+2$.

(23 $f(x)=\sin 2x+\cos x+x+1$.

(24 ב. i. $(0.5\pi,3)$ ii. $(0.75\pi,\sqrt{2}+1)$ iii. $y=-0.746x+4.172$.

שאלון 571

האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים:

האינטגרל המסוים וחישובי שטחים 449

סיכום כללי האינטגרציה: 450

חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים): 450

שאלות – האינטגרל המסוים: 451

תשובות סופיות: 452

שאלות – חישובי שטחים יסודיים: 453

שאלות יסודיות: 453

שאלות עם שטח מתחת לציר ה- x : 453

שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות: 454

שאלות עם שטחים מורכבים: 455

שאלות עם פרמטרים: 457

חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה: 458

תשובות סופיות: 460

חישובי שטחים – פונקציה רציונאלית: 462

תשובות סופיות: 463

חישובי שטחים – פונקצית שורש: 464

תשובות סופיות: 467

חישובי שטחים – פונקציות טריגונומטריות: 468

תשובות סופיות: 470

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים: 471

תשובות סופיות: 475

ערך של אינטגרל לעומת שטח: 477

תשובות סופיות: 480

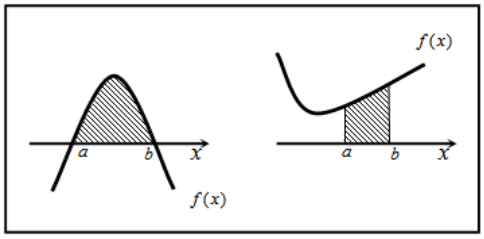
פונקציה צוברת שטח: 481

תשובות סופיות: 488

סיכום כללי האינטגרציה:

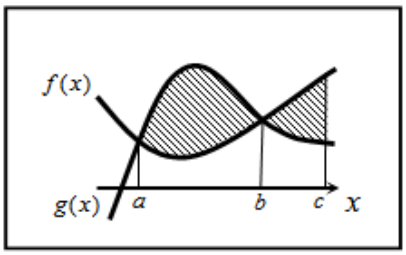
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים):

שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x:



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

שטח הכלוא בין שני גרפים כך שגרף אחד כולו מעל השני:

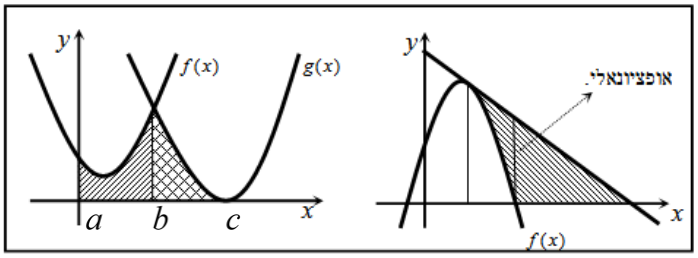


$$S_1=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$S_2=\int_b^c\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$S=S_1+S_2$$

שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x:



$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

שאלות – האינטגרל המסוים:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_{2}^{5}\left(x^2+5x\right)dx$

ב. $\int_{-4}^{-1}x^2\left(x-3\right)dx$

ג. $\int_{-3}^{3}\left(x^3+4x\right)dx$

ד. $\int_{-1}^{1}3\left(2x-1\right)^5dx$

ה. $\int_{1}^{2}\frac{2}{\left(x-3\right)^2}dx$

ו. $\int_{1}^{4}\frac{x-1}{x^3}dx$

ז. $\int_{-3}^{0}\frac{2x^2+7x-4}{x+4}dx$

ח. $\int_{3}^{4}\frac{3x^2-7x+2}{x-2}dx$

ט. $\int_{1}^{2}\sqrt{3x-1}dx$

י. $\int_{-5}^{0}\frac{3}{\sqrt{4-x}}dx$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi}\left(\cos x\right)dx$

ב. $\int_{0}^{\pi}\left(\sin 2x+1\right)dx$

ג. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin x-3\cos 2x\right)dx$

ד. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{\cos^2 x}+2\right)dx$

3) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{1}^{a}\left(4x-7\right)dx$.

מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1-.

4) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{2}\left(x-3x^2\right)dx$.

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- a.

ב. מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$.

5) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{a+4}\left(\frac{1}{\sqrt{x-a}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$.

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- a.

ב. מצא את ערכו של a עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

6) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{0}^{a}\left(\sin x+2\cos 2x\right)dx$, $0<a<3$.

מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

תשובות סופיות:

1) א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. 182- ה. 1

ו. $\frac{9}{32}$ ז. 12- ח. 9.5 ט. 1.856 י. 6.

2) א. 0 ב. π ג. 0 ד. $3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\approx 7.29$.

3) $a=2\ ,\ 1.5$.

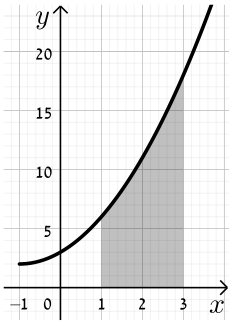
4) א. $a^3-\frac{1}{2}a^2-6$ ב. $a=0\ ,\ 1\ ,\ -\frac{1}{2}$.

5) א. $4+2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a+5}\right)$. ב. $a=1\frac{1}{4}$.

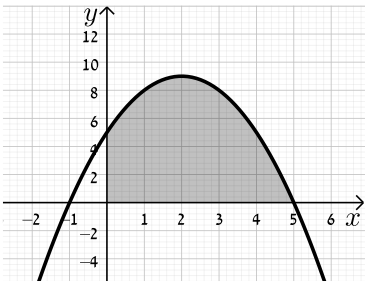
6) $a=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$.

שאלות – חישובי שטחים יסודיים:

שאלות יסודיות:



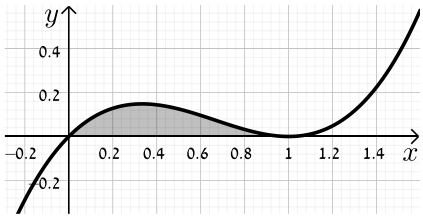
1) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2x+3$,
ציר ה- x והישרים $x=1$ ו- $x=3$.



2) נתונה הפונקציה $y=-x^2+4x+5$.

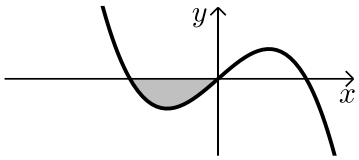
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y.

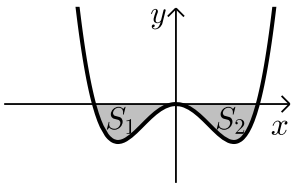


3) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+x$ וציר ה- x כמתואר באיור.

שאלות עם שטח מתחת לציר ה- x:

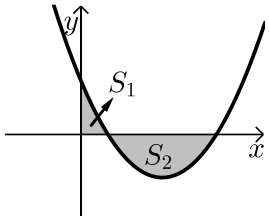


4) נתונה הפונקציה $f(x)=x\left(4-x^2\right)$.
חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- x שברביע השלישי.



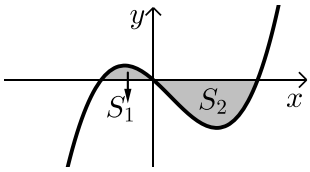
5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2$.
חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- x.

6) חשב את האינטגרל המסוים של
הפונקציה $y=x^2-6x+5$ בין 0 ל-5.
האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: S_1+S_2?
אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.



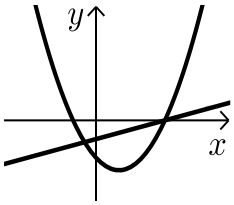
7) נתונה הפונקציה $y=x^3-x^2-2x$.
יוצרים את השטחים S_1 ו- S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה- x כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x.

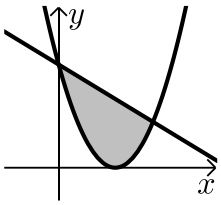


שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:

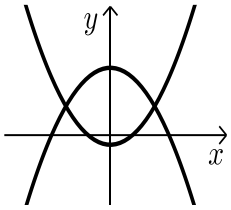
8) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



9) נתונות הפונקציות: $y=(x-3)^2$, $y=-x+9$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.

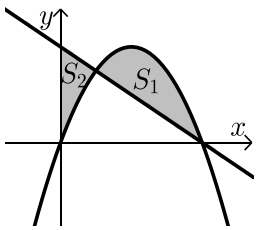


10) נתונות הפונקציות: $g(x)=7-x^2$, $f(x)=x^2-1$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.

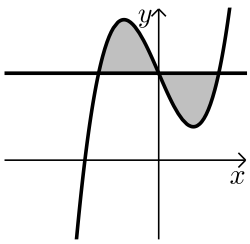


11) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=-x^2+4x$ ו- $g(x)=-x+4$.
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב- S_1
ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה- y ב- S_2
כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



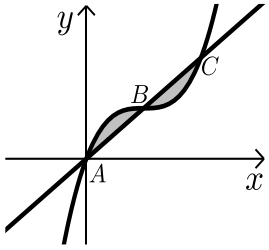
12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x+5$ והישר $y=5$.



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+3x$.

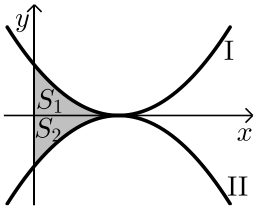


הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות

הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

14) נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$ כמתואר באיור.



א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

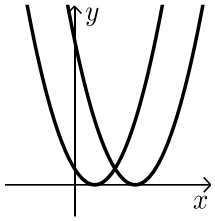
ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה

והצירים ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.

הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.

שאלות עם שטחים מורכבים:

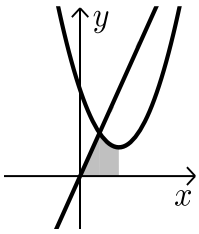
15) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=x^2-6x+9$.



חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

ובין ציר ה- x.

16) נתונות הפונקציות: $y=x^2-4x+6$, $y=3x$.



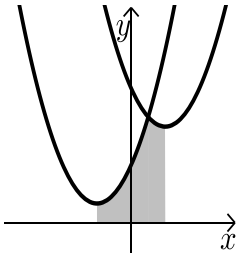
א. מצא את קדקוד הפרבולה.

ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר

שמשמאל לקודקוד הפרבולה.

ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.

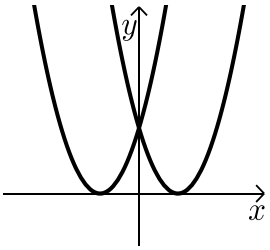
17) נתונות הפונקציות: $y=x^2+4x+6$, $y=x^2-4x+14$.



א. מצא את שיעורי ה- x של קודקודי הפרבולות.

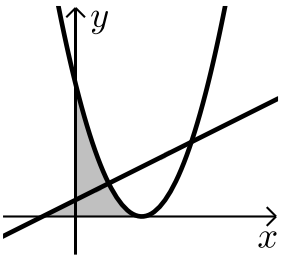
ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.



18) נתונות הפונקציות: $g(x)=(x+3)^2$, $f(x)=(x-3)^2$.

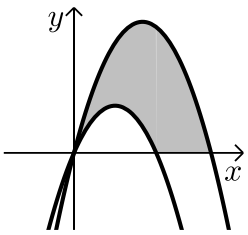
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x.



19) נתונות שתי הפונקציות: $y=(x-2)^2$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x.

ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y.

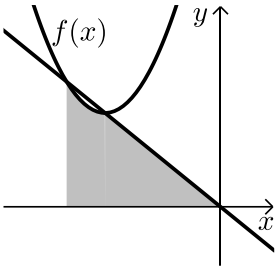


20) נתונות הפרבולות הבאות: $f(x)=-x^2+5x$ ו- $g(x)=-x^2+3x$.

חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x.

21) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+6x+12$.

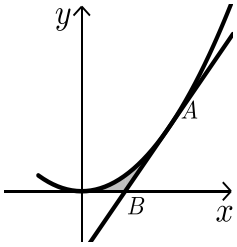
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4$ כמתואר באיור.



א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=-4$.

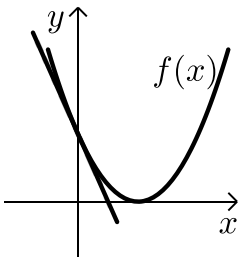


22) נתונה הפונקציה: $y=2x^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B.

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x.



23) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-2)^2$.

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

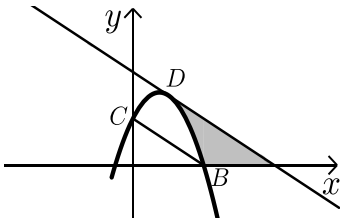
ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x

ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x.

24) משוואת הפרבולה היא: $f(x)=-2x^2+3x+2$.

הנקודות $C(0,2)$, $B(2,0)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה עם הצירים.

המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.



א. מצא את משוואת המשיק.

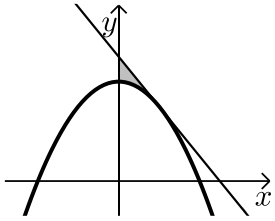
ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x.

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y.

שאלות עם פרמטרים:

25) נתונה הפרבולה: $y=ax^2+8$.

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x=2$ הוא 2-.



א. חשב את a.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר y.

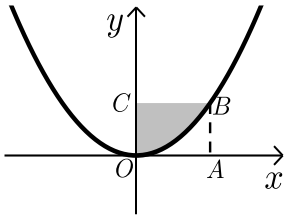
26) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y=ax^2$, (a פרמטר).

המרובע ABCO הוא ריבוע.

הקודקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

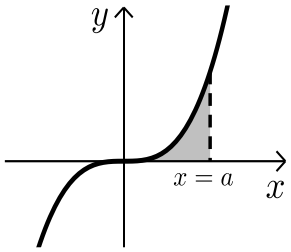
מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בסרטוט.



27) נתונה הפונקציה $y=x^3$.

מעבירים אנך לציר ה- x: $x=a$ (a פרמטר חיובי)

כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- x.



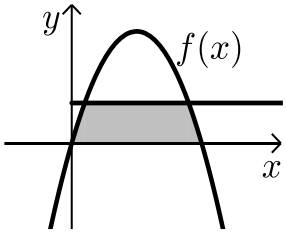
א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציור.

ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל- a^2.

28) נתונה הפונקציה: $f(x)=kx-x^2$.

הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.



א. מצא את ערך הפרמטר k.

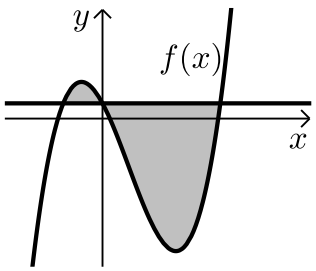
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

29) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x^2-8x-12$.

הישר $y=5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ על ציר ה-y.



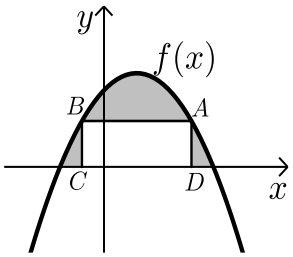
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

30) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x)=3-2x$.

ישר AB שמשוואתו: $y=6$ חותך את גרף

הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.



מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה-x כך שנוצר מלבן ABCD.

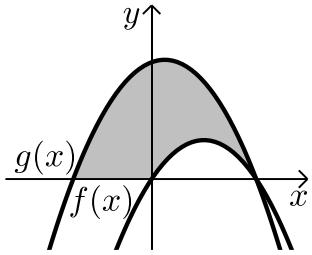
ידוע ששיעור ה-x של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה-x.

31) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $g'(x)=-2x+1$, $f'(x)=4-2x$.

ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה-x כאשר: $x=4$.



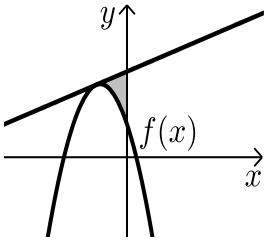
א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה-x (המסומן).

32) נתונה פונקציה $f(x)$.

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=-2$ היא: $y=x+13$.

הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x)=-4x-7$.

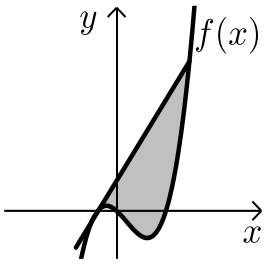


א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה-y.

33) נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x)=3x^2-6x-9$.

ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y=-20$.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15?
אם כן- מצא אותם.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

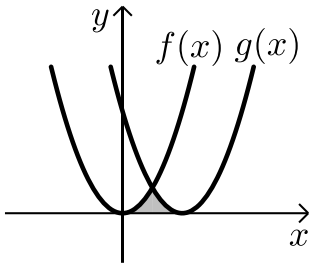
(1) הראה כי הנקודה שבה $x=7$ משותפת למשיק שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).

34) באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x)=x^2$

את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x)=2x-8$.



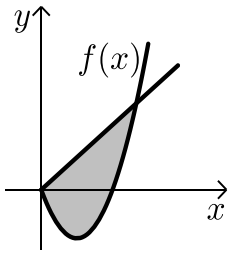
א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).

35) באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-6$

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

תשובות סופיות:

1) $22\frac{2}{3}$ יח"ש.

2) א. $(5,0)$, $(-1,0)$ ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) $\frac{1}{12}$ יח"ש .

4) 4 יח"ש.

5) $4\frac{4}{15}$ יח"ש.

6) לא. השטח הוא: 13 יח"ש.

7) א. $(2,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$ ב. $3\frac{1}{12}$ יח"ש.

8) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) $20\frac{5}{6}$ יח"ש.

10) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $(4,0)$, $(1,3)$ ב. $2\frac{5}{11}$.

12) א. $(2,5)$, $(0,5)$, $(-2,5)$ ב. 8 יח"ש.

13) 0.5 יח"ש.

14) א. $f(x)=\text{I}$, $g(x)=\text{II}$ ב. הוכחה.

15) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

16) א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.

17) א. $x=-2$, $x=2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.

18) 18 יח"ש.

19) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש.

20) $16\frac{1}{3}$ יח"ש.

21) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

22) $\frac{1}{6}$ יח"ש.

23) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

24) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

25) א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש.

26) $a=\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ יח"ש.

27) א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$.

28) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

29) א. $f(x)=x^3-4x^2-12x+5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יח"ש.

30) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

31) א. $f(x)=4x-x^2$, $g(x)=-x^2+x+12$ ב. 46.5 יח"ש.

32) א. $f(x)=-2x^2-7x+5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

33) א. $f(x)=x^3-3x^2-9x$ ב. $y=15x+28$

ג. i. $(7,133)$ ii. 546.75 יח"ש.

34) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

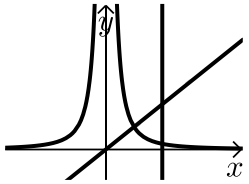
35) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים – פונקציה רציונאלית:

1) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=x$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x=2$ וציר ה- x.



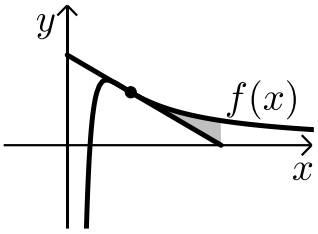
2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$

מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'.

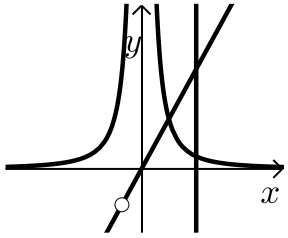
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- x היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x.



3) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x=2$ וציר ה- x.



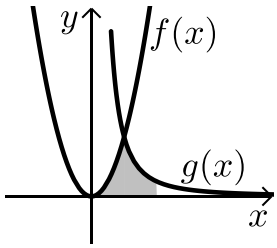
4) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$

(a קבוע) בתחום: $x>0$.

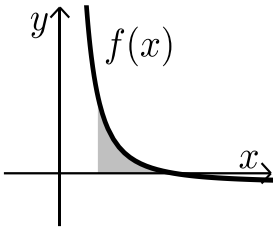
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה הנמצאת על הישר: $y=4x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x=4$.



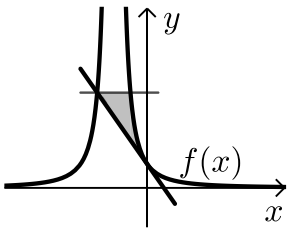
5) גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע) חותך את ציר ה-x בנקודה $(6,0)$.



א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר: $x=2$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).



ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y הוא: $-\frac{1}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-y.

ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=-4.5$.

ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

תשובות סופיות:

1) 1 יח"ש.

2) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

3) 1 יח"ש.

4) א. $a=32$, $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

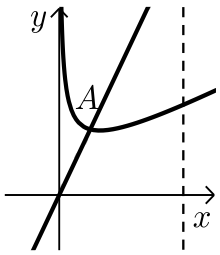
5) א. $a=36$, $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

6) א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה.

ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

חישובי שטחים – פונקצית שורש:

1) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+x$.

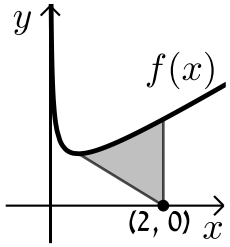


מעבירים ישר: $y=4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y=4x$, ציר ה-x ואנך לציר ה-x: $x=4$.

2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

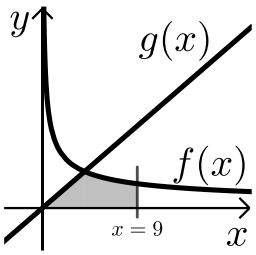


א. מצא את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה $(2,0)$ שעל ציר ה-x.

מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה-x היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

3) באיור הבא מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.



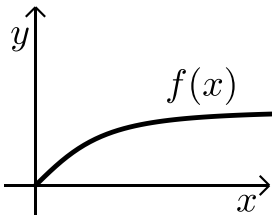
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-x והישר $x=9$.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-y.

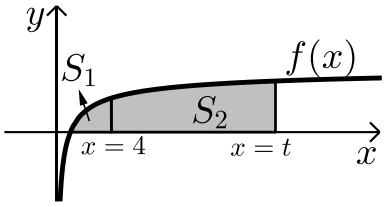
5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.



לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

6) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.



מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=4$

ו- $x=t$ $(t>4)$. נסמן:

S_1 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x.

S_2 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים.

ידוע כי: $8S_1=S_2$. מצא את t.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

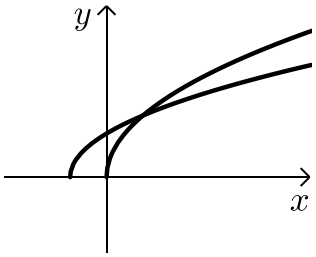
(2) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

(3) הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m=\frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

8) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\sqrt{x+b}$, $g(x)=\sqrt{2x}$ $(b>0)$



גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יח"ש.

מצא את ערכו של הפרמטר b.

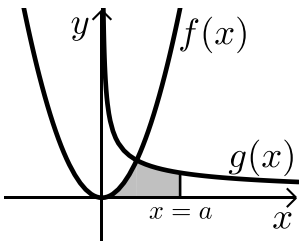
9) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.

מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.

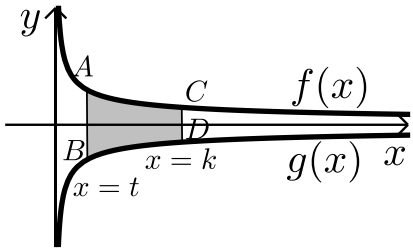
מצא את a.



10) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי: 2CD=AB.



א. הראה כי: $k=4t$.

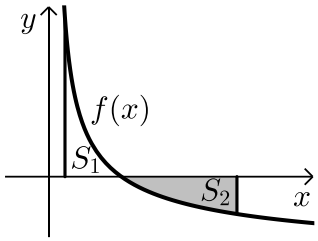
ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים: $x=k$ ו- $x=t$ הוא: $S=12$.

מצא את t.

11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא עבור איזה ערך של a $(a>1)$ יתקיים: $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.



מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=1$ ו- $x=13$ כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2.

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

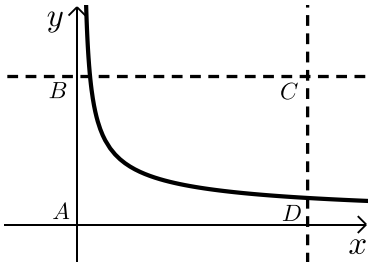
(1) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך $x=1$, (S_1).

(2) היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח S_2. נמק את טענתך.

12) באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x)=\frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x=13$ ו- $y=3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y=3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.



א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים ב- S_1 ואת שטח המלבן ב- S_2.

הראה כי: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{13}$.

תשובות סופיות:

1) א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש .

2) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

3) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

4) 2.26 יח"ש.

5) 0.5 יח"ש

6) $t=16$.

7) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$

ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

8) $b=2$.

9) $a=9$.

10) א. הוכחה ב. $t=1$.

11) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

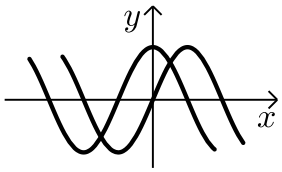
12) א. $M(5,3)$.

חישובי שטחים – פונקציות טריגונומטריות:

1) נתונות הפונקציות: $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

לציר ה- y ברביע הראשון.



2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת

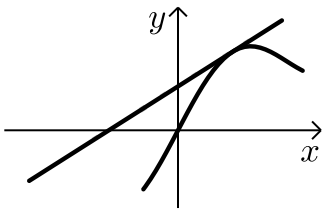
המקסימום הראשונה מימינה העבירו

לפונקציה משיק ששיפועו 1.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק וציר ה- x ברביעים הראשון והשני.



3) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$

בתחום: $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$ מעבירים משיק AB

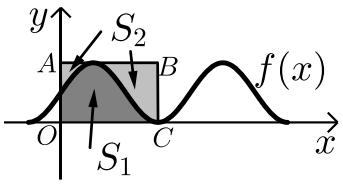
דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך

לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף

הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון המסומנת ב- C כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (ראה סימון בציור).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2.



א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

4) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y=\sin x+x$ בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?

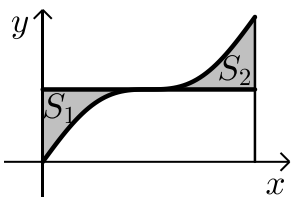
ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x

בנקודה שבה: $x=2\pi$.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה

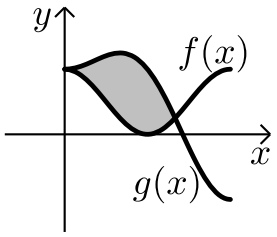
שמאפסת את הנגזרת.

הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט שווים.



5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
$f(x)=\cos^2 x$ הבאות: ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$

בתחום: $0\le x\le \pi$.

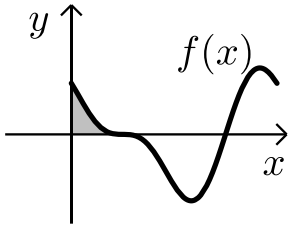


א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

השתמש בזהות: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

6) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות

המקיימות: $f'(x)=0$ בתחום: $0<x<2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ אשר אינה

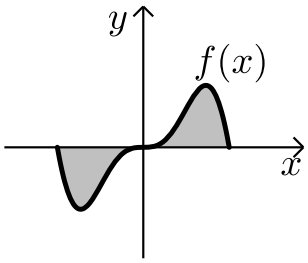
קיצון נמצאת על ציר ה- x.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

7) ענה על הסעיפים הבאים:



א. נתונה הפונקציה: $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$

הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y'=x^2\sin x$

באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\sin x$

בתחום: $-\pi\le x\le \pi$.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

וציר ה- x בתחום הנתון.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos x+b\sin x$, a,b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

1) 0.41 יח"ש.

2) א. $y=x+2$ ב. π יח"ש.

3) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$.

4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π,π) היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$.

5) א. $(0,1)$, $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$.

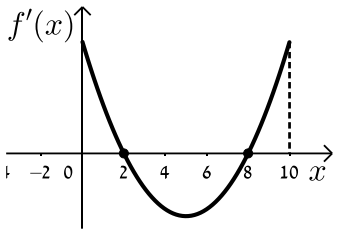
6) א. $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

7) א. הוכחה ב. הוכחה ג. $S=2\left(\pi^2-4\right)\approx 11.74$.

8) $a=2$, $b=-2$.

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 10$.



בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

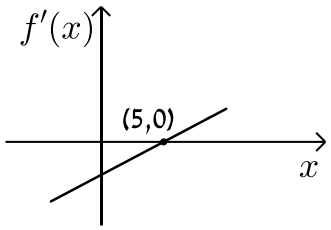
א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם: $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$ וכן: $f(10)>0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י **<u>גרף הנגזרת והצירים</u>**

ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x=2$.

2) לפניך הגרף של הפונקציה $f'(x)$.



הגרף המתואר חותך את ציר ה-x בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

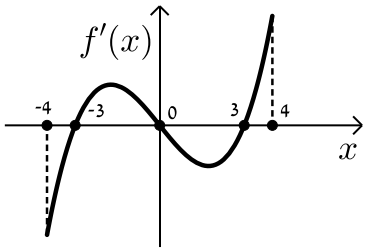
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי שיעור ה-y שלה הוא 2-.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה-y כאשר $y=8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$ והצירים.

3) בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.



א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון

של $f(x)$ וקבע את סוגן.

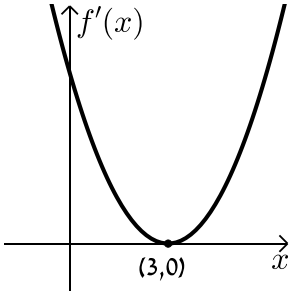
ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3)=f(3)=m$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות m).

ד. השטח הכלוא בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$ וציר ה-x ברביעים

השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את m.

4) הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.



א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

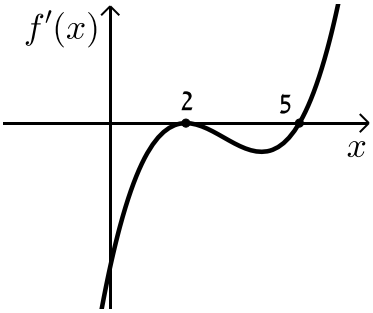
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את ציר

ה-y בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.

5) באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.



ידוע כי הנקודות $A(5,-4.75)$, $B(2,2)$

ו-$C(0,14)$ נמצאות על $f(x)$.

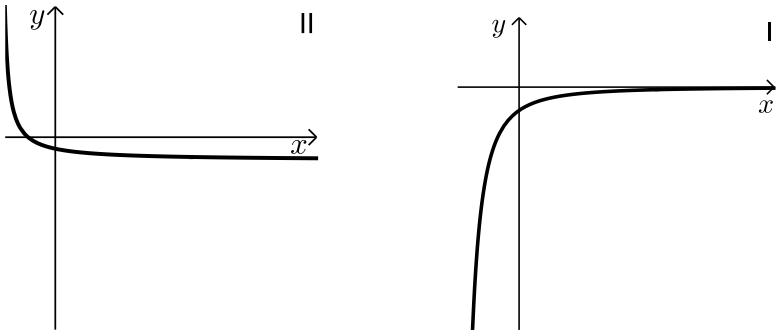
א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את השטח מוגבל בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$ והצירים בתחום $0\le x\le 5$.

6) באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

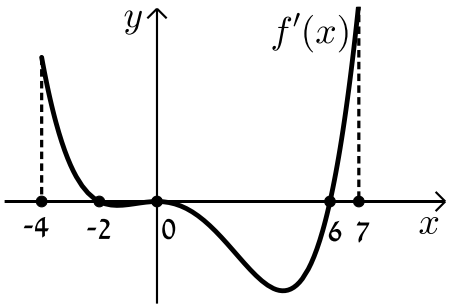


א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-2$.

מהו השטח המוגבל בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

7) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:

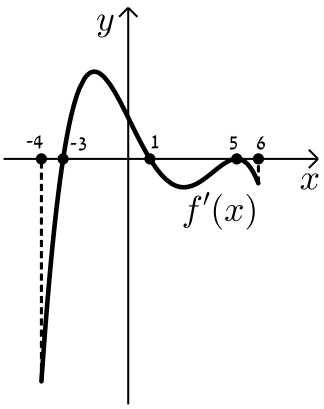


א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ לפי הנתונים: $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין **<u>גרף הנגזרת</u>** וציר ה- x בריבוע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין **<u>גרף הנגזרת</u>** וציר ה- x בריבוע הרביעי.

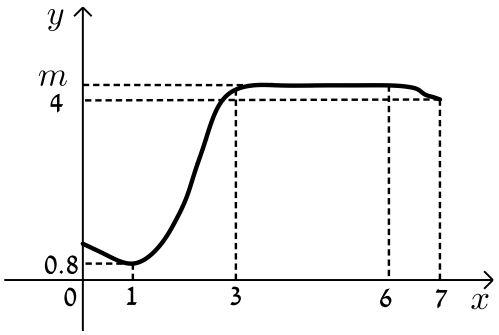
8) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 6$ עבור הנתונים: $f(5) = -83\frac{1}{3}$, $f(1) = 36\frac{2}{15}$, $f(-3) = -356\frac{2}{5}$.

ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין **<u>גרף הנגזרת</u>** וציר ה- x בתחום: $-3 \le x \le 5$.

9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0<x<7$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הציר

וענה על השאלות הבאות:

א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-6 מתקיים:

i. $f'(x)>0$

ii. $f'(x)=0$

iii. $f'(x)<0$

ב. נתון כי: $\int_3^6 m\,dx=15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה-y. מצא את $f(5)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0<x<3$.

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$

וציר ה-x בתחום $1<x<3$.

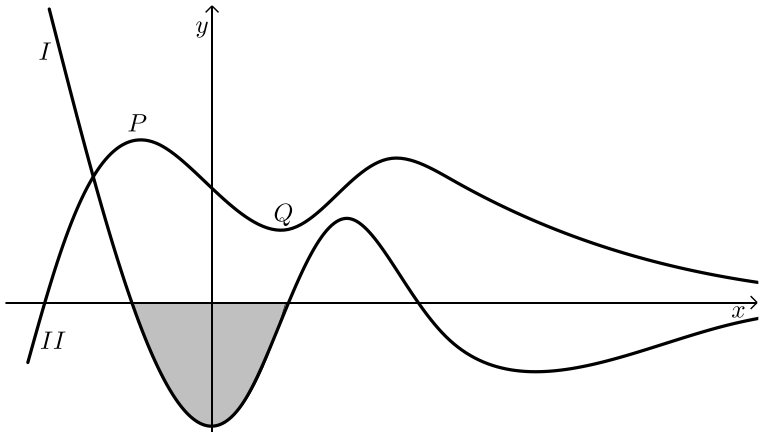
10) בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון: $P(-2,4)$, $Q(2,1)$. מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I לציר ה-x

(השטח המסומן בסרטוט).



תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.

1) ב. 10 יח"ש.

2) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$.
ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$
ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.

3) א. עולה: $3<x\le 4$, $-3<x<0$, יורדת: $0<x<3$, $-4\le x<-3$
ב. $x_{\min}=3$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-3$. ג. הוכחה ד. $m=-8$

4) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.

5) א. $\min(5,-4.75)$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. הוכחה ד. 18.75 יח"ש.

6) א. $f'(x):\text{I}$, $f(x):\text{II}$ ב. 1 יח"ש.

7) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

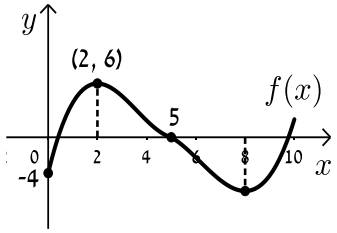
8) א. הוכחה ב. 512 יח"ש.

9) א. i. $f'(x)>0:1<x<3$ א. ii. $f'(x)=0:\ x=1\ ,\ 3\le x<6$
א. iii. $f'(x)<0:\ 6<x<7\ ,\ 0<x<1$
ב. $m=5$, $f(5)=5$ ד. 4.2 יח"ש.

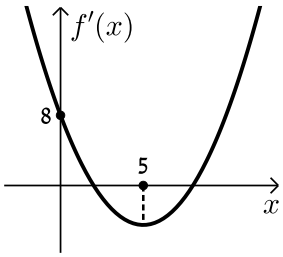
10) א. גרף I - $f'(x)$ וגרף II - $f(x)$. ב. 3 נקודות פיתול. ג. 3 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

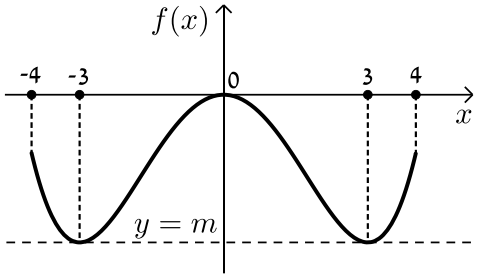
(1



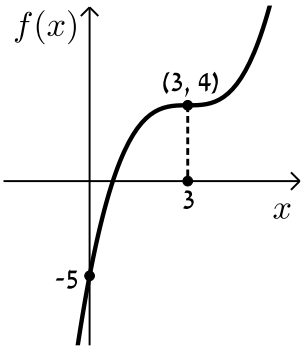
(2



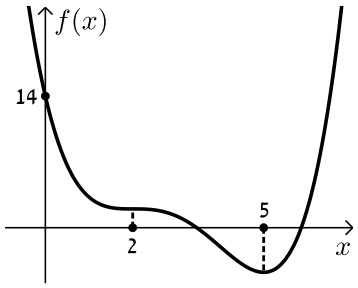
(3



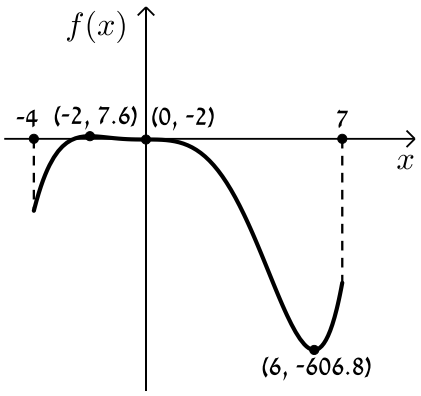
(4



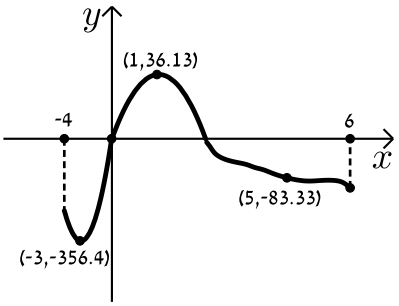
(5



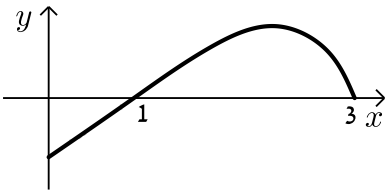
(7



(8

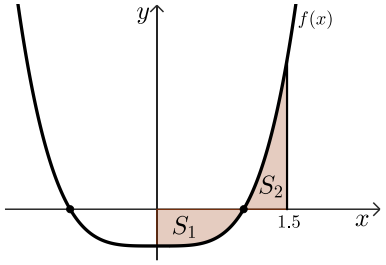


(9



ערך של אינטגרל לעומת שטח:

1) לפניכם הפונקציה: $f(x)=x^4-1$.



א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

ב. (1) חשבו את ערכו של האינטגרל: $\int_{-1}^{1}(x^4-1)dx$.

(2) חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה- x.

(3) מה תוכלו לומר על הקשר שבין תתי-סעיפים ב.(1) ו-ב.(2)?

מעבירים את הישר $x=1.5$ ומסמנים ב- S_1 את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים ברביע הרביעי, וב- S_2 את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר הנ"ל.

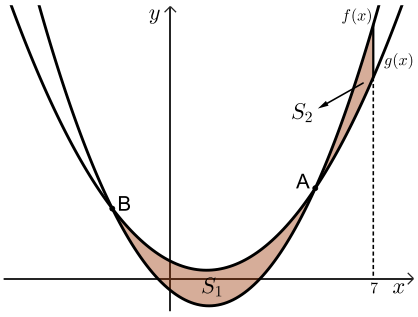
ג. (1) חשבו את ערך האינטגרל: $\int_{0}^{1.5}(x^4-1)dx$.

(2) חשבו את סכום השטחים: S_1+S_2.

(3) חשבו את ההפרש: S_2-S_1.

(4) מה תוכלו לומר על הקשר שבין ערך האינטגרל מסעיף ג.(1) לבין סכום והפרש השטחים בסעיפים ג.(2) ו-ג.(3)?

2) באיור שלפניכם נתונות שתי הפרבולות: $f(x)=3x^2-8x-4$ ו- $g(x)=2x^2-5x+6$.



הפרבולות נחתכות בנקודות A ו-B כאשר A מימין לציר ה- y כמתואר. מעבירים את הישר $x=7$.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך A ו-B.

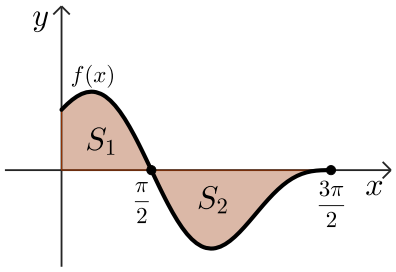
ב. חשבו את ערכו של האינטגרל: $\int_{-2}^{7}(x^2-3x-10)dx$.

מסמנים את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ב- S_1.

השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציה והישר $x=7$ יסומן ב- S_2.

ג. מצאו את S_1 ואת S_2.

ד. הראו כי ערכו של האינטגרל שחישבתם בסעיף ב' שווה להפרש: S_2-S_1, והסבירו את הקשר שבין ערך האינטגרל וסך השטח הכלוא בין הגרפים, כלומר: S_1+S_2.



3) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודות: $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$.

מסמנים ב-S_1 את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים, וב-S_2 את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x בגבולות שבין $x=\frac{\pi}{2}$ ו-$x=\frac{3\pi}{2}$.

נתון: $S_2=2$, וכן: $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=-\frac{1}{2}$.

א. מצאו את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה והצירים (השטח S_1).

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית. קבעו אלו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

נמקו את קביעתכם.

(1) $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=0$.

(2) $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=-1$.

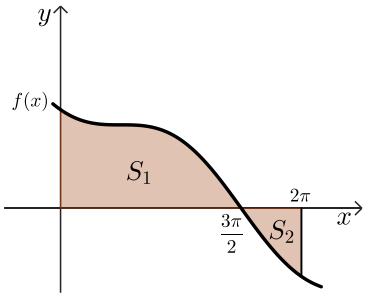
(3) $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx=\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

(4) סך השטחים הכלואים בין גרף הפונקציה וציר ה-x בגבולות שבין $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ הוא 7 יח"ר.

4) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-y בחלקו החיובי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x היא $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$.



נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x=2\pi$ (סך כל השטח המסומן באיור) שווה ל-$1.25\pi^2+2$. כמו כן, נתון גם כי: $\int_0^{2\pi} f(x)dx=\pi^2$.

א. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים (השטח המסומן S_1).

ב. הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$.

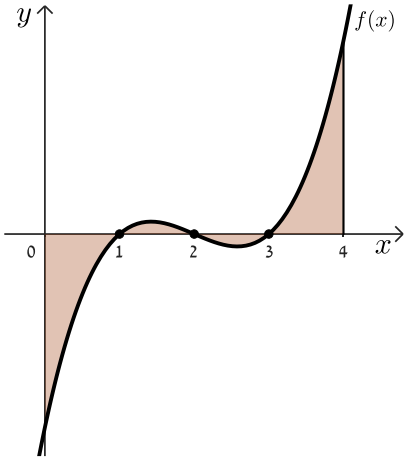
נתון: $F(0)=0$. חשבו את: $\frac{F(3\pi/2)}{F(3\pi/2)-F(2\pi)}$.

ג. נתון: $f'(x)=\sin(x)-1$. מצאו את $f(x)$.

5) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודות: $(3,0)$, $(2,0)$, $(1,0)$.

סך השטח הכלוא על ידי גרף הפונקציה, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x=4$ הוא 5 יחידות שטח.



כמו כן ידועים גם: $\int_0^4 f(x)dx=0$, $\int_0^1 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx=0$.

א. מצאו את סך השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, בתחום שבין ציר ה-y והנקודה $(2,0)$.

ידוע כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ בין הנקודות $(1,0)$ ו-$(2,0)$ הוא עשירית מסך השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ בין הנקודה $(2,0)$ והישר $x=4$.

ב. מצאו את: $\int_1^2 f(x)dx$.

הפונקציה הקדומה ל-$f(x)$ היא $F(x)$. ידוע כי: $F(0)=1$.

ג. חשבו את:

(1) $F(2)$.

(2) $F(4)$.

www.bagrut.co.il

תשובות סופיות:

1) א. $(1,0),(-1,0)$ ב. (1). $-1\frac{3}{5}$ ב. (2). $1\frac{3}{5}$ יח"ש

ב. (3). התקבלו מספרים נגדיים. ג. (1). $\frac{3}{160}$

ג. (2). $S_1+S_2=1\frac{99}{160}$ ג. (3). $\frac{3}{160}$

ג. (4). ראו סרטון.

2) א. $A(5,31)\ ,\ B(-2,24)$ ב. -40.5

ג. $S_1=57\frac{1}{6}\ ,\ S_2=16\frac{2}{3}$ ד. ראו סרטון.

3) א. $S_1=1.5$ ב. (1). לא נכונה. ב. (2). נכונה.

ב. (3). נכונה ב. (4). נכונה.

4) א. $S_1=1.125\pi^2+1$ ב. $\frac{F(3\pi/2)}{F(3\pi/2)-F(2\pi)}\approx 5.4185$

ג. $f(x)=-\cos x-x+\frac{3\pi}{2}$

5) א. $S_1+S_2=2.5$ ב. $S_2=\frac{1}{4}$ ג. (1). $F(2)=-1$

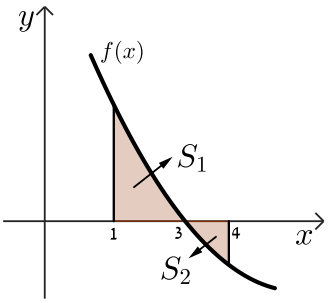
ג. (2). $F(4)=1$

פונקציה צוברת שטח:

1) נתונה הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

גרף הפונקציה בקטע $1 \le x \le 4$ מתואר באיור.

ידוע כי השטח המודגש באיור שווה ל- $\frac{119}{36}$.



נתון כי: $\int_1^4 f(x)dx = 2\frac{1}{4}$.

$F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(x)$.

בסעיפים א-ו חשבו את הגדלים הבאים:

א. S_1

ב. S_2

ג. $2F(3)-F(1)-F(4)$

ד. $\int_1^3 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx$

ה. $\int_{0.5}^{2} f(2x)dx$

ו. $\int_2^4 f(x-1)dx$

בסעיפים ז-ט הוכיחו כי:

ז. $\int_3^4 f'(x)dx = f(4)$

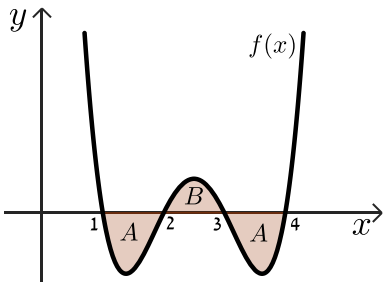
ח. $\int_1^2 f'(x)dx < 0$

ט. $\int_1^3 f'(x)dx < f(1)$

י. מצאו את $F(4)$ אם ידוע כי $F(1)=k$. בטאו תשובתכם בעזרת k.

יא. נתון כי $f'(x)=\frac{1}{6}(2x-13)$. מצאו את $f(x)$.

יב. היעזרו בסרטוט וקבעו האם קיים $a>0$ שעבורו האינטגרל $\int_1^a f(x)dx$ מקבל ערך מקסימלי. אם כן, מהו ערכו של a זה.



2) לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

נסמן ב- $F(x)$ את הפונקציה הקדומה ל- $f(x)$.

גודל השטחים המוגבלים בין גרף הפונקציה לבין ציר x בקטעים $1\le x\le 2$ ו- $3\le x\le 4$ הוא A.

גודל השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לבין ציר x בקטע $2\le x\le 3$ הוא B.

בטאו באמצעות A ו-B את הגדלים בסעיפים א-י הבאים:

א. $\int_1^2 f(x)dx$

ב. $\int_2^3 f(x)dx$

ג. $\int_1^4 f(x)dx$

ד. $\int_1^3 f(x)dx$

ה. $\int_2^4 f(x)dx$

ו. $F(1)-F(4)$

ז. $\int_1^4 |f(x)|dx$

ח. $\int_1^2 f(2x)dx$

ט. $\int_3^4 f(x-2)dx$

י. $\int_1^3 f'(x)dx$

יא. מצאו את $f(x)$ אם ידוע כי: $f'(x)=4x^3-30x^2+2ax+b$.

הגדירו פונקציה חדשה: $g(t)=\int_1^t f(x)dx$ בקטע: $1\le t\le 4$.

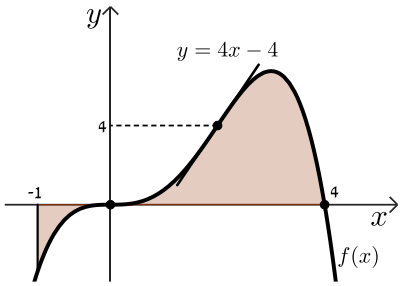
יב. חשבו את: $g(4)$, $g(3)$, $g(2)$, $g(1)$.

יג. מצאו את נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(t)$.

יד. סרטטו את גרף הפונקציה $g(t)$.

טו. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $g(t)$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.



הישר $y=4x-4$ משיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $y=4$. משיק זה נמצא מתחת לגרף הפונקציה משמאל לנקודת ההשקה ומעל לגרף הפונקציה מימין לנקודת ההשקה.

הישר $y=0$ משיק לגרף הפונקציה בראשית הצירים.

חשבו את הגדלים הבאים המופיעים בסעיפים א-ג:

א. $\int_0^2 f'(x)\,dx$ ב. $\int_0^2 f''(x)\,dx$ ג. $\int_0^2 f'''(x)\,dx$

הניחו כי $0<a\le 4$ וענו על סעיפים ד-ה:

ד. היעזרו בסרטוט וקבעו האם קיים a שעבורו האינטגרל $\int_0^a f(x)\,dx$ מקבל ערך מקסימלי.

אם כן, מהו ערכו של a זה.

ה. היעזרו בסרטוט וקבעו האם קיים a שעבורו האינטגרל $\int_0^a f(x)\,dx$ מקבל ערך מינימלי.

אם כן, מהו ערכו של a זה.

השטח הכולל המסומן באיור, הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה-x בריבוע הראשון, ובין גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $x=-1$ בריבוע השלישי, שווה ל-$13\frac{1}{10}$. השטח בריבוע הראשון, הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x בלבד, שווה ל-$12\frac{4}{5}$.

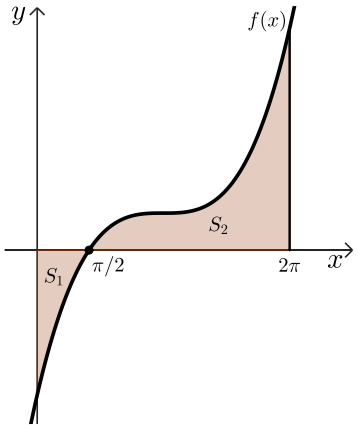
$F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(x)$.

ו. חשבו את: $\int_{-1}^4 f(x)\,dx$.

ז. הוכיחו כי: $F(2)-F(0)<4$.

ח. נתון כי: $f'''(x)=6(1-x)$. חשבו את: $\int_0^1 f(x)\,dx$.

4) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.



גרף הפונקציה בקטע: $0 \le x \le 2\pi$ מתואר באיור.

ידוע כי השטח המודגש באיור שווה ל- $\frac{5}{4}\pi^2 - \pi - 2$.

נתון כי: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = \pi^2 - 2\pi$.

א. הוכיחו כי: $S_1 < -\frac{\pi}{4} \cdot f(0)$.

ב. חשבו את השטח S_1.

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי: $F(0) = -1$.

ג. מצאו את: $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

ד. הוכיחו כי: $\int_{\pi}^{2\pi} f'(x)dx > 0$.

ה. הוכיחו כי: $\int_{\pi}^{2\pi} f''(x)dx > 0$.

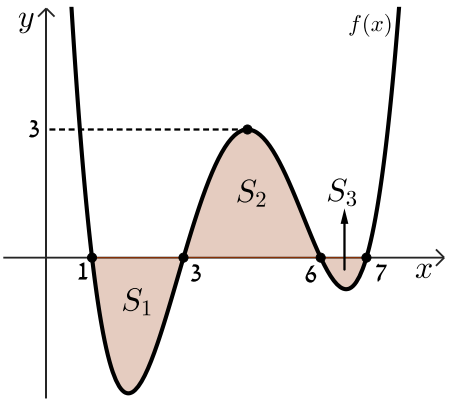
ו. הוכיחו כי: $\int_0^{2\pi} f'''(x)dx > 0$.

ז. מצאו את $f(x)$ אם ידוע כי: $f'(x) = 1 + \cos x$.

ח. ידוע כי $f(x)$ חיובית לכל $x > \frac{\pi}{2}$.

היעזרו בסרטוט וקבעו האם קיים $a > 0$ שעבורו האינטגרל $\int_1^a f(x)dx$ מקבל ערך מינימאלי? אם כן, מהו ערכו של a זה.

5) באיור גרף של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל $x>0$.



נתון כי: $S_1=10,\ S_2=11,\ S_3=1$ יחידות שטח.

נגדיר פונקציה: $g(t)=\int_1^t f(x)dx$ בקטע: $1\le t\le 7$.

א. חשבו את: $g(7)\ ,\ g(6)\ ,\ g(3)\ ,\ g(1)$.

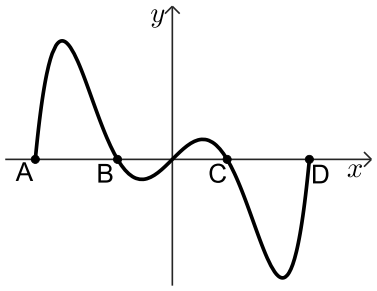
ב. מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(t)$.

ג. סרטטו את גרף הפונקציה $g(t)$.

ד. **בונוס:**

חשבו את האינטגרל $\int_1^{\sqrt{6}} t\cdot g''(t^2)dt$.

6) לפניכם גרף הפונקציה: $f(x)=x\cos(2x)$ בקטע: $A\le x\le D$.



מגדירים את הפונקציה: $g(t)=\int_A^t f(x)dx$.

א. מצאו את שיעורי הנקודות המודגשות באיור (הנקודות A, B, C, D).

ב. מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(t)$.

ג. חשבו את $g(A)$ ואת $g(D)$.

ד. הוכיחו כי: $g(C)=g(B)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(t)$.

ו. הוכיחו כי: $\int_0^C f(x)dx\le\frac{\pi^2}{16}$.

ז. הוכיחו כי: $(x\sin 2x)'=\sin 2x+2x\cos 2x$.

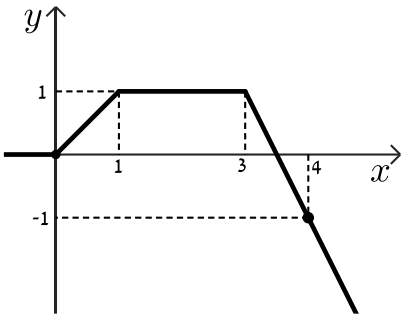
ח. חשבו את: $\int_0^C f(x)dx$. (רמז: היעזרו בתוצאת הסעיף הקודם).

מגדירים את הפונקציה: $h(t)=\int_A^t |f(x)|dx$.

ט. מצאו את נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(t)$.

י. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(t)$.

7) נתונה פונקציה $f(x)$ כמתואר באיור הבא.



ידוע כי לכל $x<0$, הפונקציה $f(x)$ שווה לאפס.

כמו כן, הפונקציה $f(x)$ יורדת בקצב אחיד לכל $x>3$.

א. מצאו b כך ש- $\int_{-2}^{b} f(x)dx=1.5$.

ב. מצאו שני ערכי c כך ש- $\int_{-1}^{c} f(x)dx=2.5$.

ג. מצאו d כך שלאינטגרל $\int_{-2}^{d} f(x)dx$ יש ערך מקסימלי.

ד. מצאו k כך ש- $\int_{-2}^{k} f(x)dx=0$.

ה. מצאו ℓ כך שלכל $x>\ell$ מתקיים: $\int_{-4}^{\ell} f(x)dx<0$.

ו. חשבו את: $f'(2023)$, $f'(1)$.

נגדיר: $g(t)=\int_{0}^{t} f(x)dx$ בקטע: $0\le t\le 4$.

ז. חשבו את: $g(4)$, $g(3)$, $g(1)$, $g(0)$.

ח. מצאו נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה לפונקציה $g(t)$.

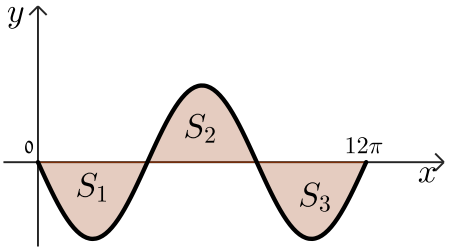
ט. מצאו תחומי חיוביות ושליליות לפונקציה $g(t)$.

י. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(t)$.

8) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

באיור מסורטט גרף הפונקציה בקטע: $0 \le x \le 12\pi$.

השטחים: S_1, S_2, S_3 חופפים, שווים זה לזה וסימטריים ביחס לנקודת הקיצון שקיימת בתחומם.



א. חשבו את ערכי האינטגרלים הבאים:

(1) $\int_{0}^{8\pi} f(x)dx$ (2) $\int_{3\pi}^{5\pi} f(x)dx$

(3) $\int_{3\pi}^{9\pi} f'(x)dx$ (4) $\int_{2\pi}^{6\pi} f''(x)dx$

ב. נתון שהפונקציה $f(x)$ מקיימת את המשוואה: $f(x)+f(-x)=0$.

(1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה בקטע: $-8\pi \le x \le 8\pi$.

(2) נתון כי: $\int_{-8\pi}^{4\pi} f(x)dx = k$. הוכיחו כי $k<0$ ובטאו בעזרת k את $\int_{0}^{2\pi} f(x)dx$.

נגדיר פונקציה חדשה: $h(t)=2\int_{0}^{t} f(x)dx - \int_{-8\pi}^{4\pi} f(x)dx$ בקטע: $0 \le t \le 12\pi$.

ג. מצאו את:

(1) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $h(t)$ עם ציר ה-t.

(2) תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(t)$.

(3) נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של הפונקציה $h(t)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(t)$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$. הוכיחו את הטענות הבאות שבסעיפים א-ז:

א. $f(0+x)=f(0-x)$

ב. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$

ג. $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

ד. $\int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi/2} f(x)dx$

ה. $f(x+\pi)=f(x)$ לכל x.

ו. $\int_{0}^{0.5\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{1.5\pi} f(x)dx$

ז. $\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0.5\pi}^{1.5\pi} f(x)dx$

ח. מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ בקטע $0 \le x \le 2\pi$.

תשובות סופיות:

1) א. 2.778 יח"ש ב. 0.52778 יח"ש ג. $\frac{119}{36}$ ד. $\frac{119}{36}$

ה. $1\frac{1}{8}$ ו. 2.7778 ז. הוכחה ח. הוכחה

ט. הוכחה י. $k+2\frac{1}{4}$ יא. $f(x)=\frac{1}{6}x^2-2\frac{1}{6}x+5$

יב. $a=3$

2) א. $-A$ ב. B ג. $B-2A$ ד. $B-A$

ה. $B-A$ ו. $2A-B$ ז. $2A+B$ ח. $\frac{B-A}{2}$

ט. $-A$ י. 0

יא. $f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$

יב. $g(4)=-0.9$, $g(3)=-\frac{4}{15}$, $g(2)=-\frac{19}{30}$, $g(1)=0$

יג. $\min(4,-0.9)$, $\max\left(3,-\frac{4}{15}\right)$, $\min\left(2,-\frac{19}{30}\right)$, $\max(1,0)$,

עלייה: $2<t<3$, $3<t<4$ ירידה: $1<t<2$

יד. ראו סרטון. עלייה: $2<t<3$, ירידה: $3<t<4$, $1<t<2$

טו. $\min(4,-0.9)$, $\max(1,0)$

3) א. 4 ב. 4. ג. 0 ד. מקסימלי: $a=4$

ה. מינימלי: אין ו. 12.5 ז. הוכחה ח. 0.2

4) א. הוכחה ב. $S_1=\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{2}\pi-1$ ג. $\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{2}\pi-2$

ד. הוכחה ה. הוכחה ו. הוכחה

ז. $f(x)=x+\sin x-1-\frac{\pi}{2}$ ח. $a=\frac{\pi}{2}$

5) א. $g(7)=0$, $g(6)=1$, $g(3)=-10$, $g(1)=0$

ב. $\min(7,0)$, $\max(6,1)$, $\min(2,-10)$, $\max(1,0)$,

עלייה: $3<t<6$, ירידה: $6<t<7$, $1<t<3$

ג. ראו סרטון. ד. 0

6) א. $A\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $D\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$

ב. $\min\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $\max\left(x=\frac{\pi}{4}\right)$, $\min\left(x=0\right)$, $\max\left(x=-\frac{\pi}{4}\right)$, $\min\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$,

עלייה: $0<t<\frac{\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}<t<-\frac{\pi}{4}$, ירידה: $\frac{\pi}{4}<t<\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}<t<0$

ג. $g(A)=0$, $g(D)=0$ ד. הוכחה ה. ראו סרטון.

ו. הוכחה ז. הוכחה ח. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

ט. עולה בכל תחום הגדרתה, אין נקודות קיצון מקומיות.

י. חיובית: $A<t\le D$, $h(t=A)=0$

7) א. $b=2$ ב. $c=3$ ג. $d=3.5$

ד. כל k בתחום: $-2<k\le 0$ ה. $l=100$ ו. הפונקציה אינה גזירה

ז. $g(4)=2.5$, $g(3)=2.5$, $g(1)=\frac{1}{2}$, $g(0)=0$

ח. עלייה: $0<t<3.5$, ירידה: $3.5<t<4$

ט. חיובית: לכל $0<t\le 4$, שלילית: אין י. ראו סרטון.

8) א. (1). 0 א. (2). 0 א. (3). 0

א. (4). 0 ב. (1). ראו סרטון ב. (2). הוכחה

ג. (1). $(10\pi,0)$, $(6\pi,0)$, $(2\pi,0)$

ג. (2). חיובית: $0<t<2\pi$, $6\pi<t<10\pi$, שלילית: $2\pi<t<6\pi$, $10\pi<t<12\pi$

ג. (3). $\min(12\pi,-5)$, $\max(8\pi,5)$, $\min(4\pi,-5)$, $\max(0,5)$,

עלייה: $4\pi<t<8\pi$, ירידה: $0<t<4\pi$, $8\pi<t<12\pi$

ד. ראו סרטון.

9) א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה

ד. הוכחה ה. הוכחה ו. הוכחה

ז. הוכחה

ח. $\min\left(2\pi,\frac{1}{2}\right)$, $\max(1.5\pi,1)$, $\min\left(\pi,\frac{1}{2}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $\min\left(0,\frac{1}{2}\right)$,

עלייה: $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$

שאלון 571

הסתברות קלאסית

תוכן העניינים:

הסתברות קלאסית..... 490

הגדרות כלליות:..... 491

שאלות יסודיות:..... 492

שאלות עם שני ניסויים:..... 492

שאלות עם הסתברות מותנית:..... 493

שאלות עם נעלמים:..... 495

שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית:..... 496

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות:..... 498

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית:..... 498

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים:..... 499

שאלות מסכמות:..... 501

תשובות סופיות:..... 508

תרגול נוסף - שאלות שונות לפי נושאים:..... 511

כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות בלתי תלויים:..... 511

כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות תלויים:..... 512

תרגילים הכוללים שימוש בדיאגרמת עץ:..... 514

תרגילים עם נעלמים – כפל וחיבור הסתברויות, דיאגרמת עץ:..... 516

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי:..... 520

טבלה דו מימדית:..... 528

תרגילי חישוב הכוללים שימוש בנוסחאות בהסתברות:..... 534

תרגילי הוכחה בעזרת נוסחאות ההסתברות:..... 536

תשובות סופיות:..... 538

תרגול נוסף - שאלות משולבות:..... 542

תשובות סופיות:..... 550

הגדרות כלליות:

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A: $P(A)=\frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$

2. המאורע המשלים למאורע A: $P(\bar{A})=1-P(A)$.

3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו-B: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.
עבור מאורעות זרים A ו-B מתקיים: $P(A\cap B)=0$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

5. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.
עבור מאורעות בלתי תלויים A ו-B מתקיים: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

6. אם מתקיים: $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ המאורעות תלויים.

7. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

8. צורה כללית של טבלת הסתברויות עבור מאורעות A ו-B:

	$\bar{A}$	A	
$P(B)$	$P(\bar{A}\cap B)$	$P(A\cap B)$	B
$P(\bar{B})$	$P(\bar{A}\cap\bar{B})$	$P(A\cap\bar{B})$	$\bar{B}$
1	$P(\bar{A})$	$P(A)$	

קשרים מידיים מהטבלה:

- $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$
- $P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{B})$
- $P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})=P(A)$
- $P(\bar{A}\cap B)+P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})$

9. התפלגות בינומית: חישוב k הצלחות מתוך n ניסיונות בלתי תלויים כאשר ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא p נתונה ע"י: $P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

שאלות יסודיות:

1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?

2) בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?

3) מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?

4) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A)=0.6$, $P(\overline{B})=0.3$, $P(A\cap B)=0.4$.
מצא את $P(A\cup B)$.

5) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(\overline{A})=0.2$, $P(\overline{B})=0.5$, $P(A\cup B)=0.95$.
מצא את $P(A\cap B)$.

6) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A)=0.6$, $P(B)=0.25$, $P(A\cup B)=0.65$.
קבע האם המאורעות זרים והאם הם תלויים.

7) נתון כי שני מאורעות, A ו- B בלתי תלויים.
בנוסף נתון: $P(A)=0.75$, $P(B)=0.4$. מצא את $P(A\cup B)$.

שאלות עם שני ניסויים:

8) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור (ללא החזרה של הכדור הראשון).

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

10) בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה).
מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

11) נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי".
אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

12) ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות.
יואב מוציא גולה מכיסו הימני.
אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי.
אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי.
מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

שאלות עם הסתברות מותנית:

13) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

14) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

15) בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים.
מה ההסתברות שכולם גברים?

16) נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגן שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי".
אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.

א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?

17) במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2.
ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪.
מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

18) כדי להתקבל לעבודה בחברת משקאות יש לעבור שלושה ראיונות על ידי שלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: אחראי משמרת, מנהל ראשי ומנכ"ל החברה.
כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד.
כדי שמועמד יקבל עבודה בחברה עליו לעבור בהצלחה לפחות את אחד מהראיונות עם אחראי המשמרת והמנהל הראשי, אך הראיון עם המנכ"ל חייב לעבור בהצלחה (כדי שמועמד יקבל עבודה המנכ"ל צריך לתת לו חוות דעת חיובית).
ידוע כי אחראי המשמרת נותן חוות דעת חיובית ל-$\frac{1}{6}$ מהמועמדים.
המנהל הראשי קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב-$\frac{2}{3}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של אחראי המשמרת. מנכ"ל החברה נותן חוות דעת חיובית ל-80% מהמועמדים בלי קשר לחוות הדעת הקודמות.

א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנהל הראשי?

ב. ידוע כי המנהל הראשי נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם אחראי המשמרת נתן חוות דעת חיובית?

ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?

שאלות עם נעלמים:

19) בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים.
הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא $\frac{5}{14}$.
כמה כדורים בכד?

20) ההסתברות של צלף לפגוע במטרה ביריה הראשונה היא p והיא גדולה מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע ביריה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק ביריה אחת היא 0.38.

א. מצא את p.

ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?

21) רפי קנה במכולת חבילה של מסטיק "מנטוס".
בכל חבילה יש 10 סוכריות, חלקן ורודות וחלקן צהובות.
רפי מוציא באקראי (ללא החזרה) שתי סוכריות מהחבילה שקנה.
ידוע כי ההסתברות ששתי הסוכריות תהיינה ורודות קטנה פי 4 מההסתברות להוציא סוכריות בצבעים שונים.

א. כמה סוכריות מכל צבע יש בכל חבילה?

רפי מחזיר את הסוכריות בחזרה לחבילה ולאחר מכן מוציא באקראי 3 סוכריות (ללא החזרה).

ב. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציא רפי הן צהובות?

שלומי, חברו הטוב של רפי, קנה 3 חבילות "מנטוס".

ג. שלומי מוציא באקראי סוכרייה מכל חבילה.
האם ההסתברות של שלומי להוציא 3 סוכריות צהובות גבוהה או נמוכה מזו של רפי?

ד. שלומי מוציא מכל חבילה שתי סוכריות.
מה ההסתברות שלו להוציא מכל חבילה סוכרייה ורודה ואחר כך צהובה?

22) בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים.
מוציאים באקראי כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף.

א. מצא כמה כדורים יש בכד מכל צבע אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא לבן היא $\frac{3}{8}$.

ב. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא אדום?

23) בכד ישנם 12 כדורים, חלקם לבנים וחלקם שחורים.
אם מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד ההסתברות ששניהם יהיו בעלי אותו הצבע היא $\frac{13}{18}$.

א. מה ההסתברות להוציא כדור שחור מהכד אם ידוע כי יש יותר כדורים שחורים?

על 40% מהכדורים השחורים רשום מספר ועל מחצית הכדורים הלבנים לא רשום כלום.

ב. מה ההסתברות להוציא מהכד כדור שחור שרשום עליו מספר?

ג. איזה חלק מבין הכדורים שרשום עליהם מספר מהווים הכדורים הלבנים?

שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית:

24) 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים.
נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.

א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?

ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?

ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?

ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?

25) 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט.
80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות.
נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.

א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?

ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?

ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?

ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?

26) 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?

ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?

ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?

27) בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים. 60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

28) 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

29) בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

30) בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים 2/5 מתלמידי הפיזיקה, 5/12 מתלמידי הכימיה ו-1/3 מתלמידי המחשבים. 1/4 מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?

ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות:

31) אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?

32) מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?

33) הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?

34) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות.
מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:

א. בדיוק ארבע יהיו כחולים?
ב. חמישה יהיו כחולים?
ג. לפחות ארבעה יהיו כחולים?
ד. הרוב יהיו כחולים?
ה. לפחות אחד יהיה כחול?
ו. הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית:

35) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות.
ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?

36) יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל.
מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים:

37) בכד יש 9 כדורים, חלקם כחולים והשאר לבנים. מוציאים כדור מהכד.
אם הוא כחול אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים לבנים ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים כחולים. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. נתון שההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא כחול אם ידוע כי הכדור השני כחול היא $\frac{6}{11}$.

א. מצא כמה כדורים כחולים יש בכד.

ב. חוזרים על התהליך 6 פעמים, כלומר בכל פעם מחזירים את המצב לקדמותו, מוציאים באקראי כדור ופועלים בהתאם לחוקים. מצא את ההסתברות שלפחות פעם אחת יבחרו שני כדורים כחולים בזה אחר זה.

38) בסיטונאות מזון ידוע כי 40% מבין הסכו"ם החד-פעמי הוא תוצרת חו"ל והשאר תוצרת הארץ.
40% מבין הסכו"ם המיובא מחו"ל הם צבעוניים והשאר שקופים.

א. מה ההסתברות לבחור בסיטונאות המזון סכו"ם שקוף המיובא מחו"ל?

ב. i. בוחרים 5 כלים בחנות באופן אקראי. מה ההסתברות שלכל היותר כלי אחד הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל?

ii. מה ההסתברות שבדיוק אחד מחמשת הכלים הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל אם ידוע כי לכל היותר כלי אחד הוא שקוף תוצרת חו"ל?

ג. בוחרים שני כלים באופן אקראי וידוע כי ההסתברות ששניהם שקופים היא 0.4096.
איזה חלק מהווים כלי הסכו"ם השקופים מבין כלי הסכו"ם תוצרת הארץ?

39) בחדר יש x גברים ו-$3x$ נשים. משחקים את המשחק הבא:
בוחרים באקראי שני אנשים מהחדר בזה אחר זה (בלי החזרה).
ידוע כי ההסתברות לבחור שני אנשים מאותו המין היא $\frac{13}{22}$.

א. מצא כמה נשים יש בחדר.

ב. ידוע כי האדם השני שנבחר הוא גבר.
מה ההסתברות שגם הראשון שנבחר הוא גבר?

ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שבדיוק ב-3 פעמים יבחר גבר גם בפעם הראשונה?

40) בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה.
ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?

41) בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?

42) בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה).
הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.

43) מפעל מייצר שולחנות וכיסאות. בוחרים 4 רהיטים. ידוע כי ההסתברות שכולם יהיו כיסאות זהה להסתברות שיהיה שולחן אחד בדיוק בניהם.

א. מצא את ההסתברות לבחור כיסא.

במפעל צובעים את הרהיטים בשחור או לבן.

רבע מהשולחנות נצבעים בשחור ורבע מהכיסאות נצבעים בלבן.

ב. מה ההסתברות לבחור כיסא שחור?

ג. איזה חלק מבין הרהיטים הלבנים מהווים השולחנות?

44) בחדר x גברים ו-$3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר.
ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6.

א. מצא את גודלו של x.

ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים.

מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?

45) במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה.
ישנו סיכוי של 50% ששי יידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש.

ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80.

מצא את ערכו של n.

46) כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש.
40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. 5/17 מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. שלושה חברים ניסו להתקבל לקורס טיס.
ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

שאלות מסכמות:

47) כדי להתקבל לחברת היי-טק יש לעבור ראיונות משלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: מהנדס ראשי, אחראי משמרת ומנכ"ל החברה. כל אחד מבעלי התפקידים נותן חוות דעת חיובית או שלילית על המועמד לעבודה. מועמד שמתקבל לחברה חייב לקבל חוות דעת חיובית משלושת בעלי התפקידים.

ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{3}{5}$ מהמועמדים.

אחראי המשמרת קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וב- $\frac{1}{6}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של המהנדס הראשי. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{7}{10}$ נותן חוות דעת זהה לשלו.

א. ענה על השאלות הבאות:

i. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית מאחראי המשמרת?

ii. ידוע כי אחראי המשמרת נתן חוות חיובית. מה ההסתברות שהמהנדס הראשי ייתן חוות דעת שלילית?

ב. מה ההסתברות שמועמד יקבל עבודה בחברה?

ג. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת שלילית מהמנכ"ל?

ד. לאחר היעדר עובדים שינתה החברה את מדיניותה וקבעה כי כדי להתקבל לעבודה יש לעבור לפחות שני ראיונות בהצלחה, אך חוות הדעת של המנכ"ל חייבת להיות חיובית. מה ההסתברות כעת לקבל עבודה בחברה?

48) במדינה מסוימת $\frac{19}{60}$ מהאזרחים הם גברים ו- $\frac{41}{60}$ הן נשים.

30% מבין מרכיבי המשקפיים במדינה זו הם גברים ו-40% מבין אלו שלא מרכיבים משקפיים הם גברים.

א. מה ההסתברות למצוא אישה במדינה זו שאינה מרכיבה משקפיים?

ב. בוחרים 4 אנשים. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם הם נשים שאינן מרכיבות משקפיים?

ג. בוחרים אזרח. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

49) בעיר מסוימת ההסתברות לבחור אדם מעשן גדולה פי 3 מההסתברות לבחור אדם המרכיב משקפיים. ידוע כי החלק של התושבים שמרכיבים משקפיים מבין כל התושבים המעשנים הוא $\frac{1}{12}$.

א. מצא מהי ההסתברות לבחור מעשן מתוך כל מרכיבי המשקפיים.

ב. ידוע כי 15% מהתושבים הם מרכיבים משקפיים בלבד.
מצא את הסתברות לבחור תושב שלא מרכיב משקפיים.

ג. בוחרים 6 תושבים באופן אקראי.
מה ההסתברות שמחצית מהם אינם מרכיבים משקפיים ואינם מעשנים?

50) בבית ספר מסוים ישנם תלמידים המרכיבים משקפיים.
ידוע כי אם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות ששלושתם מרכיבים משקפיים היא 0.027.

א. מצא את אחוז מרכיבי המשקפיים בבית הספר.

בבית הספר ההסתברות להיתקל בתלמיד גדולה ב-0.1 מההסתברות להיתקל בתלמידה ומספר הבנים שמרכיבים משקפיים זהה למספר הבנות שמרכיבות משקפיים.

ב. מה ההסתברות להיתקל בחצר בית הספר בתלמיד שאינו מרכיב משקפיים?

ג. איזה חלק מכלל הבנות בבית הספר מהוות הבנות שמרכיבות משקפיים?

ד. בוחרים 4 תלמידים. ידוע כי כולן בנות.
מה ההסתברות כי אחת מהן תרכיב משקפיים?

51) כדי להתקבל לעבוד בחברת ההיי-טק Techno יש לעבור שני ראיונות משני בעלי מקצוע, תחילה על ידי המהנדס הראשי ואחריו על ידי מנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית, שלילית או שנמנע מלקבוע. כדי שמועמד יתקבל לחברה עליו לעבור לפחות ראיון אחד עם חוות דעת חיובית. ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{5}$ מהמועמדים ו- $\frac{2}{7}$ מהם הוא משאיר בלי קביעה. המנכ"ל קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וקובע את חוות הדעת שלו בצורה הבאה:

אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית, אז המנכ"ל ייתן גם חוות דעת חיובית ב-60% מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית, אז המנכ"ל נמנע מלקבוע ב-60% מהמקרים ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת חיובית.

אם המהנדס נמנע מלקבוע אז המנכ"ל ייתן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. הסיכוי שהמנכ"ל ייתן במקרה זה חוות דעת חיובית גדול פי 3 מהסיכוי שייתן חוות דעת שלילית.

א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנכ"ל?

ב. ידוע כי המנכ"ל נתן חוות דעת חיובית.
מה ההסתברות שגם המהנדס נתן חוות דעת חיובית?

ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?

ד. ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים.
מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם קיבלו עבודה באותו היום?

52) בכד יש 12 כדורים, חלקם אדומים וחלקם שחורים.
מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד.

א. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא $\frac{4}{9}$.

ב. חלק מהכדורים עשויים מעץ והשאר עשויים מפלסטיק.
ידוע כי 25% מהכדורים האדומים עשויים מעץ וכי 50% מהכדורים העשויים מעץ הם אדומים.
מצא את ההסתברות לבחור כדור שחור עשוי מפלסטיק.

ג. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה.
מה ההסתברות להוציא 4 כדורים אדומים העשויים מפלסטיק?

ד. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה.
ידוע כי כולם עשויים מפלסטיק, מה ההסתברות ש-3 מהם בצבע אדום?

53) בבית ספר בעיר נערכו שני מבחנים. 80% מתלמידי העיר עברו את המבחן הראשון.
1/4 מבין התלמידים שעברו את המבחן הראשון עברו גם את השני ו-1/2 מהתלמידים שנכשלו במבחן הראשון נכשלו גם בשני.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מה הסתברות שהוא עבר את אחד המבחנים בלבד?

ב. בוחרים באקראי 4 תלמידים.
מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם עבר את אחד המבחנים בלבד?

ג. איזה חלק מבין התלמידים שנכשלו במבחן השני מהווה קבוצת התלמידים שנכשלו גם במבחן הראשון?

54) במפעל גדול ההסתברות שמתוך 4 עובדים לפחות אחד ירכיב משקפיים היא 0.5904.

א. מה ההסתברות לבחור עובד שלא מרכיב משקפיים?

ידוע כי 40% מהפועלים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים ו-20% מבין העובדים המעשנים הם מרכיבים משקפיים.

ב. מה ההסתברות לבחור עובד שמרכיב משקפיים בלבד או מעשן בלבד?

ג. בוחרים באקראי 5 עובדים. מה ההסתברות שרוב העובדים שנבחרו מעשנים?

55) במפעל לייצור ברגים פועלים שני פסי ייצור – פס ייצור א' ופס ייצור ב'.

ידוע כי אם בוחרים 5 ברגים אז ההסתברות ששלושה מהם מיוצרים על ידי פס הייצור השני גדולה פי 4.5 מההסתברות שאחד מהם מיוצר על ידי פס הייצור הנ"ל.

א. מצא את ההסתברות לבחור בורג המיוצר על ידי פס הייצור הראשון.

מתוך כל 100 ברגים שהמפעל מייצר 7 פגומים. ומתוך כל 10 ברגים היוצאים מפס הייצור הראשון אחד הוא פגום.

ב. מהו אחוז הברגים התקינים שמיוצרים על ידי פס הייצור השני?

ג. איזה חלק מבין הברגים הפגומים מהווים אלו שיוצאים מפס הייצור הראשון?

56) בכד יש פי 5 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים מהכד כדור.

אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא אדום אז מחזירים אותו לכד.

לאחר מכן מוציאים כדור נוסף מהכד. ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא: $\frac{175}{612}$.

א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד?

ב. ידוע כי הכדור השני שנבחר הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר היה אדום?

ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים.

ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול,

מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

57) בחדר יש פי 4 נשים מגברים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי אדם מהחדר. אם נבחר גבר אז הוא יוצר מהחדר ואם נבחרה אישה אז היא נשארת.

לאחר מכן בוחרים אדם נוסף.

א. מצא כמה גברים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו שני אנשים שונים היא $\frac{236}{725}$.

ב. ידוע כי בפעם השנייה נבחר גבר, מה ההסתברות שגם בפעם הראשונה ייבחר גבר?

ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שברוב המקרים יצא גבר גם בפעם הראשונה?

58) בעיר מסוימת נערכות בחירות. ידוע כי אם בוחרים 4 תושבים אז ההסתברות שלפחות אחד מהם יצביע למועמד ב' היא: $\frac{65}{81}$.

א. איזה חלק מהתושבים הצביעו למועמד א'?

בעיר זו יש תושבים מבוגרים וצעירים. ידוע כי $\frac{2}{3}$ מהצעירים הצביעו למועמד א' וכי ההסתברות לבחור מבוגר שהצביע למועמד ב' היא $\frac{2}{15}$.

ב. מהו אחוז התושבים הצעירים שהצביעו למועמד ב'?

ג. איזה אחוז מהווים התושבים הצעירים מבין אלו שהצביעו למועמד א'?

59) לכבוד חנוכה קנתה סבתא תקווה לשתי נכדותיה, שני ושרון, סביבונים עם סוכריות בתוכם. בכל סביבון יש 7 סוכריות שוקולד ו-4 סוכריות מנטה.

שרון לקחה את סביבון אחד והוציאה ממנו באקראי (בלי החזרה) 4 סוכריות.

א. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציאה שרון הן סוכריות מנטה?

ב. שני לקחה 4 סביבונים והוציאה באקראי מכל סביבון סוכרייה אחת.
האם ההסתברות ששני תוציא 4 סוכריות מנטה גבוהה יותר או נמוכה יותר מההסתברות שחשבת בסעיף א'? נמק.

ג. שני הוציאה באקראי סוכרייה אחת מכל סביבון מתוך ארבעת הסביבונים שברשותה.
ידוע שבין הסוכריות שבידה יש יותר סוכריות מנטה.
מה ההסתברות שכל הסוכריות שיש לשני ביד יהיו בטעם מנטה?

60) כדי לקבל עבודה בחברת Makido יש לעבור ראיונות משני בעלי מקצוע: מהנדס ראשי ומנכ"ל החברה. המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ברבע מהמקרים, בשליש מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת שלילית. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של המהנדס וקובע את חוות דעתו באופן הבא:
אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית אז הוא נותן חוות דעת חיובית ב-90% מהמקרים וב-10% מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת. אם המהנדס נמנע מלקבוע אז המנכ"ל נותן חוות דעת שלילית במחצית מהמקרים או חיובית במחצית מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית אז ההסתברות שהמנכ"ל יתן חוות דעת חיובית גדולה פי 2 מההסתברות שימנע מלתת חוות דעת וההסתברות שימנע מלתת חוות דעת גדולה פי 2 מההסתברות שיתן חוות דעת שלילית.

א. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית לפחות באחד הראיונות?

ב. אם ידוע כי מועמד קיבל חוות דעת חיובית אחת לפחות, מה ההסתברות שהמהנדס נמנע מלתת חוות דעת?

ג. ענה על השאלות הבאות:

i. מה ההסתברות שמתוך 5 מועמדים, לפחות אחד יקבל עבודה אם ידוע כי כדי להתקבל לעבודה בחברה יש לקבל שתי חוות דעת חיוביות?

ii. כיצד תשתנה התוצאה של חלק i אם כדי לקבל עבודה יש לקבל לפחות חוות דעת חיובית אחת ואף לא חוות דעת שלילית אחת?

61) בעיר מסוימת נערכו בחירות מקומיות.

ידוע כי אם בוחרים באקראי 4 אזרחים ההסתברות שתִמָּצא אישה אחת בניהם קטנה פי 16 מההסתברות להיתקל באישה באופן אקראי.

א. מה הוא אחוז הגברים בעיר?

בעיר שלושה מועמדים. $\frac{1}{11}$ מהמצביעים למועמד א' הם גברים,

60% מהמצביעים למועמד ב' הם גברים ו-25% מהמצביעים למועמד ג' הם גברים. אחוז המצביעים למועמד ג' הוא 20%.

ב. איזה מועמד קיבל את רוב הקולות?

ג. איזה חלק מבין כל הנשים מהווה קבוצת הנשים שהצביעו למועמד המנצח?

62) בחדר x גברים ו- $x+2$ נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת.

אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר x גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר x נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא $\frac{21}{33}$.

ב. ידוע כי יצאה אישה מהחדר.

מה ההסתברות שהמספר בקובייה היה קטן או שווה ל-4?

אנשי החדר הנמצאים בו במקור (לפני זריקת הקובייה) לובשים חולצות אדומות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות אדומות. כמו כן פרופורציית הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות אדומות היא 0.25.

ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה אדומה בחדר.

ד. בוחרים 5 אנשים מהחדר (עם החזרה) וידוע כי כולם לובשים חולצות אדומות. מה ההסתברות שרובם נשים?

63) באוניברסיטה מסוימת ידוע כי חלק מהסטודנטים נעזרים בספרי לימוד חיצוניים להעשרת הידע שלהם, וכי ההסתברות לבחור 2 סטודנטים הנעזרים בספרי לימוד חיצוניים קטנה ב-0.1 מההסתברות לבחור שני סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

א. מהו אחוז הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

האוניברסיטה מוכרת ספרי לימוד ב-3 מקצועות לכלל הסטודנטים: ספר א', ספר ב' וספר ג'.
כל סטודנט יכול לקנות רק ספר אחד.
ידוע כי כמות הסטודנטים שקנו את ספר א' וכמות הסטודנטים שקנו את ספר ג' זהות.
כמו כן, $\frac{6}{7}$ מאלו שקנו את ספר ג' נעזרים גם בספרים חיצוניים. $\frac{1}{3}$ מהסטודנטים שקנו את ספר ב' נעזרים בספרי לימוד חיצוניים וכמות הסטודנטים שקנו את ספר א' ונעזרים בספרי לימוד חיצוניים מהווים $\frac{1}{9}$ מכלל הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

ב. מהו אחוז הסטודנטים שקנו את ספר ב' ואינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

ג. איזה חלק מהווים הסטודנטים שקנו את ספר ג' מכלל הסטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?

ד. בוחרים 4 סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. מה ההסתברות שאחד מהם קנה את ספר ג'?

תשובות סופיות:

1) $\frac{3}{10}$ **2)** $\frac{3}{4}$ **3)** $\frac{3}{4}$

4) $P(A\cup B)=0.9$ **5)** $P(A\cap B)=0.35$ **6)** לא זרים ותלויים

7) $P(A\cup B)=0.85$ **8)** א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{7}{15}$ **9)** א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$ ג. $\frac{31}{50}$

10) $\frac{17}{42}$ **11)** $\frac{8}{15}$ **12)** $\frac{77}{144}$

13) א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$ **14)** א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{38}{100}$ ג. $\frac{9}{38}$ **15)** $\frac{2}{17}$

16) א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$ **17)** $\frac{1}{4}$ **18)** א. $\frac{11}{18}$ ב. $\frac{1}{11}$ ג. $\frac{26}{45}$

19) 8 כדורים **20)** א. $p=0.6$ ב. $\frac{21}{40}$

21) א. 4 ורודות ו-6 צהובות ב. $\frac{1}{6}$ ג. גבוהה $\left(\frac{27}{125}>\frac{1}{6}\right)$ ד. $P=0.0189$

22) א. 5 אדומים ו-3 לבנים ב. $\frac{5}{7}$

23) א. $P=\frac{5}{6}$ ב. $P=\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{5}$

24) א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן

25) א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים **26)** א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$

27) $\frac{1}{225}$ **28)** 93.5% **29)** $\frac{1}{3}$

30) א. בלתי תלויים ב. 12.5% **31)** 0.264

32) 0.023 **33)** 0.2001

34) א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023

35) 0.114 **36)** 0.214

37) א. 6 כדורים כחולים ב. 0.88989

38) א. 0.24 ב.i. 0.65389 ב.ii. $\frac{30}{49}\sim 0.61224$ ג. $\frac{2}{3}$

39) א. 9 נשים ב. $\frac{2}{11}$ ג. 0.0196 **40)** 0.216

41) 0.008 **42)** 4 לבנים, 6 שחורים

43) א. $P=0.8$ ב. $P=0.6$ ג. $\frac{3}{7}$

44) א. $x=4$ ב. 0.299 **45)** $n=5$ **46)** $\frac{5}{90}$

47) א.i. $\frac{17}{30}$ א.ii. $\frac{2}{17}$ ב. $\frac{7}{20}$ ג. $\frac{71}{150}$ ד. $\frac{32}{75}$

48) א. $P=0.1$ ב. $P=0.0486$ ג. $\frac{15}{19}$

49) א. $P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{4}$ ב. $P\left(\overline{A}\right)=0.8$ ג. $P_6(3)=0.1318$

50) א. 30% ב. $P=0.4$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $P=\frac{32}{81}$

51) א. $\frac{27}{50}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{31}{50}$ ד. $P=0.34414$

52) א.4 כדורים ב. $\frac{7}{12}$ ג. $\frac{15}{1024}=0.0146$ ד. 0.1323

53) א. $P=0.7$ ב. $P=\frac{189}{2500}$ ג. $\frac{1}{7}$

54) א. $P=0.8$ ב. $P=0.44$ ג. $P=0.31744$

55) א. $P=0.4$ ב. 95% ג. $\frac{4}{7}$

56) א. 15 כחולים ו-3 אדומים ב. $\frac{17}{101}$ ג. 0.03645

57) א. 6 גברים ו-24 נשים ב. הסתברות לגבר בפעם הראשונה: $\frac{25}{141}=P\left(\frac{1}{2}\right)$ ג. 0.0193

58) א. $\frac{2}{3}$ ב. 20% ג. 60%

59) א. $\frac{1}{330}$ ב. גבוהה יותר $\left(\frac{256}{14641}>\frac{1}{330}\right)$ ג. $\frac{1}{8}$

60) א. $\frac{55}{84}$ ב. $\frac{14}{55}$ ג.i. 0.7204 ג.ii. 0.9324

61) א. 25% ב. מועמד א' ג. $\frac{2}{3}$

62) א. 5 נשים ב. $\frac{16}{21}$ ג. 0.05 ד. $\frac{459}{512}$.

63) א. 45% ב. 20% ג. $\frac{1}{11}$ ד. $P=0.2732$

תרגול נוסף - שאלות שונות לפי נושאים:

הערה:

לשאלות בחוצץ זה אין פתרונות בוידאו והם ניתנו כבונוס לתרגול נוסף.

כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות בלתי תלויים:

1) בבניין העירייה יש שני מתקני הבטחה נגד פורצים.
ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל בזמן אמת היא 0.92 וההסתברות שהמתקן השני יפעל בזמן אמת היא 0.86.

א. מה ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל והשני לא?
ב. מה ההסתברות ששני המתקנים יפעלו?
ג. מה ההסתברות שאף מתקן לא יפעל?

2) צובעים את הפאות של קובייה בת 8 פאות כך: 3 פאות כחולות, 2 פאות אדומות, 2 פאות צהובות ופאה אחת ירוקה. זורקים את הקובייה פעמיים. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. שתי הפאות הן בצבע ירוק.
ב. שתי הפאות הן בצבע כחול.
ג. שתי הפאות באותו הצבע.

3) בכד יש 6 כדורים שחורים ו-4 לבנים. מוציאים כדור מהכד ולאחר הסתכלות בצבעו מחזירים אותו לכד ומוציאים כדור נוסף. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים.
ב. ששני הכדורים הם מאותו הצבע.
ג. שהכדור השני הוא לבן.

4) בכד יש 4 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים כחולים.
מוציאים שני כדורים מהכד עם החזרה, דהיינו, לאחר הוצאת הכדור הראשון, מחזירים אותו בחזרה לכד ורק אז מוציאים את הכדור השני. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. ששני הכדורים שהוצאו הם לבנים.
ב. ששני הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע.
ג. ששני הכדורים שהוצאו לא כחולים.
ד. שהכדור השני הוא כחול.

5) כדי לקבל תואר במכללת חולון יש לעבור לפחות שניים מתוך שלושה מבחנים.
ההסתברות שדורון יעבור את המבחן הראשון היא 0.9. ההסתברות שיעבור את המבחן השני היא 0.6 וההסתברות שיעבור את המבחן השלישי היא 0.8.

א. מה ההסתברות שדורון יעבור רק מבחן אחד?

ב. מה ההסתברות שדורון יעבור את שלושת המבחנים?

ג. מה ההסתברות שדורון יעבור לכל היותר שני מבחנים?

ד. מה ההסתברות שדורון יקבל תואר?

6) בתוך שקית ישנם 4 קלפים אדומים, 3 קלפים צהובים וקלף אחד ירוק.
מוציאים עם החזרה שלושה קלפים מהשקית.

א. מה ההסתברות שבכל שלושת הפעמים יצא הקלף הירוק?

ב. מה ההסתברות שיצאו שני קלפים צהובים?

ג. מה ההסתברות שכל הקלפים יהיו בעלי אותו הצבע?

כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות תלויים:

7) תלמיד הרוצה להוציא רישיון לרכב צריך לעבור בחינה עיונית ולאחר מכן בחינה מעשית.
ההסתברות שיעבור את הבחינה העיונית היא 0.7.
אם הוא עבר את הבחינה העיונית אז ההסתברות שיעבור את הבחינה המעשית היא 0.9 ואם הוא נכשל בבחינה העיונית אז ההסתברות שיעבור את הבחינה המעשית היא 0.5.

א. מה ההסתברות שיעבור התלמיד רק את הבחינה המעשית?

ב. מה ההסתברות שהתלמיד ייכשל בשתי הבחינות?

ג. מה ההסתברות שתלמיד יעבור את שתי הבחינות?

8) בכד 5 כדורים אדומים ו-3 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי כדור מהכד,
אם הוא אדום אז מחזירים אותו חזרה לכד ומוציאים כדור נוסף.
אם הוא ירוק אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כדור נוסף.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם ירוקים?

ב. מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא אדום?

ג. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו בעלי אותו הצבע?

9) בתוך ארגז ישנם 7 ספלים הממוספרים מ-1 עד 7.
מוציאים ספל אחד, משאירים אותו בחוץ ומוציאים ספל נוסף.
א. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים זוגיים?
ב. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים המתחלקים ב-3?
ג. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים שסכומם גדול מ-10?

10) במעטפה יש 30 בולים, מתוכם 6 בולים פגומים.
מוציאים שני בולים בזה אחר זה (ללא החזרה) מהמעטפה.
א. מה ההסתברות ששני הבולים שהוצאו הם פגומים?
ב. מה ההסתברות שהבול הראשון שהוצא אינו פגום אך הבול השני פגום?
ג. מה ההסתברות שהבול השני פגום?
ד. מה ההסתברות ששני הבולים או פגומים או אינם פגומים?

11) בכיתה ישנם 24 בנים ו-18 בנות.
מוציאים באקראי 3 ילדים מהכיתה בזה אחר זה.
חשב את ההסתברויות הבאות:
א. שכל שלושת הילדים יהיו בנים.
ב. שכל שלושת הילדים יהיו מאותו המין.
ג. שתהיה בקבוצה לפחות בת אחת.
ד. שיהיה בקבוצה לכל היותר בן אחד.

12) בתוך שקית יש 6 חטיפי "מקופלת" ו-4 חטיפי "במבה" מוציאים באקראי 3 חטיפים מהשקית בזה אחר זה. חשב את:
א. ההסתברות שיצאו 3 חטיפי במבה.
ב. ההסתברות שיצאו לכל היותר שני חטיפי במבה.
ג. ההסתברות שיצאו לפחות שני חטיפי מקופלת.

13) צלף יורה למטרה שלוש פעמים. ההסתברות שיקלע בפעם הראשונה היא 0.7.
ההסתברות שיקלע לאחר מכן תלויה בקליעה הקודמת. אם קלע הצלף בירייה הקודמת אז ההסתברות שלו לקלוע שנית היא 0.8 אך אם הוא החטיא אז ההסתברות שלו לקלוע כעת היא 0.6.
א. מה ההסתברות שיקלע בכל שלושת הפעמים?
ב. מה ההסתברות שיקלע בירייה השלישית בלבד?
ג. מה ההסתברות שיקלע הקלע בירייה אחת בלבד?
ד. מה ההסתברות שיקלע לכל היותר פעם אחת?

14) שחקן כדורגל בועט לשער שלוש פעמים. ההסתברות שיבקיע בפעם הראשונה היא 0.6.
ההסתברות שיבקיע לאחר מכן תלויה בבקיעה הקודמת.
אם השחקן הבקיע אז ההסתברות שיבקיע שנית היא 0.8 אך אם הוא החמיץ אז ההסתברות שיחמיץ שנית היא 0.3. חשב את:

א. ההסתברות שיבקיע השחקן בכל שלושת הפעמים.
ב. ההסתברות שיבקיע השחקן בפעם השנייה בלבד.
ג. ההסתברות שיבקיע השחקן פעם אחת בלבד.
ד. ההסתברות שיבקיע השחקן לפחות פעם אחת.

תרגילים הכוללים שימוש בדיאגרמת עץ:

15) בעיר מסוימת 40% מהתושבים הם גברים והשאר נשים.
ידוע כי 40% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-60% מהנשים לא מרכיבות משקפיים.
בוחרים באקראי תושב מהעיר. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. שנבחר גבר שלא מרכיב משקפיים.
ב. שנבחרה אישה שמרכיבה משקפיים.
ג. שהתושב שנבחר מרכיב משקפיים.

16) צלף יורה למטרה שלוש פעמים. אם בירייה הקודמת הוא פגע אז ההסתברות שיפגע שוב בירייה הבאה היא 0.8 אך אם הוא החטיא בירייה הקודמת אז ההסתברות שיפגע בירייה שאחריה היא 0.6. הצלף החטיא בירייה הראשונה.
חשב את ההסתברויות הבאות:

א. הצלף יחטיא גם בשתי היריות הבאות.
ב. הצלף יפגע בירייה השלישית.
ג. הצלף יפגע בירייה אחת בלבד.
ד. הצלף יחטיא בירייה השלישית.

17) אם ביום מסוים יורד גשם אז ההסתברות שביום שאחריו לא ירד גשם היא 0.4
אך אם ביום מסוים לא יורד גשם ההסתברות שירד גשם ביום שאחריו היא 0.9.
ביום שלישי ירד גשם. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. ביום חמישי לא ירד גשם.
ב. בימים שלישי, רביעי וחמישי ירד גשם.
ג. בימים רביעי וחמישי לא ירד גשם.

18) במפעל שמיכות שלושה פסי ייצור. פס הייצור הראשון מייצר 40% מהמוצרים, פס הייצור השני מייצר 30% מהמוצרים ופס הייצור השלישי מייצר את ה-30% הנותרים. 50% מהמוצרים של פס הייצור הראשון, 10% מהמוצרים של פס הייצור השני ו-80% ממוצרי הפס השלישי מיועדים ליצוא.

בוחרים באקראי מוצר. חשב את:

א. ההסתברות שהמוצר מיוצר על ידי פס הייצור השני ומיועד לייצוא.

ב. ההסתברות שהמוצר מיועד ליצוא.

ג. ההסתברות שהמוצר לא יוצר על ידי פס הייצור הראשון ואינו מיועד לייצוא.

19) במשחק "חיש-חש" אפשר לזכות ב-100 ₪, 50 ₪ או לא לזכות כלל.

ההסתברות לזכות במשחק בודד ב-100 ₪ היא 0.2, ההסתברות לזכות ב-50 ₪ היא 0.35 וההסתברות לא לזכות כלל היא 0.45. רועי משחק פעמיים.

חשב את:

א. ההסתברות שרועי יזכה ב-50 ₪ בסה"כ.

ב. ההסתברות שרועי יזכה לפחות ב-100 ₪.

ג. ההסתברות שרועי לא יזכה במשחק השני.

20) בכד א' יש 5 כדורים אדומים ו-2 כדורים לבנים.

בכד ב' יש 4 כדורים אדומים ו-6 כדורים לבנים.

בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו בזה אחר זה שני כדורים בלי החזרה.

א. מה ההסתברות שיצאו שני כדורים בעלי אותו הצבע?

ב. מה ההסתברות שהכדור השני הוא אדום?

ג. מבין כל האפשרויות בהן הכדור השני הוא אדום, מה ההסתברות שגם הכדור הראשון שיצא יהיה אדום?

21) זורקים קוביית משחק פעם אחת. אם היא מראה מספר המתחלק ב-3 בלי שארית רושמים אותו אך אם היא מראה מספר אחר זורקים אותה שנית.

חוזרים על התהליך פעם שנייה ושלישית כאשר בפעם השלישית רושמים את המספר שהתקבל.

חשב את ההסתברויות הבאות:

א. המספר שנרשם הוא זוגי.

ב. המספר שנרשם גדול מ-4.

ג. המספר שנרשם מתחלק ב-3 בלי שארית.

ד. המספר שנרשם לא מתחלק ב-3.

22) ישנם שני כדים. בכד א' יש 4 כדורים כחולים ו-2 כדורים צהובים ובכד ב' יש 3 כדורים כחולים ו-6 כדורים צהובים. זורקים קובייה.
אם מתקבל מספר המתחלק ב-3 בלי שארית אז מוציאים כדור מכד א' ואם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3 אז מוציאים כדור מכד ב'. לאחר מכן זורקים את הקובייה שנית וחוזרים על התהליך ומוציאים כדור שני. (ההוצאות הן בלי החזרה).

א. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים צהובים?

ג. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים מאותו הצבע?

23) בכד יש 4 כדורים ירוקים ו-2 כדורים לבנים. מוציאים כדור מהכד, אם הוא ירוק אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כדור נוסף ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף. חוזרים על התהליך פעם שנייה ולאחר מכן מוציאים כדור שלישי.
חשב את ההסתברויות הבאות:

א. מה ההסתברויות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו ירוקים?

ב. מה ההסתברות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו בעלי אותו הצבע?

ג. מה ההסתברות שיצאו לפחות שני כדורים ירוקים?

ד. מה ההסתברות שיצא בדיוק כדור לבן אחד?

24) בכד יש 8 כדורים שחורים ו-5 כדורים סגולים. מוציאים בלי החזרה 3 כדורים.
מה ההסתברות שיצא לפחות כדור אחד סגול?

תרגילים עם נעלמים – כפל וחיבור הסתברויות, דיאגרמת עץ:

מציאת ההסתברות P:

25) קלע יורה למטרה פעמיים. ההסתברות שיקלע ביריה בודדת היא p $(p > 0.5)$.
מצא את p אם ידוע כי ההסתברות שיקלע פעם אחת בדיוק היא 0.48.

26) 44% מעובדי מפעל הם מנהלים והשאר הם פועלים. ההסתברות שפועל מעשן היא 0.7 וההסתברות שמנהל מעשן היא p. בוחרים באקראי עובד מהמפעל.
מצא את p אם ידוע כי ההסתברות שהעובד שנבחר מעשן היא 0.48.

27) במפעל מסוים המונה 5000 עובדים, 1500 הם מנהלים והשאר הם פועלים פשוטים.
ההסתברות שמנהל מעשן היא p וההסתברות שפועל מעשן היא $2p+0.1$.
בוחרים באקראי עובד. מצא את ההסתברות p אם ידוע כי ההסתברות שהעובד שנבחר אינו מעשן היא 0.59.

28) ההסתברות שקלע יפגע במטרה ברירייה בודדת היא p. הקלע יורה שתי יריות.
מצא את p אם ידוע כי ההסתברות שיפגע בשתי הפעמים קטנה פי 16 מההסתברות שיחטיא בשתיהן.

29) שני צלפים יורים למטרה ירייה אחת. ידוע כי ההסתברות שהצלף הראשון יפגע גדולה פי 3 מההסתברות שהצלף השני יפגע. מצא את ההסתברות של כל צלף לפגוע ברירייה בודדת אם ידוע כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם יפגע היא 0.66.

30) במשחק "חיש חש" אפשר לזכות ב-200 ₪, 100 ₪ או לא לזכות כלל.
ידוע כי ההסתברות לזכות ב-200 ₪ היא 0.1 וההסתברות לזכות ב-100 ₪ היא p.
שחקן משחק שני משחקים. ההסתברות שלא יזכה כלל גדולה פי 36 מההסתברות שיזכה ב-400 ₪.

א. מצא את p.

ב. חשב את ההסתברות של השחקן לזכות לפחות ב-200 ₪.

31) אלי ורפי משחקים שני משחקי שחמט. כל משחק יכול להסתיים בניצחון לאחד השחקנים או בתיקו. ידוע כי ההסתברות של אלי לנצח במשחק בודד היא 0.36 וההסתברות שינצח בתחרות כולה (שני המשחקים יחדיו) היא 0.2304.

א. מצא את ההסתברות שרפי ינצח במשחק בודד.

ב. חשב את ההסתברות שהתחרות כולה תסתיים בתיקו.

32) שני שחקני שחמט משחקים שני משחקים. כל משחק יכול להסתיים בניצחון לאחד הצדדים או בתיקו. ההסתברות של כל שחקן לנצח במשחק בודד היא זהה. ההסתברות שהשחקן הראשון ינצח לפחות במשחק אחד היא 0.64.
מצא את ההסתברות של כל שחקן לנצח במשחק בודד.

33) צלף יורה שלוש יריות למטרה. אם הצלף פוגע ברייה מסוימת אז ההסתברות שיפגע גם ברייה הבאה היא q. אם הצלף מחטיא ברייה מסוימת אז ההסתברות שיפגע ברייה הבאה היא p.
הצלף מחטיא ברייה הראשונה.
ידוע כי ההסתברות שהצלף יפגע ברייה השנייה והשלישית היא 0.12 וההסתברות שהצלף יפגע ברייה השנייה ויחטיא בשלישית היא 0.18.

א. מצא את p ו-q.

ב. חשב את ההסתברות שהצלף יפגע ברייה השלישית.

ג. חשב את ההסתברות שהצלף יפגע ברייה אחת לפחות.

34) שני שחקני כדורסל זורקים זריקה אחת לסל. ההסתברות שהשחקן הראשון יקלע היא p וההסתברות שהשחקן השני יחטיא היא q $(q > 0.5)$. ידוע כי ההסתברות ששני השחקנים יקלעו היא 0.28 וההסתברות ששני השחקנים יחטיאו היא 0.18. מצא את p ו-q.

מציאת מספר *x*:

35) בכד יש *x* כדורים. 8 מהם ירוקים והשאר כחולים.
מוציאים באקראי עם החזרה שני כדורים מהכד.
מצא את *x* אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים ירוקים היא 0.64.

36) בכד יש 12 כדורים חלקם אדומים וחלקם שחורים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד.
מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא $\frac{4}{9}$.

37) במעטפה יש 8 מכתבים. רובם מיועדים להישלח בתוך הארץ והשאר לחו"ל.
מוציאים באופן אקראי מהמעטפה שני מכתבים בלי החזרה בזה אחר זה.
מצא את מספר המכתבים המיועדים להישלח לחו"ל אם ידוע כי ההסתברות שהמכתב הראשון שהוצא מיועד לארץ והשני לחו"ל היא $\frac{3}{14}$.

38) בכד יש 8 כדורים ירוקים והשאר כחולים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא כמה כדורים יש בכד אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$ ויש יותר כדורים ירוקים מכחולים.

39) בתוך קלמר יש 5 עפרונות ועוד x עטים. מוציאים כלי כתיבה מהקלמר,
אם הוא עפרון אז מחזירים אותו לקלמר ומוציאים כלי כתיבה נוסף. אם הוא עט אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כלי כתיבה נוסף.

מצא כמה עטים יש בקלמר אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני עטים היא $\frac{1}{6}$.

40) בקופסא א' ישנם 5 זוגות נעליים ו-3 זוגות מגפיים. בקופסא ב' יש 8 פריטים - x זוגות נעליים והשאר הם זוגות מגפיים. מוציאים באקראי מקופסא א' זוג כלשהו ומעבירים אותו לקופסא ב'.
לאחר מכן מוציאים מקופסא ב' זוג. כמה זוגות נעליים יש בקופסא ב' אם ידוע כי ההסתברות להוציא בפעם השנייה זוג מגפיים היא $\frac{17}{24}$.

41) בקלמר יש 6 עפרונות ו-3 עטים. בתיק יש 9 כלי כתיבה - x עפרונות והשאר עטים. מוציאים באקראי מהקלמר כלי כתיבה ומכניסים אותו לתיק.
לאחר מכן מוציאים מהתיק כלי כתיבה נוסף. מצא כמה עפרונות יש בתיק אם ידוע כי ההסתברות שכלי הכתיבה שהוצא מהקלמר שונה מכלי הכתיבה שהוצא מהתיק היא $\frac{13}{30}$.

42) בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים.
מוציאים באקראי כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף.

מצא כמה כדורים יש מכל צבע אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא לבן היא $\frac{3}{8}$.

43) בתוך כד ישנם 10 כדורים, חלקם צהובים וחלקם כחולים. מוציאים באקראי כדור, מתבוננים בו ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים יש מכל צבע בכד אם ידוע כי ההסתברות שיצא לפחות כדור אחד כחול היא $\frac{44}{45}$.

44) בתוך שק ישנם 9 כדורים, חלקם סגולים וחלקם ירוקים. מוציאים באקראי כדור, אם הוא סגול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא ירוק אז מחזירים אותו חזרה לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף.
מצא כמה כדורים מכל צבע יש בשק אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שיבחר יהיה סגול היא $\frac{11}{36}$.

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי:

תרגילים יסודיים:

45) צלף יורה למטרה. ידוע כי מתוך 2000 יריות הוא פוגע ב-1200 מהן.
הצלף יורה 4 יריות למטרה. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. שהצלף יפגע בדיוק פעמיים במטרה.
ב. שהצלף יפגע במטרה בכל ארבעת הפעמים.
ג. שהצלף יפגע לפחות פעמיים במטרה.
ד. שהצלף לא יפגע במטרה כלל.

46) ב-70% מהמכוניות יש רדיו. בוחרים באקראי 5 מכוניות.
חשב את ההסתברויות הבאות:

א. בדיוק ב-3 מתוך 5 המכוניות יהיה רדיו.
ב. בכל 5 המכוניות יהיה רדיו.
ג. ב-4 מתוך 5 המכוניות יהיה רדיו.
ד. לפחות ב-3 מכוניות יהיה רדיו.

47) במכללה המונה 20,000 סטודנטים ישנם 6000 בנים והשאר בנות.
בוחרים באקראי 5 סטודנטים. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. מתוך 5 הסטודנטים תהיה לכל היותר בת אחת.
ב. מתוך 5 הסטודנטים יהיה לכל היותר בן אחד.
ג. יבחרו 3 סטודנטים בנים מתוך החמישה.
ד. יבחרו לכל היותר 3 סטודנטים בנים.

48) בבה"ס הספר 40% מהתלמידים הם בנים והשאר בנות.
בוחרים באופן אקראי 4 תלמידים. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות.
ב. שתבחר בת אחת.
ג. שיבחרו יותר בנים מבנות.
ד. שמספר הבנים שנבחרו יהיה שונה ממספר הבנות שנבחרו.

49) רפי וגיל משחקים 4 משחקי שש-בש. מתוך 60 משחקים בודדים ששיחקו השניים, ניצח רפי ב-48 פעמים. חשב את:

א. ההסתברות שרפי ינצח במשחק אחד מתוך 4 משחקים.

ב. שגיל ינצח בתחרות.

ג. שרפי ינצח בתחרות.

ד. שהתחרות תסתיים בתיקו.

50) טנק יורה טיל על חומה. ההסתברות שהטיל יפגע בחומה היא 0.6.
כדי להפיל את החומה יש לפגוע בה לפחות עם 3 טילים. הטנק יורה 4 טילים.
מה ההסתברות שהטנק יפיל את החומה?

הוצאה עם החזרה:

51) בתוך סל קניות יש 6 תפוחים ו-4 תפוזים. מוציאים עם החזרה 4 פירות מהסל.
חשב את ההסתברויות הבאות:

א. להוציא שני תפוחים ושני תפוזים.

ב. להוציא 3 תפוחים ותפוז אחד.

ג. רוב הפירות שמוציאים יהיו תפוחים.

ד. לא להוציא תפוחים כלל.

52) בתוך קופסה יש 4 כדורים אדומים ו-2 כדורים ירוקים.
מוציאים עם החזרה 4 כדורים מהקופסה. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. שכל הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע.

ב. שהוצאו לפחות שני כדורים ירוקים ולכל היותר 3 כדורים ירוקים.

ג. שהוצא לפחות כדור אחד אדום ולכל היותר 3 כדורים אדומים.

53) בתוך קלמר יש 8 עפרונות ו-2 עטים. מוציאים עם החזרה 5 כלי כתיבה מהקלמר.

א. הראה כי ההסתברות להוציא 3 עפרונות ו-2 עטים גדולה פי 4 מההסתברות להוציא 2 עפרונות ו-3 עטים.

ב. חשב את ההסתברות להוציא 5 כלי כתיבה מאותו הסוג.

ג. חשב את ההסתברות להוציא כלי כתיבה שונים.

בעיות שונות – התפלגות בינומית אחת:

54) זורקים קובייה 4 פעמים. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. שיתקבל בכל פעם המספר 4.

ב. שיתקבל בדיוק פעמיים המספר 3.

ג. שיתקבל פעמיים מספר הקטן מ-4.

ד. שיתקבל בכל ארבעת הפעמים מספר המתחלק ב-3 בלי שארית.

55) במבחן יש 5 שאלות ולכל שאלה 3 תשובות שרק אחת מהן נכונה.

א. מה ההסתברות לענות נכון בניחוש על כל השאלות?

ב. מה ההסתברות לקבל ציון של 60 במבחן?

ג. נניח שתלמיד יודע את התשובות הנכונות ל-2 מתוך 5 השאלות.
מה ההסתברות שתלמיד זה יקבל 100 במבחן?

ד. מה ההסתברות שהתלמיד בסעיף הקודם יקבל ציון של 60 לפחות?

56) ההסתברות ששחקן כדורסל יקלע לסל בזריקה בודדת היא 0.7.
השחקן זורק כדורים עד שהוא קולע 4 פעמים.
מה ההסתברות שהשחקן יזרוק בדיוק 6 כדורים?

57) זורקים קובייה עד שהמספר 5 מתקבל בדיוק 4 פעמים.
מה ההסתברות לזרוק את הקובייה בדיוק 5 פעמים?

תרגילים הכוללים שתי התפלגויות בינומיות:

58) בעיר מסוימת 40% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-30% מהבנות מרכיבות משקפיים.

א. בוחרים באקראי 4 גברים.
מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם מרכיבים משקפיים?

ב. בוחרים באקראי 5 נשים.
מה ההסתברות שלכל היותר אישה אחת תרכיב משקפיים?

ג. מה ההסתברות שמבין 4 הגברים ו-5 הנשים שנבחרו יהיו בדיוק 3 גברים שמרכיבים משקפיים ואישה אחת לכל היותר שמרכיבה משקפיים?

59) 2 קלעים יורים למטרה. ההסתברות שהקלע הראשון יפגע היא 0.9 וההסתברות שהקלע השני יפגע היא 0.6. הקלע הראשון יורה 5 יריות והקלע השני יורה 3 יריות.
חשב את ההסתברויות הבאות:

א. שהקלע הראשון יפגע בדיוק ב-2 יריות והקלע השני יפגע רק ביריה אחת במטרה.
ב. שני הקלעים יפגעו כל אחד 3 פעמים במטרה.
ג. שני הקלעים לא יפגעו כלל במטרה.
ד. שני הקלעים יפגעו אותו מספר פגיעות כל אחד במטרה.

60) בכד א' יש 4 כדורים לבנים ו-6 כדורים שחורים. בכד ב' יש 8 כדורים לבנים ו-2 כדורים שחורים. מוציאים באקראי 4 כדורים עם החזרה מכד א' ו-5 כדורים עם החזרה מכד ב'.

א. הראה כי ההסתברות להוציא שני כדורים לבנים ושני כדורים שחורים מכד א' גדולה פי 54 מההסתברות להוציא כדור לבן אחד ו-4 כדורים שחורים מכד ב'.
ב. חשב את ההסתברות להוציא 4 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'.
ג. חשב את ההסתברות להוציא 3 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'.
ד. מה היא ההסתברות להוציא לפחות 3 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'?

61) במשפחה מרובת ילדים 40% מהבנים ו-30% מהבנות היו בחופשה בחו"ל.
בוחרים באקראי 5 בנים ו-5 בנות.

א. חשב את ההסתברות שבדיוק בן אחד ובת אחת היו בחו"ל.
ב. חשב את ההסתברות שבדיוק שני בנים היו בחו"ל ואף אחת מהבנות שנבחרו לא הייתה בחו"ל.
ג. חשב את ההסתברות שכל הבנים שנבחרו לא היו בחו"ל ו-2 בנות היו בחו"ל.
ד. חשב את ההסתברות שבדיוק 2 מתוך 10 הילדים שנבחרו היו בחו"ל.

62) זורקים שתי קוביות משחק – אחת ירוקה והשנייה כחולה, 4 פעמים כל אחת.
חשב את ההסתברויות הבאות:

א. שיתקבל מספר הגדול מ-4 פעם אחת בקובייה הירוקה ו-3 פעמים בקובייה הכחולה.
ב. שיתקבל המספר 5 בשתי הקוביות בכל הזריקות שלהן.
ג. שיתקבל מספר זוגי בקובייה הירוקה ב-3 מתוך 4 הזריקות שלה ומספר אי-זוגי בקובייה הכחולה ב-3 מתוך 4 הזריקות שלה.
ד. שיתקבל מספר הגדול מ-3 לפחות 3 פעמים בקובייה הירוקה ולכל היותר 3 פעמים בקובייה הכחולה.

תרגילים מורכבים – מציאת ההסתברות להצלחה בניסיון בודד:

63) כדי להתקבל למגמת הנדסה במכללת חולון סטודנט צריך לעבור לפחות אחד משני מבחנים.
ההסתברות להצליח במבחן הראשון היא 0.2 וההסתברות להצליח במבחן השני היא 0.5.
בוחרים 5 סטודנטים שרוצים להתקבל למגמה הנ"ל.

א. מה ההסתברות שסטודנט בודד יתקבל למגמה?

ב. מה ההסתברות ששניים מתוך 5 הסטודנטים יתקבלו למגמה?

ג. מה ההסתברות שלפחות 2 מתוך 5 הסטודנטים יתקבל למגמה?

64) בעיר מסוימת המונה 500,000 תושבים, ישנם 300,000 גברים והשאר נשים.
ידוע כי 40% מהגברים מעשנים ו-90% מהנשים מעשנות.

א. בוחרים תושב באופן אקראי. מה ההסתברות שהוא תושב מעשן?

ב. בוחרים 5 מהתושבים הנ"ל.

(1) מה ההסתברות שלכל היותר תושב אחד הוא מעשן?

(2) מה ההסתברות שכל התושבים שנבחרו הם מעשנים?

65) ענה על השאלות הבאות:

א. מצא את ההסתברות שבמשפחה שבה 5 ילדים יהיו בדיוק 3 בנות אם ידוע כי ההסתברויות להולדת בן ובת זהים.

ב. מבין כל המשפחות בעיר מסוימת בעלות 5 ילדים בוחרים באקראי 4 משפחות.

(1) מה ההסתברות שבדיוק ל-3 מהמשפחות הנ"ל יהיו 3 בנות?

(2) מה ההסתברות שלפחות ל-3 משפחות מהמשפחות הנ"ל יהיו 3 בנות?

66) בכיתה שבה 45 תלמידים ישנם 18 בנים. בוחרים באקראי 3 תלמידים מהכיתה.

א. מה ההסתברות שתבחרנה בדיוק שתי בנות?

ב. חוזרים על התהליך הנ"ל כל חצי שנה.
מה ההסתברות שבמשך שנתיים יבחרו רק פעם אחת שתי בנות ובן?

תרגילים המכילים התפלגות שבה יותר משתי אפשרויות בניסיון בודד:

67) פאות של קובייה הן אדומות. פאה אחת היא כחולה ועוד שתי פאות הן צהובות. זורקים את הקובייה 4 פעמים.

א. מה ההסתברות לקבל ב-3 מתוך 4 הזריקות צבע אדום?

ב. מה ההסתברות לקבל לכל היותר פעם אחת צבע כחול?

ג. מה ההסתברות לקבל בכל 4 הזריקות את הצבע הצהוב?

ד. מה ההסתברות לקבל צבע זהה בכל 4 הזריקות?

68) שחקן שחמט מנוסה מנצח ב-70% מהמשחקים, ב-20% מהם הוא נשאר בתיקו ובשאר הוא מפסיד. השחקן משחק בטורניר 4 משחקים ברצף.

א. מה ההסתברות שהשחקן ינצח ב-3 מתוך 4 המשחקים?

ב. מה ההסתברות שהשחקן יסיים בתיקו בכל 4 המשחקים?

ג. מה ההסתברות שהשחקן יפסיד לכל היותר במשחק אחד?

ד. מה ההסתברות שהשחקן ינצח לפחות ב-3 משחקים?

69) בכד יש 4 כדורים שחורים, 3 כדורים לבנים ו-3 כדורים כחולים. מוציאים עם החזרה 5 כדורים מהכד.

א. הראה כי ההסתברות שבדיוק 2 כדורים יהיו לבנים זהה להסתברות שבדיוק 2 כדורים יהיו כחולים.

ב. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים הם לבנים?

ג. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים הם שחורים?

ד. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים יהיו מאותו הצבע?

70) אדם מתקשר לחברו. ההסתברות שהחבר יענה לטלפון היא 0.6, ההסתברות שהקו יהיה תפוס היא 0.3 וההסתברות שלא יענה כלל היא 0.1.
מתקשרים 4 פעמים. חשב את ההסתברויות הבאות:

א. פעמיים בדיוק הקו יהיה תפוס.

ב. לכל היותר פעם אחת לא יענו.

ג. החבר יענה לטלפון בכל 4 הפעמים.

ד. החבר יענה לשיחה לכל היותר 3 פעמים.

71) צובעים את הפאות של סביבון בעל 8 פאות כך: 3 פאות באדום, 2 פאות בכחול, 2 פאות בירוק ופאה אחת בצהוב.

א. מה ההסתברות שמתוך 4 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא לא ייפול אף פעם על פאה אדומה?

ב. מה ההסתברות שמתוך 5 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול 4 פעמים על פאה כחולה?

ג. מה ההסתברות שמתוך 3 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול לפחות פעמיים על פאה צהובה?

ד. מה ההסתברות שמתוך 4 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול פעם אחת לכל היותר על פאה ירוקה?

תרגילים הכוללים נעלמים – התפלגות בינומית:

72) אם מוציאים מתוך פס ייצור לקיסמי שיניים 4 קיסמי שיניים ההסתברות שכולם פגומים היא 0.0001.

א. מה ההסתברות להוציא קיסם שיניים פגום מפס הייצור?

ב. מה ההסתברות שמתוך 4 הקיסמים כולם יהיו תקינים?

ג. מה ההסתברות שמתוך 4 הקיסמים שניים בדיוק יהיו פגומים?

73) מבדיקה של משרד הרישוי נמצא כי מתוך 2000 נבחנים שעשו טסט ראשון, 1400 עברו בהצלחה.

א. חשב את ההסתברות להצליח לעבור את בחינת הנהיגה.

ב. חשב את ההסתברות לבחור 5 תלמידים שמתוכם 3 עברו את בחינת הנהיגה.

ג. חשב את ההסתברות לבחור 4 תלמידים שמתוכם אף אחד לא עבר את בחינת הנהיגה.

74) אם בוחרים 4 תושבים מעיר מסוימת אז ההסתברות שלפחות אחד מהם ירכיב משקפיים היא 0.8704.

א. חשב את ההסתברות שתושב אחד ירכיב משקפיים.

ב. בוחרים 5 תושבים. מה ההסתברות שלפחות 4 מהם ירכיבו משקפיים?

75) ההסתברות להוציא עפרון מקלמר היא p והיא יותר גדולה מההסתברות להוציא כלי כתיבה אחר. ידוע שמבין שני כלי כתיבה שמוציאים מהקלמר
עם החזרה ההסתברות שאחד מהם בדיוק יהיה עפרון היא 0.32.

א. מצא את p.

ב. חשב את ההסתברות שמתוך 5 כלי כתיבה שמוציאים מהקלמר אף אחד לא יהיה עפרון.

76) קלע יורה למטרה 4 פעמים. ההסתברות שלו לפגוע ביירייה בודדת היא p.

א. מצא את p אם ידוע כי ההסתברות של הקלע לפגוע פעמיים שווה להסתברות שלו לפגוע 3 פעמים.

ב. מצא את ההסתברות של הקלע לפגוע פעם אחת במטרה.

77) בעיר מסוימת ההסתברות שלמשפחה יהיה מחשב בבית היא p.
בוחרים באקראי 5 משפחות מעיר זו.

א. מצא את p אם ידוע כי ההסתברות שלשתי משפחות בדיוק יהיה מחשב קטנה פי 4 מההסתברות של-3 משפחות יהיה מחשב.

ב. הראה כי ההסתברות של-4 משפחות בדיוק יהיה מחשב גדולה פי 2 מההסתברות של-3 משפחות בדיוק יהיה מחשב.

78) ההסתברות להצליח במבחן מסוים היא p.
ידוע שאם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות שלושתם יעברו את המבחן קטנה פי 16 מ- p.

א. מצא את p.

ב. חשב את ההסתברות ששלושתם יכשלו במבחן.

טבלה דו מימדית:

תרגילים הכוללים הסתברות מותנה:

79) בעיר מסוימת 70% מהתושבים תומכים בקיום פעילויות אחה"צ לילדים.
ל-60% מהתושבים יש ילדים בבית ול-40% אין ילדים כלל.
ל-36% מהתושבים יש ילדים והם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ.

א. מה הוא אחוז התושבים שאינם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ ויש להם ילדים?

ב. מה הוא אחוז התומכים בקיום הפעילויות מבין התושבים שיש להם ילדים?

ג. מה הוא אחוז התושבים שאינם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ לילדים מבין התושבים שאין להם ילדים?

80) במכללה המונה 16,000 סטודנטים, נערכו שני מבחני סוף סמסטר.
9600 סטודנטים עברו את המבחן הראשון ו-20% מהם עברו את השני.
1920 סטודנטים עברו את שני המבחנים.

א. מה הוא אחוז הסטודנטים שלא עברו אף מבחן?

ב. מה הוא אחוז הסטודנטים שעברו את המבחן הראשון מבין אלו שעברו את המבחן השני?

ג. מה הוא אחוז הסטודנטים שעברו את המבחן השני מבין אלו שעברו את המבחן הראשון?

ד. מה הוא אחוז הסטודנטים שלא עברו אף מבחן מבין אלו שלא עברו את המבחן הראשון?

81) בחברה מסוימת מספר הנשים גדול פי 3 ממספר הגברים.
ידוע כי ההסתברות לבחור עובד שהוא מרכיב משקפיים היא 0.4.
30% מבין העובדים שמרכיבים משקפיים הם גברים.

א. מה ההסתברות לבחור עובד שהוא אישה שאינה מרכיבה משקפיים?

ב. בוחרים עובד באקראי, ידוע שנבחר גבר.
מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

ג. בוחרים עובד באקראי, ידוע שהעובד שנבחר מרכיב משקפיים.
מה ההסתברות שזו אישה?

82) במדינה מסוימת 60% מהאזרחים בעד הממשלה ו-40% הם נגד.
48% מהאזרחים הם גמלאים ו-25% מהגמלאים בעד הממשלה.

א. מה הוא אחוז האזרחים שאינם גמלאים מבין אלה שנגד הממשלה?

ב. בוחרים אזרח באקראי. ידוע כי הוא בעד הממשלה.
מה ההסתברות שהוא לא גמלאי?

ג. בוחרים אזרח באקראי. ידוע כי הוא נגד פעולות הממשלה.
מה ההסתברות שהוא גמלאי?

83) מחצית מתלמידי התיכון נעזרים במורים פרטיים.
בסוף השנה נערך מבחן מסכם והתברר כי 60% מבין התלמידים שנעזרו במורים פרטיים עברו את המבחן בהצלחה. 20% מהתלמידים שלא נעזרו במורים פרטיים נכשלו במבחן.

א. איזה אחוז מתלמידי התיכון עברו את המבחן בהצלחה?

ב. איזה אחוז מבין התלמידים שלא נעזרים במורים פרטיים עברו את המבחן?

ג. בוחרים באופן אקראי תלמיד. ידוע כי הוא נכשל במבחן.
מה ההסתברות שהוא לא נעזר במורים פרטיים?

84) מספר הבנות במכללה גדול פי 1.5 ממספר הבנים. 20% מהבנים לומדים מקצוע הומאני, ו-36% מכלל הסטודנטים לומדים מקצוע ריאלי.

א. מה הוא אחוז הבנות שלומדות מקצוע ריאלי?

ב. בוחרים באופן אקראי סטודנט. ידוע כי נבחרה בת.
מה ההסתברות שהיא לומדת מקצוע הומאני?

ג. מה הוא אחוז הבנים מבין כל אלו שלומדים מקצוע הומאני?

תרגילים הניתנים לפתירה גם על ידי דיאגרמת עץ:

85) במפעל מסוים $\frac{3}{7}$ מהעובדים הם נשים ו $\frac{4}{7}$ הם גברים.
70% מהנשים הן מעשנות ו- $\frac{7}{8}$ מהגברים מעשנים.

א. מה הוא אחוז העובדים שלא מעשנים במפעל?

ב. בוחרים עובד וידוע כי נבחר עובד מעשן. מה ההסתברות שזו אישה?

ג. מבין העובדים שלא מעשנים, מה ההסתברות לבחור גבר?

86) בכפר מסוים $\frac{2}{3}$ מהתושבים הם גברים ו- $\frac{1}{3}$ הם נשים.

ידוע כי 60% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-25% מהנשים לא מרכיבות משקפיים.

א. מה ההסתברות להיתקל בגבר שלא מרכיב משקפיים בכפר?

ב. בוחרים באקראי תושב. ידוע כי נבחרה אישה.
מה ההסתברות שהיא מרכיבה משקפיים?

ג. בוחרים באקראי תושב.

(1) מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

(2) פי כמה גדול אחוז הגברים שמרכיבים משקפיים מאחוז הנשים שמרכיבות משקפיים?

87) בכד יש 8 כדורים כחולים ו-4 כדורים ירוקים.

מוציאים באקראי בלי החזרה שני כדורים מהכד.

א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות שהכדור השני שיצא הוא כחול?

ג. אם ידוע שהכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון גם יהיה כחול?

88) בכד יש 10 כדורים צהובים ו-4 כדורים שחורים.

מוציאים באקראי בלי החזרה שני כדורים מהכד.

א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים צהובים?

ב. מה ההסתברות שהכדור השני שיצא הוא צהוב?

ג. אם ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא צהוב,
מה ההסתברות שגם הראשון הוא צהוב?

89) בכד א' יש 5 כדורים לבנים ו-3 כדורים שחורים. בכד ב' יש 4 כדורים לבנים וכדור אחד שחור.
מוציאים כדור מכד א'. אם הוא שחור אז מוציאים כדורים נוסף מכד א' ואם הוא לבן אז מוציאים כדור מכד ב'. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא שחור. חשב את ההסתברות שהכדור הוצא מכד ב'.

90) בכד א' יש 3 כדורים ירוקים ו-2 כדורים אדומים. בכד ב' יש 4 כדורים ירוקים וכדור אחד אדום.
מוציאים כדור מכד א'. אם הוא ירוק אז מוציאים כדור נוסף מכד א' ואם הוא אדום אז מוציאים כדור מכד ב'.
ידוע שהכדור השני שהוצא הוא אדום. מה ההסתברות שהוא הוצא מכד א'?

91) בכד יש 5 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים ו-2 כדורים צהובים.
מוציאים בלי החזרה שני כדורים מהכד.

א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים?

ב. מה ההסתברות להוציא שני כדורים מאותו הצבע?

ג. ידוע כי שני הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע,
מה ההסתברות שהם אדומים?

92) בכד יש 6 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים סגולים.
מוציאים בלי החזרה שני כדורים מהכד. ידוע כי שני הכדורים שהוצאו הם בעלי אותו הצבע,
מה ההסתברות ששניהם סגולים?

93) קלע יורה שתי יריות למטרה. ההסתברות שיפגע ביירייה הראשונה היא 0.6.
אם הוא פגע ביירייה הראשונה אז ההסתברות שיפגע גם בשנייה היא 0.8.
אם הוא החטיא ביירייה הראשונה אז ההסתברות שיפגע בשנייה היא 0.5.

א. מה ההסתברות שהקלע יפגע ביירייה אחת בדיוק?

ב. מה ההסתברות שהקלע יפגע ביירייה השנייה?

ג. ידוע כי הקלע פגע ביירייה השנייה.
מה ההסתברות שהוא פגע גם ביירייה הראשונה?

ד. ידוע כי הקלע פגע ביירייה השנייה.
מה ההסתברות שהוא פגע במטרה פעם אחת בדיוק?

94) בארץ מסוימת כל יום הוא יום שמש או יום גשום.
ההסתברות ליום שמש לאחר יום שמש היא 0.4 וההסתברות ליום גשום לאחר יום גשום היא 0.7.
ביום ראשון היה גשום.

א. מה ההסתברות שהיום השלישי יהיה גם גשום?

ב. ידוע כי היום השלישי הוא גשום.
מה ההסתברות שהיום השני יהיה יום שמש?

תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס עם נעלם אחד:

95) בעיר מסוימת המונה 200,000 תושבים ידוע כי 120,000 מהם מרכיבים משקפיים.
מחצית מהתושבים שמעשנים הם מרכיבים משקפים ו-20% מהתושבים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים.

א. מהו אחוז התושבים שמעשנים?

ב. מהו אחוז התושבים שמעשנים ומרכיבים משקפיים?

ג. מהו אחוז התושבים שלא מעשנים ולא מרכיבים משקפיים?

96) 45% מהסטודנטים באוניברסיטה משתמשים במחשב נייד והשאר משתמשים במחברות.
$\frac{4}{9}$ מבין הסטודנטים שמשתמשים במחשב נייד אינם מרכיבים משקפיים והסטודנטים שמשתמשים במחברות ולא מרכיבים משקפיים מהווים 60% מכלל הסטודנטים שלא מרכיבים משקפיים.

א. מהו אחוז הסטודנטים שמשתמשים במחשב נייד ולא מרכיבים משקפיים?

ב. מהו אחוז הסטודנטים שמשתמשים במחברות מבין אלו שמרכיבים משקפיים?

ג. מה ההסתברות לבחור סטודנט שלא מרכיב משקפיים?

97) בחברה מסוימת עובדים פי 4 גברים מנשים.
ל-75% מהגברים אין תואר שני ו- $\frac{6}{7}$ מבין העובדים בלי תואר שני הם גברים.

א. מהו אחוז הגברים בחברה בלי תואר שני?

ב. בוחרים באקראי עובד. ידוע כי יש לו תואר שני. מה ההסתברות שזו אישה?

ג. הראה כי ההסתברות להיתקל באקראי באישה העובדת בחברה זהה להסתברות להיתקל בגבר עם תואר שני.

98) במפעל מסוים יש פי 3 עובדים גברים מנשים. ל- $\frac{2}{7}$ מהנשים יש רישיון נהיגה ומספר הגברים בעלי הרישיון במפעל מהווים $\frac{6}{7}$ מכלל העובדים עם רישיון.

א. הראה כי למחצית מהעובדים יש רישיון נהיגה.

ב. מה ההסתברות לבחור גבר מבין העובדים בלי רישיון נהיגה?

ג. מה ההסתברות לבחור אישה בלי רישיון מבין כל הנשים העובדות במפעל?

תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס עם שני נעלמים:

99) בעיר מסוימת 45% מהתושבים הם גברים ו-55% הם נשים.
$\frac{3}{8}$ מבין מרכיבי המשקפים בעיר הם גברים ו-50% מהתושבים שאינם מרכיבים משקפיים הם נשים.

א. מהו אחוז מרכיבי המשקפיים בעיר?

ב. בוחרים באקראי תושב. ידוע כי הוא גבר.
מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

ג. פי כמה גדולה ההסתברות לפגוש אישה שלא מרכיבה משקפיים מגבר שמרכיב משקפיים?

100) במשחק כדורגל 27% מהצופים הם ילדים והשאר מבוגרים.
40% מבין האוהדים של קבוצה א' הם ילדים ו-80% מבין האוהדים של קבוצה ב' הם מבוגרים. לאיזו קבוצה יש יותר אוהדים?

תרגילים הכוללים טבלה שבה יש שלוש עמודות או שורות:

101) בארץ מסוימת יש 3 מפלגות – מפלגה א', ב' ו-ג'. בבחירות מצביעים גברים ונשים.
ידוע כי 55% מהאזרחים הם גברים. 60% מהאזרחים הצביעו למפלגה א'.
15% הצביעו למפלגה ב' ו-25% הצביעו למפלגה ג'. 75% מבין המצביעים למפלגה א' הם גברים ו-80% מבין המצביעים למפלגה ג' הם נשים.

א. מצא איזה חלק מהגברים הצביע למפלגה א'.

ב. מצא איזה חלק מהנשים הצביע למפלגה ב'.

102) במפעל מסוים מייצרים שוקולד וניל על ידי 3 מכונות. מכונה א' מייצרת 80% מהמוצרים. מכונה ב' מייצרת 6% מהמוצרים ומכונה ג' מייצרת 14%.
ידוע כי מכונה א' מייצרת 80% ממוצרי הוניל ומכונה ב' מייצרת פי 5 יותר ממוצרי הוניל מאשר מוצרי השוקולד.
סך כל מוצרי הוניל שהמפעל מייצר הם 76% מכלל המוצרים.

א. מהו אחוז מוצרי השוקולד המיוצרים על ידי מכונה ב' ?

ב. איזה חלק מבין מוצרי השוקולד מיוצרים על ידי מכונה א' ?

ג. איזה חלק מבין המוצרים של מכונה ג' מהווים מוצרי הוניל ?

103) במשק יש תרנגולים, אפרוחים ואווזים מפוטמים. עקב בצורת קשה 47% מהעופות איבדו משקל רב. אחוז האווזים במשק הוא 20%. ידוע כי 75% מהאפרוחים ומהאווזים ירדו במשקל ו-1/6 מהתרנגולות ירדו גם כן במשקל.

א. מה הוא אחוז התרנגולים במשק?

ב. מה ההסתברות לבחור תרנגול שלא איבד משקל כלל?

ג. בוחרים עוף מהמשק. ידוע כי הוא לא איבד משקל כלל.
מה ההסתברות שהוא אפרוח?

תרגילי חישוב הכוללים שימוש בנוסחאות בהסתברות:

104) A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.
נתון: $P(B)=0.4$, $P(A)=0.9$.
חשב את:

א. $P(A\cap B)$

ב. $P(A\cup B)$

105) A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.
נתון: $P(B)=0.5$, $P(A\cap B)=0.3$. חשב את:

א. $P(A)$

ב. $P(A\cup B)$

ג. $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

ד. $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ (רמז: אם A ו-B בלתי תלויים אז גם $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ בלתי תלויים).

106) A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.
נתון: $P(A)=0.8$, $P(A\cup B)=0.92$. חשב את:

א. $P(B)$

ב. $P(A\cap B)$

ג. הראה כי מתקיים התנאי: $P(A/B)=P(A)$

107) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(\overline{B})=0.75$, $P(A)=0.4$, $P(A\cap B)=0.1$.

א. הוכח כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

ב. חשב את: $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

(הסתמך על הטענה כי אם A ו-B בלתי תלויים אז גם $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ בלתי תלויים).

108) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(B)=\frac{2}{5}$, $P(A/B)=\frac{3}{4}$, $P(B/A)=\frac{3}{8}$. חשב את:

א. $P(A)$

ב. $P(A\cap B)$

ג. $P(A\cup B)$

109) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $\frac{P(A/B)}{P(B/A)}=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{14}{15}$, $P(A\cap B)=\frac{4}{15}$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$.

110) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $\frac{P(A/B)}{P(B/A)}=\frac{2}{5}$, $P(A\cup B)=0.55$, $P(A\cap B)=0.15$.

חשב את: $P(A)$ ואת $P(B)$.

111) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A\cup B)=0.72$, $P(A\cap B)=0.18$, $P(A)>P(B)$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$ אם ידוע כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

112) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A\cup B)=0.86$, $P(A\cap B)=0.24$, $P(A)>P(B)$.

חשב את $P(A)$ ואת $P(B)$ אם ידוע כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

תרגילי הוכחה בעזרת נוסחאות ההסתברות:

113) A ו-B הם מאורעות הניסוי מקרי. נתון: $A \subseteq B$.

א. הוכח: $P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$

ב. A ו-B הם מאורעות תלויים.

114) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח:

א. $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$

ב. $P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B/A))$

115) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח: $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$.

116) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(B) = 0.9$, $P(A) = 0.7$. הוכח:

א. $0.9 \le P(A \cup B) \le 1$

ב. $0.6 \le P(A \cap B) \le 0.7$

117) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(B) = 0.7$, $P(A) = 0.4$. הוכח:

א. $0.1 \le P(A \cap B) \le 0.4$

ב. $0.7 \le P(A \cup B) \le 1$

118) בניסוי מקרי ההסתברות למאורע A היא: $P(A) = 0.4$,

ההסתברות למאורע B היא: $P(B) = 0.2$. הוכח:

א. $0.4 \le P(\bar{A} \cap \bar{B}) \le 0.6$

ב. $0.8 \le P(\bar{A} \cup \bar{B}) \le 1$

119) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון: $P(A)=0.8$, $P(B)=0.3$. הוכח:

א. $0.1\le P(A\cap B)\le 0.3$

ב. $\frac{1}{3}\le P(B/A)\le 1$

ג. $\frac{1}{8}\le P(A/B)\le \frac{3}{8}$

120) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי שמרחב המדגם שלו הוא Ω. הוכח:

א. $\overline{A}\cap\overline{B}=\Omega-A\cup B$

ב. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

ג. אם A ו-B הם מאורעות בלתי תלויים אז גם $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ יהיו בלתי תלויים.

121) א. הוכח בעזרת דיאגרמת וון את הנוסחה:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

ב. הוכח בעזרת דיאגרמת וון כי כאשר A ו-B הם קבוצות זרות אז מתקיים:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

122) A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח כי הנתונים הבאים הם בלתי אפשריים לקיום: $P(\overline{A}\cap B)=0.7$, $P(B)=0.8$, $P(\overline{A})=0.6$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.1288 ב. 0.7912 ג. 0.0112

2) א. $\frac{1}{64}$ ב. $\frac{9}{64}$ ג. $\frac{9}{32}$

3) א. $\frac{9}{25}$ ב. $\frac{13}{25}$ ג. $\frac{2}{5}$

4) א. $\frac{1}{9}$ ב. $\frac{29}{81}$ ג. $\frac{49}{81}$ ד. $\frac{2}{9}$

5) א. 0.116 ב. 0.432 ג. 0.568 ד. 0.876

6) א. $\frac{1}{512}$ ב. $\frac{135}{512}$ ג. $\frac{23}{128}$

7) א. 0.15 ב. 0.15 ג. 0.63

8) א. $\frac{3}{28}$ ב. $\frac{295}{448}$ ג. $\frac{223}{448}$

9) א. $\frac{1}{7}$ ב. $\frac{1}{21}$ ג. $\frac{4}{21}$

10) א. $\frac{1}{29}$ ב. $\frac{24}{145}$ ג. 0.2 ד. $\frac{97}{145}$

11) א. $\frac{253}{1435}$ ב. $\frac{71}{287}$ ג. $\frac{1182}{1435}$ ד. $\frac{561}{1435}$

12) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{29}{30}$ ג. $\frac{2}{3}$

13) א. 0.448 ב. 0.072 ג. 0.164 ד. 0.212

14) א. 0.348 ב. 0.056
ג. 0.176 ד. 0.964

15) א. 0.24 ב. 0.24 ג. 0.4

16) א. 0.16 ב. 0.72
ג. 0.36 ד. 0.28

17) א. 0.28 ב. 0.36 ג. 0.04

18) א. 0.03 ב. 0.47 ג. 0.33

19) א. 0.315 ב. 0.4825 ג. 0.45

20) א. $\frac{52}{105}$ ב. $\frac{39}{70}$ ג. $\frac{64}{117}$

21) א. $\frac{1}{2}$ ב. $\frac{23}{54}$ ג. $\frac{19}{27}$ ד. $\frac{8}{27}$

22) א. $\frac{73}{405}$ ב. $\frac{118}{405}$ ג. $\frac{191}{405}$

23) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{32}{135}$ ג. $\frac{52}{75}$ ד. $\frac{37}{75}$

24) $\frac{115}{143}$

25) $P=0.6$

26) $P=0.2$

27) $P=0.2$

28) $P=0.2$

29) $P_1=0.9$, $P_2=0.3$

30) א. $P=0.3$ ב. 0.28

31) א. $P=0.5$ ב. 0.3796

32) $P=0.4$

33) א. $P=0.3,\ Q=0.4$ ב. 0.33 ג. 0.51

34) $P=0.7,\ Q=0.6$

35) $x=10$

36) 4

37) 2

38) 12

39) $x=4$

40) $x=2$

41) $x=5$

42) 5 אדומים ו-3 לבנים

43) 8 כחולים ו-2 צהובים

44) 3 סגולים ו-6 ירוקים

45) א. 0.3456 ב. 0.1296
ג. 0.8208 ד. 0.0256

46) א. 0.3087 ב. 0.16807
ג. 0.36015 ד. 0.83692

47) א. 0.03078 ב. 0.52822
ג. 0.1323 ד. 0.96922

48) א. 0.3456 ב. 0.1536
ג. 0.1792 ד. 0.6544

49) א. 0.0256 ב. 0.0272
ג. 0.8192 ד. 0.1536

50) 0.4752

51) א. 0.3456 ב. 0.3456
ג. 0.4752 ד. 0.0256

52) א. $\frac{17}{81}$ ב. $\frac{32}{81}$ ג. $\frac{64}{81}$

53) ב. 0.328 ג. 0.672

54) א. $\frac{1}{1296}$ ב. $\frac{25}{216}$ ג. $\frac{3}{8}$ ד. $\frac{1}{81}$

55) א. $\frac{1}{243}$ ב. $\frac{40}{243}$ ג. $\frac{1}{27}$ ד. $\frac{19}{27}$

56) 0.21609

57) $\frac{5}{1944}$

58) א. 0.1536 ב. 0.52822
ג. 0.08113

59) א. 0.0023 ב. 0.0157 ג. $6.4\cdot10^{-7}$ ד. 0.0193

60) ב. 0.00082 ג. 0.0176
ד. 0.02752

61) א. 0.09335 ב. 0.05808 ג. 0.024 ד. 0.17543

62) א. $\frac{256}{6561}$ ב. $5.95\cdot10^{-7}$
ג. 0.0625 ד. 0.2929

63) א. $P=0.6$ ב. 0.2304 ג. 0.91296

64) א. $P=0.6$ ב. 0.08704 ג. 0.07776

65) א. $P=\frac{5}{16}$ ב. 0.08392 ג. 0.09346

66) א. $\frac{1053}{2365}$ ב. 0.304

67) א. $\frac{1}{4}$ ב. 0.86805 ג. $\frac{1}{81}$ ד. 0.0756

68) א. 0.4116 ב. 0.0016 ג. 0.9477 ד. 0.6517

69) א. 0.02835 ב. 0.0768 ג. 0.1335

70) א. 0.2646 ב. 0.9477 ג. 0.1296 ד. 0.8074

71) א. $\frac{625}{4096}$ ב. $\frac{15}{1024}$ ג. $\frac{11}{256}$ ד. $\frac{189}{256}$

72) א. $P=0.1$ ב. 0.6561 ג. 0.0486

73) א. $0P=0.7$ ב. 0.3087 ג. 0.0081

74) א. $P=0.4$ ב. 0.08704

75) א. $P=0.8$ ב. 0.00032

76) א. $P=0.6$ ב. 0.1536

77) א. $P=0.8$

78) א. $P=\frac{1}{4}$ ב. $\frac{27}{64}$

79) א. 24% ב. 60% ג. 15%

80) א. 32% ב. 60% ג. 20% ד. 80%

81) א. 0.47 ב. 0.48 ג. 0.7

82) א. 10% ב. 0.8 ג. 0.9

83) א. 70% ב. 80% ג. $\frac{1}{3}$

84) א. 4% ב. $\frac{14}{15}$ ג. 12.5%

85) א. 20% ב. $P=0.375$ ג. $P=\frac{5}{14}$

86) א. $P=\frac{4}{15}$ ב. $P=0.75$ ג. i. $P=0.65$ ii. 1.6

87) א. $P=\frac{14}{33}$ ב. $P=\frac{2}{3}$ ג. $P=\frac{7}{11}$

88) א. $P=\frac{45}{91}$ ב. $P=\frac{5}{7}$ ג. $P=\frac{9}{13}$

89) $P=\frac{7}{13}$

90) $P=\frac{15}{19}$

91) א. $P=\frac{2}{9}$ ב. $P=\frac{14}{45}$ ג. $P=\frac{5}{7}$

92) $P=\frac{1}{19}$

93) א. $P=0.32$ ב. $P=0.68$ ג. $P=\frac{12}{17}$ ד. $P=\frac{5}{17}$

94) א. $P=0.67$ ב. $P=\frac{18}{67}$

95) א. 24% ב. 12% ג. 28%

96) א. 20% ב. 50% ג. $P=0.5$

97) א. 60% ב. $P=\frac{1}{3}$

98) ב. $P=\frac{9}{14}$ ג. $P=\frac{5}{7}$

99) א. 40% ב. $P=\frac{1}{3}$ ג. פי 2

100) ב'

101) א. $P=\frac{9}{11}$ ב. $P=\frac{2}{9}$

102) א. 1% ב. 0.8 ג. $\frac{51}{70}$

103) א. 48% ב. $P=0.4$ ג. $\frac{8}{53}$

104) א. 0.36 ב. 0.94

105) א. 0.6 ב. 0.8 ג. 0.2 ד. 0.7

106) א. 0.6 ב. 0.48

107) ב. 0.9

108) א. 0.8 ב. 0.3 ג. 0.9

109) $P(A)=0.4$, $P(B)=0.8$

110) $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$

111) $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$

112) $P(A)=0.8$, $P(B)=0.3$

תרגול נוסף - שאלות משולבות:

1) בבית ספר מסוים 52% מהתלמידים הם בנים והשאר בנות. ידוע כי ההסתברות להיתקל בתלמיד (או תלמידה) המרכיב משקפיים גדולה ב-0.14 מההסתברות להיתקל בשתי בנות שאינן מרכיבות משקפיים ברחבי בית הספר (מניחים כי מספר התלמידים בבית הספר הוא גדול).

א. מצא את אחוז התלמידים שמרכיבים משקפיים אם ידוע כי החלק היחסי של הבנים שמרכיבים משקפיים בבית הספר מכלל מרכיבי המשקפיים הוא $\frac{11}{15}$.

ב. איזה חלק מבין כלל התלמידים שאינם מרכיבים משקפיים מהווים קבוצת הבנים?

ג. בוחרים בבית הספר 4 תלמידים. ידוע כי כולם לא מריבים משקפים.
מה ההסתברות שרובם בנים?

2) בכד כדורים בשלושה צבעים שונים: כחול, צהוב וירוק.
ידוע כי מספר הכדורים הירוקים גדול ב-2 ממספר הכדורים הצהובים וכי מספר הכחולים גדול ב-2 ממספר הכדורים הירוקים.
מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה.
ההסברות להוציא שני כדורים באותו הצבע היא: $\frac{49}{153}$.

א. מצא כמה כדורים מכל צבע יש בכד.

ב. על 5 מהכדורים רשום מספר ועל שאר הכדורים רשומה אות. ידוע כי ההסתברות לבחור כדור צהוב עם מספר זהה להסתברות לבחור כדור כחול עם מספר וכי הסתברויות אלו קטנות פי 3 (כל אחת) מההסתברות לבחור כדור ירוק שרשומה עליו אות. חשב את ההסתברות לבחור כדור כחול שרשומה עליו אות.

ג. מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. ידוע כי שני הכדורים ירוקים.
מה ההסתברות שלפחות על אחד מהם רשומה אות?

3) אבי קנה תפוחים ותפוזים. ידוע כי כמות התפוחים שקנה גדולה פי 3 מכמות התפוזים. במקביל קנתה אודט, בת זוגתו של אבי, תפוחים ותפוזים.
אודט קנתה פי 3 יותר תפוזים מתפוחים. כשהגיעו השניים הביתה, הם שמו את כל הפירות שקנו במגירה במקרר, מעורבבים יחדיו.

ידוע כי בסה"כ קנו שני בני הזוג 32 פירות וכי כמות התפוחים שקנתה אודט מהווה $\frac{5}{14}$ מבין כל התפוחים שבמגירה.

א. מצא כמה פירות קנה כל אחד מבני הזוג.

ב. ענה על השאלות הבאות:

(1) אודט רוצה להכין סלט פירות המורכב משני תפוחים ותפוז.
מה ההסתברות של אודט להוציא את כל הפירות שצריכה בזה אחר זה ללא החזרה?

(2) ידוע כי אודט הוציאה את כל הפירות שצריכה, מה ההסתברות שהפרי הראשון שהוציאה הוא תפוח?

ג. ענה על השאלות הבאות:

(1) שרון, בתה של אודט, ניגשת למגירה ורוצה לקחת תפוז.
היא מוציאה 4 פירות עם החזרה מהמגירה, מה ההסתברות ששרון תוציא בדיוק תפוז אחד? הנח כי כמות הפירות שבמגירה היא לאחר הכנת הסלט.

(2) ידוע כי מתוך 4 הבחירות, הוציאה שרון בדיוק תפוז אחד,
מה ההסתברות שהוא הפרי האחרון שהוציאה?

4) על קובייה בת 5 פאות רושמים המספרים 1 , 2 ו-3 כך שהמספר 2 רשום על שלוש פאות ואילו המספרים 1 ו-3 רשומים כל אחד על פאה אחת בלבד.
זורקים את הקובייה 5 פעמים.

א. ענה על השאלות הבאות:

(1) מה ההסתברות לקבל לפחות 4 פעמים את המספר 2?

(2) ידוע כי התקבל המספר 2 לפחות 4 פעמים, מה ההסתברות לקבל בדיוק 4 פעמים את המספר 2?

(3) מה ההסתברות לא לקבל את אותו המספר בכל הזריקות?

ב. לוקחים 5 קוביות זהות וזורקים כל אחת פעם אחת בדיוק. מסתכלים על המספרים שהתקבלו בכל קובייה ומחשבים את ההסתברויות שבסעיף הקודם.
האם התוצאות תשתנה? אם כן חשב אותן והסבר, אם לא – תן הסבר מתאים.

ג. מה ההסתברות לקבל בזריקות הראשונה והחמישית בלבד את המספר 2?

5) מפעל מייצר שבבי תקשורת אלחוטית. 3% מהשבבים במפעל אינם תקינים.
90% מהשבבים התקינים ו-2% מהשבבים הפגומים מזוהים במהלך בדיקה שגרתית (טסט) במעבדה כתקינים.

א. מה ההסתברות ששבב יזוהה כתקין?

במסגרת הבדיקות במעבדה מבצעים 4 טסטים לכל שבב באופן בלתי תלוי אחד בשני.
אם שבב זוהה בכל הפעמים כתקין, אז הוא נמכר במחיר מלא.
אם הוא זוהה ב-3 טסטים כתקין אז הוא נמכר בחצי מחיר.
בכל מקרה אחר השבב נשלח חזרה למחלקת הייצור במפעל ואינו נמכר.

ב. מה ההסתברות ששבב יימכר במחיר מלא?

ג. מה ההסתברות ששבב יחזור חזרה למפעל?

6) בכד יש פי 4 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים כדור מהכד.
אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוץ, אחרת מחזירים אותו לכד.
לאחר מכן מוציאים כדור נוסף.
ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא: $\frac{58}{175}$.

א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד?

ב. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר הוא אדום?

ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים באופן בלתי תלוי.
ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול,
מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

7) בחדר x גברים ו-$x+5$ נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת.
אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר x גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר x נשים.
לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא $\frac{5}{7}$.

ב. מה ההסתברות שתצא אישה מהחדר לאחר שנוספו לחדר נשים אם ידוע כי וודאי יצאה אישה מהחדר?

אנשי החדר לובשים חולצות שחורות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות שחורות.
כמו כן ההסתברות של הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות שחורות היא 0.25.

ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה שחורה בחדר.

ד. בוחרים 5 אנשים מהחדר (ללא הוצאה) וידוע כי כולם לובשים חולצות שחורות.
מה ההסתברות שרובם נשים?

8) ללינוי שתי חבילות דפים, האחת בצבע כחול והשנייה בצבע כתום.
בסה"כ יש ללינוי פי 3 דפים כחולים מכתומים. ביום חורפי אחד הלכה לחברתה, ספיר, כששתי החבילות בידה ובדרך נרטבו חלק מהדפים עקב הגשמים העזים.
כשהגיעה לביתה של ספיר, מיינו השתיים את החבילות וגילו את הדברים הבאים:

1. $1/5$ מבין הדפים הכתומים התרטבו.
2. כמות הדפים הכתומים היבשים שווה לכמות הדפים הרטובים הכוללת.

א. מה ההסתברות לבחור דף כחול רטוב מבין כל הדפים?

ב. איזה אחוז מהדפים הכחולים הם יבשים?

ג. ספיר הוציאה באופן אקראי 6 דפים מהתיק של לינוי ללא הסתכלות.
הנח כי כמות הדפים גדולה מאוד.
(1) מה הסיכוי שספיר תוציא לפחות דף אחד יבש?
(2) מה הסיכוי שספיר תוציא לפחות דף אחד כחול יבש?

9) כדי לקבל עבודה בחברת מחשבים יש לעבור שני ראיונות באופן הבא:
ריאיון ראשון עם המנהל הראשי של החברה. אם המועמד עבר את הריאיון הראשון בהצלחה אז עליו לעבור ראיון נוסף עם מנכ"ל החברה.
ידוע כי ההסתברות לעבור את הריאיון הראשון היא p וכי ההסתברות לעבור את הריאיון השני קטנה ב-0.1 מההסתברות לעבור את הריאיון הראשון.
הסיכוי להתקבל לחברה הוא 0.12 (לעבור בהצלחה את שני הראיונות).

א. מצא את p.

ב. 6 אנשים מגישים מועמדות ביום מסוים.
מה הסיכוי שרובם יתקבלו לעבודה בחברה ?

ג. ידוע כי רוב המועמדים התקבלו.
מה הסיכוי כי בדיוק 4 מועמדים התקבלו?

10) מפעל מייצר נורות בשלושה פסי ייצור: A , B ו-C.
ידוע כי 25% מהנורות מיוצרות בפס ייצור A. כמו כן נתון כי:
3% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור A הן פגומות.
2% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור B הן פגומות.
5% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור C הן פגומות.
סה"כ המפעל מייצא בממוצע 965 נורות תקינות מתוך כל 1000 נורות שהוא מייצר.

א. מצא את אחוז הנורות המיוצרות בפסי הייצור B ו-C.

ב. בוחרים באקראי נורה, ידוע כי היא תקינה, מה ההסתברות שהיא מפס ייצור C?

ג. כמה נורות מייצר המפעל ביום עבודה אם ידוע כי כמות הנורות התקינות שהתקבלו בפס ייצור B הוא 44100 יחידות?

11) בכד יש 4 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים ו-2 כדורים לבנים. מוצאים באקראי כדור מהכד. אם הוא אדום אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים מכד כדור נוסף, אך אם הוא לא אדום מחזירים אותו לכד ומוציאים כדור נוסף.

א. חשב את ההסתברות להוציא שני כדורים בעלי אותו הצבע.

ב. מוציאים שני כדורים מהכד, ידוע כי שניהם מאותו הצבע, מה ההסתברות ששניהם כחולים?

ג. כעת משנים את כללי במשחק בצורה הבאה: מוציאים כדור מהכד, מתבוננים בו ומחזירים אותו בחזרה לכד. חוזרים על התהליך 6 פעמים. מה ההסתברות שבמחצית המקרים יצא כדור לבן?

12) מפעל מייצר כפיות ומזלגות פלסטיק (חד-פעמיים).

ההסתברות לבחור מזלג במפעל היא p . בוחרים באקראי 4 כלים.

א. מצא את p אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו 3 מזלגות קטנה פי 4 מההסתברות שיבחר מזלג אחד מתוך הארבעה.

המפעל מייצר כפיות ומזלגות בשני צבעים – שחור או לבן.

ידוע כי רבע מהמזלגות הם בצבע לבן ו- $\frac{2}{3}$ מהכפיות הם בצבע שחור.

ב. מה היא ההסתברות לבחור כלי שחור?

ג. ידוע כי נבחר כלי שחור, מה ההסתברות שהוא מזלג?

13) תלמיד הלומד נהיגה ניגש לטסט ראשון.

ידוע כי ההסתברות שיעבור את הטסט היא p , $(p > 0.5)$.

אם התלמיד נכשל בטסט הראשון הוא ניגש שנית וכעת ההסתברות שלו לעבור גדולה ב-0.1.

אם הוא נכשל פעם נוספת אז הוא ניגש בפעם האחרונה כאשר גם כעת ההסתברות שלו לעבור גדולה ב-0.1 מהפעם הקודמת.

ידוע כי הסיכוי של התלמיד לעבור את הטסט השני הוא 0.28.

א. מצא את p .

ב. מה הסיכוי של התלמיד לעבור טסט כלשהו?

ג. ידוע כי התלמיד עבור טסט, מה הסיכוי שהוא עבר את הטסט השלישי?

14) לשני קוביית משחק הגונה בעלת 6 פאות הממוספרות מ-1 עד 6 ולשרון סביבון חנוכה הגון בעל 4 פאות הממוספרות מ-1 עד 4. הבנות משחקות את המשחק הבא: שני מטילה את הקובייה ושרון מסובבת את הסביבון.

- אם הקובייה מראה מספר הגדול מ-3 והסביבון מראה מספר הגדול מ-2 אז כל אחד מהבנות מקבלת נקודה.
- אם הקובייה מראה מספר הקטן או שווה ל-3 והסביבון מראה מספר הגדול מ-2 אז שרון מקבלת נקודה.
- אם הקובייה מראה מספר הגדול מ-3 אך הסביבון מראה מספר הקטן או שווה ל-2 אז שני מקבלת נקודה.
- אם הקובייה מראה מספר הקטן או שווה ל-3 והסביבון מראה מספר הקטן או שווה ל-2 אז אף אחת מהבנות לא מקבלת נקודה.

הבנות מטילות את הקובייה והסביבון פעמיים.

א. מה ההסתברות שלשני יהיו יותר נקודות?

ב. ידוע כי שני צברה יותר נקודות, מה ההסתברות שבהטלה הראשונה לא קיבלה שני נקודה?

ג. האם התוצאות של הסעיפים הקודמים ישתנו אם שני תשחק עם הסביבון במקום הקובייה ושרון תשחק עם הקובייה במקום הסביבון? נמק.

15) חנות מוכרת חרוזים בשלושה צבעים בלבד: כסף, זהב ולבן. נטלי קנתה חרוזים מכל צבע. ידוע כי כמות החרוזים הכסופים קטנה פי 3 מכמות החרוזים הזהובים וכי כמות החרוזים הזהובים קטנה פי 3 מכמות החרוזים הלבנים. המוכרת ריכזה עבור נטלי את כל החרוזים בשקית אחת.

א. מצא כמה חרוזים קנתה נטלי מכל סוג אם ידוע כי ההסתברות להוציא מהשקית שני חרוזים בצבעים שונים בזה אחר זה ללא החזרה היא: $\frac{360}{779}$.

ב. החרוזים מיוצרים ע"י שתי חברות: ניצוץ וקריסטל.

ידוע כי כמות החרוזים הכסופים תוצרת ניצוץ וכמות החרוזים הזהובים תוצרת ניצוץ זהות. כמו כן כמות החרוזים הזהובים תוצרת קריסטל גדולה פי 5 מכמות החרוזים הזהובים תוצרת ניצוץ.

מצא את ההסתברות לבחור חרוז בצבע כסף מתוצרת קריסטל.

ג. בוחרים 4 חרוזים, ידוע כי כולם תוצרת ניצוץ.

ההסתברות שבדיוק 2 מהם יהיו כסופים היא: $\frac{27}{128}$.

מצא את ההסתברות לבחור חרוז תוצרת קריסטל אם ידוע כי חרוזי הכסף תוצרת ניצוץ אינם מהווים רוב מכמות כל חרוזי ניצוץ שברשותה של נטלי.

16) בבחירות מקומיות בעיר מסוימת ישנם שלושה מתמודדים:
מתמודד א', מתמודד ב' ומתמודד ג'.
ידוע כי $\frac{43}{90}$ מתושבי העיר הם מבוגרים ו- $\frac{47}{90}$ הם צעירים.
60% מבין המצביעים למועמד א' הם מבוגרים, 60% מבין המצביעים למועמד ב' הם צעירים
וידוע כי ההסתברות למצוא בעיר תושב צעיר שהצביע למועמד ג' היא $\frac{1}{9}$.

$\frac{24}{43}$ מהמבוגרים הצביעו למועמד א'

א. מי מהמתמודדים קיבל את רוב הקולות?

ב. בוחרים באקראי תושב מהעיר.
חשב את ההסתברויות שנבחר צעיר המצביע למתמודד ב'.

ג. בוחרים באקראי תושב. ידוע כי הוא הצביע למתמודד ג'.
מה ההסתברות כי הוא צעיר?

ד. בוחרים באקראי 4 תושבים וידוע כי כולם הצביעו למתמודד ג'.
מה ההסתברות כי לפחות אחד מהם מבוגר?

17) בקלמר יש 6 עפרונות ו-3 עטים. בתיק יש 9 כלי כתיבה - x עפרונות והשאר עטים. מוציאים באקראי כלי כתיבה מהקלמר ומכניסים אותו לתיק.
לאחר מכן מוציאים מהתיק כלי כתיבה נוסף.

א. מצא כמה עפרונות יש בתיק אם ידוע כי ההסתברות שכלי הכתיבה שהוצא מהקלמר שונה מכלי הכתיבה שהוצא מהתיק היא $\frac{13}{30}$.

ב. מחזירים את המצב לקדמותו ומבצעים את הפעולה הבאה:
מוציאים באקראי כלי כתיבה מהקלמר, מתבוננים בו ומחזירים אותו חזרה. אם יצא עט אז לוקחים y עטים מהתיק ושמים בקלמר, ואם יצא עפרון אז לוקחים 3 עפרונות מהקלמר ושמים אותם בתיק. לאחר מכן מוציאים שני כלי כתיבה מהתיק בזה אחר זה.
מצא את y אם ידוע כי ההסתברות לקבל שני עפרונות מהתיק היא: $\frac{50}{99}$.

18) נתון שק עם 16 כדורים בתוכו המחולקים לשני צבעים: אדום וכחול.
מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. ידוע כי ההסתברות לקבל שני כדורים בצבעים שונים גדולה ב- $\frac{1}{32}$ מההסתברות לקבל שני כדורים בצבעים שונים אילו ההוצאה הייתה עם החזרה.

א. מצא כמה כדורים מכל צבע יש בשק אם ידוע כי יש יותר כדורים כחולים.

ב. שני ושרון משחקות את המשחק הבא:
תחילה הן מחזירות את כל הכדורים לשק. שני מוציאה 3 כדורים בזה אחר זה ללא החזרה מהשק, מתבוננת בהם ומחזירה חזרה. שרון מוציאה 3 כדורים עם החזרה בזה אחר זה ומתבוננת בהם. כל אחת מהבנות טוענת כי שיטתה היא זו שתיתן הסתברות גבוהה יותר להוציא 3 כדורים מאותו הצבע. מי מהבנות צודקת?

ג. שי, אחיהן הגדול של הבנות, הכניס מספר כדורים אדומים לשק.
מוציאים 4 כדורים עם החזרה מהשק.
ידוע כי ההסתברות לקבל 3 כדורים כחולים וכדור אדום אחד, זהה להסתברות לקבל 3 כדורים אדומים וכדור אחד כחול.
כמה כדורים אדומים הכניס שי לשק?

תשובות סופיות:

1) א. 30% ב. $\frac{3}{7}$ ג. $\frac{513}{2401}=0.21366$

2) א. 4 כדורים צהובים, 6 כדורים ירוקים ו-8 כדורים כחולים ב. $\frac{7}{18}$ ג. $\frac{4}{5}$

3) א. אבי קנה 12 פירות ואודט קנתה 20 פירות ב.i. $\frac{819}{2480}$ ב.ii. $\frac{2}{3}$

ג.i. 0.16613 ג.ii. $\frac{1}{4}$

4) א.i. 0.33696 א.ii. $\frac{10}{13}$ א.iii. $\frac{576}{625}$ ב. לא ג. 0.02304

5) א. 0.8736 ב. 0.58244 ג. 0.08047

6) א. 3 כדורים אדומים ו-12 כחולים ב. $\frac{14}{69}$ ג. 0.05982

7) א. 8 נשים ב. $\frac{11}{15}$ ג. 0.05 ד. $\frac{675}{1024}$

8) א. 0.15 ב. 80% ג.i. 0.999936 ג.ii. 0.995904

9) א. $P=0.4$ ב. 0.00254 ג. $\frac{55}{58}$

10) א. פס ייצור B – 33.33% , פס ייצור C – 41.66% ב. $\frac{475}{1158}=0.41018$

ג. 135,000 יחידות ביום.

11) א. $\frac{53}{162}$ ב. $\frac{18}{53}$ ג. 0.103266

12) א. $P=\frac{1}{3}$ ב. $\frac{25}{36}$ ג. 0.36

13) א. $P=0.6$ ב. 0.976 ג. $\frac{6}{61}$

14) א. $\frac{5}{16}$ ב. 0.2 ג. לא. מכיוון שיש סימטריה בהסתברויות ההטלות.

15) א. 60 בצבע כסף, 180 בצבע זהב ו-540 בצבע לבן ב. $\frac{1}{26}$ ג. $\frac{11}{13}$

16) א. מתמודד א' ב. 0.2333 ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{65}{81}$

17) א. 5 עפרונות ב. $y=3$

18) א. 10 כדורים כחולים ו-6 אדומים ב. שרון צודקת ג. 4 כדורים

שאלון 571

מבוא לגאומטריה של המישור

תוכן העניינים:

מבוא לגאומטריה של המישור..... 551

ישרים וזוויות:..... 552

שאלות – חיבור וחיסור קטעים:..... 552

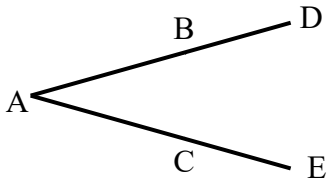
שאלות – חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:..... 553

שאלות – זוויות קודקודיות וזוויות צמודות:..... 554

שאלות - זוויות בין ישרים מקבילים:..... 555

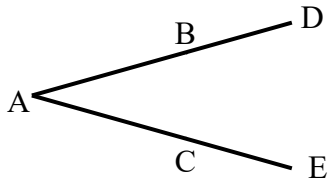
תשובות סופיות:..... 557

שאלות – חיבור וחיסור קטעים:



1) באיור שלפניך נתון: $AB = AC \ , \ BD = CE$.

הוכח: $AD = AE$.



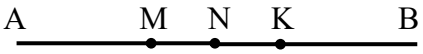
2) באיור שלפניך נתון: $AD = AE \ , \ AB = AC$.

הוכח: $BD = CE$.

3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.

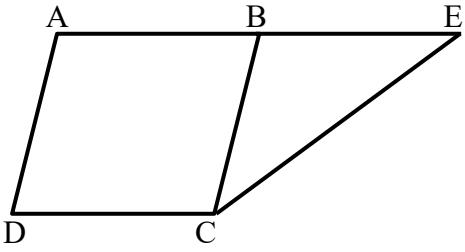
נתון כי: $AM = KB \ , \ MN = NK$.

הוכח: $AN = BN$.

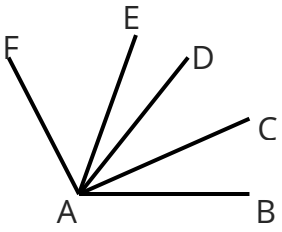


4) בסרטוט שלפניך נתון כי: $BC = AB \ , \ BE + BC = 2AB$.

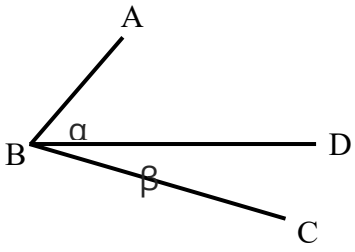
הוכח: $AB = BE$.



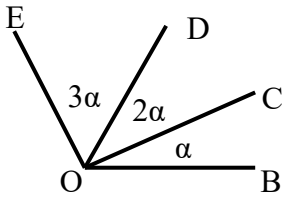
שאלות – חישובי זוויות וחיבור וחיסור זוויות:



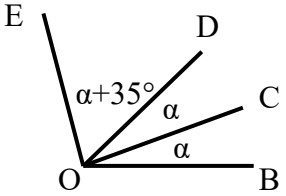
5) נתון: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle FAE = 2 \cdot \sphericalangle EAD$.
וכן: $\sphericalangle FAD = 60°$, $\sphericalangle EAB = 80°$.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle EAC$, $\sphericalangle FAB$.



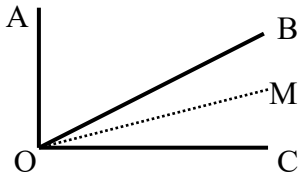
6) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle ABC = 69°$.
נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
מצא את α ואת β.



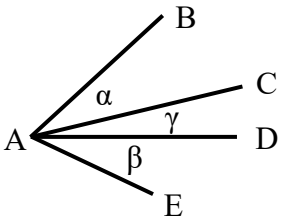
7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
הנתונים הם: $\sphericalangle EOB = 138°$.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle COB$, $\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOD$.



8) באיור שלפניך נתון: $\sphericalangle EOB = 110°$.
שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
חשב את הזוויות הבאות:
$\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle EOC$.

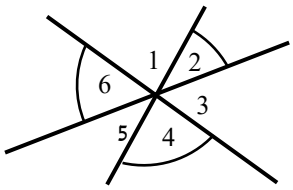


9) נתון האיור הבא ובו: $\sphericalangle AOC = 90°$.
OM חוצה את זווית BOC.
מתקיים: $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle MOC$.
חשב את: $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AOM$.



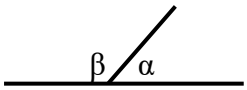
10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
הוכח כי: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$.

שאלות – זוויות קודקודיות וזוויות צמודות:



11) חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):

$\sphericalangle 2+\sphericalangle 4+\sphericalangle 6$

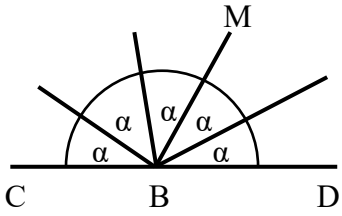


12) באיור שלפניך הזוויות α ו- β הן זוויות צמודות.

ידוע כי: $\alpha=63°$.

מצא את זווית β.

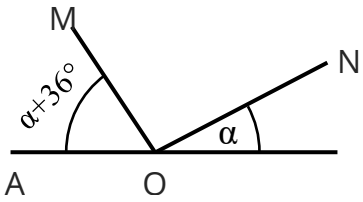
13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.



כל הזוויות שוות ל- α.

1. חשב את α.
2. חשב את זווית CBM.

14) בסרטוט שלפניך ידוע:

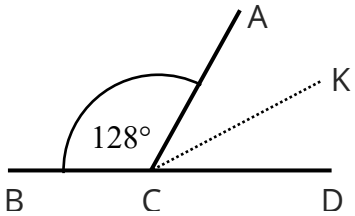


הזווית AOB היא שטוחה.

נתון: $\alpha=27°$.

הוכח כי: $MO\perp NO$.

15) הזוויות $\sphericalangle ACD$ ו- $\sphericalangle ACB$ הן צמודות.



ידוע כי CK חוצה זווית ACD.

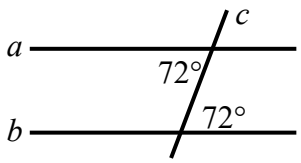
כמו כן: $\sphericalangle ACB=128°$.

חשב את זווית BCK.

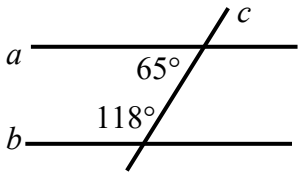
שאלות - זוויות בין ישרים מקבילים:

16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו- b מקבילים או שלא. נמק.

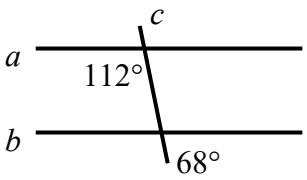
א.



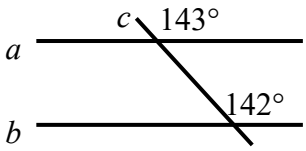
ב.



ג.

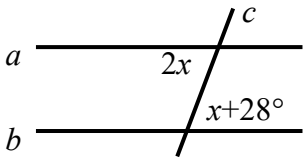


ד.

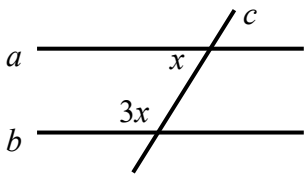


17) הישרים a ו- b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

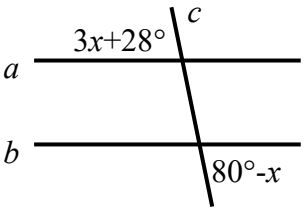
א.



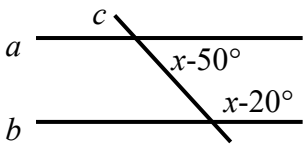
ב.



ג.

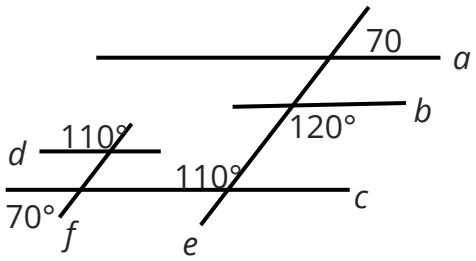


ד.

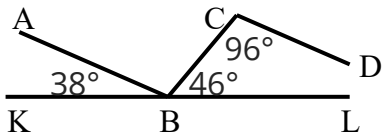


18) מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא.

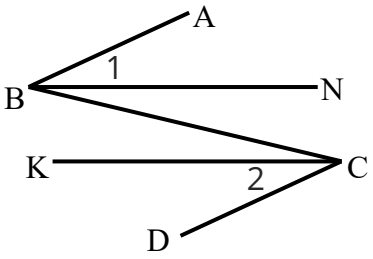
נמק.



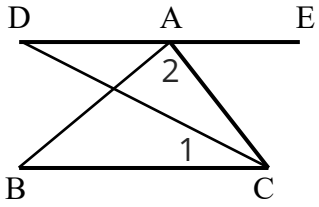
19) בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



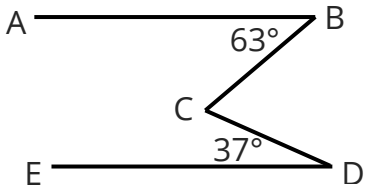
20) באיור שלפניך נתון כי:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_2$.
הוכח כי: $BN \parallel CK$.



21) באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\sphericalangle A_1 = 68°$, $\sphericalangle A_2 = 85°$.
3. חשב את הזווית $\sphericalangle C_1$.
4. חשב את הזווית $\sphericalangle B$.



22) בסרטוט שלפניך נתון:
$AB \parallel DE$, $\sphericalangle B = 63°$, $\sphericalangle D = 37°$.
חשב את גודל הזווית BCD.



תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) $\sphericalangle CAB = 30°$, $\sphericalangle EAC = 50°$, $\sphericalangle FAB = 120°$.

6) $\beta = 23°$, $\alpha = 46°$.

7) $\sphericalangle DOE = 69°$, $\sphericalangle COD = 46°$, $\sphericalangle BOC = 23°$.

8) $\sphericalangle DOC = 25°$, $\sphericalangle EOC = 85°$.

9) $\sphericalangle BOM = 18°$, $\sphericalangle AOM = 72°$.

10) שאלת הוכחה.

11) $180°$.

12) $\beta = 117°$.

13) א. $\alpha = 36°$ ב. $\sphericalangle CBM = 108°$.

14) שאלת הוכחה.

15) $\sphericalangle BCK = 154°$.

16) א. כן ב. לא ג. כן ד. לא.

17) א. $28°$ ב. $45°$ ג. $13°$ ד. $125°$.

18) $a \parallel c \parallel d$, $e \parallel f$.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) א. $34°$ ב. $27°$.

22) $\sphericalangle BCD = 100°$.

שאלון 571

משולשים

תוכן העניינים:

משולשים..... 558

משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות: 559

סוגי משולשים: 559

קטעים מיוחדים במשולשים: 560

משפטים כלליים במשולשים: 560

שאלות – זוויות במשולשים: 561

משפטים במשולש שווה שוקיים: 563

משפטים במשולש שווה צלעות: 563

שאלות – משולש שווה שוקיים: 563

חפיפת משולשים: 564

הגדרה: 564

משפטי החפיפה: 564

שאלות – חפיפת משולשים: 565

זווית חיצונית במשולש: 569

זווית חיצונית למשולש: 569

משפט: 569

שאלות – זווית חיצונית במשולש: 569

משולש ישר זווית: 570

משפטים במשולש ישר זווית: 570

איורים: 570

שאלות – משולש ישר זווית: 571

קטעים מיוחדים במשולש: 572

קטע אמצעים במשולש: 572

שאלות – קטע אמצעים במשולש: 573

מפגש התיכונים במשולש: 574

שאלות – מפגש תיכונים במשולש: 574

תשובות סופיות: 576

משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
לפי זוויות:

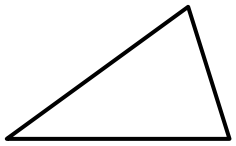
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

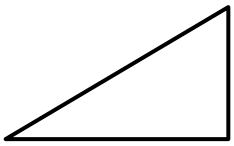
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

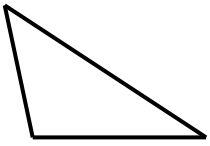
1. משולש חד זווית:



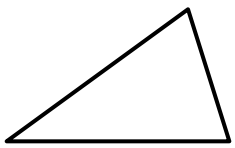
2. משולש ישר זווית:



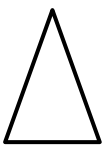
3. משולש קהה זווית:



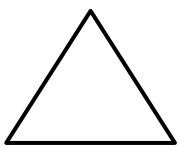
4. משולש שונה צלעות:



5. משולש שווה שוקיים:



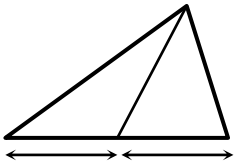
6. משולש שווה צלעות:

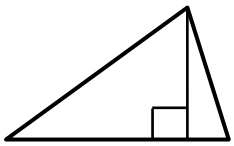


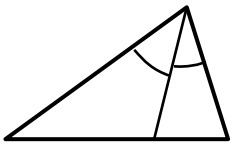
קטעים מיוחדים במשולשים:

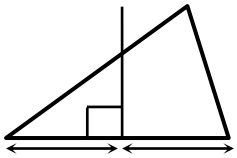
1. תיכון – קטע היוצא מקודקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקודקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקודקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

1. 

2. 

3. 

4. 

משפטים כלליים במשולשים:

- סכום הזוויות במשולש הוא $180°$.
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.

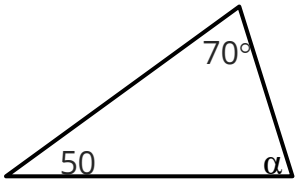
במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.

במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

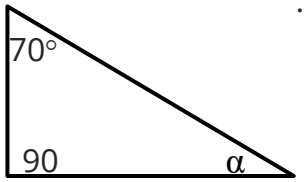
שאלות – זוויות במשולשים:

1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:

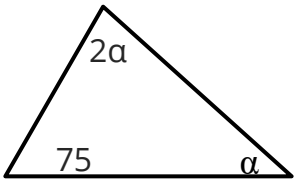
א.



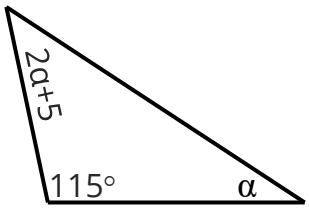
ב.



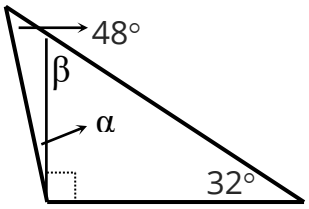
ג.



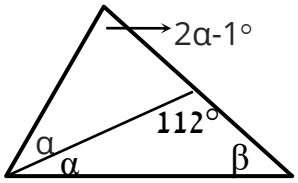
ד.



ה.



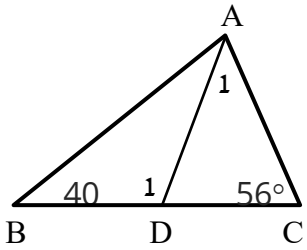
ו.



2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.

נתון: $\sphericalangle C = 56°$, $\sphericalangle B = 40°$.

חשב את הזוויות $\sphericalangle D_1$, $\sphericalangle A_1$.

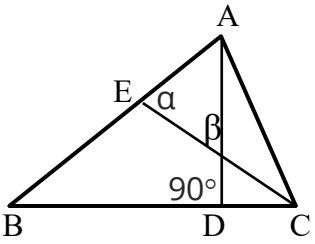


3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.

$\sphericalangle D = 90°$ הקטע CE חוצה זווית $\sphericalangle C$.

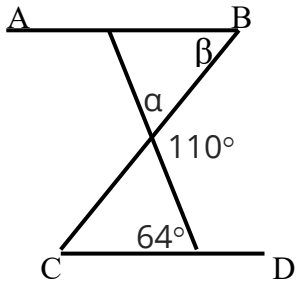
כמו כן: $\beta = 63°$, $\alpha = 75°$.

חשב את זוויות המשולש ABC.



4) בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.

מצא את הזוויות α ו- β.

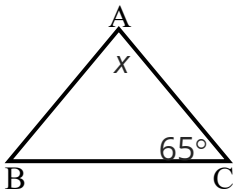


5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:6.

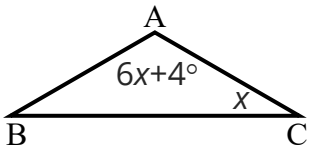
חשב את זוויות המשולש.

6) בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים $(AB=AC)$ שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.

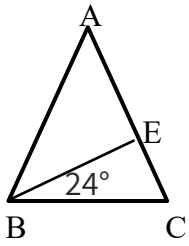
א.



ב.



7) הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC , $(AB=AC)$ יוצר זווית בת $24°$ עם הבסיס BC.
מצא את זוויות המשולש ABC.



8) חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:

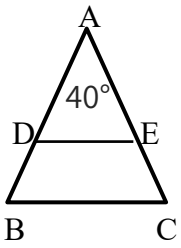
א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב-$12°$ מזווית הראש.
מצא את זוויות המשולש.

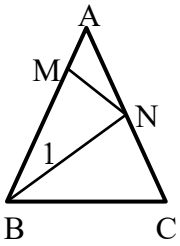
9) באיור שלפניך נתון: $AB=AC$, $AD=AE$, $\sphericalangle A=40°$.

א. חשב את הזוויות: $\sphericalangle E$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle B$.

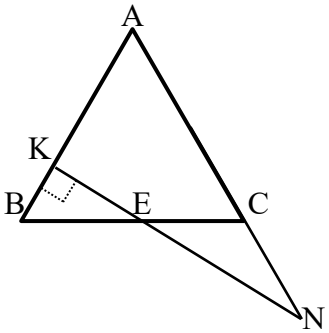
ב. הוכח: $DE \parallel BC$.



10) באיור שלפניך נתון: $AB=AC$.
מעבירים את הקטעים BN ו-MN כך שמתקיים:
$BM=BN=BC$.
נתון בנוסף: $\sphericalangle A=32°$.
חשב את זוויות: $\sphericalangle ANM$, $\sphericalangle B_1$.



11) משולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=AC)$.
בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל-AB $(\sphericalangle K=90°)$.
אנך זה חותך את BC בנקודה E
ואת המשך AC בנקודה N.
מתקיים: $CE=CN$.
חשב את זוויות המשולש ABC.



משפטים במשולש שווה שוקיים:

- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.

(משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.

- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.

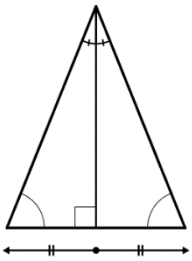
(משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

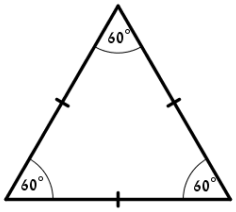
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות $60°$.

(משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

משפט במשולש שווה שוקיים



משפט במשולש שווה צלעות



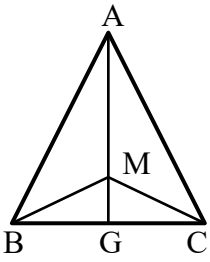
שאלות – משולש שווה שוקיים:

12) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים $(AB=AC)$.

AG חוצה את זווית $\sphericalangle A$.

M היא נקודה כלשהי על AG.

הוכח כי: $BM = CM$.



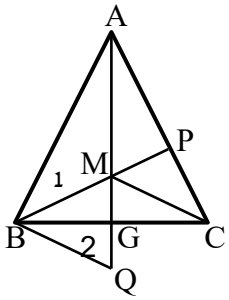
13) המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים $(AB=AC)$.

AG ו-BP חוצים את הזוויות $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle ABC$ בהתאמה.

הנקודה Q נמצאת על המשך AG.

נתון: $GM = GQ$.

הוכח: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$.

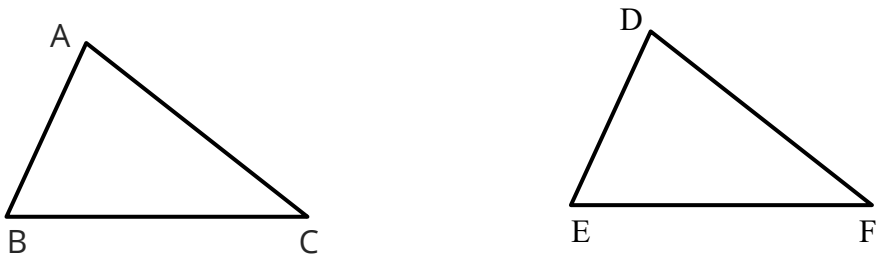


חפיפת משולשים:

הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

סימון מתמטי: $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE \ , \ AC = DF \ , \ BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases}$.



משפטי החפיפה:

- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ):

  אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה

  אז המשולשים חופפים.

- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז):

  אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה

  אז המשולשים חופפים.

- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ):

  אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה

  אז המשולשים חופפים.

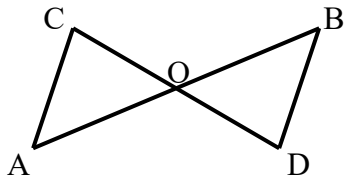
- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז):

  אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן

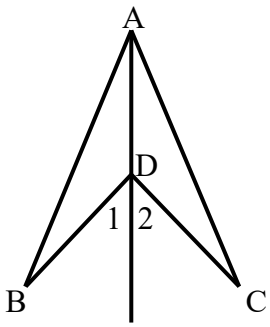
  בהתאמה אז המשולשים חופפים.

שאלות – חפיפת משולשים:

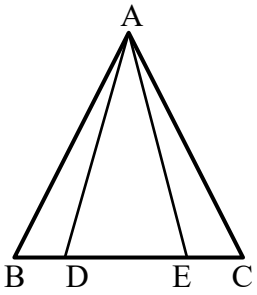
שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:



14) באיור שלפניך הקטעים AB ו- CD חוצים זה את זה בנקודה O.
הוכח: $\Delta ACO \cong \Delta BDO$.

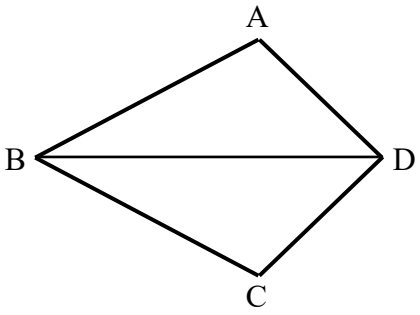


15) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.
כמו כן: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

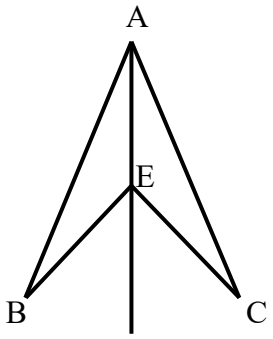


16) בסרטוט שלפניך נתון:
$BE = CD$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:



17) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות $\sphericalangle B$ ו- $\sphericalangle D$.
הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.



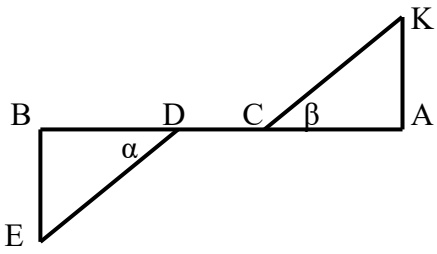
18) בסרטוט שלפניך נתון:
AE חוצה את הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו- $\sphericalangle BEC$.
הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta ACE$.

19) בציור שלפניך נתון:

$AC = BD \ , \ \alpha = \beta$

$AB \perp BE \ , \ AB \perp AK$.

הוכח: $\Delta AKC \cong \Delta BED$.

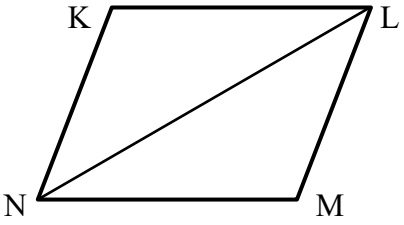


שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:

20) באיור שלפניך נתון:

$KL = MN \ , \ KN = LM$.

הוכח: $\Delta KLN \cong \Delta MLN$.

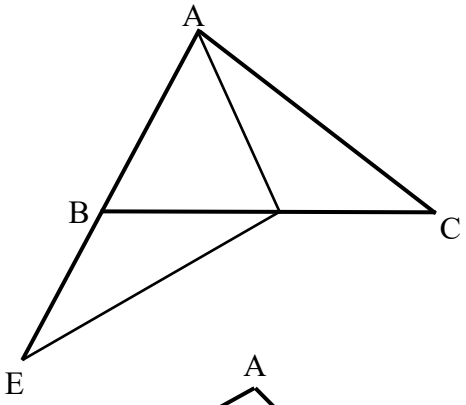


שאלות העוסקות במשפט חפיפה: צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

21) בציור שלפניך נתון:

$AC = DE \ , \ AB = BE = AD$

הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

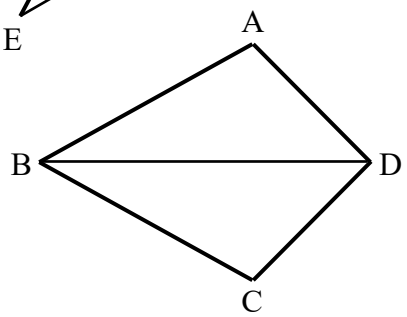


שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:

22) במרובע ABCD נתון:

$AD = CD \ , \ AB = BC$.

הוכח: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.

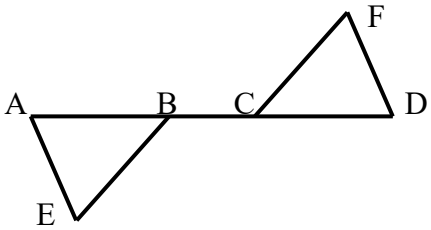


23) הקטע AD הוא קו ישר.

נתון: $AC = BD \ , \ AE = DF$.

כמו כן מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.

הוכח כי הקטעים BE ו- FC שווים.



24) באיור שלפניך נתון:

הנקודה F היא אמצע הקטע AC.

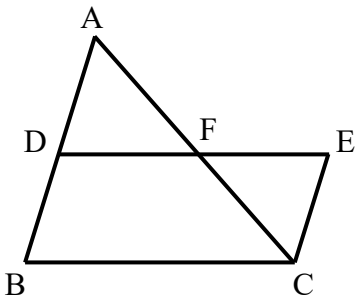
מתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$.

הקטעים BD ו- CE שווים.

הוכח את הטענות הבאות:

א. F היא אמצע הקטע DE.

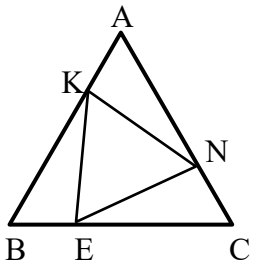
ב. D היא אמצע הקטע AB.



25) המשולש ABC הוא שווה צלעות.

נתון: $AK = BE = CN$.

הוכח כי ΔKEN הוא גם משולש שווה צלעות.



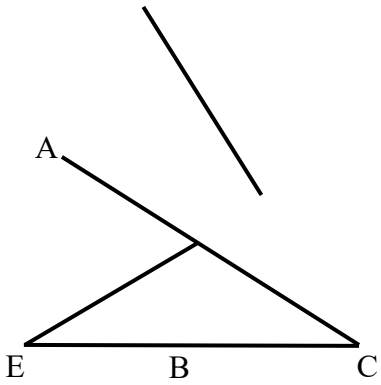
שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:

26) בציור שלפניך נתון: $AC = CE \ , \ DC = BC$.

הוכח:

א. $\Delta CDE \cong \Delta CBA$.

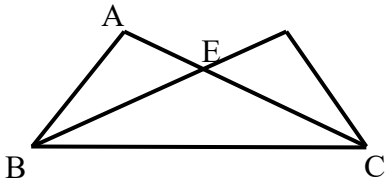
ב. $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$.



27) באיור שלפניך נתון:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB \ , \ \sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB$.

הוכח: $AB = CD$.

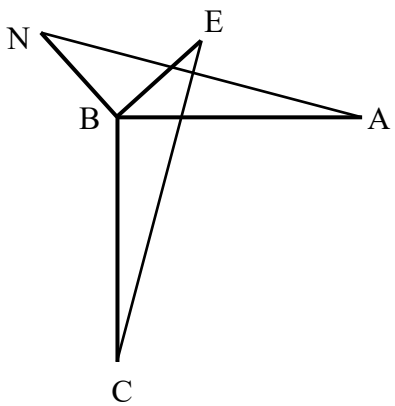


28) בציור שלפניך נתון:

$AB = BC \ , \ BE = BN$

$AB \perp BC \ , \ BE \perp BN$

הוכח: $AN = CE$.



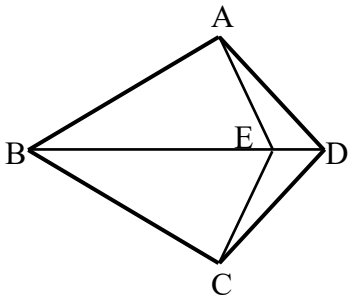
שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

29) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.

מתקיים: $AB = BC$, $AD = CD$.

הנקודה E נמצאת על BD.

הוכח כי: $AE = CE$.

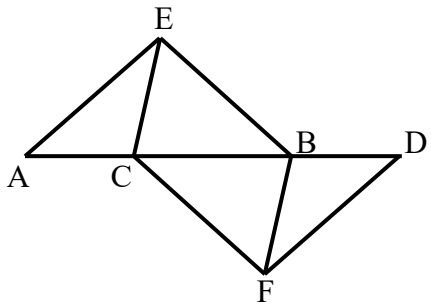


30) בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר. מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DFB$

וכן $AE = DF$. הוכח:

א. $CE = BF$.

ב. $BE = CF$.

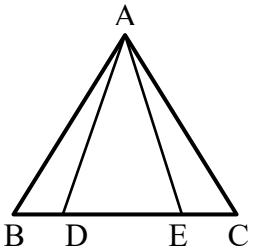


שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:

31) נתון משולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.

מתקיים: $BD = CE$.

הוכח: $AD = AE$.



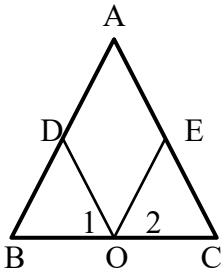
32) בסרטוט שלפניך נתון משולש

שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$.

הנקודה O היא אמצע BC.

מתקיים: $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$.

הוכח: $AD = AE$.

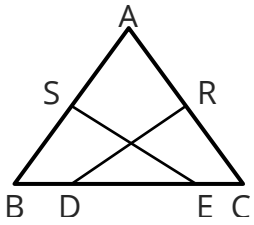


33) במשולש שווה שוקיים ΔABC , $(AB = AC)$

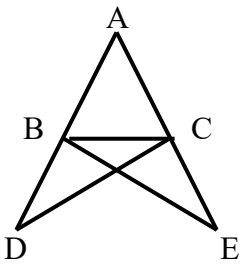
הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.

ידוע כי $BD = CE$.

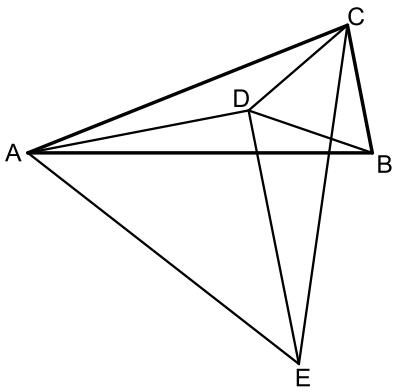
הוכח כי: $SE = RD$.



34) נתון משולש ABC. הקטעים AD ו-AE ישרים
ונתון בנוסף כי: $BD = CE \ , \ DC = BE$.
הוכח: $AB = AC$.

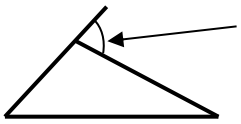


35) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
על השוק AC ועל הבסיס BC בונים משולשים שווי צלעות ACE ו-BCD.
מחברים את הנקודה D עם הקודקודים A ו-E.
א. הוכח: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.
ב. ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.
הוכח: $\sphericalangle ADE = 90°$.



זווית חיצונית במשולש:

זווית חיצונית למשולש:



הגדרה:

זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.

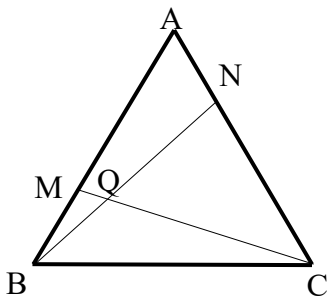
משפט:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

שאלות – זווית חיצונית במשולש:

36) הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה".

37) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.
נתון: $AN = BM$.
הוכח: $\sphericalangle NQC = 60°$.



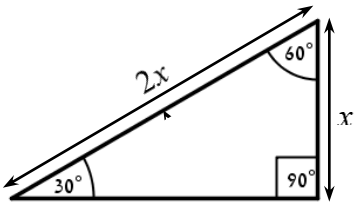
משולש ישר זווית:

משפטים במשולש ישר זווית:

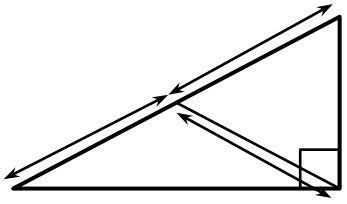
- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא $90°$.
- במשולש שזוויותיו $90°$, $60°$, $30°$, הניצב שמול הזווית של ה- $30°$ שווה למחצית היתר.
  (משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר,
  אז הזווית שמול ניצב זה היא בת $30°$.
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
  (משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה,
  אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
  כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה
  לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

איורים:

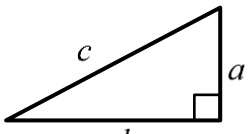
משולש $90°,60°,30°$



תיכון ליתר

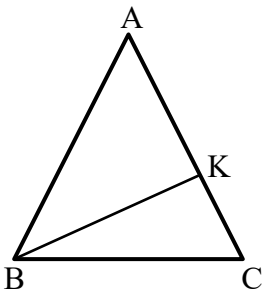


משפט פיתגורס



$$a^2+b^2=c^2$$

שאלות – משולש ישר זווית:

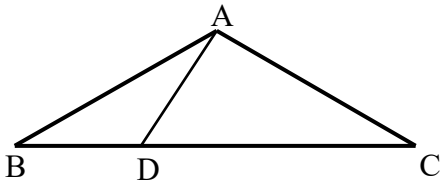


38) באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$.

זווית הבסיס: $\sphericalangle C = 75°$

וכן: 16 ס"מ =AC. מעבירים גובה BK לשוק AC.

מצא את אורך הגובה BK.

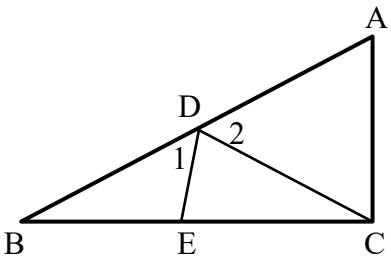


39) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$.

נתון: $\sphericalangle DAC = 90°$, $\sphericalangle ABD = 30°$,

18 ס"מ = BC.

חשב את אורכו של הקטע BD.



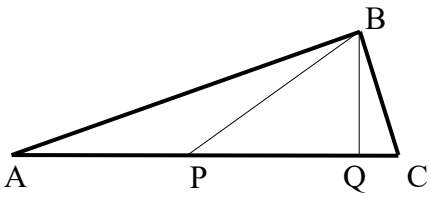
40) המשולש ΔABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.

מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.

הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD = CE$.

ידוע כי: $\sphericalangle CED = 80°$.

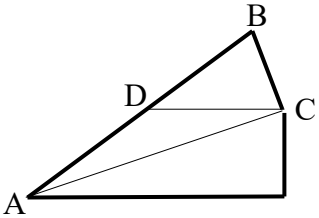
מצא את הזוויות: $\sphericalangle D_2$, $\sphericalangle D_1$



41) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90°)$. BQ הוא הגובה ליתר AC ו-BP הוא התיכון ליתר AC.

נתון: $BQ = \frac{1}{2}BP$.

חשב את גודלה של הזווית C.



42) המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים $(BD = DC)$.

AC חוצה את הזווית $\sphericalangle BAE$.

נתון: $DC \parallel AE$.

חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle ACB$.

43) AD הוא גובה במשולש ABC.

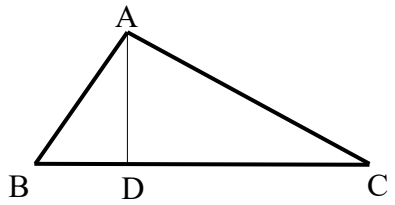
נתון: AB = 15 ס"מ, AC = 20 ס"מ,

BC = 25 ס"מ .

א. מצא את אורכו של AD

ואת שטח המשולש ABC .

ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.



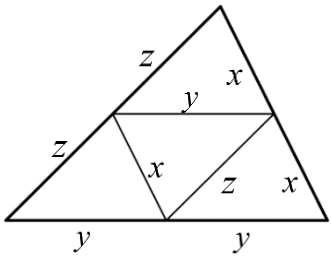
קטעים מיוחדים במשולש:

קטע אמצעים במשולש:

הגדרה: קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

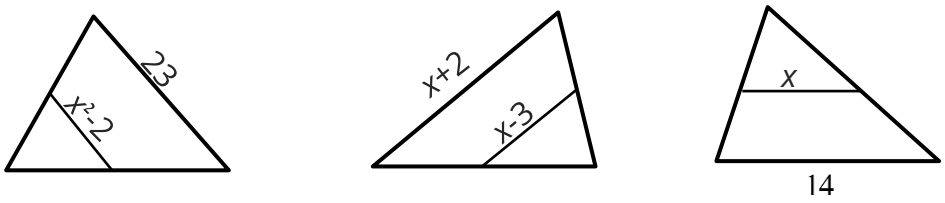
איור – קטע אמצעים במשולש:



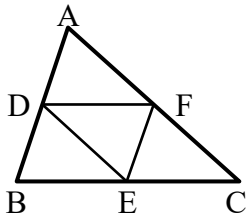
שאלות – קטע אמצעים במשולש:

44) לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
מצא את x בכל אחד מהמקרים:

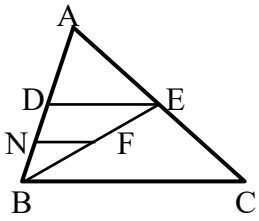
א. ב. ג.



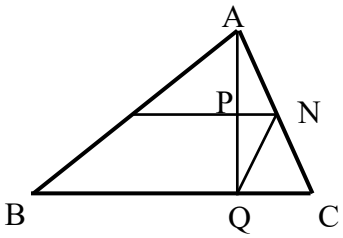
45) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש ΔABC.
נתון: 9 ס"מ =DE, 12 ס"מ= EF, 10 ס"מ = DF.
חשב את היקף המשולש ΔABC.



46) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC.
הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש ΔBDE.
נתון: 3 ס"מ = NF. מצא את אורך הצלע BC.



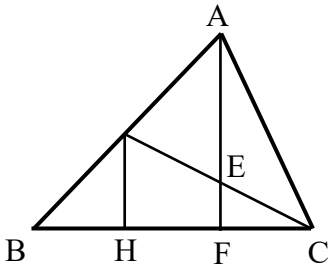
47) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC
AQ הוא גובה לצלע BC.
הוכח: $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$.



48) AF הוא גובה לצלע BC ו- GC הוא תיכון
לצלע AB במשולש ΔABC. הקטע GH מאונך לצלע BC.

א. הוכח: HF =BH.

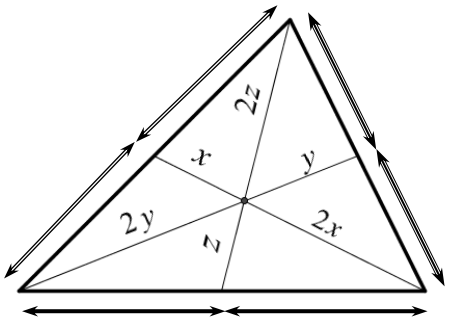
ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את
התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.
חשב את אורך הקטע EF.



מפגש התיכונים במשולש:

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

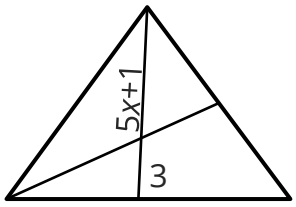
איור – מפגש תיכונים במשולש:



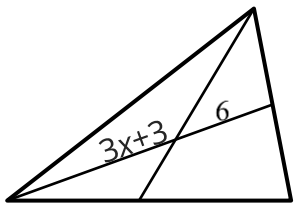
שאלות – מפגש תיכונים במשולש:

49) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

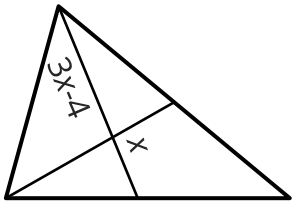
א.



ב.



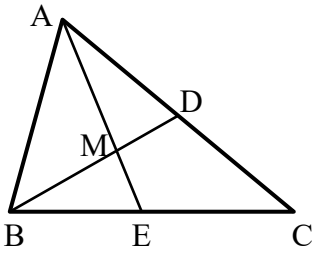
ג.



50) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש ΔABC אשר נחתכים בנקודה M.

נתון: $AD = AM$ וכן: AC = 30 ס"מ.

חשב את AE.



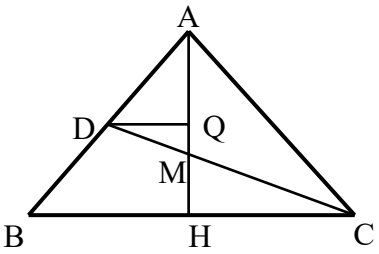
51) המשולש ΔABC שבציור הוא מש"ש ($AB = AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC.

CD, התיכון לשוק AB,

יוצר זווית של $30°$ עם הבסיס BC.

נתון: $12\sqrt{3}$ ס"מ $= BC$, $DQ \parallel BC$.

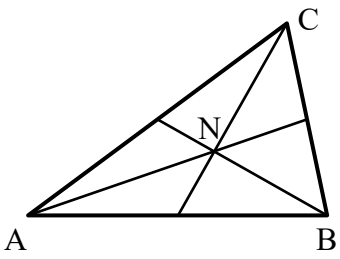
חשב את אורך הקטע MQ.



52) במשולש ΔABC נחתכים התיכונים בנקודה N.

נתון: $\sphericalangle CNB = 90°$.

הוכח: $BC = AN$.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 60°$ ב. $\alpha = 20°$ ג. $\alpha = 35°$ ד. $\alpha = 20°$

ה. $\alpha = 10°$, $\beta = 58°$ ו. $\beta = 30\frac{1}{3}°$, $\alpha = 37\frac{2}{3}°$.

2) $\sphericalangle A_1 = 42°$, $\sphericalangle D_1 = 98°$

3) $\sphericalangle A = 78°$, $\sphericalangle B = 48°$, $\sphericalangle C = 54°$.

4) $\alpha = 64°$, $\beta = 46°$.

5) $20°$, $40°$, $120°$.

6) א. $x = 50°$ ב. $x = 22°$.

7) $\sphericalangle A = 48°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 66°$.

8) א. $20°$, $80°$, $80°$ ב. $52°$, $64°$, $64°$

9) א. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70°$. ב. שאלת הוכחה

10) א. $\sphericalangle ANM = 37°$, $\sphericalangle B_1 = 42°$. ב. שאלת הוכחה

11) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

12) שאלת הוכחה

13) שאלת הוכחה

14) שאלת הוכחה

15) שאלת הוכחה

16) שאלת הוכחה

17) שאלת הוכחה

18) שאלת הוכחה

19) שאלת הוכחה

20) שאלת הוכחה

21) שאלת הוכחה

22) שאלת הוכחה

23) שאלת הוכחה

24) שאלת הוכחה

25) שאלת הוכחה

26) שאלת הוכחה

27) שאלת הוכחה

28) שאלת הוכחה

29) שאלת הוכחה

30) שאלת הוכחה

31) שאלת הוכחה

32) שאלת הוכחה

33) שאלת הוכחה

34) שאלת הוכחה

35) שאלת הוכחה

36) שאלת הוכחה

37) שאלת הוכחה

38) 8 ס"מ

39) 6 ס"מ

40) $\sphericalangle D_1 = 60°$, $\sphericalangle D_2 = 40°$

41) $75°$

42) $90°$

43) א. 12 ס"מ = AD, 150 סמ"ר = S_{ABC}. ב. כן.

44) א. $x = 7$ ב. $x = 8$ ג. $x = \sqrt{13.5}$.

45) 62 ס"מ.

46) 12 ס"מ.

47) שאלת הוכחה

48) א. שאלת הוכחה ב. 3 ס"מ.

49) א. $x=1$ ב. $x=3$ ג. $x=4$

50) 22.5 ס"מ.

51) 3 ס"מ.

52) שאלת הוכחה

שאלון 571

מרובעים

תוכן העניינים:

מרובעים..... 578

מרובע כללי:..... 579

שאלות יסודיות:..... 579

המקבילית: 580

שאלות – תכונות המקבילית:..... 580

שאלות – הוכחת מקבילית:..... 582

המלבן: 584

תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית): 584

שאלות – תכונות המלבן:..... 584

שאלות – הוכחת מלבן: 585

המעוין: 586

שאלות – תכונות המעוין:..... 587

שאלות – הוכחת מעוין: 588

הריבוע:..... 589

שאלות – תכונות הריבוע:..... 589

שאלות – הוכחת ריבוע:..... 590

הטרפז:..... 591

שאלות – תכונות הטרפז הכללי: 592

שאלות – תכונות טרפז שווה שוקיים וישר זווית:..... 593

שאלות – הוכחת טרפז שווה-שוקיים וישר זווית:..... 594

שאלות – קטע אמצעים בטרפז:..... 595

הדלתון: 596

שאלות – דלתון: 597

סיכום משפחת המרובעים: 598

תשובות סופיות:..... 599

מרובע כללי:

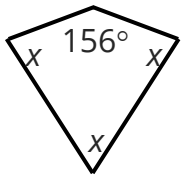
הגדרה: מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

משפט: סכום זוויות במרובע הוא $360°$.

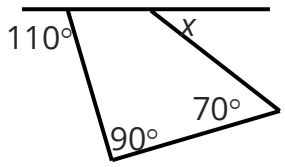
שאלות יסודיות:

1) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.
חלק מהזוויות מסומנות ב- x.
מצא את x ואת הזוויות של כל מרובע.

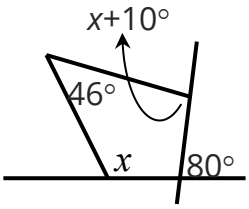
א.



ב.

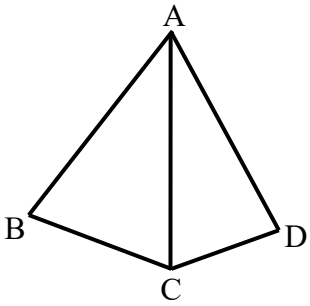


ג.

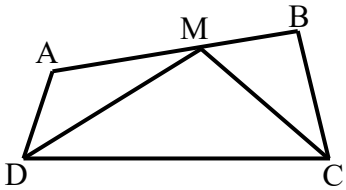


2) מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:
כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב- $10°$ מהזווית הקודמת לה.
זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:3:4.

3) המשולשים ABC ו-ACD שבציור הם משולשים שווי שוקיים ($AB = AC = AD$).
נתון: $\sphericalangle BAD = 80°$.
חשב את גודלה של הזווית BCD.

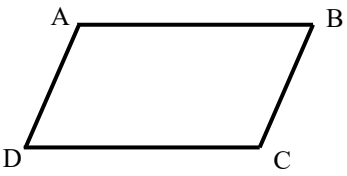


4) בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.
CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.
ידוע כי: $CM = DM$, $\sphericalangle A = 130°$, $\sphericalangle DMC = 110°$.
מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.



המקבילית:

הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.



- במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.
- במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא $180°$.
- במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
- היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע · גובה לצלע.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

שאלות – תכונות המקבילית:

5) נתונה מקבילית ABCD.

בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות.

מצא את זוויות המקבילית בכל מקרה.



א. $\sphericalangle A = x$, $\sphericalangle B = x - 70°$.

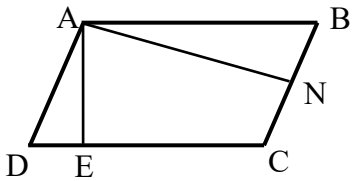
ב. $\sphericalangle B = 3x - 130°$, $\sphericalangle D = x + 10°$.

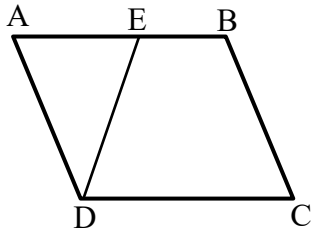
ג. $\sphericalangle A = x + 20°$, $\sphericalangle C = 100° - x$.

6) המרובע ABCD הוא מקבילית

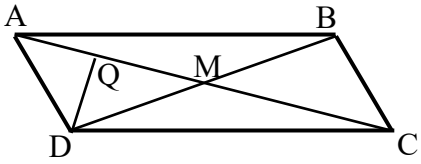
ובו: $AE \perp CD$, $AN \perp BC$.

הוכח כי: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAN$.

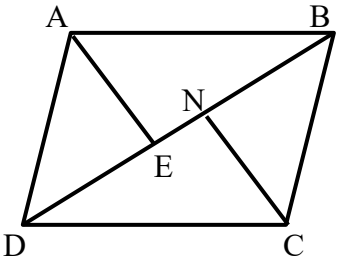




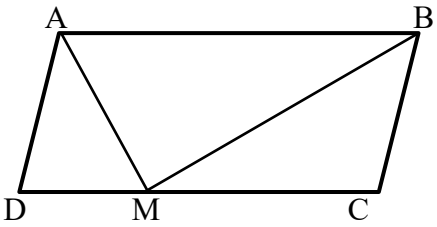
7) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים: $DE = BC$.
הוכח כי: $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDC$.



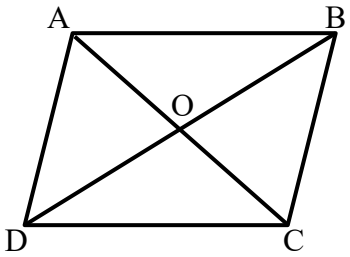
8) נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים בנקודה M.
נתון: 20 ס"מ = AC, $BC = \frac{1}{2}BD$ ו- $DQ \perp AC$.
חשב את אורך הקטע AQ.



9) הוכח כי במקבילית הקודקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח: $AE = CN$.

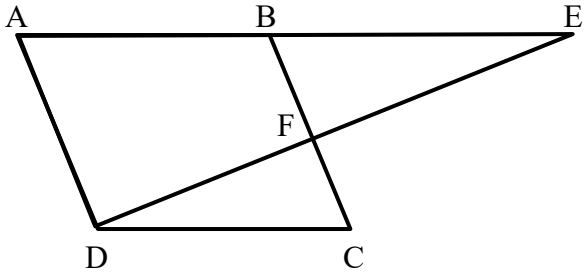


10) במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה אשר נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC.
ד. הוכח כי: $AB = 2BC$.
ה. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.



11) המרובע ABCD הוא מקבילית.
O – פגישת האלכסונים.
נתון: $DO = 3x - 10$, $BO = x + 8$, $AO = x + 1$.
מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.

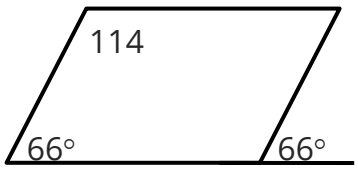
12) נתונה מקבילית ABCD ובה: $\sphericalangle ADC = 120°$, $\sphericalangle BEF = \frac{1}{2}\sphericalangle EAD$.
הוכח כי: $BC \perp ED$.



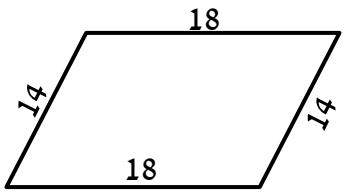
שאלות – הוכחת מקבילית:

13) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.
קבע אלו מהם הם מקבילויות וציין מדוע.

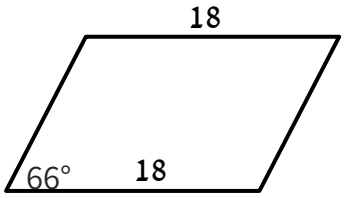
א.



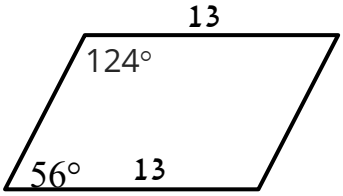
ב.



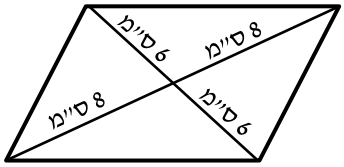
ג.



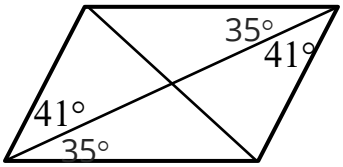
ד.



ה.



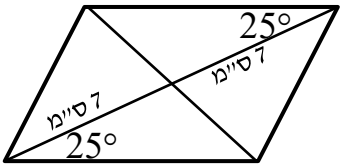
ו.



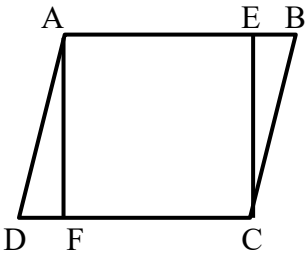
ז.



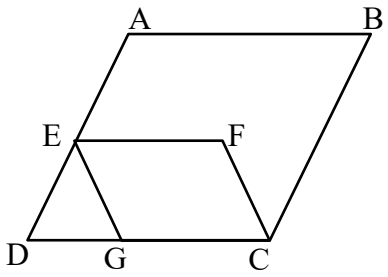
ח.



14) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה.
נתון: $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BCE$.
הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.



15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB.



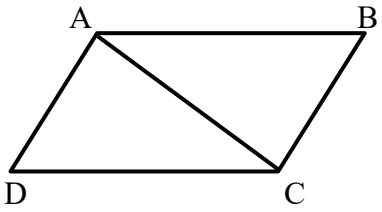
א. הוכח: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle EGC$.

ב. נתון: $\sphericalangle GCF = \sphericalangle ABC$. הוכח כי EFCG מקבילית.

16) במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות.

כמו כן: $BC \perp AC$, $AD \perp AC$.

הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.



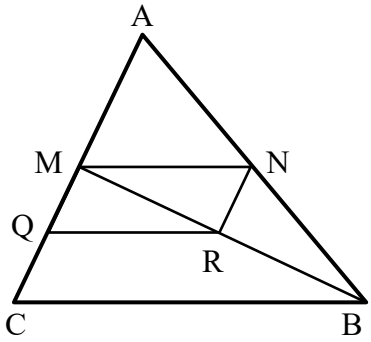
17) נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים.

הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.

א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.

ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR.

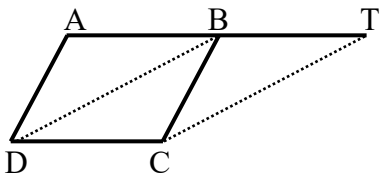
איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.



18) את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו כאורכה עד לנקודה T.

הוכח: BTCD מקבילית.

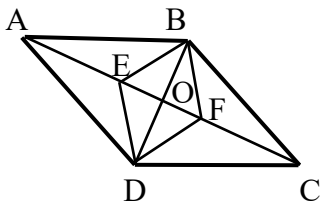
הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



19) הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC.

נתון: $AE = FC$.

הוכח כי EBFD הוא מקבילית.



המלבן:

הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.

(מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).

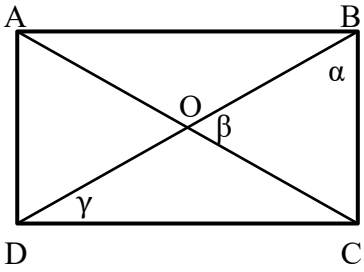
תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

- ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
- האלכסונים במלבן שווים זה לזה
- היקף מלבן סכום הצלעות, שטח מלבן צלע גובה לצלע.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
- מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
- מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

שאלות – תכונות המלבן:



20) המרובע ABCD הוא מלבן.

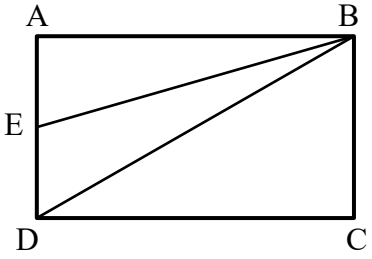
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.

חשב את הזוויות β , α ו- γ במקרים הבאים:

א. β קטנה ב- $15°$ מ- α.

ב. $\alpha = 2\gamma$.

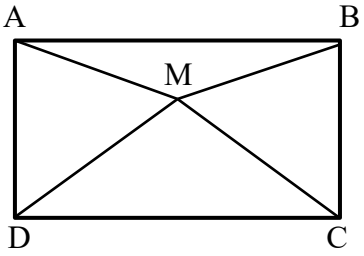
ג. $\gamma = 28°$.



21) במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

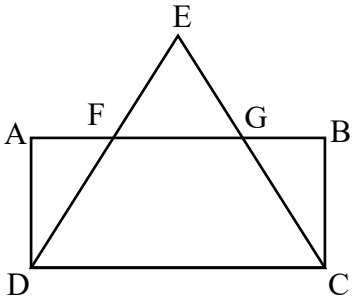
נתון: $\sphericalangle AEB = 70°$, $BD = 2BC$.

חשב את גודלה של הזווית EBD.



22) נתון מלבן ABCD שבו $DM = MC$.

הוכח: $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA$.

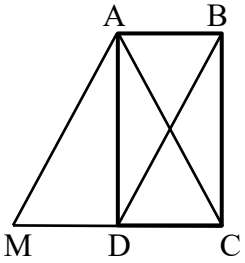


23) המרובע ABCD הוא מלבן.

המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים בנקודה E.

נתון: $EF = EG$.

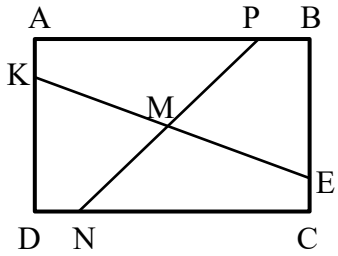
הוכח: $FD = GC$.



24) המרובע ABCD הוא מלבן.

המרובע ABDM הוא מקבילית.

הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.

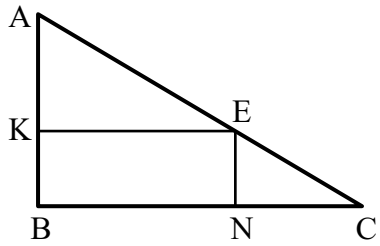


25) מרובע ABCD הוא מלבן.

נתון: $AK = CE$, $AP = CN$.

הוכח: $KM = EM$, $PM = NM$.

שאלות – הוכחת מלבן:

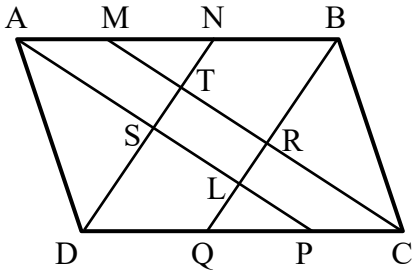


26) ΔABC הוא משולש ישר זווית $\left(\sphericalangle B = 90°\right)$.

המרובע KENB חסום במשולש זה.

נתון כי: $\sphericalangle NEC = \sphericalangle A$, $\sphericalangle AEK = \sphericalangle C$.

הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.



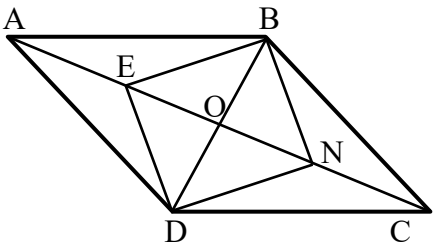
27) נתונה מקבילית ABCD

ובה AP, BQ, CM ו-DN

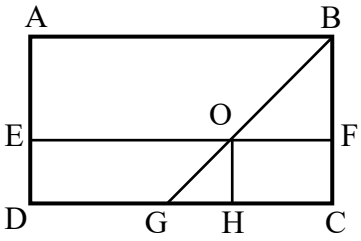
הם חוצי הזוויות $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ ו- $\sphericalangle D$

בהתאמה.

הוכח: TRLS מלבן.

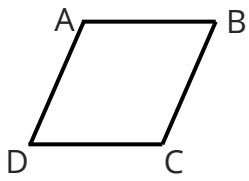


28) מרובע ABCD הוא מקבילית.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD
אשר נחתכים בנקודה O.
נתון: $2BD = AC$.
E – אמצע AO. N – אמצע CO.
הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.



29) במלבן ABCD נתון:
$\sphericalangle ABO = \sphericalangle BOF$, $OH \perp DC$.
הוכח: EOHD הוא מלבן.

המעוין:



הגדרה: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.
(מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית).

תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

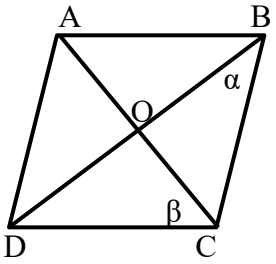
- במעוין כל הצלעות שוות.
- במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
- במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
- היקף מעוין = צלע · 4, שטח מעוין = צלע · גובה לצלע = 2/(אלכסון · אלכסון).

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
- מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
- מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

שאלות – תכונות המעוין:

30) המרובע ABCD הוא מעוין.



חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את α ו- β.

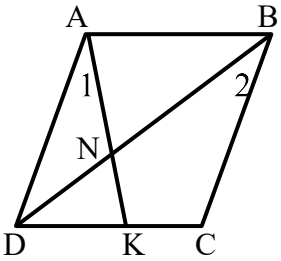
א. $\sphericalangle A = 138°$.

ב. $\beta = 3.5\alpha$.

ג. $\beta = \alpha + 20°$.

ד. $\sphericalangle B = \beta$.

31) המרובע ABCD הוא מעוין.



מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע AK

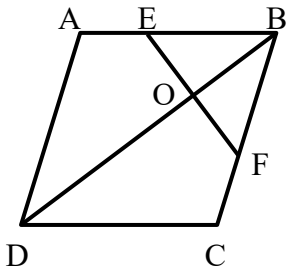
אשר נחתכים בנקודה N.

ידוע כי: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_2$.

א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.

ב. הוכח כי: $\sphericalangle AND = \sphericalangle C$.

32) מעוין ABCD הנקודות E ו-F

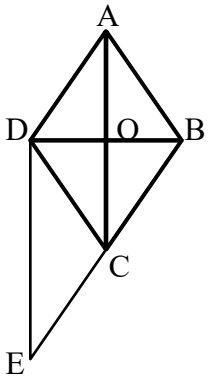


נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.

נתון: $EF \perp BD$, $\sphericalangle DCB = 120°$.

הוכח כי משולש EBF הוא שווה צלעות.

33) נתון מעוין ABCD.

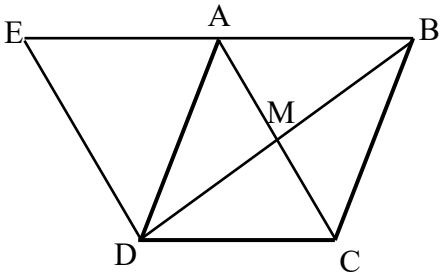


הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.

נתון: $\sphericalangle CDE = \sphericalangle BCA$.

הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.

34) נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.

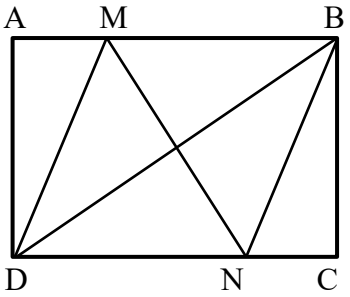


האריכו את הצלע AB עד לנקודה E

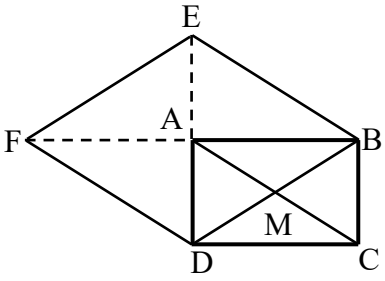
כך שמתקיים: $DE \perp BD$.

הוכח: $AD = AE$.

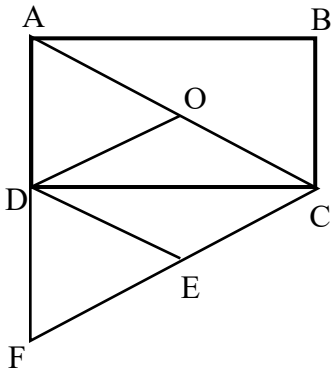
שאלות – הוכחת מעוין:



35) במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD.
הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB
ו-DC בהתאמה.
נתון: $AM = CN$ ו- $DM = DN$.
הוכח כי הקטע MN חוצה את
הזוויות BMD ו-BND.

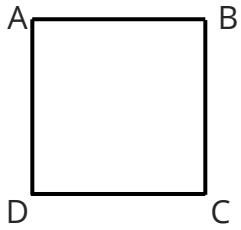


36) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.
האריכו את הצלע AB כאורכה עד
לנקודה F ואת הצלע AD כאורכה עד
לנקודה E כמתואר בשרטוט.
הוכח: המרובע EBDF הוא מעוין.



37) ABCD הוא מלבן שאלכסוניו נחתכים בנקודה O.
הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD
כך שמתקיים: $AD = DF$.
נתון: $FE = CE$.
הוכח כי DOCE הוא מעוין.

הריבוע:



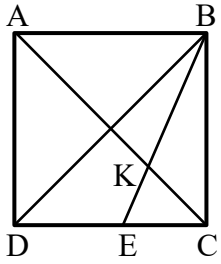
הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

(מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).
מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים
כי אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה,
מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.
היקף ריבוע = צלע ⋅ 4, שטח ריבוע = $(\text{צלע})^2$ = $(\text{אלכסון})^2/2$

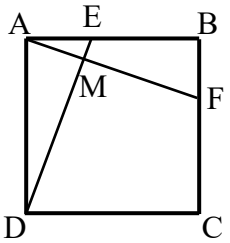
כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
- מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
- מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
- מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

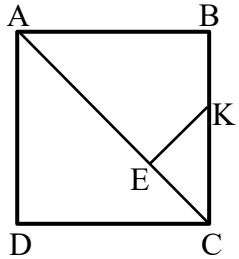
שאלות – תכונות הריבוע:



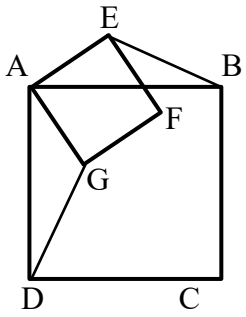
38) המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.
הוכח: $CE = CK$.



39) בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.
נתון כי $AE = BF$.
הוכח: $DE \perp AF$.



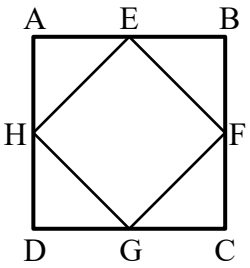
40) המרובע ABCD הוא ריבוע.
מעבירים את האלכסון AC.
מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים
את הקטע KE אשר מאונך לאלכסון.
נתון: $AE = AB$. הוכח כי: $CE = KE = BK$.



41) המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.

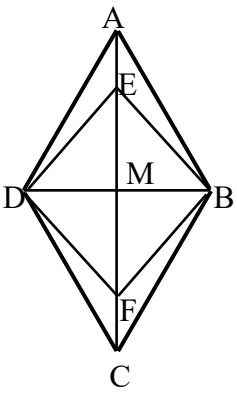
הוכח: $BE = DG$

שאלות – הוכחת ריבוע:



42) הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות הריבוע ABCD.

הוכח כי EFGH הוא ריבוע.



43) נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M.

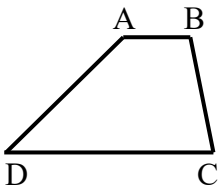
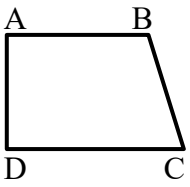
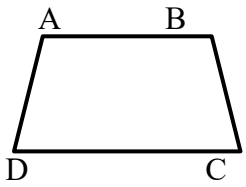
נתון: $AE = FC$, $MB = \frac{1}{2}AB$, $\sphericalangle EBA = 15°$.

הוכח: המרובע EBFD הוא ריבוע.

הטרפז:

הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.

היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = 2/(גובה · סכום הבסיסים).

סוג הטרפז	טרפז כללי	טרפז ישר זווית	טרפז שווה שוקיים
איור מתאים			

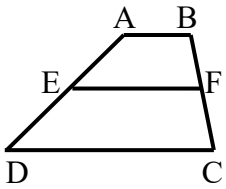
משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

- בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
- (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
- (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים בטרפז:

הגדרה: קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.

- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.



(משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז

- ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה

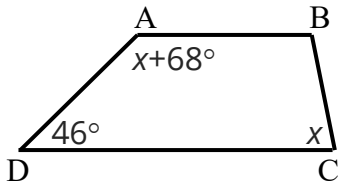
(כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).

שאלות – תכונות הטרפז הכללי:

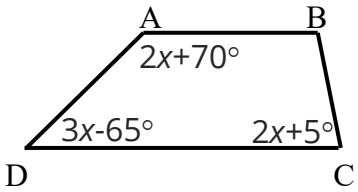
44) בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים $(AB \| CD)$.

מצא את x ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.

א.



ב.



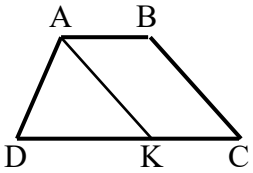
45) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.

מעבירים את הקטע AK.

נתון: $AK \| BC$, $AK = DK$,

6 ס"מ = AB, 14 ס"מ = DC.

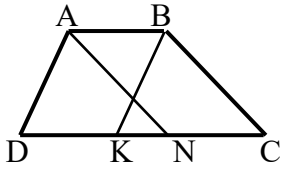
חשב את אורך השוק BC.



46) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.

נתון כי: $AD \| BK$, $AN \| BC$.

הוכח כי: $DK = CN$.



47) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.

מעבירים את האלכסון AC ואת

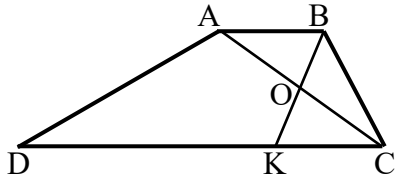
הקטע BK אשר חוצים זה את זה בנקודה O.

ידוע כי: $\sphericalangle D = 30°$, $\sphericalangle C = 60°$.

א. חשב את אורך DC, הבסיס הגדול,

אם ידוע כי: 7 ס"מ = AB, 9 ס"מ = BC.

ב. הוכח כי אם $AB = BC$ אז: $DC = 3AB$.



48) נתון טרפז ABCD, $(AB \| CD)$ ובו

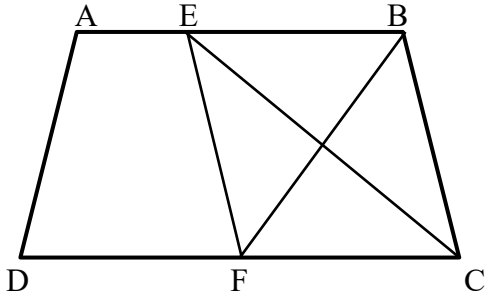
הקטעים CE ו-BF חוצים את זוויות

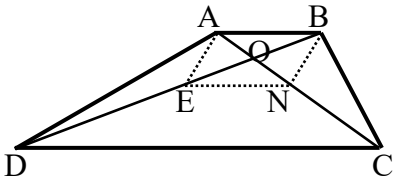
הקUדקודים C ו- B בהתאמה. הוכח:

א. $BF \perp CE$.

ב. המשולש EBC הוא שווה שוקיים.

ג. המרובע EBCF הוא מעוין.





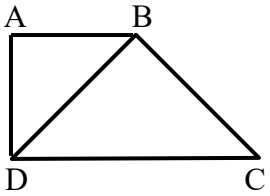
49) מרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

O - היא נקודת פגישת האלכסונים.

נתון: $AO = NO$, $BO = EO$.

הוכח כי המרובע ENCD הוא טרפז.

שאלות – תכונות טרפז שווה שוקיים וישר זווית:

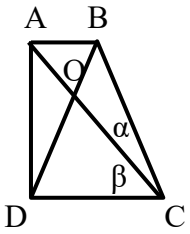


50) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD \ , \ \sphericalangle D = 90°)$.

האלכסון BD חוצה את זווית D

ונתון בנוסף כי: $BD = BC$ וכי: 15 ס"מ = AD.

חשב את אורכי בסיסי הטרפז.

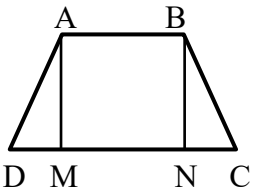


51) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית

$(AB \parallel CD \ , \ AD \perp DC)$.

נתון כי: $BD = BC$, $\beta = 2\alpha$ ו- $\sphericalangle DOC = 80°$.

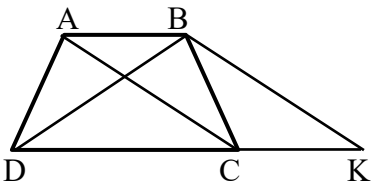
חשב את זוויות הטרפז.



52) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD \ , \ AD = BC)$.

נתון כי: $BN \perp DC$, $AM \perp DC$.

הוכח כי: $DM = CN$.

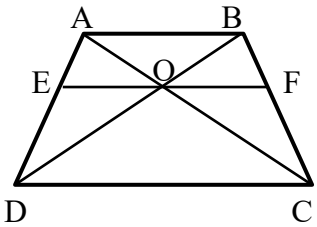


53) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD \ , \ AD = BC)$.

דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC הפוגש

את המשך הבסיס DC בנקודה K.

הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.



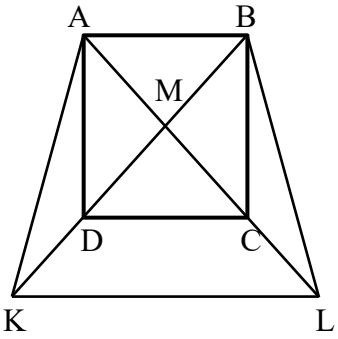
54) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD \ , \ AD = BC)$.

O היא פגישת האלכסונים.

נתון כי: $EF \parallel DC$ כאשר EF עובר דרך O. הוכח:

א. $\sphericalangle BOF = \sphericalangle COF$.

ב. $EO = FO$.



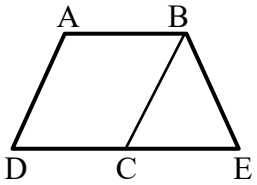
55) נתון ריבוע ABCD.
הנקודה M היא מפגש האלכסונים AC ו-BD.
ממשיכים את האלכסונים ויוצרים את הטרפז
השווה שוקיים ABLK.
ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים משולש KML.

א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:
(1) המשולש KML הוא ישר זווית ושווה שוקיים.
(2) הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.
(3) המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.
(4) הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.

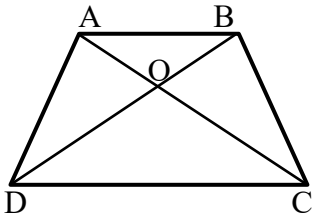
ב. הוכח כי: $3DK = AL$.

ג. נתון כי $8\sqrt{2}$ ס"מ = AD.
חשב את היקף הטרפז ABLK.

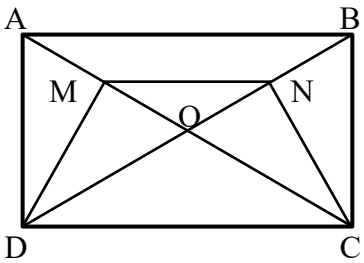
שאלות – הוכחת טרפז שווה-שוקיים וישר זווית:



56) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי: $\sphericalangle A + \sphericalangle E = 180°$.
הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.

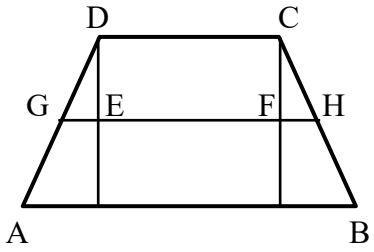


57) במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים.
נתון כי: $AO = BO$, $CO = DO$, $AO \neq DO$.
הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

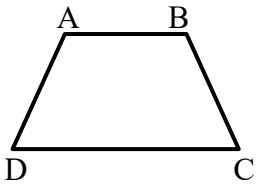


58) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.
נתון: $MN \parallel DC$.
הוכח: DMNC טרפז שווה שוקיים.

שאלות – קטע אמצעים בטרפז:

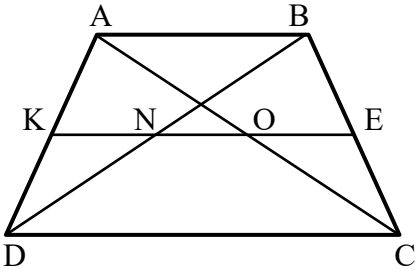


59) בטרפז ABCD $(AB \| CD)$ הורדו מקצות
הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול.
קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F.
נתון: GE = 3 ס"מ, EF = 12 ס"מ, FH = 2 ס"מ.
חשב את בסיסי הטרפז.



60) סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה
שוקיים הוא 54 ס"מ.
אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.
מצא את אורך שוק הטרפז.

61) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.
KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את
אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O.

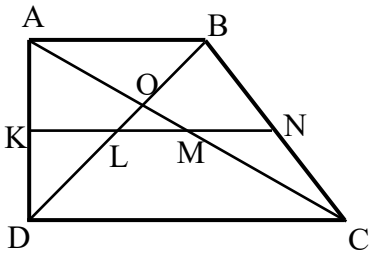


א. הוכח כי: $KN = EO$.

ב. בטרפז הנ"ל נתון:
AB = 14 ס"מ, DC = 26 ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.

ג. בטרפז הנ"ל נתון: KE = 13 ס"מ,
NO = 3 ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.

62) KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר
זווית ABCD שאלכסוניו $(AB \| CD \,,\, AD \perp AB)$
נפגשים בנקודה O.
נתון: AD = 12 ס"מ, $DC = 2AB$, $\sphericalangle ADB = 45°$.
חשב את אורך הקטע LM
והוכח כי: $KL = LM = MN$.

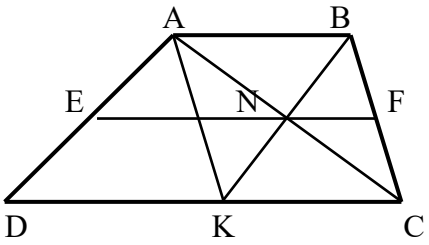


63) מרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.

EF הוא קטע אמצעים. AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.

א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.

ב. נתון: 13 ס"מ = EF, 9 ס"מ = EN.
חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC ואת הקטע DK.



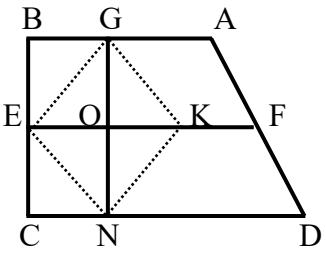
64) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \| CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.

EF קטע אמצעים בטרפז.

G ו-N הן נקודות על AB ו-CD בהתאמה המקיימות: $GN \perp DC$.

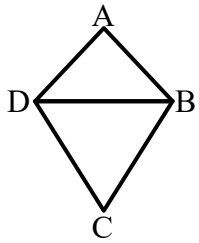
בנוסף נתון: $KO = EO\ ,\ \sphericalangle D < 90°$.

הוכח כי מרובע GENK הוא מעוין.



הדלתון:

הגדרה:
דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.
(מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף).



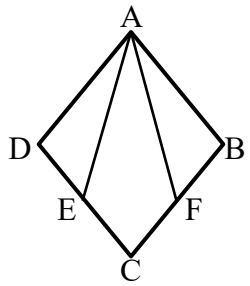
תכונות האלכסונים בדלתון:

- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
- האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
- היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = 2/(אלכסון · אלכסון).

שאלות – דלתון:

65) נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ב-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון.

הוכח: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FAB$.

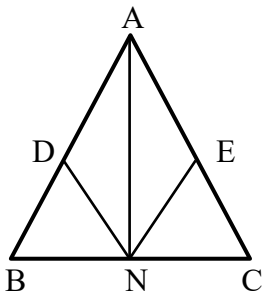


66) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ מקצים נקודות D ו-E על השוקיים.

נתון כי: $AD = AE$.

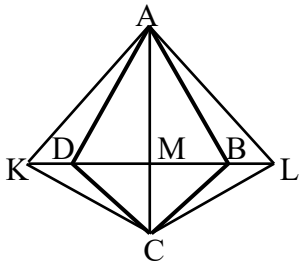
הנקודה N היא אמצע BC.

הוכח כי ADNE הוא דלתון.



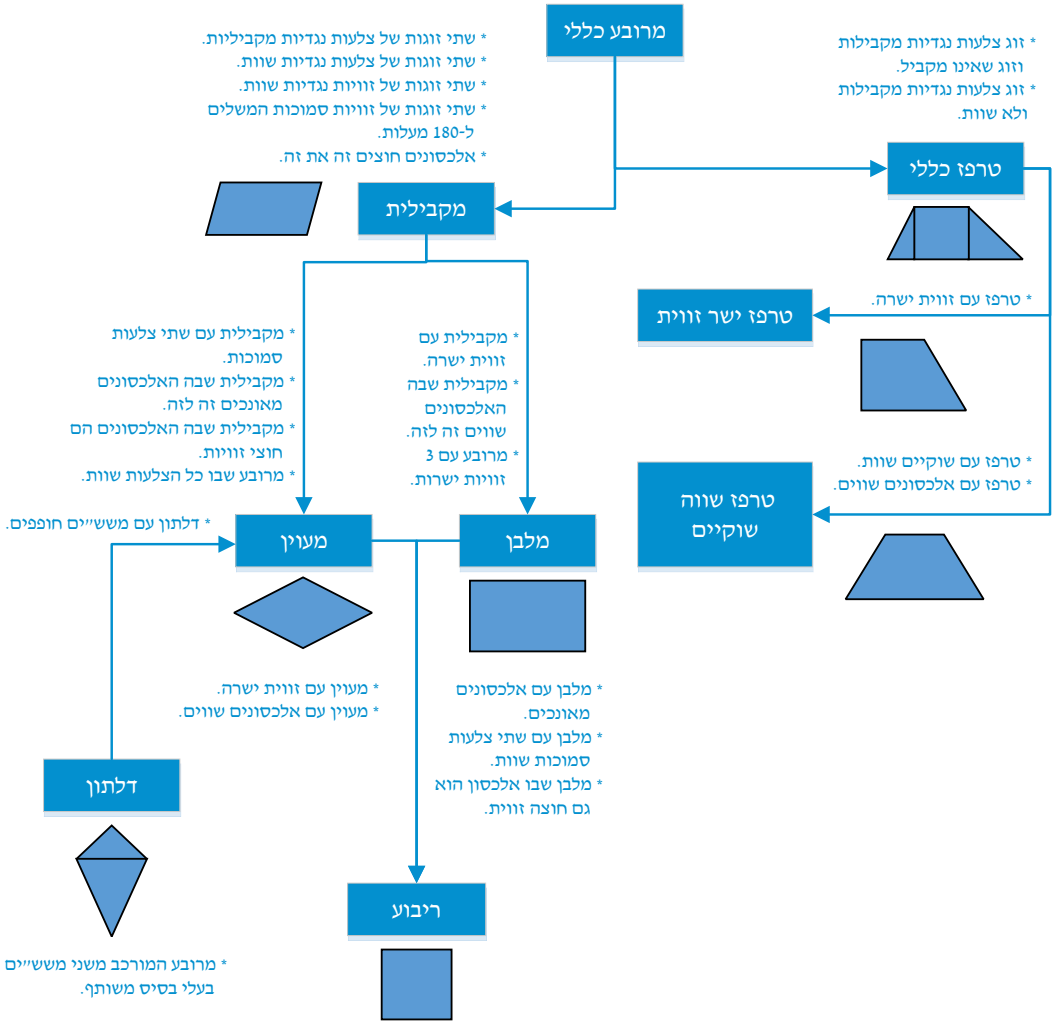
67) בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $KD = BL$.

הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.



סיכום משפחת המרובעים:

להלן דיאגרמה מסכמת של כל משפחת המרובעים ותכונותיהם:



תשובות סופיות:

1) א. $x=68°$. ב. $x=50°$. ג. $x=102°$

2) א. $105°$, $95°$, $85°$, $75°$ ב. $144°$, $108°$, $72°$, $36°$

3) $140°$.

4) $\sphericalangle B=90°$, $\sphericalangle C=\sphericalangle D=70°$

5) א. $55°$, $125°$ ב. $80°$, $100°$ ג. $60°$, $120°$.

6) שאלת הוכחה

7) שאלת הוכחה

8) 5 ס"מ.

9) שאלת הוכחה

10) שאלת הוכחה

11) 20 ס"מ = AC, 34 ס"מ = BD.

12) שאלת הוכחה

13) מקביליות: א', ב', ד', ה', ו', ח'

אינן מקביליות: ג', ז'.

14) שאלת הוכחה

15) שאלת הוכחה

16) שאלת הוכחה

17) שאלת הוכחה

18) שאלת הוכחה

19) שאלת הוכחה

20) א. $\alpha=65°$, $\beta=50°$, $\gamma=25°$

ב. $\alpha=\beta=60°$, $\gamma=30°$

ג. $\alpha=62°$, $\beta=56°$

21) $10°$.

22) שאלת הוכחה

23) שאלת הוכחה

24) שאלת הוכחה

25) שאלת הוכחה

26) שאלת הוכחה

27) שאלת הוכחה

28) שאלת הוכחה

29) שאלת הוכחה

30) א. $\alpha=21°$, $\beta=69°$

ב. $\alpha=20°$, $\beta=70°$

ג. $\alpha=35°$, $\beta=55°$

ד. $\alpha=30°$, $\beta=60°$.

31) שאלת הוכחה

32) שאלת הוכחה

33) שאלת הוכחה

34) שאלת הוכחה

35) שאלת הוכחה

36) שאלת הוכחה

37) שאלת הוכחה

38) שאלת הוכחה

39) שאלת הוכחה

40) שאלת הוכחה

41) שאלת הוכחה

42) שאלת הוכחה

43) שאלת הוכחה

44) א. $x=66°$; $46°,134°,66°,114°$ ב. $x=35°$; $40°,140°,75°,105°$

45) 8 ס"מ.

46) שאלת הוכחה

47) א. 25 ס"מ.

ב. שאלת הוכחה

48) שאלת הוכחה

49) שאלת הוכחה

50) א. 15 ס"מ, 30 ס"מ.

ב. שאלת הוכחה

51) $120°$, $60°$, $90°$, $90°$

52) שאלת הוכחה

53) שאלת הוכחה

54) שאלת הוכחה

55) א. ניתן להוכיח את טענות: i, iii.

ב. שאלת הוכחה

ג. 69.71 ס"מ $\approx 16\sqrt{5}+24\sqrt{2}=P_{ABLK}$.

56) שאלת הוכחה

57) שאלת הוכחה

58) שאלת הוכחה

59) 22 ס"מ ו-12 ס"מ

60) 14 ס"מ.

61) א. שאלת הוכחה ב. 7 ס"מ $KN=EO=$, 6 ס"מ $=NO$

ג. 10 ס"מ $=AB$, 16 ס"מ $=DC$.

62) 6 ס"מ.

63) 8 ס"מ $=AB$, 18 ס"מ $=DC$, 10 ס"מ $=DK$.

64) שאלת הוכחה

65) שאלת הוכחה

66) שאלת הוכחה

67) שאלת הוכחה

שאלון 571

שטחים והיקפים

תוכן העניינים:

שטחים והיקפים..... 601

הגדרות יסודיות: 602

משולשים: 602

שאלות – שטחים והיקפים של משולשים: 603

מרובעים: 604

הערות כלליות: 604

שאלות עם מקבילית: 605

שאלות עם מלבן: 606

שאלות עם מעוין: 607

שאלות עם ריבוע: 609

שאלות עם טרפז: 610

תשובות סופיות: 612

הגדרות יסודיות:

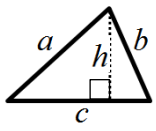
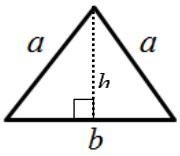
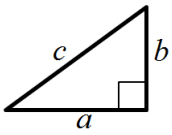
שטח – הגדרה:

גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.
שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון:
מטר ריבועי (m^2), ס"מ ריבועי (סמ"ר cm^2).

היקף – הגדרה:

היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

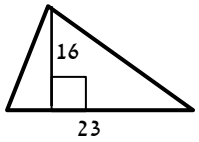
משולשים:

סוג	משולש כללי	משולש שווה שוקיים	משולש ישר זווית
איור			
שטח	$S=\frac{c\cdot h}{2}$	$S=\frac{b\cdot h}{2}$	$S=\frac{a\cdot b}{2}$
היקף	$P=a+b+c$	$P=2a+b$	$P=a+b+c$

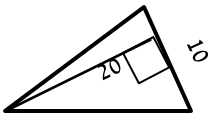
שאלות – שטחים והיקפים של משולשים:

1) מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):

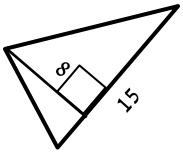
א.



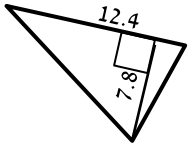
ב.



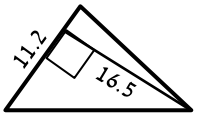
ג.



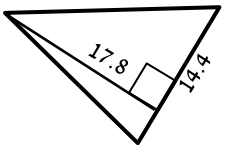
ד.



ה.

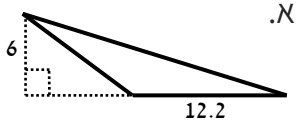


ו.

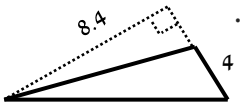


2) מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):

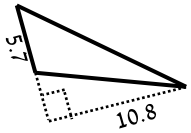
א.



ב.



ג.

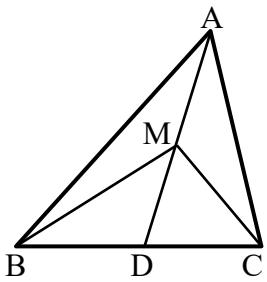


3) הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקודקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים השווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.

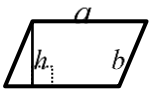
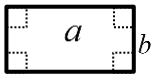
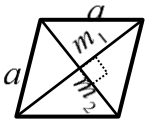
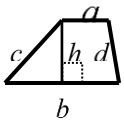
4) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.
M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווי שטח.

ב. $S_{MBC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.



מרובעים:

סוג	מקבילית	מלבן	מעוין	ריבוע	טרפז
איור					
שטח	$S=a\cdot h$	$S=a\cdot b$	$S=a\cdot h$ $S=\frac{m_1\cdot m_2}{2}$	$S=a^2$	$S=\frac{(a+b)h}{2}$
היקף	$P=2(a+b)$	$P=2(a+b)$	$P=4a$	$P=4a$	$P=a+b+c+d$

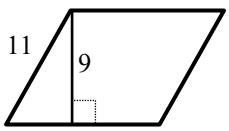
הערות כלליות:

- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע"י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה.
  כך ניתן לקבל את הנוסחה: $S=a\cdot h_a=b\cdot h_b$ כאשר h_a ו- h_b הם הגבהים לצלעות a ו- b בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע"י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע"י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו $h=c$ נקבל: $S=\frac{(a+b)c}{2}$.
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע"י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

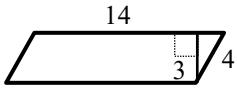
שאלות עם מקבילית:

5) חשב את השטחים וההיקפים של המקביליות הבאות (כל המידות בס"מ):

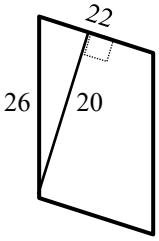
א.



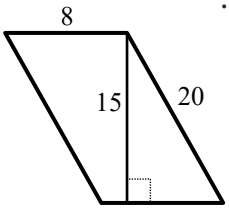
ב.



ג.



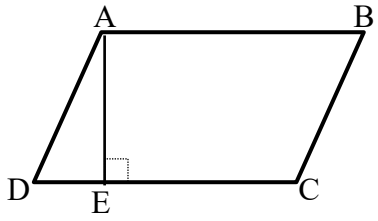
ד.



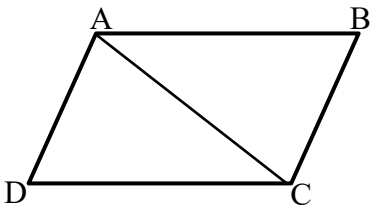
6) נתונה מקבילית ABCD.
מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ.
ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.
מצא את אורך הצלע BC.



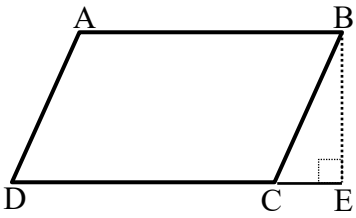
7) נתונה מקבילית ABCD.
מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.
ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.
חשב את היקף המקבילית.



8) נתונה מקבילית ABCD.
מורידים גובה מהקודקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE.
שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר
ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר.
נתון: CE = 6 ס"מ.

א. מצא את אורך הגובה BE.

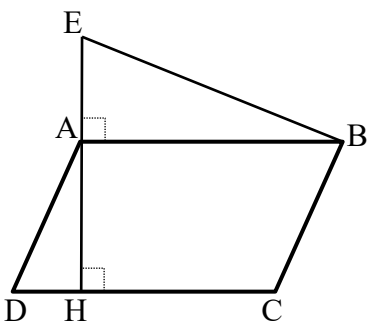
ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.



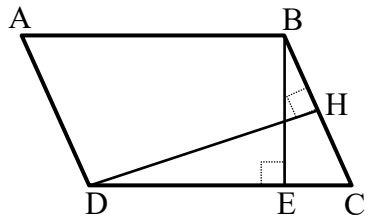
9) נתונה מקבילית ABCD.
מעלים אנך מהקודקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB.
מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ.
נתון: AE = 13 ס"מ, AD = 8 ס"מ.
שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

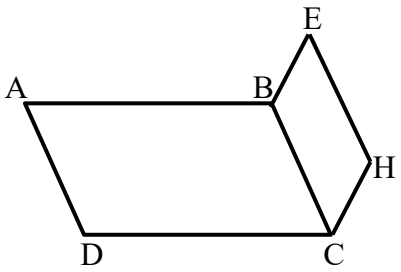


10) במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH לצלעות CD ו-BC בהתאמה.
נתון: 12 ס"מ = BE, 14.4 ס"מ = BC, 15 ס"מ = DH.



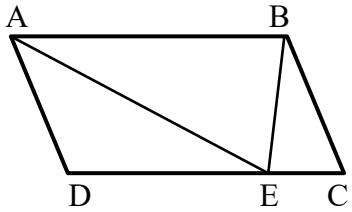
א. חשב את שטח המקבילית ABCD.
ב. חשב את אורך הצלע AB.
ג. חשב את היקף המקבילית.

11) נתונה המקבילית ABCD.
על הצלע BC בונים מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ.
ידוע כי היקף הצורה ABEHCD הוא 94 ס"מ.
נתון: 15 ס"מ = BC.

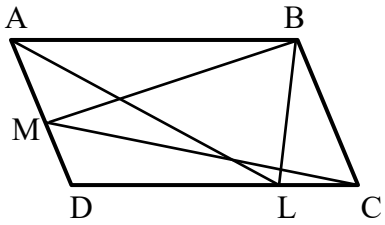


א. חשב את אורך הצלע AB.
ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

12) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודה E נמצאת על DC.
הוכח כי: $S_{AEB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.



13) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודות M ו-L נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה.
הוכח כי: $S_{BMC}=S_{ALB}$.



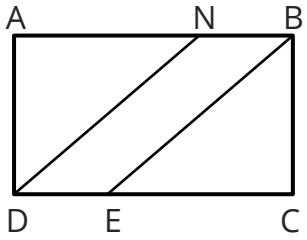
שאלות עם מלבן:

14) במלבן ABCD אורכי הצלעות הם: 12 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BC.
מצאו את ההיקף של המלבן.

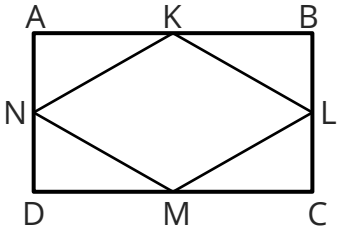
15) במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ.
מצאו את שטח המלבן.

16) במלבן ABCD נתון: 11 ס"מ = DC, 9 ס"מ = AD.
מצאו את האורך של האלכסון AC.

17) המרובע ABCD הוא מלבן.
הישרים DN ו-BE מקבילים.
נתון: 32 ס"מ = AB, 30 ס"מ = DN ו-8 ס"מ = BN.
הוכח כי מרובע NBED הוא מקבילית וחשב את שטחה.

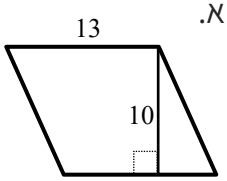


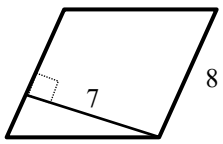
18) הנקודות K, L, M ו-N הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD
ו-AD בהתאמה במלבן ABCD.
נתון כי היקף המלבן הוא 120 ס"מ וכי שטחו
הוא 836 סמ"ר.
חשב את שטחו של המרובע KLMN.

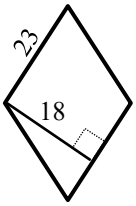


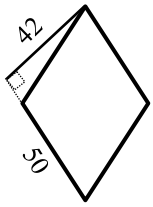
שאלות עם מעוין:

19) חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס"מ):

א.


ב.


ג.


ד.


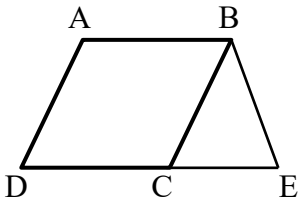
20) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
נתון: 3 ס"מ = AO, 4 ס"מ = BO. מצא את אורך צלע המעוין.

21) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O.
נתון: 12 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BO. מצא את AO.

22) במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין.
נתון: 20 ס"מ = AB.
א. חשב את אורך האלכסון BD.
ב. חשב את שטח המעוין.

23) נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס"מ ושטח המעוין הוא 35 סמ"ר. חשב את היקף המעוין.

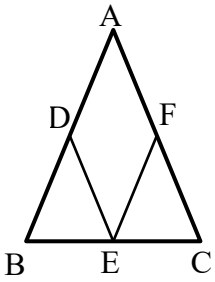
24) נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס"מ.
מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין
כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי: 6 ס"מ = CE.



א. איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.

ב. חשב את היקף הצורה ABECD.

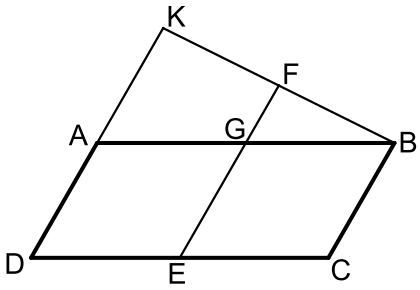
25) נתון משולש שווה שוקיים ABC, (AB =AC).
מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-D, E ו-F
ומעבירים את הקטעים DE ו-EF כך שהמרובע ADEF הוא מעוין.
נתון: 12 ס"מ = BC, וכי היקף המשולש ABC הוא 48 ס"מ.



א. מצא את אורך צלע המעוין ADEF.

ב. חשב את היקף המעוין ADEF.

26) המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדולה פי 2 מהצלע AD. ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה K ומחברים אותה לקודקוד B. מעבירים את הקטע FE כך ש-F היא אמצע הקטע BK. EF חותך את הצלע AB בנקודה G ומקביל לצלע AD.



א. הוכח כי המרובע AGED הוא מעוין.

ב. שטח המעוין AGED הוא 20 סמ"ר.
חשב את שטח המרובע DCBK אם ידוע
כי A היא אמצע הקטע DK.

שאלות עם ריבוע:

27) נתון ריבוע ABCD בעל אורך צלע של 6 ס"מ.

א. חשב את שטח הריבוע.

ב. חשב את היקף הריבוע.

ג. חשב את אורך האלכסון בריבוע.

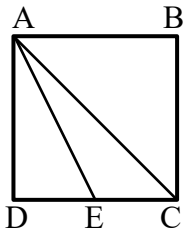
28) שטחו של ריבוע ABCD הוא 49 סמ"ר.

א. מהו אורך צלע הריבוע?

ב. מהו אורך האלכסון בריבוע?

ג. מהו היקף הריבוע?

29) בריבוע ABCD מעבירים את הקטע AE כך ש-E היא אמצע הצלע DC ואת האלכסון AC.



שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.

א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. מצא את אורך אלכסון הריבוע.

ג. מצא את אורך הקטע AE.

30) חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

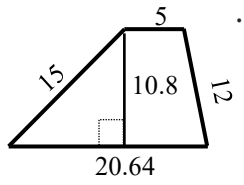
31) נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם.
אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו-9 ס"מ. חשב את היקף הריבוע.

32) נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם. שטח הריבוע הוא 36 ס"מ ואורך המלבן גדול ב-8 ס"מ מרוחבו. חשב את שטח המלבן.

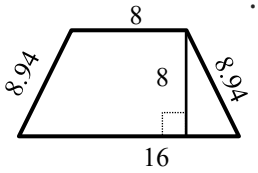
שאלות עם טרפז:

33) חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):

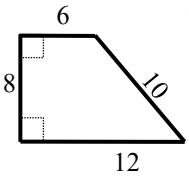
א.



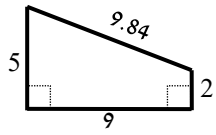
ב.



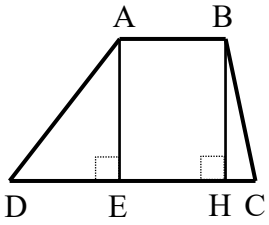
ג.



ד.



34) נתון טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.



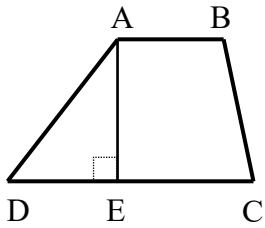
מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ.

ידוע כי: 6 ס"מ = DE, 2 ס"מ = HC.

שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר.

מצא את אורך בסיס הטרפז AB.

35) נתון טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.



מורידים גובה AE מהקודקוד A.

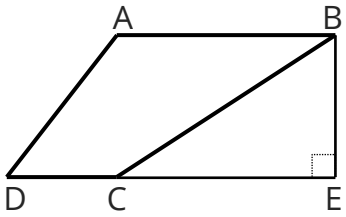
היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי:

18 ס"מ = AD, 16 ס"מ = BC, 12 ס"מ = AB.

א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.

36) נתון טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.



מהקודקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE

כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.

ידוע כי: 20 ס"מ = AB, 8 ס"מ = DC

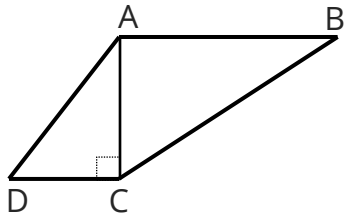
וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.

א. מצא את הגובה BE.

ב. נתון כי: $\sphericalangle D = 60°$, $\sphericalangle BCD = 130°$.

חשב את זווית $\sphericalangle A$ ואת זוויות המשולש BCE.

37) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.



האלכסון AC הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.

ידוע כי: 13 ס"מ = AB = AD, 17.7 ס"מ = BC.

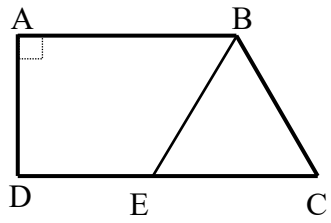
היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\sphericalangle B = 42.71°$.

א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. חשב את שטח הטרפז.

ג. חשב את זווית C.

38) הטרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$ הוא ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.



מהנקודה E שעל הבסיס DC מעבירים את הקטע BE

כך שהמשולש BCE הוא שווה צלעות עם 14 ס"מ = BC.

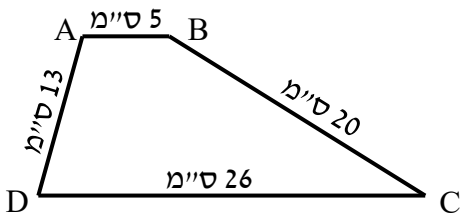
היקף הטרפז ABCD הוא 67 ס"מ ו- AD הוא 10 ס"מ.

א. מהו היקף הטרפז ABED?

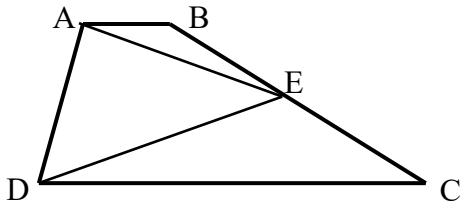
ב. חשב את שטח הטרפז ABED.

39) נתון טרפז ABCD שאורכי צלעותיו נתונים בסרטוט.

חשב את שטח הטרפז (פתור כתרגיל חישוב).



40) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



הנקודה E היא אמצע השוק BC.

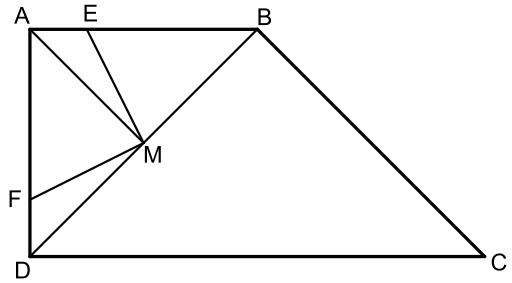
הוכח כי: $S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

41) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.

הנקודה M נמצאת על אמצע האלכסון BD של הטרפז וממנה מעבירים

את הקטעים ME ו-MF השווים זה לזה ומחברים אותה עם הקודקוד A.

נתון כי: $ME \perp MF$ וכי: $\sphericalangle DFM > 90°$.



א. הוכח: $\Delta AMF \cong \Delta BME$.

ב. נתון כי: $BC = \sqrt{32}$, $AE = FD = 1$.

כמו כן: $AM \parallel BC$.

(1) מצא את אורך הקטע BE.

(2) חשב את שטח הטרפז ABCD.

תשובות סופיות:

1) א. 184 סמ"ר ב. 100 סמ"ר ג. 60 סמ"ר ד. 48.36 סמ"ר
ה. 92.4 סמ"ר ו. 128.16 סמ"ר.

2) א. 36.6 סמ"ר ב. 16.8 סמ"ר ג. 30.78 סמ"ר.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) א. 48 ס"מ $P=$, 117 סמ"ר $S=$ ב. 36 ס"מ $P=$, 42 סמ"ר $S=$
ג. 96 ס"מ $P=$, 440 סמ"ר $S=$ ד. 56 ס"מ $P=$, 120 סמ"ר $S=$.

6) א. 10 ס"מ AB = ב. 8 ס"מ BC =.

7) 82 ס"מ $P=$.

8) א. 8 ס"מ BE = ב. 14 ס"מ AB =.

9) א. 16 ס"מ AB = ב. 58 ס"מ $P=$.

10) א. 216 סמ"ר $S=$ ב. 18 ס"מ AB = ג. 64.8 ס"מ $P=$.

11) א. 25 ס"מ AB = ב. 80 ס"מ $P=$.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) 40 ס"מ.

15) 60 סמ"ר.

16) 14.21 ס"מ $\approx \sqrt{202}$.

17) 144 סמ"ר.

18) 418 סמ"ר.

19) א. 52 ס"מ $P=$, 130 סמ"ר $S=$ ב. 32 ס"מ $P=$, 56 סמ"ר $S=$.
ג. 92 ס"מ $P=$, 414 סמ"ר $S=$ ד. 200 ס"מ $P=$, 2100 סמ"ר $S=$.

20) 5 ס"מ.

21) 8.94 ס"מ $\approx \sqrt{80}$.

22) א. $20\sqrt{3}$ ס"מ BD = ב. 346.41 סמ"ר.

23) 24.413 ס"מ.

24) א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש- BE=BC. ב. 38 ס"מ $P=$.

25) א. 9 ס"מ. ב. 36 ס"מ $P=$.

26) ב. 60 סמ"ר.

27) א. 36 סמ"ר ב. 24 ס"מ ג. 8.48 ס"מ.

28) א. 7 ס"מ ב. 9.89 ס"מ ג. 28 ס"מ.

29) א. 6.32 ס"מ ב. 8.94 ס"מ ג. 7.07 ס"מ.

30) 15 ס"מ.

31) 60 ס"מ.

32) 20 סמ"ר.

33) א. 52.64 ס"מ $P=$, 138.456 סמ"ר $S=$. ב. 41.88 ס"מ $P=$, 96 סמ"ר $S=$. ג. 36 ס"מ $P=$, 72 סמ"ר $S=$. ד. 25.48 ס"מ $P=$, 31.5 סמ"ר $S=$.

34) 7 ס"מ = AB.

35) א. 22 ס"מ = DC. ב. 15 ס"מ = AE.

36) א. 14 ס"מ = BE. ב. $\sphericalangle A=120°$, $\sphericalangle CBE=40°$, $\sphericalangle BCE=50°$, $\sphericalangle E=90°$.

37) א. 5 ס"מ = DC. ב. 108 סמ"ר $S=$. ג. $\sphericalangle C=137.29°$.

38) א. 53 ס"מ $P=$. ב. 145 סמ"ר $S=$.

39) 186 סמ"ר.

40) שאלת הוכחה.

41) ב. i. 3 ס"מ. ב. ii. 24 סמ"ר.

שאלון 571

המעגל

תוכן העניינים:

המעגל..... 614

הגדרות:..... 615

משפטים העוסקים במיתרים במעגל:..... 615

שאלות יסודיות – קשתות ומיתרים במעגל:..... 616

משפט אנך אמצעי למיתר:..... 618

שאלות – אנך אמצעי למיתר:..... 618

משפטים העוסקים בזוויות במעגל:..... 619

שאלות – זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:..... 619

שאלות – זווית היקפית הנשענת על קוטר:..... 622

משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:..... 623

שאלות – משיקים למעגל:..... 624

שאלות – משיק ומיתר:..... 625

משפטים העוסקים בשני מעגלים:..... 626

שאלות – שני מעגלים:..... 626

שאלות – משולשים ומעגל:..... 627

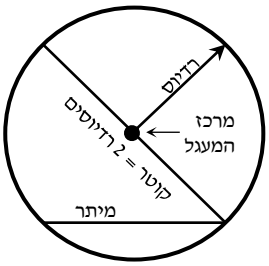
שאלות – מרובעים ומעגל:..... 628

שטחים והיקפים במעגל:..... 629

תשובות סופיות:..... 632

הגדרות:

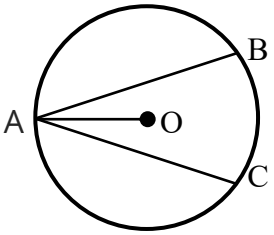
- מעגל – המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.
- הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.
- רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.
- היקף מעגל = $2\pi R$.
- שטח מעגל = πR^2.
- קשת – חלק מהיקף המעגל.
- גזרה – חלק משטח המעגל.
- זווית מרכזית – זווית שקודקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית – זווית שקודקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים.



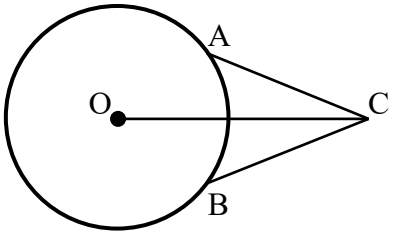
משפטים העוסקים במיתרים במעגל:

1. מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהפך.
2. על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהפך.
3. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
(משפט הפוך ל-3) מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

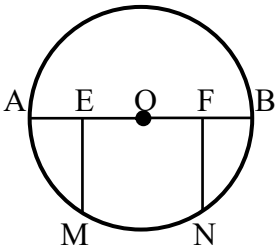
שאלות יסודיות – קשתות ומיתרים במעגל:



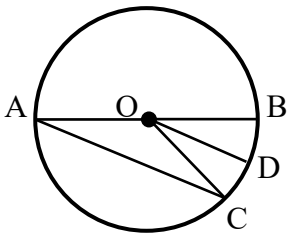
1) AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O.
הוכח כי AO חוצה את זווית BAC.



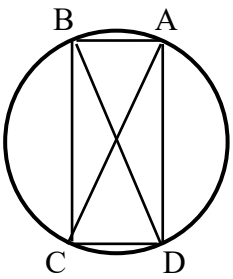
2) A ו-B הן שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל שמרכזו O.
נקודה C הנמצאת מחוץ למעגל מקיימת כי: $AC = BC$.
הוכח כי OC חוצה את זווית C.



3) הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
נתון כי: $EO = FO$, $EM \perp AB$, $FN \perp AB$.
הוכח כי $MN = EF$.

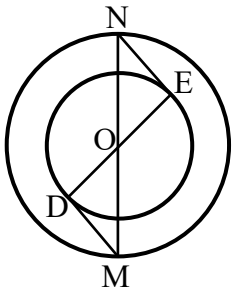


4) AB הוא קוטר במעגל שלפניך.
AC הוא מיתר ו-O מרכז מעגל.
הרדיוס OD חוצה את זווית BOC.
הוכח כי DO מקביל ל-AC.

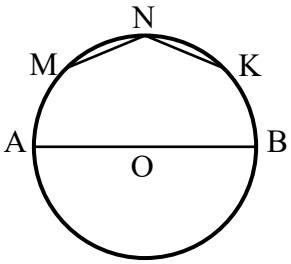


5) במעגל שלפניך AC ו-BD הם קטרים.
הוכח כי המרובע ABCD הוא מלבן.

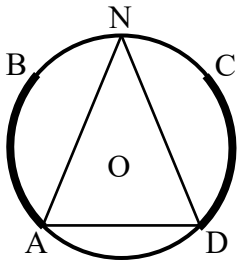
6) בשרטוט שלפניך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
הקטע MN הוא קוטר במעגל הגדול והקטע DE הוא קוטר במעגל הקטן.
מעבירים את הקטעים MD ו-NE.
הוכח כי MD שווה ל-NE.



7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
את הקשת העליונה של AB מחלקים ל-4 קשתות שוות, כלומר: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NK} = \overset{\frown}{KB}$.
חשב את זווית KNM.



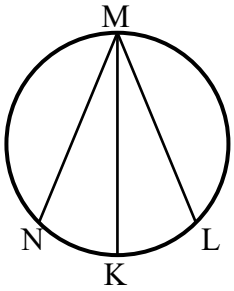
8) במעגל שלפניך נתון כי הקשתות המסומנות שוות זו"א: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. הנקודה N היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{BC}$.
הוכח כי המשולש AND הוא שווה שוקיים.



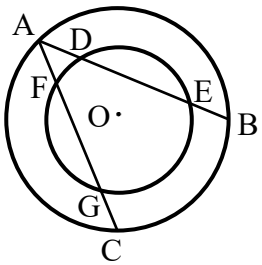
9) המיתרים MN ו-ML שווים זה לזה.
המיתר MK חוצה את זווית NML.

א. הוכח כי $\Delta KNM \cong \Delta KLM$.

ב. הוכח כי MK הוא קוטר במעגל.



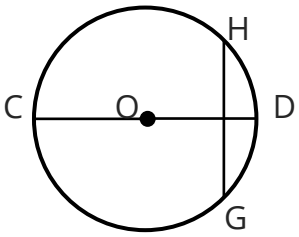
10) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
מעבירים את המיתרים AB ו-AC במעגל הגדול.
ידוע כי שני המיתרים שווים זה לזה.
מסמנים את נקודות החיתוך של המיתרים עם המעגל הקטן ב-D ו-E עבור המיתר AB, ו-F, G עבור המיתר AC.
הוכח: $DE = FG$.



משפט אנך אמצעי למיתר:

4. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר.
(משפט הפוך ל-4 (1)) רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.
(משפט הפוך ל-4 (2)) קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

שאלות – אנך אמצעי למיתר:

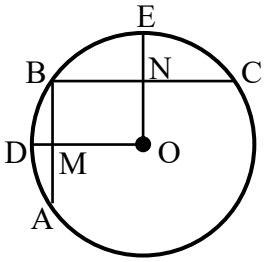


11) במעגל שמרכזו O המיתר GH מאונך לקוטר CD.

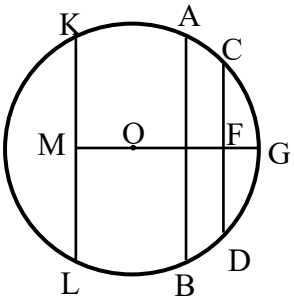
א. הוכח כי $GC = HC$.

ב. נתון כי: $\overset{\frown}{HDG} = 80°$.

בת כמה מעלות הקשת $\overset{\frown}{CG}$?



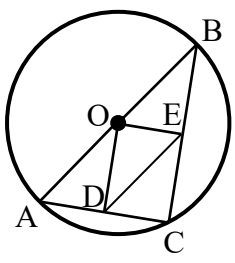
12) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
מעבירים את הרדיוסים OD ו-OE אשר חותכים את המיתרים AB ו-BC בנקודות M ו-N בהתאמה.
ידוע כי מרובע ONBM הוא מלבן. נתונות המידות הבאות: R = 29 ס"מ , MD = 8 ס"מ, NE = 9 ס"מ.
חשב את אורך כל אחד מהמיתרים AB ו-BC.



13) CD, AB ו-KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O,
והם חותכים את הקטע MG, העובר במרכז המעגל,
בנקודות E, F ו-M בהתאמה.
נתון $CF = DF$, $KL \parallel CD$.

א. הוכח: $KM = LM$.

ב. נתון בנוסף כי: $AB \perp MG$, $ML = BE$.
הוכח: $MO = EO$.



14) ABC הוא משולש החסום במעגל O. המיתר AB הוא קוטר במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה. מעבירים את הקטעים OD ו-OE וידוע כי: $OE \perp BC$, $OD \perp AC$.
הוכח כי DE שווה באורכו לרדיוס המעגל.

משפטים העוסקים בזוויות במעגל:

5. שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן.
(משפט הפוך ל-5) זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.

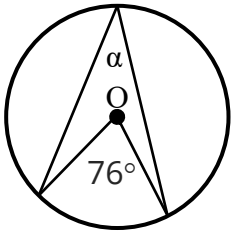
6. זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

7. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.
(משפט הפוך ל-7) מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

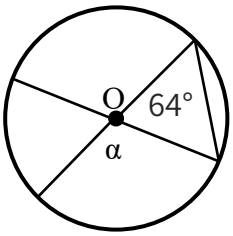
שאלות – זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:

15) נתונים המעגלים הבאים שמרכזם הוא O.
חשב את הזווית α בכל אחד מהמקרים.

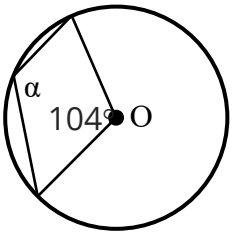
א.



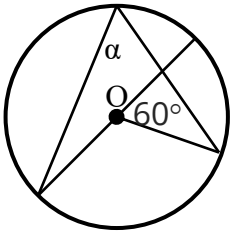
ב.



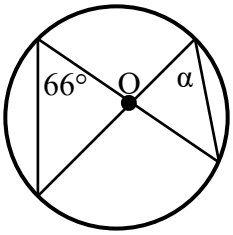
ג.



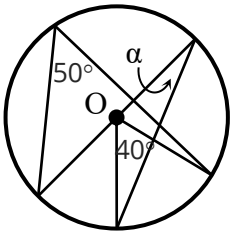
ד.



ה.

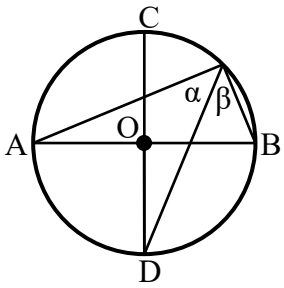


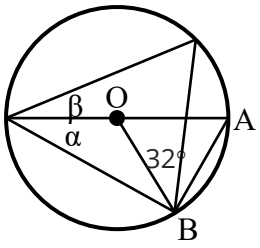
ו.

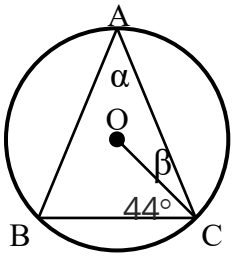


16) במעגלים הבאים שמרכזם O מופיעים הנתונים לידם.
חשב את הזוויות α ו- β בכל אחד מהמקרים:

א. $AB = AC$ ב. ΔAOB - שווה צלעות. ג. AB, CD קטרים מאונכים זה לזה.

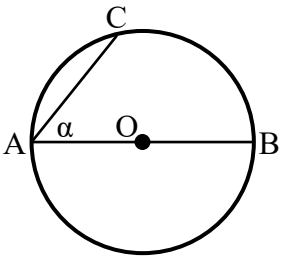




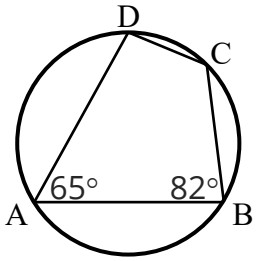


17) חשב את המבוקש בכל מקרה:

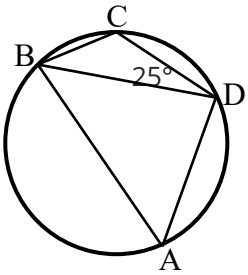
א. AB קוטר, $\overset{\frown}{AC} = 84°$
חשב את α.



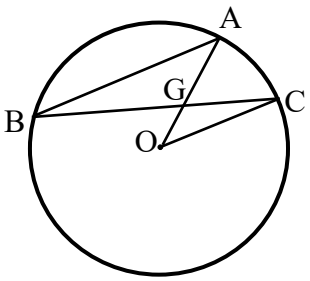
ב. $\overset{\frown}{DC} = 52°$.
חשב: $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{DC}, \overset{\frown}{AD}$.



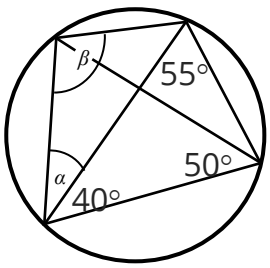
ג. $\overset{\frown}{DC} = 60°$.
חשב $\sphericalangle BAD$.



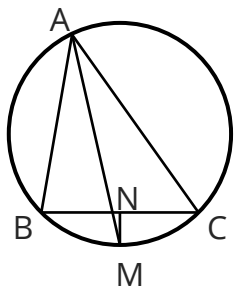
18) AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.
נתון: $\sphericalangle AGC = 60°$, $AB \parallel CO$.
חשב את גודלה של הזווית $\sphericalangle AOC$.



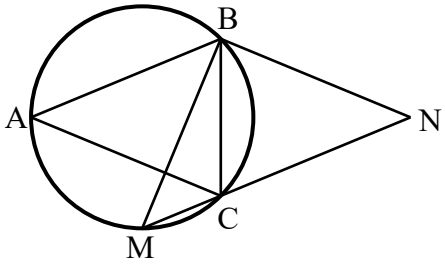
19) חשב את גודל הזוויות α ו- β במעגל הנתון.



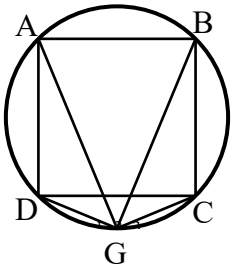
20) המשולש ABC חסום במעגל.
המיתר AM חוצה את זווית A.
מעבירים אנך מהנקודה M לצלע BC
החותך אותה בנקודה N.
הוכח: $BN = CN$.



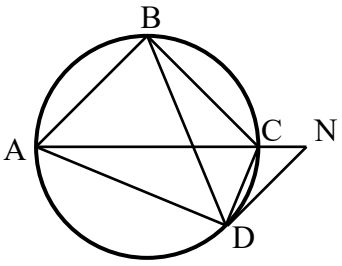
21) בסרטוט שלפניך נתון כי המשולשים
ABC ו-BMN הם שווי שוקיים $(AB = AC\ ,\ BM = BN)$.
זווית הראש במשולש BMN היא $94°$.
חשב את זווית ACB.



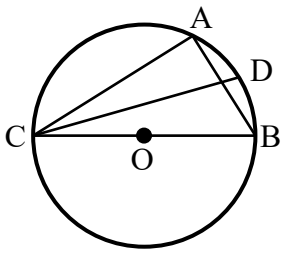
22) במעגל שלפניך חסום ריבוע ABCD.
הנקודה G נמצאת על היקף המעגל.
ממנה מעבירים מיתרים לכל קדקוד
כך שנוצרות הזוויות $\sphericalangle G_1$, $\sphericalangle G_2$, $\sphericalangle G_3$.
הוכח כי $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3$ ומצא אותן.



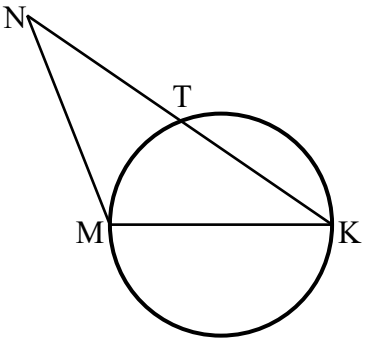
23) המרובע ABCD חסום במעגל.
ממשיכים את האלכסון AC עד לנקודה N
ומחברים אותה עם הקודקוד D
כך שמתקיים: $AB \parallel DN$.
הוכח כי זוויות המשולשים ΔADN
ו- ΔBDC שוות.



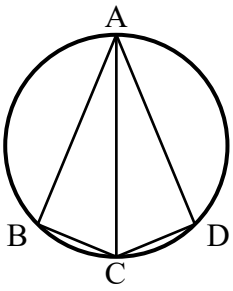
שאלות – זווית היקפית הנשענת על קוטר:



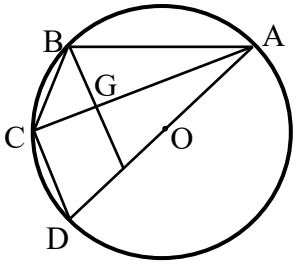
24) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-BC הוא קוטר. מעבירים את המיתר CD
המקיים: $\sphericalangle DCB = 20°$.
מצא את זווית CAD.



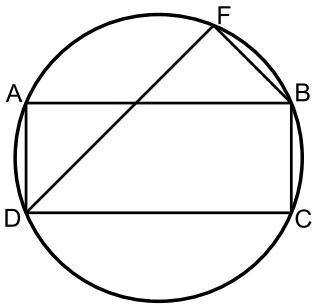
25) MK הוא קוטר במעגל שלפניך.
הקטע KN חותך את המעגל בנקודה T.
מתקיים: $KT = NT$.
הוכח כי: $MK = NM$.



26) מרובע ABCD חסום במעגל כאשר האלכסון AC הוא קוטר וחוצה את זווית BCD.
הוכח כי ABCD הוא דלתון.



27) AB, AC, AD, BC ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר AD עובר ב-O).
הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G.
נתון: $BE \parallel CD$, $BG = GE$.
הוכח: $BC = CD$.



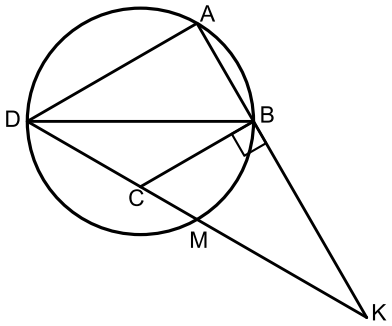
28) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- a.

א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.

ב. נתון גם כי: $BC = BF$.

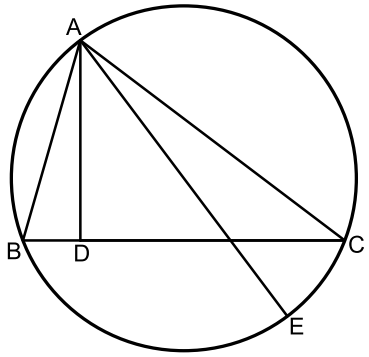
הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

29) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.
מהנקודה D מעבירים את הקטע DK החותך את היקף המעגל בנקודה M.
מסמנים על הקטע DK נקודה C ומחברים את BC כך שהמשולש BCK הוא ישר זווית $(\sphericalangle CBK = 90°)$. ידוע כי: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BM}$ וכן: $\sphericalangle BCK = 2\sphericalangle BDC$.



א. הוכח את הטענות הבאות:
(1) BD הוא קוטר במעגל.
(2) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית.
ב. ידוע כי גובה הטרפז שווה לרדיוס המעגל R.
(1) הבע באמצעות R את אורכי בסיסי הטרפז ABCD.
(2) הבע באמצעות R את היקף המשולש ADK.

30) משולש ABC חסום במעגל.
AD גובה לצלע BC ו-AE קוטר במעגל.



א. הוכח: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$.
נתון גם כי: $CE = \sqrt{21}, AD = 6, CD = 8$.
ב. חשב את רדיוס המעגל.

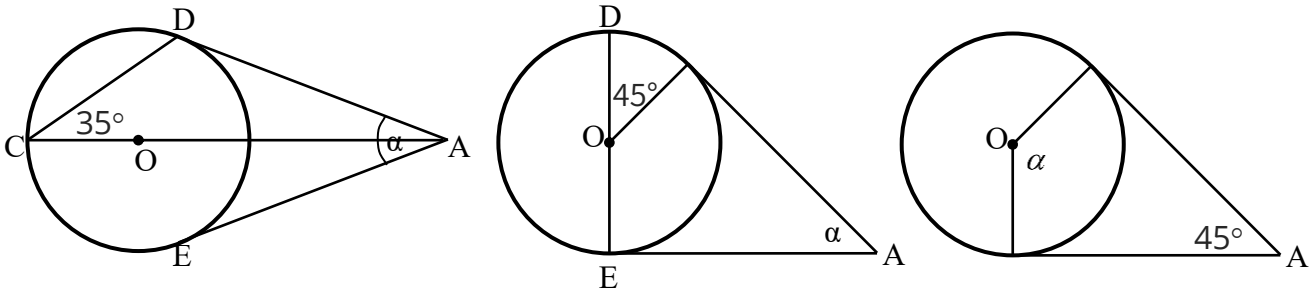
משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:

8. משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
(משפט הפוך ל-8) קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
9. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
10. קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.
11. הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

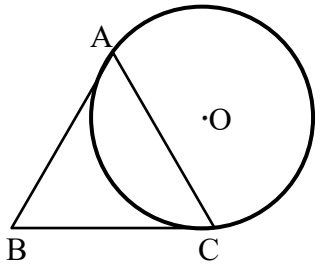
שאלות – משיקים למעגל:

31) באיורים שלפניך נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A שמחוץ למעגל. מרכזי המעגלים מסומן ב-O. מצא את α בכל מקרה.

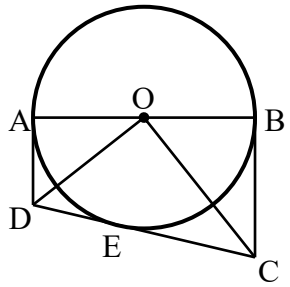
א. ב. ג.



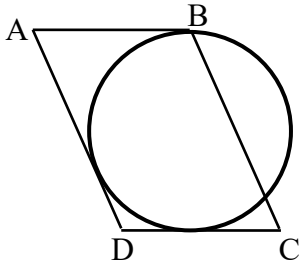
32) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
המעגל O משיק לצלעות AB ו-BC בנקודות A ו-C.
הוכח כי ABC הוא שווה צלעות.



33) במעגל O מעבירים קוטר AB ושלושה משיקים AD, CD ו-BC. E היא נקודת ההשקה של CD עם המעגל.
הוכח כי: $\sphericalangle COD = 90°$.



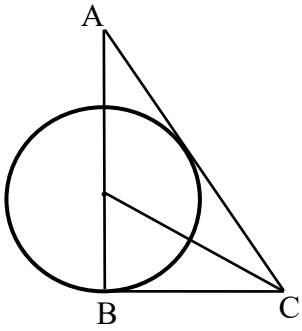
34) הצלעות AB, AD ו-DC של המקבילית ABCD משיקות למעגל בנקודות B , L ו-K בהתאמה (ראה שרטוט).
נתון: 14 ס"מ = BC, 6 ס"מ = CK.
חשב את היקף המקבילית.



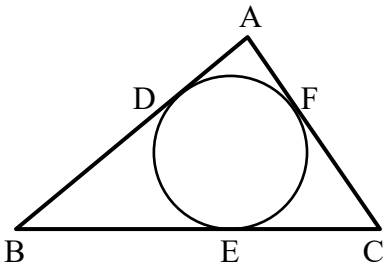
35) הצלעות AC ו-BC של המשולש ABC משיקות למעגל שמרכזו O , בנקודות K ו-B בהתאמה.
הצלע AB עוברת בנקודה O.
נתון: $AK = CK$, 15 ס"מ = AB.

א. חשב את גודלה של זווית A.

ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.



36) משולש ABC חוסם מעגל אשר משיק לצלעותיו בנקודות D, E ו-F כמתואר באיור.
נתון כי: 18 ס"מ = AC, 14 ס"מ = BD.
מצא את היקף המשולש ABC.

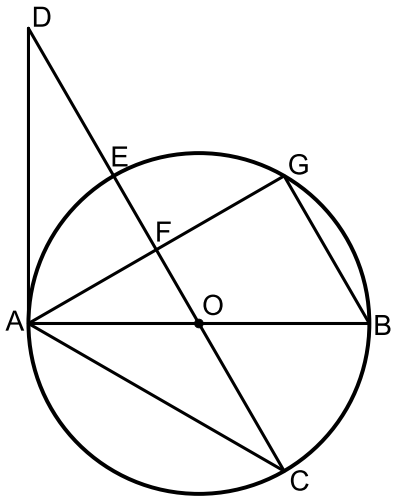


37) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
מהנקודה A מעבירים את המיתרים AC ו-AG
ואת המשיק AD כך שהמשולש ACD שווה שוקיים.
הישר CD חותך את היקף המעגל בנקודה E,
את המיתר AG בנקודה F ועובר דרך מרכז המעגל O.
המיתר BG מקביל לישר החותך CD.

א. חשב את זוויות המשולש ACD.

ב. הוכח כי: $AF = FG$.

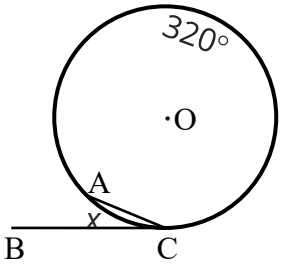
ג. רדיוס המעגל יסומן ב- R.
הוכח כי: $DC = 3R$.



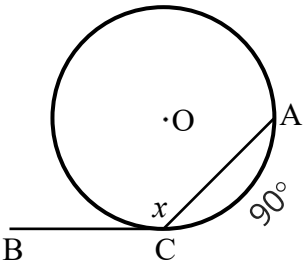
שאלות – משיק ומיתר:

38) באיורים שלפניך נתון מעגל שמרכזו O, מיתר AC ומשיק BC בנקודה C.
מצא את x.

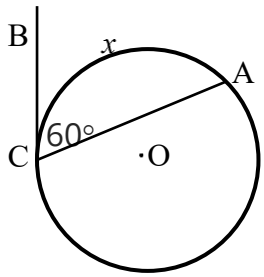
א.



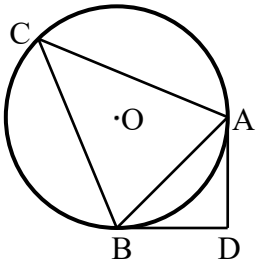
ב.



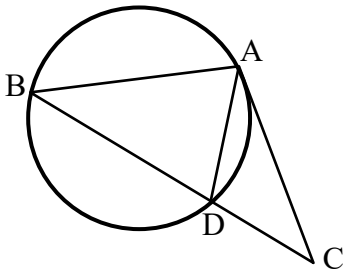
ג.



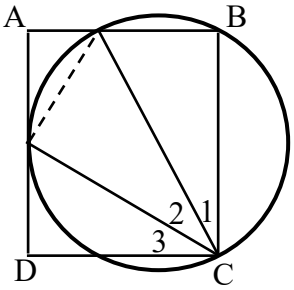
39) ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$
החסום במעגל שמרכזו O.
מהקדקודים A ו-B מעבירים משיקים אשר נחתכים
בנקודה D. ידוע כי זווית הבסיס במשולש ABC היא $68°$.
חשב את זווית ADB.



40) AC הוא משיק למעגל בנקודה A.
BC חותך את המעגל בנקודה D.
נתון כי $AD=CD$, הוכח: $AB=AC$.



41) הקודקודים B ו-C של המלבן ABCD מונחים על מעגל.
צלע AD משיקה למעגל בנקודה G והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H.
הוכח: $\sphericalangle C_2=\sphericalangle C_3$.
(הדרכה: סמן $\sphericalangle AGH=\alpha$).



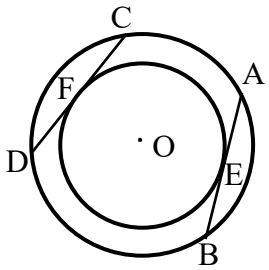
משפטים העוסקים בשני מעגלים:

12. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

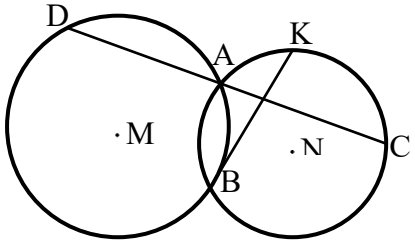
13. קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

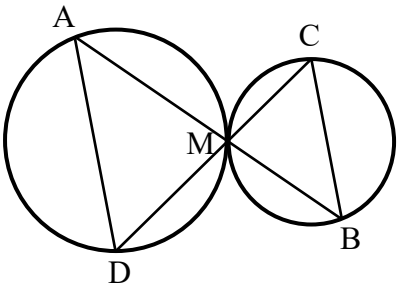
שאלות – שני מעגלים:

42) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
דרך שתי נקודות E ו-F שעל היקף המעגל הפנימי מעבירים משיקים אשר חותכים את המעגל החיצוני בנקודות A, B, C ו-D. הוכח כי המיתרים AB ו-CD הנוצרים באופן זה שווים.

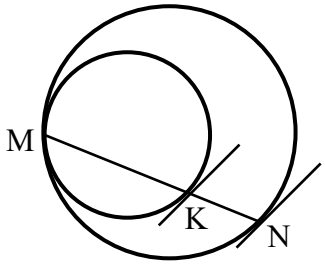


43) שני מעגלים M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B.
הישר CD עובר דרך הנקודה A.
מעבירים משיק למעגל M בנקודה B
החותך את המעגל N בנקודה K.
הוכח כי: $CK \parallel BD$.





44) שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה M.
דרך הנקודה M מעבירים שני ישרים חותכים.
האחד חותך את המעגל השמאלי בנקודה A
ואת הימני בנקודה B והאחר חותך את המעגל
השמאלי בנקודה D ואת הימני בנקודה C.
הוכח כי $AD \parallel BC$.



45) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה M.
מעבירים מיתר MN במעגל החיצוני אשר חותך את
המעגל הפנימי בנקודה K.
הוכח כי המשיקים לשני המעגלים
בנקודות N ו-K מקבילים זה לזה.

משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:

14. מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.

15. מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.

16. במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא $180°$.
(משפט הפוך ל-16) אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא $180°$,
המרובע בר חסימה במעגל.

17. במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
(משפט הפוך ל-17) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג
השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.

18. כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

שאלות – משולשים ומעגל:

46) AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.

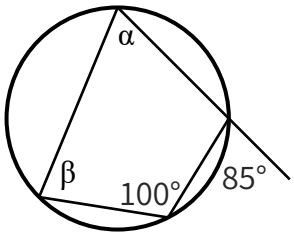
א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא על AD אז המשולש ABC
הוא שווה שוקיים.

ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החוסם את משולש ABC נמצא על AD?

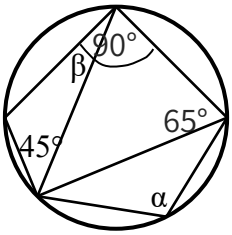
שאלות – מרובעים ומעגל:

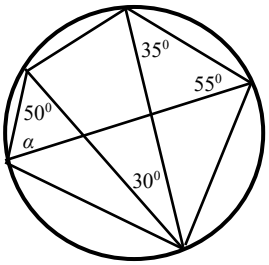
47) מצא את הנעלמים בכל אחד מהסרטוטים שלפניך:

א.



ב.

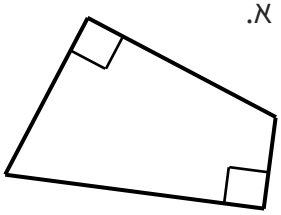




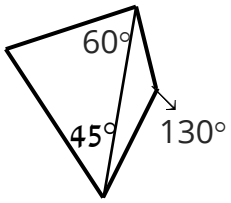
48) חשב את גודלה של הזווית α בסרטוט הבא:

49) קבע אלו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל:

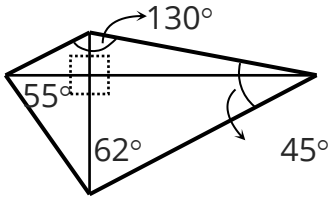
א.



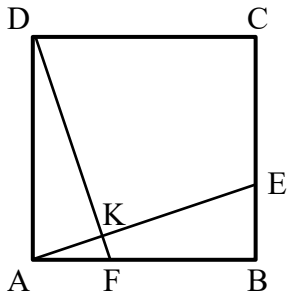
ב.



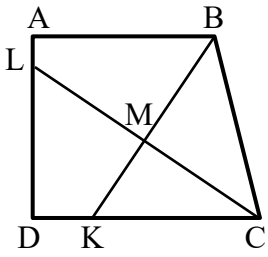
ג.



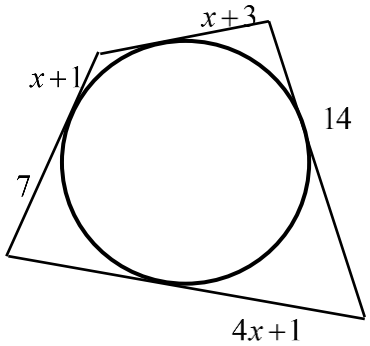
50) בריבוע ABCD נתון כי $AF = BE$.
הנקודה K היא חיתוך של הקטעים AE ו-DF.
הוכח כי את המרובע DKEC ניתן לחסום במעגל.



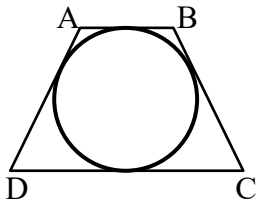
51) בטרפז ישר זווית ABCD שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו-DC הנקודות K ו-L נמצאות על הצלעות DC ו-AD בהתאמה, כך שהקטעים BK ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C בהתאמה.
חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M.
הוכח: את המרובע DKML ניתן לחסום במעגל.
הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



52) חשב את גודלו של x בשרטוט הבא:



53) בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AB \| CD)$
שהיקפו 60 ס"מ וזוויות הבסיס החדות
שלו הן $60°$ חסום מעגל.
מצא את אורכי צלעות הטרפז.



שטחים והיקפים במעגל:

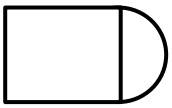
54) ענה על השאלות הבאות:

א. היקפו של עיגול הוא 44 ס"מ. חשב את שטחו.

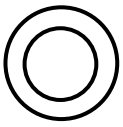
ב. הצורה שבאיור היא 3/4 עיגול.
היקף הצורה שווה ל-45 ס"מ.
חשב את אורך הרדיוס של העיגול.



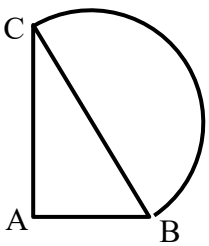
ג. שטח צורה המורכבת מריבוע וחצי עיגול הוא 30 סמ"ר.
חשב את רדיוס חצי העיגול.



ד. שטח טבעת הוא 55π סמ"ר.
הרדיוס הפנימי הוא 3 ס"מ.
חשב את הרדיוס החיצוני של הטבעת.



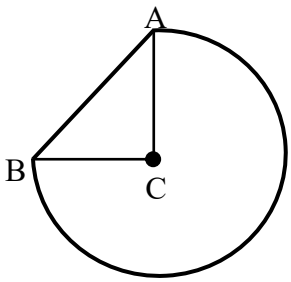
55) נתון משולש ישר זווית ABC, $(\sphericalangle A = 90°)$.
על היתר BC בונים חצי עיגול.
נתון: AB = 10 ס"מ , AC = 24 ס"מ , BC = 26 ס"מ.



א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

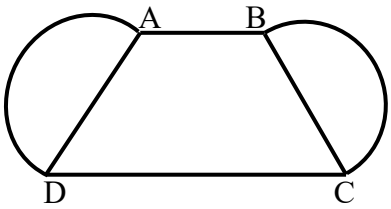
56) באיור שלפניך שלושה רבעי עיגול החסומים ע"י הקטע AB ומשולש ישר זווית ABC (C מרכז העיגול).
ידוע כי רדיוס העיגול הוא 14 ס"מ
וכי אורך הקטע AB הוא 19.8 ס"מ.



א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

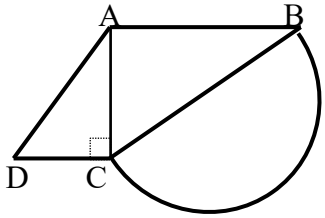
57) באיור שלפניך נתון טרפז שווה שוקיים ABCD, $(AB \parallel CD\ ,\ AD = BC)$.
על שוקי הטרפז בונים חצאי עיגולים.
נתון: AB = 10 ס"מ, CD = 16 ס"מ , BC = 12 ס"מ.
אורך גובה הטרפז הוא 11.6 ס"מ.



א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.

58) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$. מעבירים את האלכסון AC אשר מאונך לבסיסים AB ו-DC של הטרפז. על השוק BC בונים חצי עיגול.
נתון: AB = 24 ס"מ, AC = 18 ס"מ.
שטח הטרפז הוא 283.5 סמ"ר.



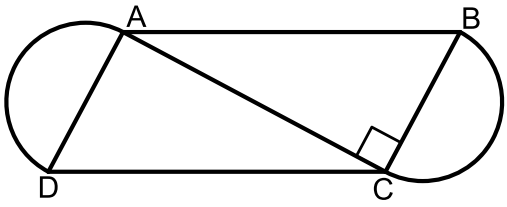
א. מצא את הבסיס DC.

ב. חשב את רדיוס העיגול.

ג. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ד. חשב את שטח הצורה המורכבת.

59) המרובע ABCD הוא מקבילית.
על הצלעות BC ו-AD בונים שני חצאי עיגול זהים בעלי רדיוס R.
מעבירים את האלכסון AC.
ידוע כי האלכסון AC מאונך לצלע BC.
נתון: $AC = 4R-1\ ,\ AB = 4R+1$.



א. מצא את רדיוס העיגולים, R.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

ג. חשב את השטח של הצורה המורכבת מהמקבילית ושני חצאי העיגולים.

60) נתון מעגל שאורך רדיוסו הוא 16 ס"מ.
חשב את אורך הקשת ואת שטח הגזרה המתאימות לזווית מרכזית בכל אחד מהמקרים הבאים:

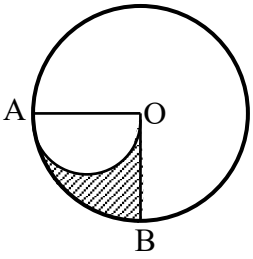
א. $60°$.

ב. $45°$.

ג. $270°$.

ד. $17°$.

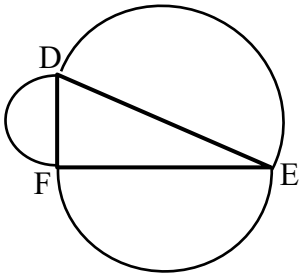
61) על הרדיוס OA של מעגל O בונים חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.
ידוע כי $\sphericalangle BOA = 90°$.



א. חשב את השטח המקווקו OBA
אם ידוע כי 10 ס"מ = OA.

ב. הוכח באופן כללי כי שטח הגזרה OBA
שווה לשטח חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.

62) על הצלעות של משולש ישר זווית ΔDEF $(\sphericalangle F = 90°)$
בונים חצאי מעגלים.
הוכח כי שטח חצי המעגל הבנוי על היתר שווה
לסכום שטחי חצאי המעגלים הבנויים על הניצבים.



תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה

2) שאלת הוכחה

3) שאלת הוכחה

4) שאלת הוכחה

5) שאלת הוכחה

6) שאלת הוכחה

7) $135°$.

8) שאלת הוכחה

9) שאלת הוכחה

10) שאלת הוכחה

11) א. שאלת הוכחה

ב. $140°$.

12) 40 ס"מ = AB, 42 ס"מ = BC.

13) שאלת הוכחה

14) שאלת הוכחה

15) א. $38°$ ב. $128°$ ג. $128°$ ד. $60°$ ה. $66°$ ו. $30°$.

16) א. $\alpha = 46° \ , \ \beta = 23°$ ב. $\alpha = 30° \ , \ \beta = 28°$ ג. $\alpha = \beta = 45°$.

17) א. $\alpha = 48°$ ב. $\overset{\frown}{AD} = 112° \ , \overset{\frown}{BC} = 78° \ , \overset{\frown}{AB} = 118°$ ג. $55°$.

18) $40°$.

19) $\alpha = 35° \ , \ \beta = 95°$.

20) שאלת הוכחה

21) $68.5°$.

22) $\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_2 = \sphericalangle G_3 = 45°$

23) שאלת הוכחה

24) $110°$.

25) שאלת הוכחה

26) שאלת הוכחה

27) שאלת הוכחה

28) א. שאלת הוכחה ב. $R = 1.3a$.

29) א. שאלות הוכחה ב. i. $BC = \frac{2}{\sqrt{3}}R \ , \ AD = R\sqrt{3}$ ב. ii. $P_{ADK} = 3R\left(1+\sqrt{3}\right)$.

30) א. שאלת הוכחה ב. 5.5.

31) א. $\alpha = 135°$ ב. $\alpha = 45°$ ג. $\alpha = 40°$.

32) שאלת הוכחה

33) שאלת הוכחה

34) 48 ס"מ

35) א. $30°$ ב. 5 ס"מ.

36) 64 ס"מ.

37) א. $120° \ , \ 30° \ , \ 30°$. ב. ג. הוכחות.

38) א. $x = 20°$ ב. $x = 135°$ ג. $x = 120°$.

39) $92°$

40) שאלת הוכחה

41) שאלת הוכחה

42) שאלת הוכחה

43) שאלת הוכחה

44) שאלת הוכחה

45) שאלת הוכחה

46) שאלת הוכחה

47) א. $\alpha=80°\ ,\ \beta=85°$

ב. $\alpha=110°\ ,\ \beta=20°$.

48) $\alpha=70°$.

49) ניתן לחסום את מרובע א' בלבד.

50) שאלת הוכחה

51) שאלת הוכחה

52) $x=2$

53) 15 ס"מ, 15 ס"מ, 7.5 ס"מ, 22.5 ס"מ.

54) א. $\frac{484}{\pi}$ סמ"ר $S=$. ב. 6.706 ס"מ $R=$. ג. 2.32 ס"מ $R=$. ד. 8 ס"מ $R=$.

55) א. 74.84 ס"מ $P=$.

ב. 385.46 סמ"ר $S=$.

56) א. 85.77 ס"מ $P=$.

ב. 559.814 סמ"ר $S=$.

57) א. 63.7 ס"מ $P=$.

ב. 263.89 סמ"ר $S=$.

58) א. 7.5 ס"מ $DC=$. ב. 15 ס"מ $R=$.

ג. 98.12 ס"מ $P=$. ד. 636.929 סמ"ר $S=$.

59) א. 4 ס"מ $R=$.

ב. 50 ס"מ $P_{ABCD}=$.

ג. $120+16\pi\approx170.26$ סמ"ר $S=$.

60) א. $5\frac{1}{3}\pi$ ס"מ $l=$, $42\frac{2}{3}\pi$ סמ"ר $S=$

ב. 4π ס"מ $l=$, 32π סמ"ר $S=$

ג. 24π ס"מ $l=$, 192π סמ"ר $S=$

ד. 1.51π ס"מ $l=$, 12.08π סמ"ר $S=$.

61) א. 12.5π סמ"ר.

62) שאלת הוכחה

שאלון 571

פרופורציה ודמיון

תוכן העניינים:

פרופורציה ודמיון 634

משפט תאלס: 635

שאלות יסודיות – משפט תאלס: 635

שאלות יסודיות – הרחבות של משפט תאלס: 637

משפט חוצה הזווית: 639

שאלות יסודיות – משפט חוצה זווית: 640

שאלות המשלבות את משפט תאלס ומשפט חוצה זווית: 642

דמיון משולשים: 643

הגדרה: 643

משפטי הדמיון: 643

שאלות העוסקות במשפט דמיון ז.ז: 644

שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.ז.צ: 645

שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.צ: 646

שאלות שונות – דמיון משולשים: 646

יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים: 648

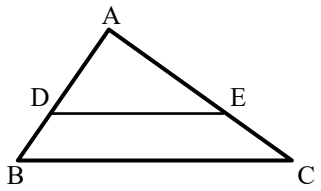
תשובות סופיות: 652

משפט תאלס:

- שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.
- משפט הפוך: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים הישרים מקבילים.

- משפט תאלס + ההפוך:

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$$

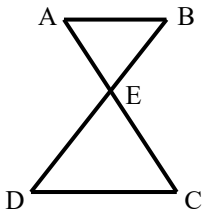


- משפט תאלס המורחב + ההפוך:

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

- משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך:

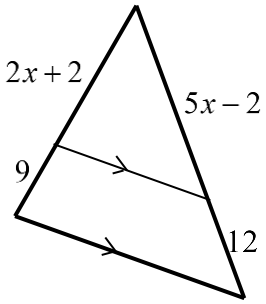
$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{BE}{DE}=\frac{AE}{CE}=\frac{AB}{CD}$$



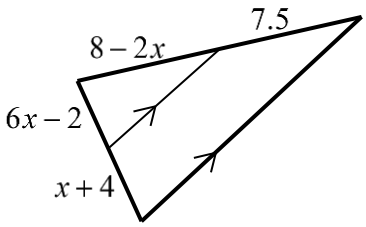
שאלות יסודיות – משפט תאלס:

1) מצא את ערכו של x בשרטוטים הבאים:

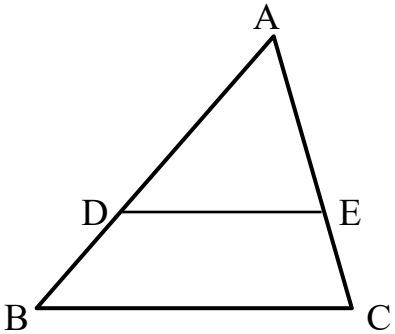
א.



ב.

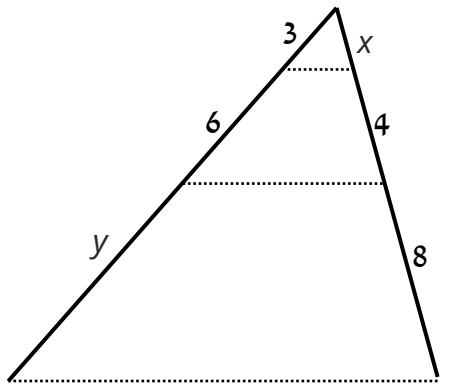


2) בסרטוט שלפניך נתון $DE \parallel BC$.
30 ס"מ = AC, 20 ס"מ = AE, 12 ס"מ = BD.
מצא את אורך הקטע AD.

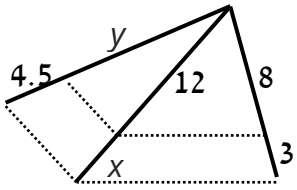


3) חשב את x ואת y בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

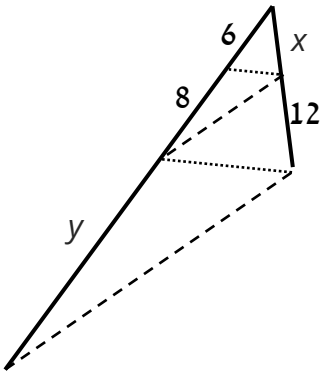
א.



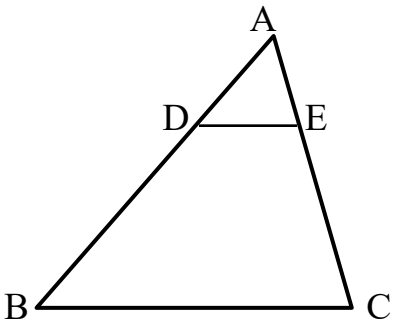
ב.



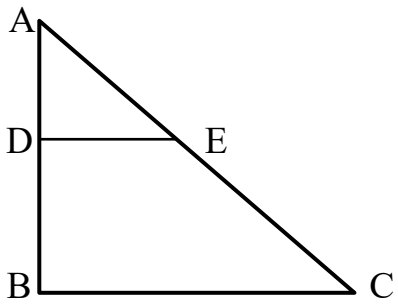
ג.



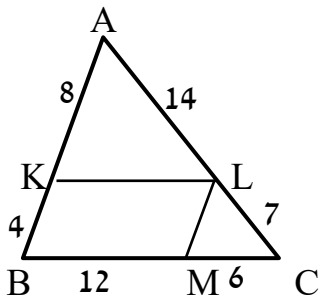
4) בסרטוט שלפניך נתון:
$DE \parallel BC$, $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{7}$, $AC =$ 36 ס"מ.
מצא את אורכי הקטעים AE ו-CE.



5) במשולש שלפניך נתון $DE \parallel BC$.
כמו כן: $\sphericalangle ADE = 90°$
וכן: $AE = BD =$ 10 ס"מ, $DE =$ 8 ס"מ.
מצא את אורכי הקטעים AD, CE ו-BC.



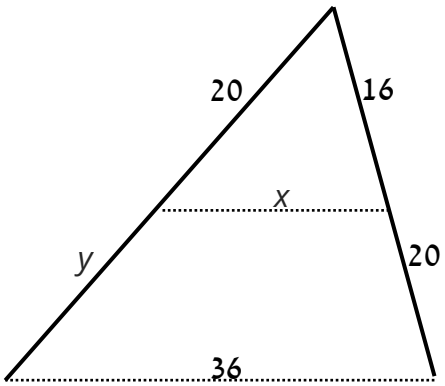
6) מרובע KLMB חסום במשולש ABC.
הנתונים המספריים רשומים בסרטוט.
כל המידות הן בס"מ.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.



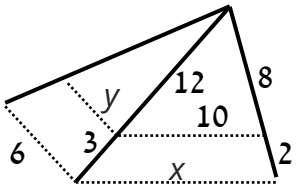
שאלות יסודיות – הרחבות של משפט תאלס:

7) חשב את x ואת y בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

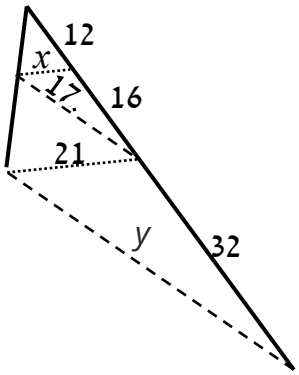
א.



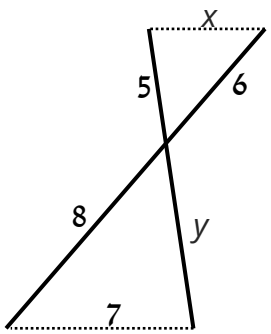
ב.



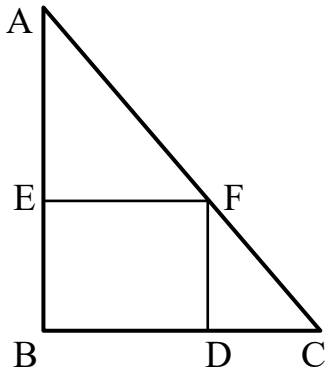
ג.



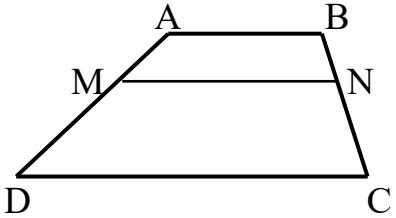
ד.



8) המרובע EFBD הוא מלבן החסום במשולש ישר זווית ABC . נתון כי: 20 ס"מ = AB, 15 ס"מ = BC, 18 ס"מ = AF.
מצא את אורכי צלעות המלבן.



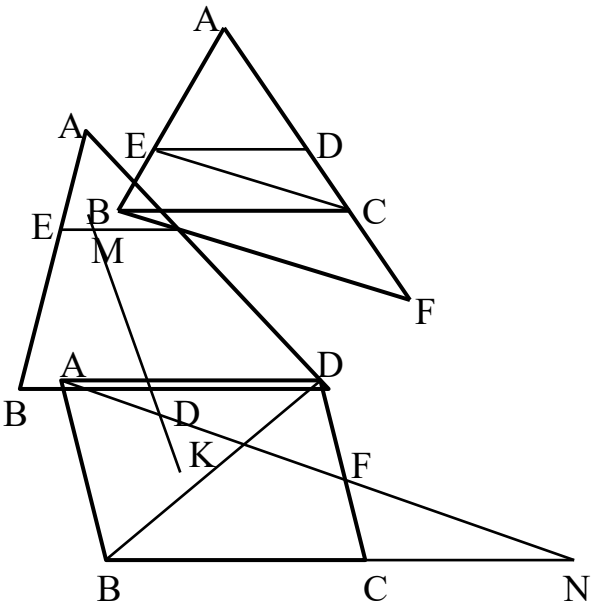
9) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.
מעבירים קטע MN אשר מקביל לבסיסים.
הוכח: $\frac{AM}{DM} = \frac{BN}{CN}$.



10) באיור שלפניך נתון: $DE \parallel BC \ , \ CE \parallel BF$.
הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CF}$.

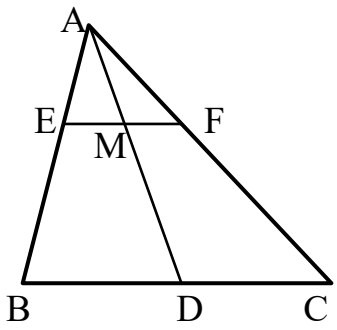
ב. $AC^2 = AD \cdot AF$.



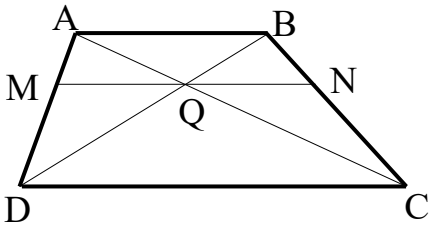
11) במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N.
הוכח את הטענות הבאות:

א. $\frac{NK}{AK} = \frac{AK}{KF}$.

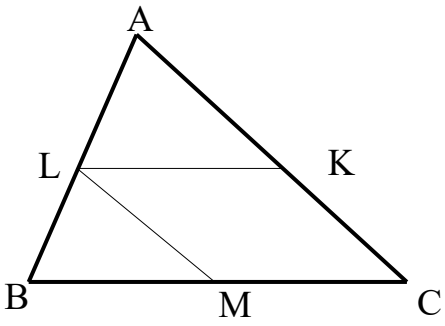
ב. $\frac{BC}{CN} = \frac{DF}{CF}$.



12) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.
הקטע EF מקביל ל-BC וחותך את התיכון בנקודה M.
הוכח כי: $EM = FM$.



13) בטרפז ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה Q.
בנקודה Q העבירו קטע המקביל לבסיסי הטרפז וחותך את שוקי הטרפז בנקודות M ו-N כמתואר בשרטוט.
נתון: 18 ס"מ = DC, 9 ס"מ = 3,DQ ס"מ = BQ.
חשב את גודל הקטע MQ.

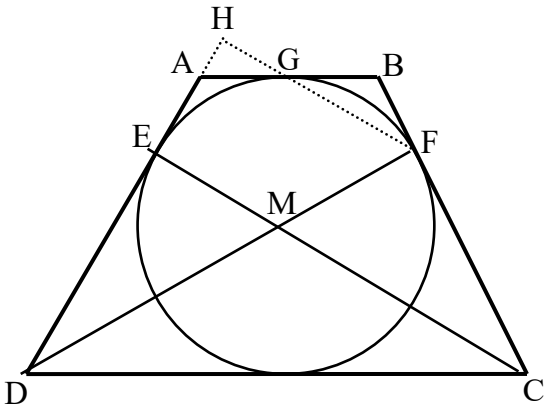


14) בשרטוט נתון: $\frac{AK}{CK} = \frac{CM}{BM} = \frac{AL}{BL}$.

א. הוכח: המרובע KLMC הוא מקבילית.

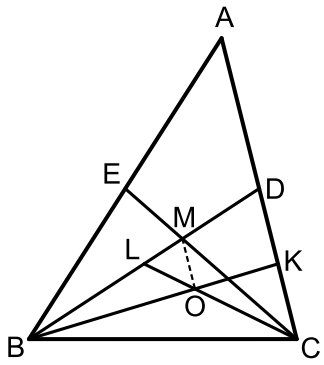
ב. נתון: $AL = 1.5BL$, 10 ס"מ = BC.
חשב את אורך הקטע LK.

15) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים.
חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.



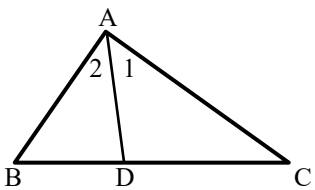
א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.
ב. חשב את זוויות הטרפז.
ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.

16) במשולש ABC מעבירים את התיכונים BD ו-CE
אשר נפגשים בנקודה M.
במשולש BDC מעבירים את התיכונים CL ו-BK
הנפגשים בנקודה O.
א. הוכח כי: $3LM = BL$.
ב. הוכח כי: $AC \parallel MO$.
ג. נתון: $S_{BLC} = 27$.
חשב את שטח המשולש MOL.



משפט חוצה הזווית:

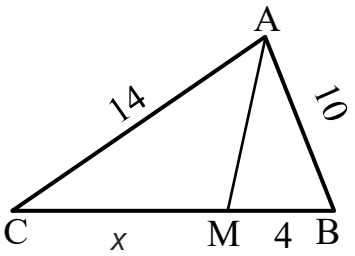
- חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהיפך.
אם: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ אז: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ולהיפך.



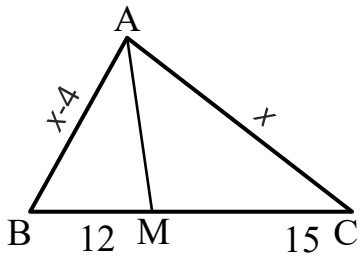
שאלות יסודיות – משפט חוצה זווית:

17) מצא את גודלו של x בסרטוטים הבאים אם נתון כי AM חוצה זווית A בכל המשולשים, כל הגדלים הם בס"מ:

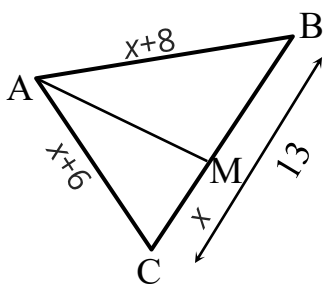
א.



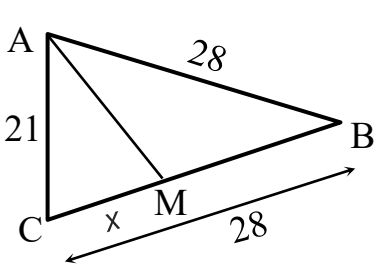
ב.



ג.



ד.



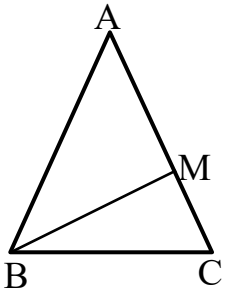
18) נתון משולש שווה שוקיים ABC, $(AB = AC)$.

ידוע כי היקפו הוא 28 ס"מ.

הקטע BM הוא חוצה זווית B.

נתון כי הקטע AM גדול פי 3 מהקטע MC.

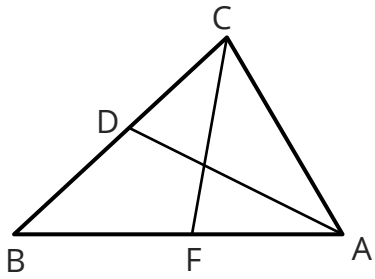
חשב את אורך הקטע MC.



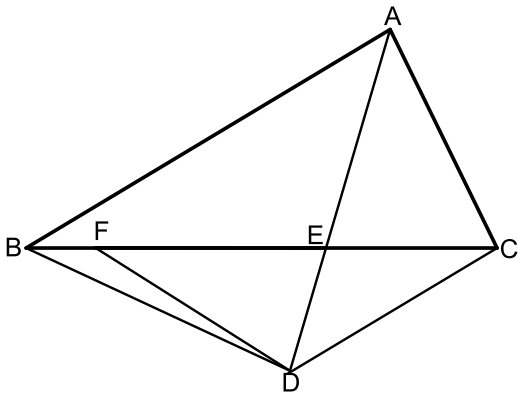
19) הקטעים AD ו-CF הם חוצי הזוויות A ו-C בהתאמה במשולש ABC.

נתון: $AB = 18$ ס"מ , $AC = 12$ ס"מ , $CD = 6$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע AF.



20) נתון משולש ABC. הקטע AE חוצה את זווית A של המשולש.
ממשיכים את AE עד לנקודה D כך שנוצר המשולש BDC.
F היא נקודה על הצלע BC המקיימת: $DF = FE = DC$.
הצלע AB מקבילה לצלע DC.



א. הוכח כי: $AC = EF$.

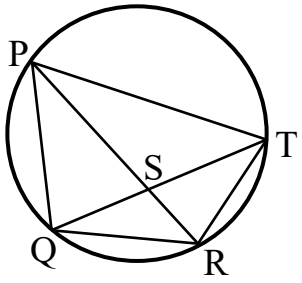
ב. הוכח: $\frac{AB}{BE} = \frac{FE}{CE}$.

ג. מסמנים נקודה G על AB ומחברים אותה
עם הנקודה D כך ש- $DG \parallel AC$.

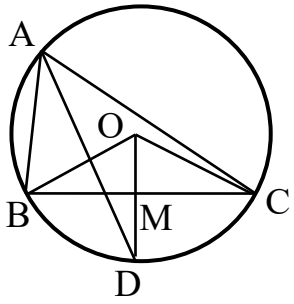
i. הוכח כי המרובע ACDG הוא מעוין.

ii. הוכח: $\frac{AB}{BE} = \frac{AG}{CE}$.

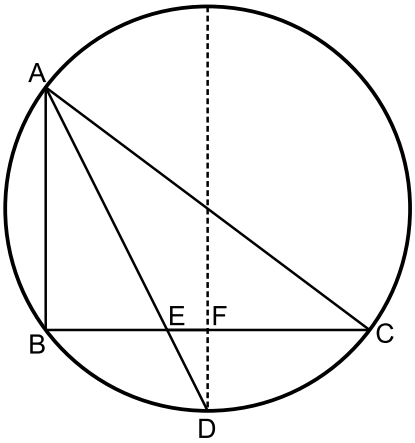
21) המרובע PQRT חסום במעגל.
נתון כי: $QR = RT$.
ידוע כי: 20 ס"מ $= PQ$, 28 ס"מ $= PT$, 24 ס"מ $= QT$.
חשב את אורך הקטע QS.



22) הנקודות A, B, C ו-D מונחות על היקפו של מעגל שמרכזו O.
הרדיוס DO חוצה את הזווית BOC.
נתון: 8 ס"מ $= AB$, 12 ס"מ $= AC$, 10 ס"מ $= BC$.
חשב את אורכו של הקטע MN.



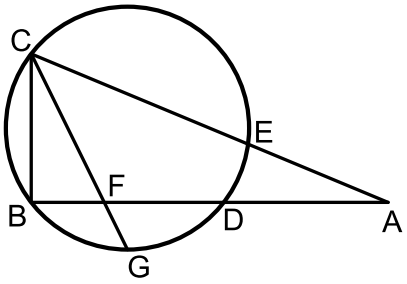
23) במעגל שרדיוסו הוא 10 ס"מ המיתרים AB ו-BC מאונכים זה לזה.
הנקודה D היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{BC}$. הקטע AD חותך את המיתר BC בנקודה E.
אורך המיתר AB הוא 12 ס"מ.



א. חשב את אורך הקטע BE.
מהנקודה D מעבירים מיתר החותך את
המיתר BC בנקודה F ומקביל למיתר AB.

ב. הוכח כי מיתר זה עובר דרך מרכז המעגל.

ג. חשב את אורך הקטע FE.

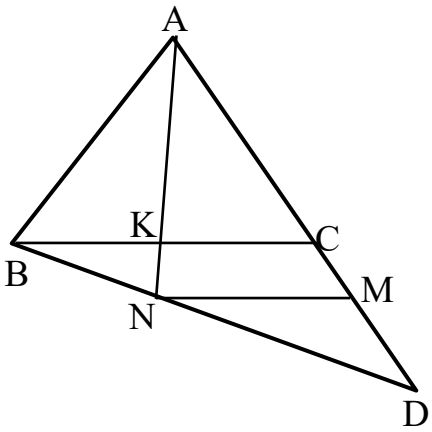


24) הישרים AB ו-AC חותכים את המעגל בנקודות D ו-E בהתאמה כך שהמיתרים BD ו-BC מאונכים זה לזה.
המיתר CG חוצה את הקשת הקטנה $\overset{\frown}{BGD}$.
וחותך את המיתר BD בנקודה F.
נתון: $\frac{AC}{AB}=\frac{13}{12}$. נסמן: $AB=t$.

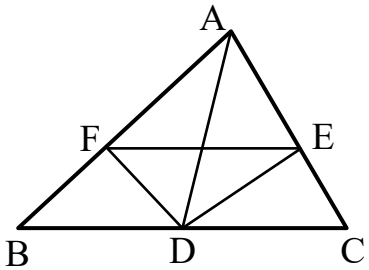
א. הבע באמצעות t את אורך המיתר BC.

ב. נתון כי רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ
וכי: $\frac{BF}{DF}=\frac{3}{5}$.
חשב את אורך הקטע AB.

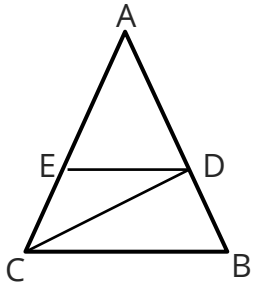
שאלות המשלבות את משפט תאלס ומשפט חוצה זווית:



25) נתון משולש ABC.
ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D.
מחברים את הנקודה D עם הקודקוד B.
מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A במשולש ABC.
המשך AK חותך את BD בנקודה N.
מעבירים את הקטע MN. נתון: $BC \parallel MN$.
הוכח: $\frac{AB}{AD}=\frac{CM}{DM}$.



26) נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
נתון כי DE הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADC$
וכי DF הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADB$.
הוכח: $EF \parallel BC$.

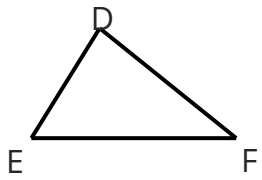
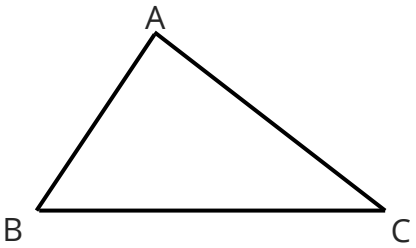


27) נתון משולש ABC. מעבירים את הקטעים CD ו-DE.
נתון כי: $DE \parallel BC$ ו- $AC=2BC$.
הקטע AC גדול פי 3 מהקטע DE.
הוכח כי: $\sphericalangle BCD=\sphericalangle ACD$.

דמיון משולשים:

הגדרה:

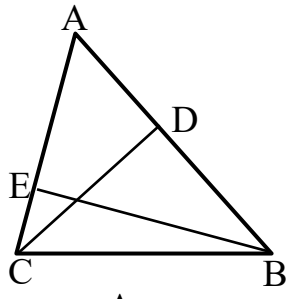
משולשים דומים הם משולשים ששווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות בהתאמה על אותו יחס.

יחס הדמיון ושוויונות	משולש ראשון	משולש שני
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ $\Updownarrow$ $\sphericalangle A = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle F$ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$		

משפטי הדמיון:

- משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז):
אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ):
אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזוויות שבניהן שווה אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ):
אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז):
אם בין שני משולשים שתי לצעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מבניהם שווה אז המשולשים דומים.

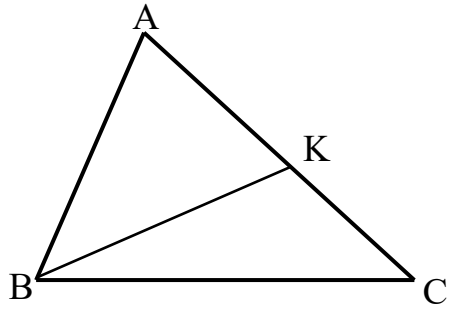
שאלות העוסקות במשפט דמיון ז.ז:



28) CD ו-BE הם גבהים במשולש ABC.

א. הוכח כי: $\Delta ABE \sim \Delta ACD$.

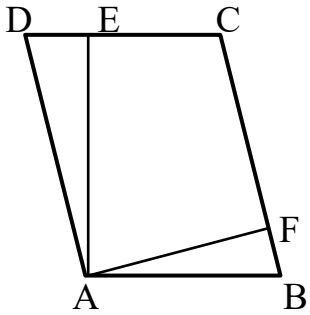
ב. נתון כי: 18 ס"מ = AB, 12 ס"מ = BE,
10 ס"מ = CD. חשב את אורך הצלע AC.



29) במשולש ABC העבירו את הקטע BK

כך ש-$\sphericalangle AKB = \sphericalangle ABC$.

הוכח: $\Delta AKB \sim \Delta ABC$.



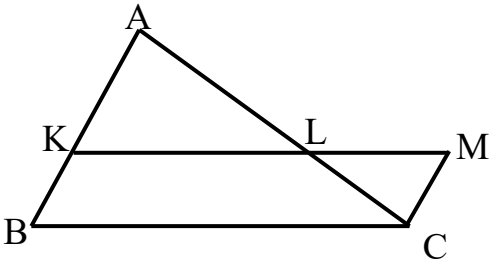
30) המרובע ABCD הוא מקבילית.

מעבירים גבהים AE ו-AF לצלעות DC ו-BC בהתאמה.

א. הוכח כי: $\Delta ADE \sim \Delta AFB$.

ב. הוכח כי: $DC \cdot AE = BC \cdot AF$

והסבר את המשמעות הגיאומטרית של התוצאה.

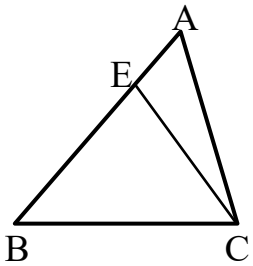


31) נתונה מקבילית BKMC.

המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.

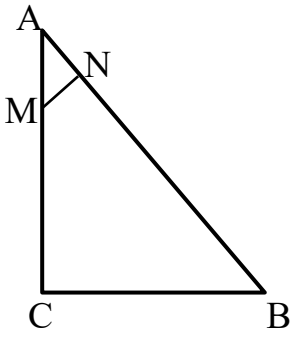
הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.

הוכח: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.

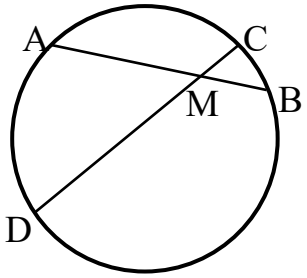


32) מעבירים את הקטע CE במשולש ABC.

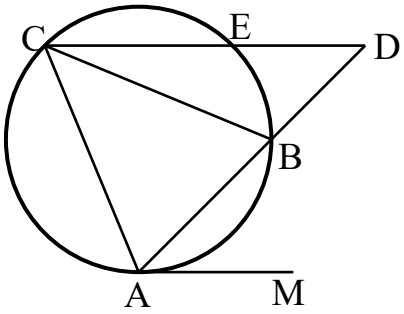
ידוע כי: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ECB$ וכן: 8 ס"מ = BE,
10 ס"מ = BC. חשב את AB.



33) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.
מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
נתון כי: 20 ס"מ = AB, 4 ס"מ = AN, 12 ס"מ = BC.
מצא את אורך הקטע AM.

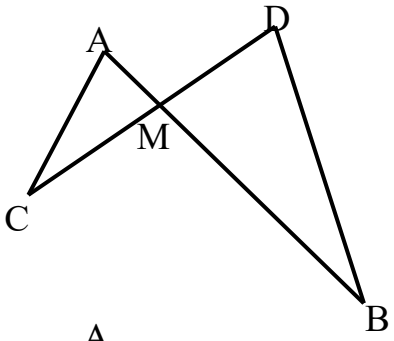


34) המיתרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
א. הוכח כי: $\Delta ADM \sim \Delta CBM$.
ב. נתון כי: 5 ס"מ = AM, 8 ס"מ = DM,
2 ס"מ = CM.
חשב את אורכו של BM.

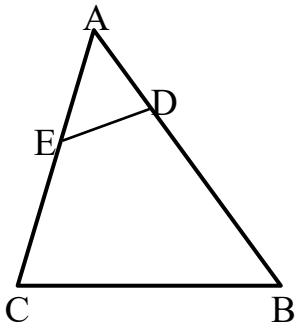


35) המשולש ABC חסום במעגל.
מהנקודה A מעבירים משיק AM.
ממשיכים את AB עד לנקודה D שמחוץ למעגל.
מחברים את הנקודה D עם הקודקוד C.
הישר CD חותך את המעגל
בנקודה E כך ש- $CE \parallel AM$.
הוכח כי AC הוא הממוצע הגיאומטרי
בין AB לבין AD. כלומר: $AC^2 = AB \cdot AD$.

שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.ז.צ:

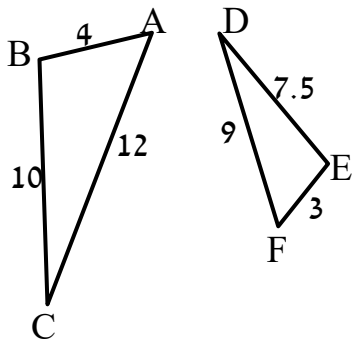


36) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
אורכי הקטעים הם: 3 ס"מ = AM,
10 ס"מ = BM, 6 ס"מ = CM, 5 ס"מ = DM.
א. הוכח כי: $\Delta AMC \sim \Delta DMB$.
ב. האם $AC \parallel BD$? נמק.
ג. מצא את אורכו של AC
אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.



37) לפניך משולש ABC.
מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:
4 ס"מ = AD, 11 ס"מ = BD, 5 ס"מ = AE, 7 ס"מ = CE.
א. הוכח כי: $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.
ב. הוכח כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.

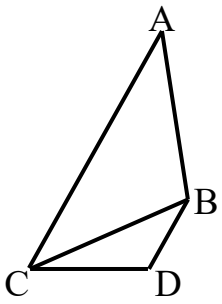
שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.צ:



38) בסרטוט שלפניך רשומים שני משולשים.
אורכי צלעותיהם נתונים בתרשים (בס"מ).

א. הוכח כי המשולשים דומים ורשום את הדמיון עפ"י הקודקודים.

ב. רשום את הזוויות השוות בשני המשולשים.

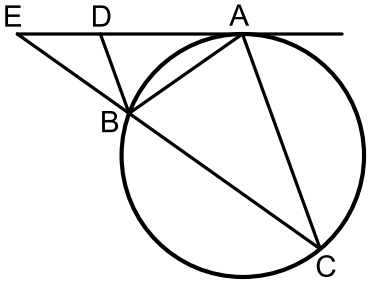


39) נתונים המשולשים ABC ו-BDC.
ידוע כי: 16 ס"מ = AC, 10 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BC, 5 ס"מ = DC, 4 ס"מ = BD.

א. הוכח כי שני המשולשים דומים ורשום אותם לפי סדר התאמת קודקודיהם.

ב. הוכח כי: $AC \parallel BD$.

שאלות שונות – דמיון משולשים:

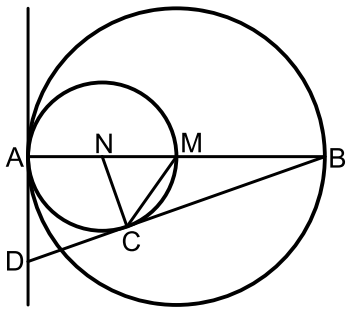


40) מעבירים משיק AE למעגל הנתון באיור.
מנקודת ההשקה מעבירים את המיתרים AB ו-AC כך שנוצר המשולש ABC. ידוע כי: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$.
המשך המיתר BC נפגש עם המשיק בנקודה E.
המיתר AB חוצה את זווית CBD .

א. הוכח כי הקטע BD מקביל למיתר AC.

ב. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta CBA$ וכתוב את יחס הדמיון.

ג. הוכח: $\frac{DE}{BE} = \frac{BD}{AB}$.

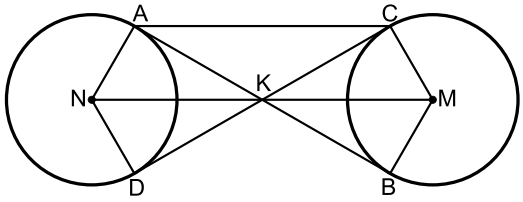


41) המעגלים שמרכזם בנקודות M ו-N משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A כך שהיקף המעגל הפנימי עובר בנקודה M.
דרך הנקודה A מעבירים משיק.
AB הוא קוטר במעגלים ו-C היא נקודה הנמצאת על היקף המעגל הפנימי כך שהישר החותך BD משיק למעגל הפנימי בנקודה זו.

א. הוכח: $\Delta ABD \sim \Delta CBN$ וחשב את יחס הדמיון.

ב. נתון כי: $AD = \sqrt{8}$.
חשב את רדיוס המעגל הגדול.

ג. הוכח: $2CD = BC$.



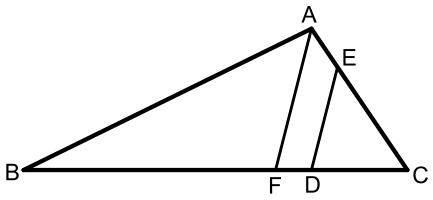
42) נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס זהה M ו-N.
מעבירים שני משיקים למעגלים AB ו-CD
הנחתכים בנקודה K.
מעבירים את הרדיוסים AN ו-DN במעגל
השמאלי ו-BM ו-CM במעגל הימני.

א. הוכח: $KN = KM$.

ב. הוכח כי המרובע ACMN הוא טרפז שווה שוקיים.

ג. רדיוס המעגלים הוא R וידוע כי המשולש BKC הוא שווה צלעות.
הבע באמצעות R את היקף הטרפז ACMN.

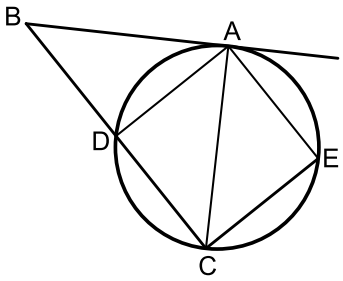
43) על הצלעות של המשולש ABC הקצו את הנקודות D ו-E
כך שהמרובע AEDB הוא בר חסימה.
הנקודה D מחלקת את הצלע BC
כך שהקטע BD גדול פי 3 מהקטע DC.



א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

ב. נתון גם כי: $AC \cdot CE = 36$.
חשב את אורך הקטע DC.

ג. מעבירים מהקודקוד A את הקטע AF המקביל לקטע DE.
נתון כי: $AC = 9$.
חשב את היחס: $\frac{DF}{BC}$.

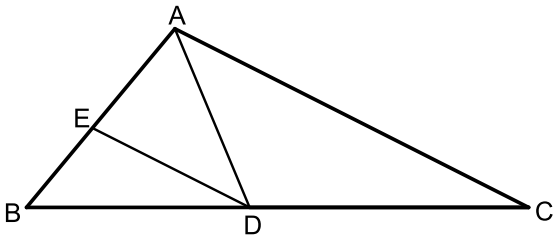


44) הקטע AB משיק למעגל בנקודה A.
מהנקודה B מעבירים ישר חותך למעגל החותך אותו
בנקודות C ו-D. E היא נקודה על המעגל כך ש- $\sphericalangle AEC = 90°$.
נתון כי המיתר AC חוצה את זווית BCE.

א. הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta EAC$.

ב. נסמן ב- R את רדיוס המעגל.
הוכח: $R = \frac{\sqrt{BC \cdot CE}}{2}$.

ג. איזה מרובע יהיה המרובע ADCE אם יתקיים: $2CE = BC$. נמק.



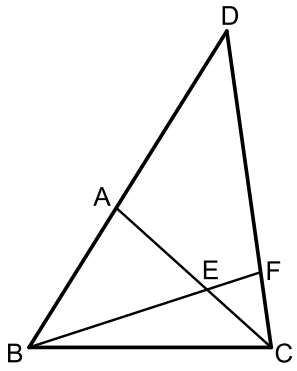
45) במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AB בהתאמה.

נתון כי: $DE \parallel AC$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BED$.

א. הוכח: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$.

ב. ידוע כי הנקודה D מחלקת את הצלע BC באופן הבא: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$

וכי: $AD \cdot BD = 16$. חשב את המכפלה: $AB \cdot AC$.



46) מהקודקוד C של המשולש BCD מעבירים את הקטע AC כך שהמשולש ACD הוא שווה שוקיים $(AC = AD)$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD כך שמתקיים:

$3 \cdot \sphericalangle ACD = \sphericalangle BEC$, $\sphericalangle D = \sphericalangle CBF$.

א. הוכח כי הקטע BF חוצה את זווית $\sphericalangle B$.

ב. הוכח כי: $\Delta AEB \sim \Delta FEC$.

ג. הוכח כי: $\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$.

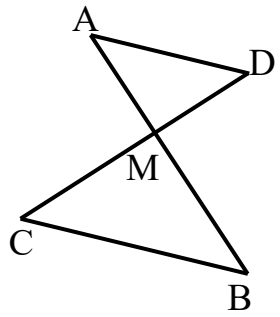
יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים:

47) הוכח את חלקי המשפט הבאים:

א. גבהים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

ב. תיכונים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

ג. היקפים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.



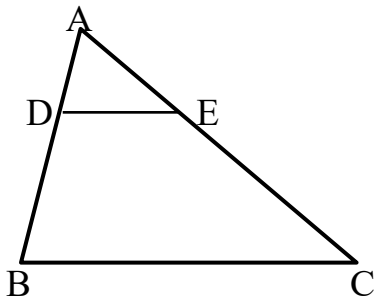
48) הקטעים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.

נתון כי: $AD \parallel BC$ וכן נתונים הגדלים הבאים:

4 ס"מ = AD, 6 ס"מ = BC, 36 סמ"ר = S_{ADM}.

א. הוכח כי: $\Delta AMD \sim \Delta BMC$.

ב. חשב את שטח המשולש MBC.

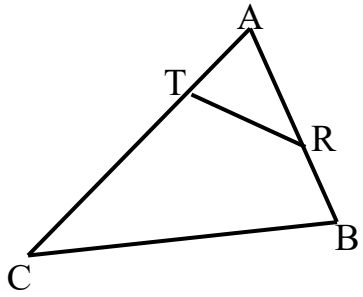


49) במשולש ABC הקטע DE מקביל לצלע BC.

נתון: $\frac{AD}{BD}=\frac{2}{3}$ וכי: 20 סמ"ר = S_{ADE}.

א. חשב את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המרובע DECB.



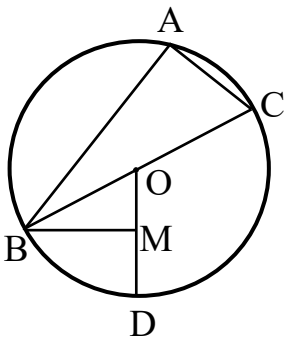
50) בסרטוט שלפניך נתון משולש ABC ובו קטע RT

כך שמתקיימים האורכים הבאים:

4 ס"מ = BR, 4 ס"מ = AT, 6 ס"מ = AR,

11 ס"מ = CT, 60 סמ"ר = S_{ABC}.

מצא את שטח המרובע RTCB.



51) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

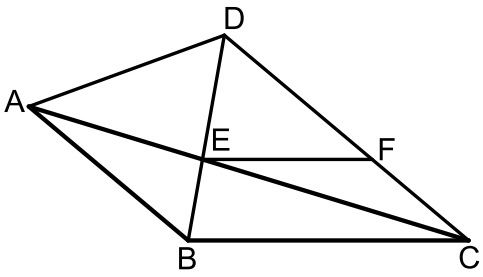
הצלע BC היא קוטר המעגל.

הקטע BM מאונך לרדיוס DO.

נתון: $AC=2OM$.

א. הוכח: $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{BD}$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BAC}}$.



52) נתון משולש ABC. על הצלע AB של המשולש ABC בונים משולש שווה צלעות ABD.

הצלע AC חותכת את הצלע BD בנקודה E

אשר ממנה מעבירים ישר EF המקביל לצלע BC.

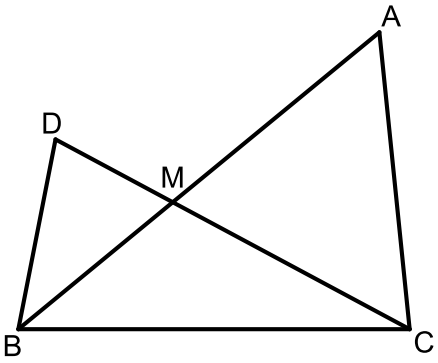
נתון כי: $\sphericalangle DBC=80°$, $\sphericalangle DCB=40°$.

א. הוכח כי המשולשים ABE ו-CDE דומים.

ב. הוכח: $FC\cdot CE=AE\cdot DF$.

ג. נתון כי: $BC=1.5\cdot EF$. הוכח: $\frac{AE}{CE}=\frac{1}{2}$.

ד. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}}$.

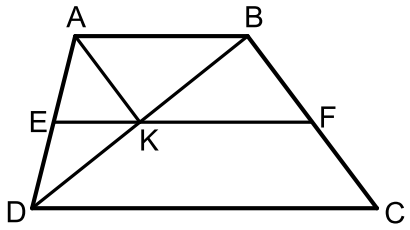


53) נתון משולש ABC. על הצלע BC של המשולש ABC בונים משולש נוסף BDC.
הצלעות DC ו-AB נחתכות בנקודה M.
הצלע AB חוצה את זווית B וידוע כי: $2\sphericalangle ACD = \sphericalangle B$.

א. הוכח: $\Delta ACM \sim \Delta DBM$.

ב. הוכח: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$.

ג. נתון כי: $\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$ וכי אורך הצלע BD הוא 6 ס"מ. סכום הצלעות AC ו-BC הוא 19.5 ס"מ. חשב את היחס: $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}}$.

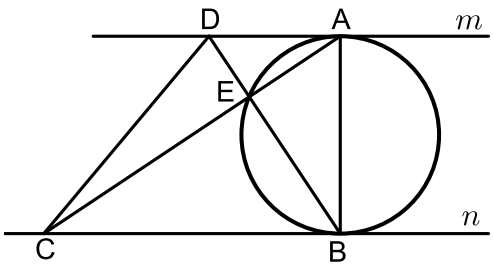


54) המרובע ABCD הוא טרפז, $(AB \parallel CD)$.
מעבירים את קטע האמצעים EF החותך את אלכסון הטרפז BD בנקודה K.
ידוע כי הקטע AK מקביל לשוק BC של הטרפז.

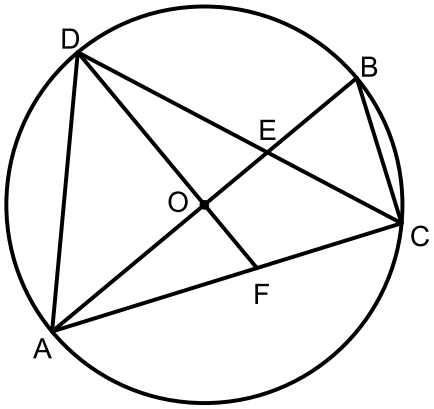
א. הוכח כי המרובע ABFK הוא מקבילית.

ב. נסמן: $S_{BKF} = S$.

הבע באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.



55) בין המשיקים המקבילים m ו- n מעבירים מעגל כך ש-AB הוא הקוטר היוצא משתי נקודות ההשקה שלהם.
הנקודות D ו-C נמצאות על המשכי המשיקים כך שהמרובע ABCD הוא טרפז.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה E שנמצאת על היקף המעגל.
ידוע כי: $S_{ABC} = 3 \cdot S_{DAB}$.
שטח המשולש ADE יסומן ב- S.
בטא באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.



56) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
מחברים את הנקודה C שעל היקף המעגל עם A ו-B
כך שנוצר המשולש ABC.
מעבירים את המיתר CD כך שהרדיוס OD מאונך ל-AB.
CD חותך את AB בנקודה E.
מחברים את המשך הרדיוס OD עם AC בנקודה F
ומעבירים את המיתר AD כך שהמשולש ADC הוא
שווה שוקיים $(AC = DC)$.

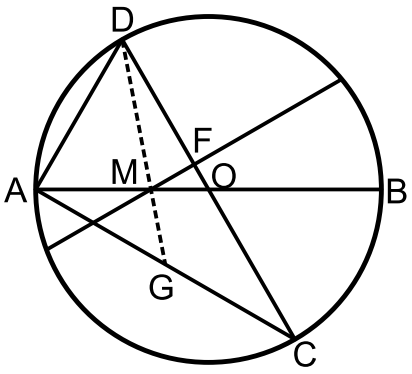
א. (1) הוכח: $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BE}$.

(2) הוכח: $\Delta ADE \sim \Delta CBE$ ורשום את יחס הדמיון.

(3) הוכח: $\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{AE}$.

ב. נתון כי: 4 ס"מ = AD, 5.226 ס"מ = DC. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{ADE}}{S_{CBE}}$.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

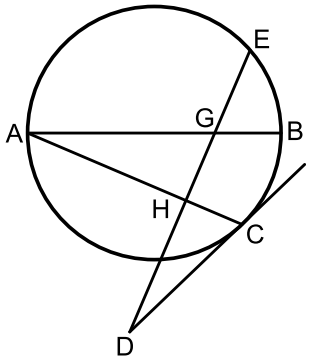


57) AB ו-CD הם קטרים במעגל שמרכזו O.
מעבירים מיתר החותך את AB בנקודה M
כך שמתקיים: $2AM = BM$ ואת CD
בנקודה F כך שמתקיים: $FM \perp CD$.
ידוע כי זווית BMF היא $30°$.
מעבירים את המיתרים AC ו-AD כך
שנוצר המשולש ACD.

א. הוכח: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BMF$.

ב. i. הוכח כי המשולשים ADC ו-FOM דומים.
ii. פי כמה קטן הקטע FO מרדיוס המעגל?

ג. מעבירים מהקודקוד D של המשולש ACD
קטע העובר דרך הנקודה M וחותך את המיתר AC בנקודה G.
חשב פי כמה גדול שטח המשולש DGC משטח המשולש MOF.



58) AB הוא קוטר במעגל.
מהנקודה A מעבירים מיתר AC.
הנקודה D נמצאת מחוץ למעגל וממנה מעבירים
משיק CD וישר חותך DE.
ידוע כי הישר DE חותך את הקוטר AB
בנקודה G ומאונך למיתר AC בנקודה H.

א. הוכח: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BGE$.

ב. נתון כי: $\frac{S_{AHG}}{S_{GHCB}} = \frac{4}{5}$. חשב את היחס: $\frac{AH}{AC}$.

תשובות סופיות:

1) א. $x=2$ ב. $x=1$.

2) 24 ס"מ.

3) א. $x=2\ ,\ y=12$ ב. $x=4.5\ ,\ y=12$ ג. $x=9\ ,\ y=18\frac{2}{3}$.

4) AE = 8 ס"מ, CE = 28 ס"מ.

5) AD = 6 ס"מ, $BC=21\frac{1}{3}$ ס"מ, $CE=16\frac{2}{3}$ ס"מ.

6) שאלת הוכחה

7) א. $x=16\ ,\ y=25$ ב. $x=12.5\ ,\ y=4.8$

ג. $x=9\ ,\ y=37.5$ ד. $x=5.25\ ,\ y=6\frac{2}{3}$.

8) 10.8 ס"מ ו-5.6 ס"מ.

9) שאלת הוכחה

10) שאלת הוכחה

11) שאלת הוכחה

12) שאלת הוכחה

13) 4.5 ס"מ.

14) א. שאלת הוכחה

ב. 6 ס"מ.

15) א. שאלת הוכחה

ב. $120°,60°$ ג. $\frac{2}{3}$.

16) שאלת הוכחה

ג. 3.

17) א. $x=5.6$ ב. $x=20$ ג. $x=6$ ד. $x=12$.

18) 3 ס"מ.

19) 8 ס"מ.

20) שאלת הוכחה

21) 10 ס"מ.

22) 1 ס"מ.

23) א. $BE=6$

ב. שאלת הוכחה ג. $EF=2$.

24) שאלת הוכחה

25) שאלת הוכחה

26) שאלת הוכחה

27) 15 ס"מ.

28) שאלת הוכחה

29) שאלת הוכחה

30) שאלת הוכחה

31) שאלת הוכחה

32) 12.5 ס"מ.

33) 5 ס"מ.

34) א. שאלת הוכחה

ב. 3.2 ס"מ.

35) א. שאלת הוכחה

36) א. שאלת הוכחה

ב. לא.

ג. 8.4 ס"מ.

37) א. שאלת הוכחה

ב. שאלת הוכחה

38) א. $\Delta ABC \sim \Delta FED$

ב. $\sphericalangle A = \sphericalangle F \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle D$.

39) א. $\Delta ABC \sim \Delta CDB$

ב. שאלת הוכחה

40) שאלת הוכחה

41) א. שאלת הוכחה

ב. 4 ס"מ.

42) א. שאלת הוכחה

ג. $9R$.

43) א. שאלת הוכחה

ב. 3 ס"מ

ג. $\frac{DF}{BC} = \frac{5}{16}$.

44) שאלת הוכחה

ג. ריבוע.

45) שאלת הוכחה

ג. $AB \cdot AC = 36$.

46) שאלת הוכחה

47) שאלת הוכחה

48) א. שאלת הוכחה

ב. 81 סמ"ר.

49) א. 125 ס"מ.

ב. 105 סמ"ר.

50) 50.4 סמ"ר.

51) א. שאלת הוכחה

ב. $\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{1}{4}$.

52) א. שאלת הוכחה

ג. 2. $\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}} = \frac{1}{4}$.

53) א. שאלת הוכחה

ג. $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = 0.8$.

54) א. שאלת הוכחה

ב. $6S$.

55) $16S$.

56) א. שאלות הוכחה ב. $\frac{S_{ADE}}{S_{CBE}} = 3.41$.

57) א. שאלת הוכחה ב. ii. קטן פי 6.

ג. שטח המשולש DGC גדול פי 18 משטח המשולש MOF.

58) א. שאלת הוכחה ב. $\frac{AH}{AC} = \frac{2}{3}$.

שאלון 571

טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים:

טריגונומטריה במשולש ישר זווית 655

משולש ישר זווית: 656

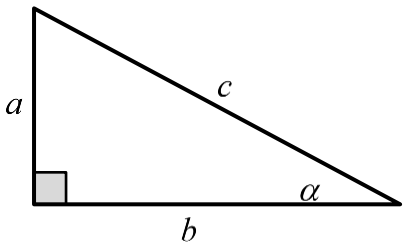
הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות: 656

שאלות:..... 656

תשובות סופיות:..... 660

משולש ישר זווית:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

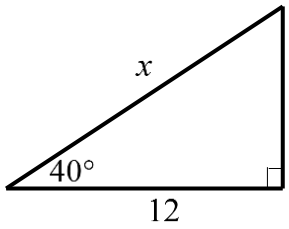
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2 + b^2 = c^2$

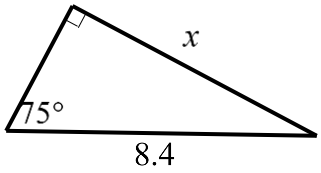
שאלות:

1) מצא את ערכו של α / x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

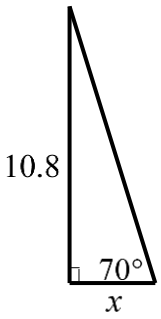
א.



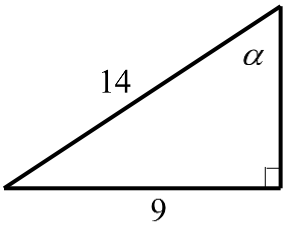
ב.



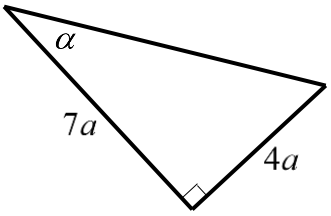
ג.



ד.



ה.

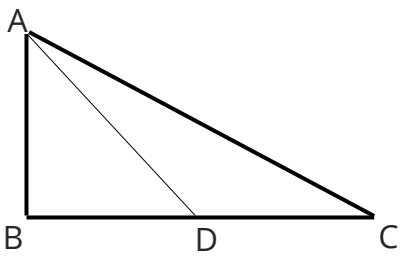


2) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$.

AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\sphericalangle C = 28°$, 6 ס"מ = AB.

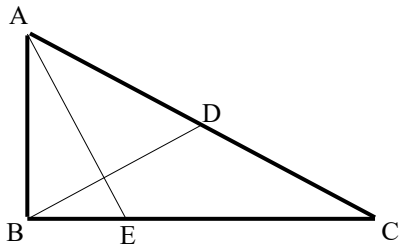
מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.



3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.

נתון: 5.6 ס"מ = BD , 8 ס"מ = BC.

מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.



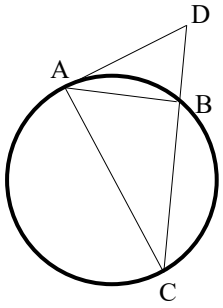
4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.

המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.

נתון: 4 ס"מ=BD , $\sphericalangle DAB = 32°$.

מצא את אורכו של רדיוס המעגל.



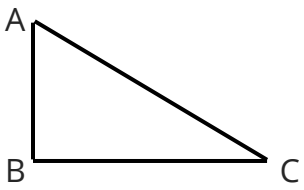
6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב- 4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא $34.92°$.

מצא את שטח המשולש.

7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$.

נתון: $\sphericalangle A = \alpha$, $AB = a$.

הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.

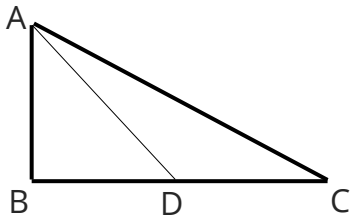


8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$.

AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $AB = b$.

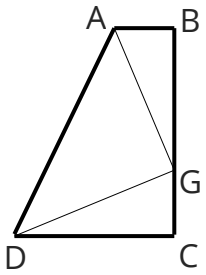
הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים BD ו-AD.



9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k.

הבע באמצעות α ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.

10) טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°)$.

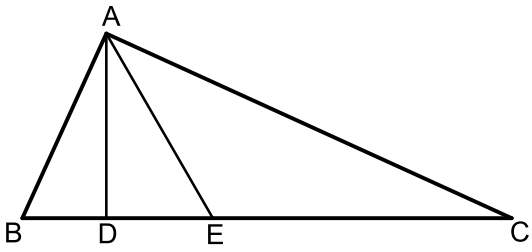


הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$.

נתון: $AG = DG = m$, $\sphericalangle BAG = \beta$.

הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.

11) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle A = 90°)$.



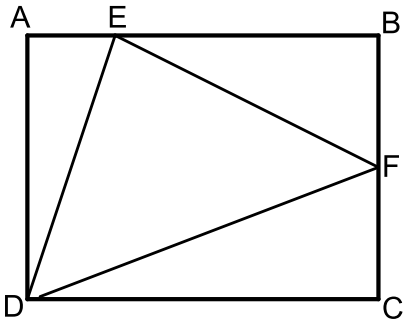
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה
ליתר וחוצה זווית.

מסמנים: $DE = k$, $\sphericalangle DAE = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α
את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC
אם ידוע כי: $\alpha = 30$ ו- $k = 2$.

12) במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F
הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E
מקיימת: $3AE = BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים EF , DF ו-DE כך
שנוצר במשולש DEF.



א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע
באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.

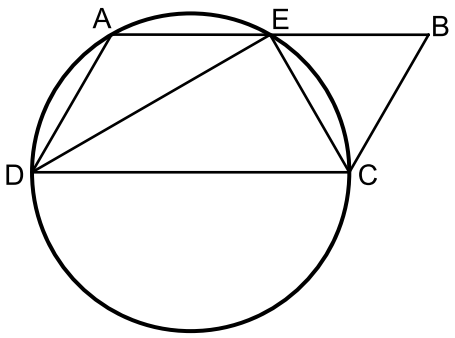
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

13) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל.
הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

14) בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b
והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α .
הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:

15) דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.



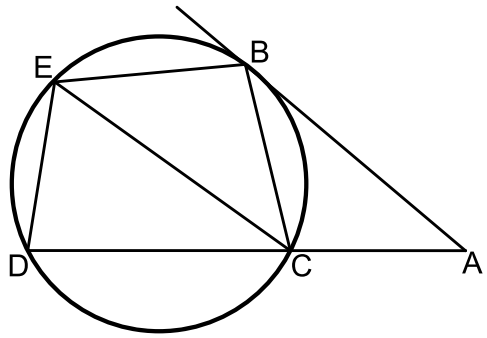
נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- R.
הבע באמצעות R את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.



א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40°$, AC = 6 ס"מ, AB = 9 ס"מ , CE = 8 ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005°$ ה. $\alpha=29.745°$.

2) $\sphericalangle BAD=43.24°$, 8.236 ס"מ $=AD$.

3) $\sphericalangle BAE=22.792°$, 3.294 ס"מ $=BE$.

4) $106.26°$, $106.26°$, $73.74°$, $73.74°$.

5) 6.04 ס"מ $R=$.

6) 28.618 סמ"ר $S=$.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $\mathrm{BD}=\dfrac{b}{2\tan\alpha}$, $\mathrm{AD}=\sqrt{b^2+\dfrac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\dfrac{k^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$, $\mathrm{AC}=\dfrac{k\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\dfrac{\left(m\sin\beta+m\cos\beta\right)^2}{2}$.

11) א. $S=\dfrac{k^2}{2\tan^2\alpha\sin\left(45°-\alpha\right)\cos\left(45°-\alpha\right)}=\dfrac{k^2}{\cos2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $\mathrm{DF}=t\sqrt{18.25}$, $\mathrm{EF}=t\sqrt{11.25}$, $\mathrm{DE}=t\sqrt{10}$ ב. $47.14°$, $51°$, $81.86°$.

13) $R=k\cos\beta\tan\dfrac{\beta}{2}$.

14) $S=\dfrac{1}{2}b^2\sin\alpha\left(1+\sin\alpha\right)$, $\dfrac{1}{2}b\sin\alpha+\dfrac{\dfrac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$.

15) ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) ג. 32.78 סמ"ר.

שאלון 571

זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים:

זהויות טריגונומטריות..... 661

זהויות היסוד: 662

שאלות:..... 662

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:..... 663

תרגילים:..... 664

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות: 664

הגדרת מעגל היחידה: 664

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:..... 664

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:..... 665

שאלות:..... 665

סכום והפרש זוויות: 666

שאלות:..... 666

זווית כפולה:..... 667

שאלות:..... 667

תשובות סופיות:..... 669

תרגול נוסף:..... 671

שאלות יסודיות עם פונקציות טריגונומטריות:..... 671

תשובות סופיות: 674

זהויות היסוד:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

א. $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

ב. $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

ג. $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

ד. $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

ה. $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

ו. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

ז. $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

ח. $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

ט. $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

י. $\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

יא. $\frac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

יב. $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

יג. $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

יד. $\frac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

טו. $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

$\alpha=90°$	$\alpha=60°$	$\alpha=45°$	$\alpha=30°$	$\alpha=0°$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin\alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos\alpha$
ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan\alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ	$\cot\alpha$

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו- $90°$ תִלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{0}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל.
  עבור שורת ה- $\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

תרגילים:

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

א. $\sin 30° + \cos 30°$

ב. $\dfrac{\sin 30° \cdot \cos 30°}{\sin 60°}$

ג. $\tan 45° + \dfrac{\sin 45°}{\cos 45°}$

ד. $\dfrac{1+\cos 60°}{2\sin 60°}$

ה. $\cos^2 45° + \sin^2 30°$

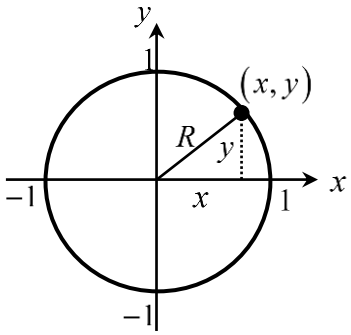
ו. $\dfrac{\tan^2 60° \cdot \cos^2 30°}{\cos^2 60°}$

ז. $\dfrac{\tan 30° \cdot \cot 60° - \cot 45° \cdot \tan 45°}{4\left(\sin^2 60° - \dfrac{1}{4}\right)}$

ח. $\dfrac{27\cot^4 60°}{\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \tan 60°}$

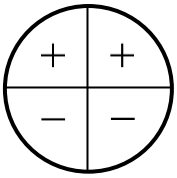
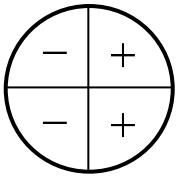
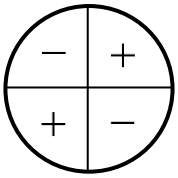
מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$, $90°$, $180°$, $270°$.

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II III VI	$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ $\sin(-a)=-\sin\alpha$	$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(180°+\alpha)=\tan\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+360°k)&=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)&=\cos\alpha\end{aligned}} \quad , \quad \boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+180°k)&=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)&=\cot\alpha\end{aligned}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

3) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120°$ ב. $\cos 150°$

ג. $\tan 160°$ ד. $\cot 130°$

ה. $\sin 215°$ ו. $\cos 245°$

ז. $\tan 230°$ ח. $\cot 200°$

ט. $\sin 300°$ י. $\cos 310°$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150°$ ב. $\cos 210°$ ג. $\tan 120°$

ד. $\sin 330°$ ה. $\tan 225°$ ו. $\sin 315°$

ז. $\cos 120°$ ח. $\tan(-30°)$ ט. $\cos(-45°)$

י. $\sin 510°$ יא. $\cos 930°$ יב. $\tan(-225°)$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240°\cdot\tan 150°+\cos(-60°)\right)^2$.

ב. $8\sin^2 150°\cdot\tan 135°-2\cdot\sin 135°\cdot\cos(-135°)$.

סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}$$

הערה:

- בסרטון התיאוריה ובשאלות הבאות אין התייחסות לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$ היות והן לא כלולות בחומר הלימוד התיכוני.

שאלות:

6) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75°$ ב. $\sin 15°$ ג. $\sin 105°$

ד. $\sin(-15°)$ ה. $\cos 75°$ ו. $\cos 15°$

ז. $\cos(-105°)$ ח. $\cos 165°$ ט. $\cos(-195°)$

7) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65°\cos 25°+\sin 25°\cos 65°$.

ב. $5\cos 50°\cos 20°+5\sin 50°\sin 20°$.

8) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos(45°-\alpha)-\cos(45°+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

9) נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- α,β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\tan(\alpha+\beta)$.

זווית כפולה:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\end{aligned}}$$

שאלות:

10) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha=\sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha-\cos 3\alpha)^2=1-\sin 6\alpha$

ד. $\cos^2 2\alpha=4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha+1$

ה. $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$

11) הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$ לפי: $\sin(\alpha+2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

12) הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$ לפי: $\cos(\alpha+2\alpha)$ ושימשו בזהויות שנלמדו.

13) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin\alpha=\frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

14) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan\alpha=\frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.

ב. $\cos\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

15) נתון כי $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$ עבור $0°<\alpha<90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) א. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. 2 ד. $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ ה. $\frac{3}{4}$

ו. 9 ז. $-\frac{1}{3}$ ח. $2\sqrt{6}$

3) א. $\sin 60°$ ב. $-\cos 30°$ ג. $-\tan 20°$ ד. $-\cot 50°$

ה. $-\sin 35°$ ו. $-\cos 65°$ ז. $\tan 50°$ ח. $\cot 20°$

ט. $-\sin 60°$ י. $\cos 50°$.

4) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$

ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

5) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$

6) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

7) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

8) שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$

ה. $-\frac{720}{1519}$

14) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$

15) 0.44.

תרגול נוסף:

הערה:

לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בוידאו והן ניתנו כבונוס לתרגול נוסף.

שאלות יסודיות עם פונקציות טריגונומטריות:

1) קבע עבור כל אחד מהביטויים הבאים (ללא מחשבון) האם הוא חיובי או שלילי:

א. $\sin 70°$	ב. $\cos 80°$	ג. $\sin 140°$
ד. $\sin 160°$	ה. $\sin 240°$	ו. $\cos 260°$
ז. $\sin 310°$	ח. $\cos 340°$	ט. $\sin(-30°)$
י. $\cos(-100°)$	יא. $\sin(-210°)$	יב. $\cos(-320°)$
יג. $\sin 400°$	יד. $\cos 480°$	טו. $\sin 610°$
טז. $\cos 700°$	יז. $\sin(-420°)$	יח. $\cos(-1080°)$

2) נתון ש- $180° < \alpha < 270°$.

קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא חיובי או שלילי:

א. $\sin\alpha$	ב. $\cos\alpha$	ג. $\tan\alpha$

3) מצא באמצעות מעגל היחידה על ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 0°$	ב. $\cos 0°$	ג. $\sin 90°$
ד. $\cos 90°$	ה. $\sin 180°$	ו. $\cos 180°$
ז. $\sin 270°$	ח. $\cos 270°$	ט. $\sin 360°$
י. $\cos 360°$	יא. $\sin(-90°)$	יב. $\cos(-90°)$
יג. $\sin(-180°)$	יד. $\cos(-180°)$	טו. $\cos(-270°)$
טז. $\sin(-360°)$	יז. $\sin 540°$	יח. $\cos 630°$
יט. $\cos 720°$	כ. $\sin 900°$	כא. $\sin 1350°$
כב. $\cos(-450°)$	כג. $\sin(-810°)$	כד. $\cos(-1260°)$

4) ענה על השאלות הבאות:

א. האם יש זווית α המקיימת $\sin\alpha=1.5$? אם כן, מצאו אותה. אם לא נמקו.

ב. האם יש זווית α המקיימת $\cos\alpha=-2$? אם כן, מצאו אותה. אם לא נמקו.

5) הסבר מדוע $\tan(90°)$ איננו מוגדר.

6) נתון ש- k הוא מספר שלם. חשב ללא עזרת מחשבון את:

א. $\sin(90°+360°k)$

ב. $\cos(180°+360°k)$

7) נתון $\cos(50°)=t$. הבע על ידי t את:

א. $\cos(130°)$ ב. $\sin(40°)$

ג. $\cos(-50°)$ ד. $\cos(410°)$

ה. $\cos(3650°)$ ו. $\cos(-310°)$

ז. $\cos(-670°)$

ח. $\cos(50°+360°k)$ כאשר ידוע ש- k מספר שלם.

8) נתון $\sin(20°)=t$. הבע על ידי t את:

א. $\sin(160°)$ ב. $\cos(70°)$

ג. $\sin(-20°)$ ד. $\sin(380°)$

ה. $\sin(3620°)$ ו. $\sin(-340°)$

ז. $\sin(-700°)$

ח. $\sin(20°+360°k)$ כאשר ידוע ש- k מספר שלם.

9) השלם את החסר:

א. $\sin(x+45°)=\sin_\cos_+\sin_\cos_$

ב. $\sin(30°-x)=\sin_\cos_-\sin_\cos_$

ג. $\cos(60°+x)=\cos_\cos_-\sin_\sin_$

ד. $\cos(45°-x)=\cos_\cos_+\sin_\sin_$

ה. $\tan x=\frac{\sin_}{\cos_}$

ו. $\tan_=\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$

ז. $\cos^2_+\sin^2(x)=1$

ח. $\cos^2(2x)=1-\sin^2_$

ט. $\sin^2_=1-\cos^2(3x)$

י. $\cos(90°-3x)=\sin_$

יא. $\sin(90°-_)=\cos(2x)$

יב. $\sin(180°-x)=\sin_$

יג. $\cos(180°-_)=-\cos(3x)$

יד. $\sin(6x)=2\sin_\cos_$

טו. $\sin_=2\sin(2x)\cos(2x)$

טז. $\cos(4x)=1-2\sin^2_$

יז. $\cos_=1-2\sin^2(3x)$

יח. $\cos(2x)=2\cos^2_-1$

יט. $\cos_=2\cos^2\left(\frac{1}{2x}\right)-1$

10) הוכיחו בעזרת 4 הנוסחאות הבאות:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

את הזהויות הטריגונומטריות הבאות:

א. $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$

ב. $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$

ג. $\sin(90-\alpha)=\cos(\alpha)$

ד. $\cos(90-\alpha)=\sin(\alpha)$

ה. $\sin(180-\alpha)=\sin(\alpha)$

ו. $\cos(180-\alpha)=-\cos(\alpha)$

תשובות סופיות:

1) חיובי: א, ב, ג, ד, ח, יא, יב, יג, טז, יח. שלילי: ה, ו, ז, ט, י, יד, טו, יז.

2) א. שלילי. ב. שלילי. ג. חיובי.

3)

א. 0	ב. 1	ג. 1	ד. 0	ה. 0	ו. -1
ז. -1	ח. 0	ט. 0	י. 1	יא. -1	יב. 0
יג. 0	יד. -1	טו. 0	טז. 0	יז. 0	יח. 0
יט. 1	כ. 0	כא. -1	כב. 0	כג. -1	כד. -1.

4) א. אין פתרון כי $-1 \le \sin\alpha \le 1$ ב. אין פתרון כי $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

5) חלוקה ב-0 איננה מוגדרת.

6) א. 1 ב. -1.

7)

א. $-t$	ב. t	ג. t	ד. t	ה. t
ו. t	ז. t	ח. t.		

8)

א. t	ב. t	ג. $-t$	ד. t	ה. t
ו. t	ז. t	ח. t .		

9) השלמה בגוף השאלה.

10) שאלת הוכחה.

שאלון 571

משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים:

משוואות טריגונומטריות 675

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות): 676

שאלות: 676

פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום נתון: 679

שאלות: 679

תשובות סופיות: 680

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin\alpha$	$x_1 = \alpha + 360°k \ , \ x_2 = 180° - \alpha + 360°k$
$\cos x = \cos\alpha$	$x_{1,2} = \pm\alpha + 360°k$
$\tan x = \tan\alpha$	$x = \alpha + 180°k$
$\cot x = \cot\alpha$	$x = \alpha + 180°k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הסינוס):

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הקוסינוס):

א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הטנגנס):

א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$

4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3\sin 2x = 2$

ה. $3\cos 3x = 1$ ו. $2\tan 4x = 1$

6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x+30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75° - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50° - x) = 1.3$

7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x+30°)$

ג. $\sin x = \sin(120° - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40° - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60° - x)$

8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

9) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

א. $\cos^2 x=\frac{3}{4}$

ב. $\sin^2 x=\frac{1}{4}$

ג. $\tan^2 2x=3$

ד. $\sin x\cos 3x=0$

ה. $\sin 2x-2\sin^2 2x=0$

ו. $2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x=0$

ז. $2\sin^2 x-\sin x-1=0$

ח. $3\sin^2 x-\sin x=2$

ט. $6\sin^2 x-\sin x-1=0$

י. $\cos^2 x+2\cos x=3$

יא. $\tan^2 x-3\tan x-4=0$

יב. $\tan^2 x=4\tan x-1$

יג. $\cos x-\frac{2}{\cos x}+1=0$

יד. $\frac{\sin x}{\cos x-1}=0$

טו. $\frac{\cos 2x}{\tan x+1}=0$

10) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות יסוד):

א. $\sin x=\cos x$

ב. $\sin x=\cos\left(x+45°\right)$

ג. $\cos x=\frac{2}{3}\sin^2 x$

ד. $2\cos^2 x=3\sin x$

ה. $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

ו. $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

ז. $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

ח. $\sin x-\tan x=0$

11) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $\sin x=-\sin 3x$

ב. $\cos 2x=-\cos 3x$

ג. $\sin\left(x+30°\right)=-\cos x$

ד. $\sin 3x=-\cos\left(180°-x\right)$

12) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (חלוקה בקוסינוס):

א. $\sin x=2\cos x$

ב. $3\sin x=\cos x$

ג. $4\sin x=7\cos x$

ד. $2\sin x=-5\cos x$

ה. $\sin^2 x=8\cos^2 x$

ו. $3\sin^2 x=\cos^2 x$

13) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זהויות של זווית כפולה):

א. $\sin x-\sin 2x=0$

ב. $\sqrt{2}\sin x+\sin 2x=0$

ג. $4\cos x=\sin 2x$

ד. $2\cos 2x+\sin 4x=0$

ה. $3\cos x-\cos 2x=0$

ו. $\cos 2x=2\sin x$

ז. $\sin x+\cos 2x=1$

ח. $2\sin^2 x=\cos 2x+2$

פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום נתון:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

14) מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

א. $8\sin x-4=0\ ,\ [0°:180°]$

ב. $\sin 2x=\sin(x+60°)\ ,\ [-90°:90°]$

ג. $3\cos(2x+30°)+1=0\ ,\ [-90°:90°]$

ד. $\cos(50°-x)=-\cos x\ ,\ [0°:360°]$

ה. $2\sin 3x-5\cos 3x=0\ ,\ [-30°:30°]$

ו. $2\cos^2 3x=\sin 6x+1\ ,\ [0°:180°]$

ז. $\cos 4x+1=3\sin 2x\ ,\ [-180°:180°]$

ח. $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0\ ,\ [-180°:180°]$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=30°+360°k\ ,x_2=150°+360°k$ ב. $x_1=45°+360°k\ ,x_2=135°+360°k$

ג. $x_1=-60°+360°k\ ,x_2=240°+360°k$ ד. $x_1=-30°+360°k\ ,x_2=210°+360°k$.

2) א. $x_{1,2}=\pm60°+360°k$ ב. $x_{1,2}=\pm150°+360°k$.

3) א. $x=30°+180°k$ ב. $x=135°+180°k$.

4) א. $x_1=44.427°+360°k\ ,x_2=135.573°+360°k$

ב. $x_{1,2}=126.87°+360°k$ ג. $x=78.69°+180°k$.

5) א. $x_1=10°+120°k\ ,x_2=50°+120°k$ ב. $x_1=75°+180°k\ ,x_2=-75°+180°k$

ג. $x=-9°+36°k$ ד. $x_1=20.9°+180°k\ ,x_2=69.09°+180°k$

ה. $x_{1,2}=\pm23.5°+120°k$ ו. $x=6.64°+45°k$.

6) א. $x_1=105°+180°k\ ,x_2=-45°+180°k$

ב. $x_1=10°+120°k\ ,x_2=40°+120°k$ ג. $x=-2.431°+180°k$.

7) א. $x_1=180°k\ ,x_2=45°+90°k$ ב. $x=30°+360°k\ ,x_2=50°+120°k$

ג. $x=60°+180°k$ ד. $x=90°k$

ה. $x=20°+180°k$ ו. $x=180°k$ ז. $x=20°+60°k$.

8) א. $x=180°k$ ב. $x=90°+360°k$ ג. $x=270°+360°k$

ד. $x=90°+180°k$ ה. $x=360°k$ ו. $x=180°+360°k$

ז. $x=180°k$ ח. $x=45°+180°k$.

9) א. $x_{1,2}=\pm30°+360°k\ ,x_{3,4}=\pm150°+360°k$

ב. $x_1=30°+360°k\ ,x_2=150°+360°k\ ,x_3=330°+360°k\ ,x_4=210°+360°k$

ג. $x_1=30°+90°k\ ,x_2=-30°+90°k$ ד. $x_1=180°k\ ,x_2=30°+60°k$

ה. $x_1=90°k\ ,x_2=15°+180°k\ ,x_3=75°+180°k$

ו. $x_1=90°+180°k\ ,x_{2,3}=\pm150°+360°k$

ז. $x_1=90°+360°k\ ,x_2=210°+360°k\ ,x_3=-30°+360°k$

ח. $x_1=90°+360°k\ ,x_2=-41.8°+360°k\ ,x_3=221.8°+360°k$

ט. $x_1=30°+360°k, x_2=150°+360°k, x_3=-19.4°+360°k, x_4=199.4°+360°k$

י. $x=360°k$ יא. $x_1=-45°+180°k\ ,x_2=75.964°+180°k$

יב. $x_1=75°+180°k\ ,x_2=15°+180°k$ יג. $x=360°k$

יד. $x=180°+360°k$ טו. $x=45°+90°k\ ,x\neq-45°+180°k$.

10) א. $x=45°+180°k$ ב. $x=22.5°+180°k$

ג. $x_{1,2}=\pm60°+360°k$ ד. $x_1=30°+360°k\ ,x_2=150°+360°k$

ה. $x_{1,2}=\pm 60^\circ+360^\circ k$

ו. $x_1=30^\circ+120^\circ k\ ,\ x_2=-90^\circ+360^\circ k$

ז. $x_{1,2}=\pm 45^\circ+360^\circ k\ ,\ x_{3,4}=\pm 135^\circ+360^\circ k$

ח. $x=180^\circ k$.

11) א. $x_1=90^\circ k\ ,\ x_2=-90^\circ+180^\circ k$

ב. $x_1=180^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=36^\circ+72^\circ k$

ג. $x=120^\circ+180^\circ k$

ד. $x_1=22.5^\circ+90^\circ k\ ,\ x_2=45^\circ+180^\circ k$.

12) א. $x=63.43^\circ+180^\circ k$

ב. $x=18.43^\circ+180^\circ k$

ג. $x=60.25^\circ+180^\circ k$

ד. $x=-68.19^\circ+180^\circ k$

ה. $x_1=70.52^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=-70.52^\circ+180^\circ k$

ו. $x_1=30^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=-30^\circ+180^\circ k$.

13) א. $x_1=360^\circ k\ ,\ x_2=60^\circ+120^\circ k$

ב. $x_1=180^\circ k\ ,\ x_{2,3}=\pm 135^\circ+360^\circ k$

ג. $x=90^\circ+180^\circ k$

ד. $x_1=45^\circ+90^\circ k\ ,\ x_2=135^\circ+180^\circ k$

ה. $x_{1,2}=\pm 106.307^\circ+360^\circ k$

ו. $x_1=21.1^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=158.9^\circ+360^\circ k$

ז. $x_1=180^\circ k\ ,\ x_2=30^\circ+360^\circ k\ ,\ x_3=150^\circ+360^\circ k$

ח. $x_1=-60+360^\circ k\ ,\ x_2=60^\circ+360^\circ k\ ,\ x_3=120^\circ+360^\circ k\ ,\ x_4=240^\circ+360^\circ k$.

14) א. $x=30^\circ,150^\circ$

ב. $x=-80^\circ,40^\circ,60^\circ$

ג. $x=39.736^\circ,-69.736^\circ$

ד. $x=115^\circ,295^\circ$

ה. $x=22.733^\circ$

ו. $x=7.5^\circ,37.5^\circ,67.5^\circ,97.5^\circ,127.5^\circ,157.5^\circ$

ז. $x=-165^\circ,-105^\circ,15^\circ,75^\circ$

ח. $x=-138.19^\circ,-41.81^\circ,90^\circ$.

שאלון 571

טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים:

טריגונומטריה במישור 682

סיכום עיקרי הדברים הנלמדים בפרק: 683

משפט הסינוסים: 683

משפט הקוסינוסים: 683

מתי נשתמש בכל משפט: 683

שטחים של משולשים ומרובעים: 684

שאלות שונות: 684

שאלות יסודיות העוסקות במשפט הסינוסים והקוסינוסים: 684

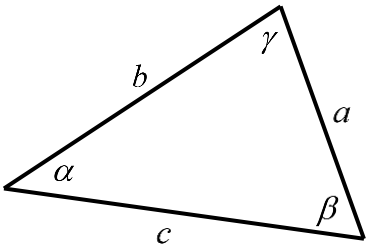
שאלות העוסקות בנוסחת השטח של משולש: 690

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד: 697

תשובות סופיות: 701

סיכום עיקרי הדברים הנלמדים בפרק:

משפט הסינוסים:



במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן בקוסינוס הזווית שבניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

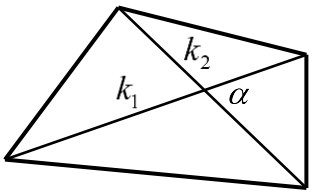
מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שטחים של משולשים ומרובעים:



- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסוניו: $S=\frac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.

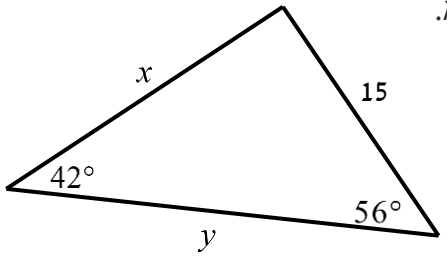
שאלות שונות:

שאלות יסודיות העוסקות במשפט הסינוסים והקוסינוסים:

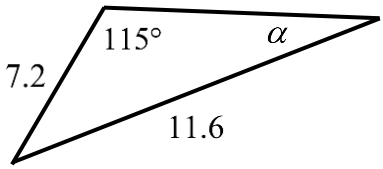
1) מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים

(R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

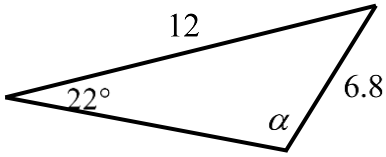
א.



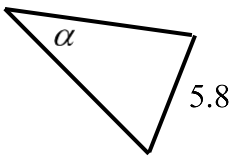
ב.



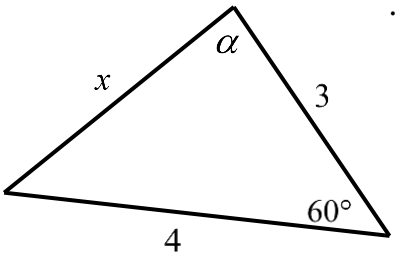
ג.



ד. רדיוס המעגל: $R=7$.

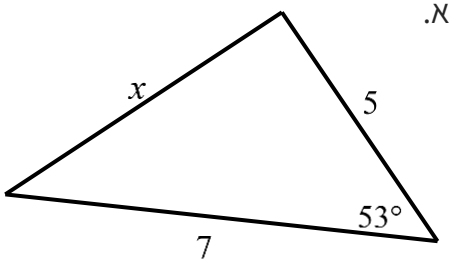


ה.

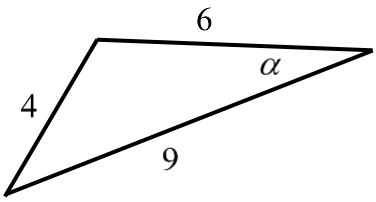


2) מצא את ערכו של α / x במשולשים הבאים:

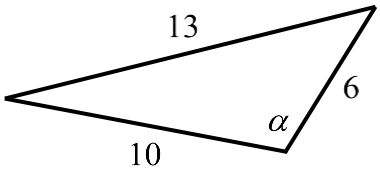
א.



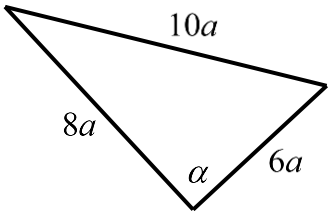
ב.



ג.

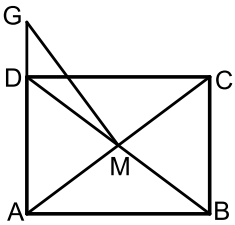


ד.



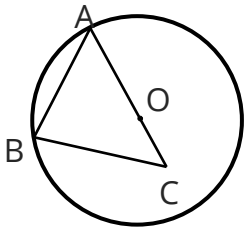
3) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא $70°$. CD הוא חוצה זווית הבסיס $\sphericalangle C$.
מצא את אורכו של הקטע AD.

4) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
נתון: AD = 3 ס"מ , AB = 4 ס"מ , DG = 1.2 ס"מ.
מצא את גודלו של הקטע GM.



5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: BC = 9 ס"מ , OC = 3 ס"מ , $\sphericalangle BAC = 38°$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.



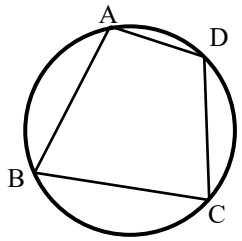
7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של $30°$ עם צלע אחת של המקבילית וזווית של $61.05°$ עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.

8) המרובע ABCD חסום במעגל.

נתון: 6 ס"מ = AB, 9 ס"מ = BC, 10 ס"מ = CD

ו-4 ס"מ = AD. מצא את אורכם של

האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.



9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: AC = DC

ו- $GD \parallel BE$.

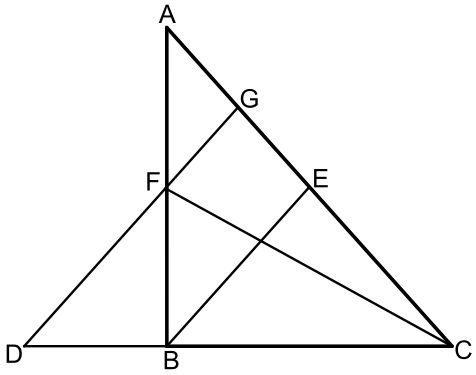
א. הוכח: $\frac{AG}{BD}=\frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: 4 ס"מ = ME.

חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189°$

הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.



10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C

של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O.

מרכז המעגל O מונח על הצלע AC.

אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO

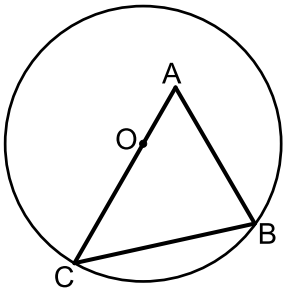
הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא $60°$.

א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD

כך שנוצר המשולש ADB.

חשב את זווית ADB.



11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC)

החסום במעגל שרדיוסו R.

הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D

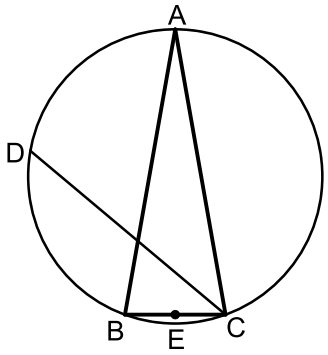
היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$.

ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא $80°$.

א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

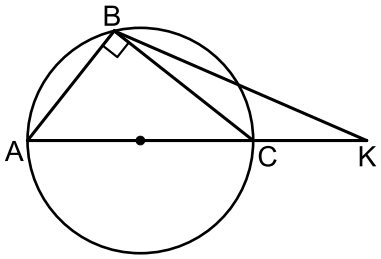
ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.

הבע באמצעות R את r.



12) ABC הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$ החסום במעגל שרדיוסו R.

ממשיכים את היתר AC עד לנקודה K כך שנוצר המשולש BKC.



מסמנים: $\sphericalangle CAB = \alpha$ ו- $\sphericalangle CBK = \beta$.

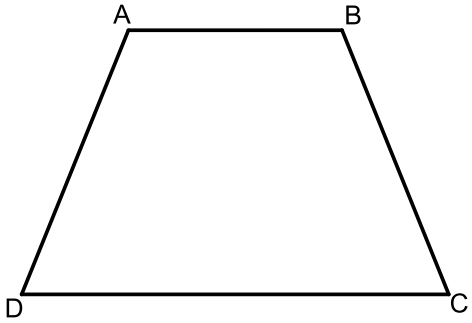
א. הבע באמצעות α , β ו- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BKC.

ב. הבע באמצעות α ו- β את היחס: $\frac{CK}{AK}$.

ג. ידוע כי הזווית α גדולה מ- $45°$.

מה הוא הערך הגדול ביותר האפשרי עבור β אם ידוע כי: $\frac{CK}{AK} = \frac{1}{3}$?

13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD \ , \ AD = BC)$.



מידות הטרפז הן:

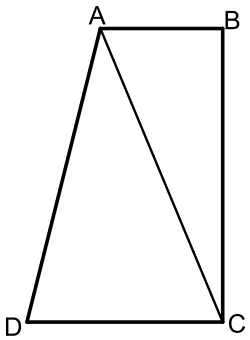
12 ס"מ = CD, 8 ס"מ= BC, 6 ס"מ = AB.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD \ , \ \sphericalangle B = 90°)$.



מסמנים את הבסיס: $DC = 3t$ ואת השוק $AD = 4t$.

ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60°$.

א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.

ב. מצא את זווית ACB אם ידוע כי $AB = t$.

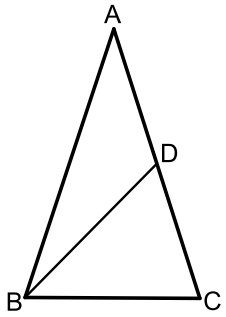
ג. נתון: $BC = 4\sqrt{3} =$ 6.928 ס"מ.

חשב את שטח הטרפז ABCD.

15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC)

בעל זווית ראש $36°$ החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ.

מעבירים את התיכון BD לשוק AC.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

ג. מסמנים:

r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

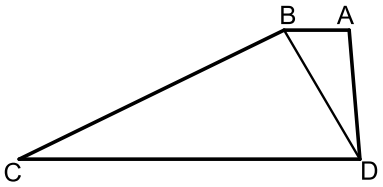
הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2}=2\cos 36$.

16) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\sphericalangle BCD=\sphericalangle ADB$.

נתון כי: 20 ס"מ = CD , 10 ס"מ = AD, 5 ס"מ = AB.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD .



א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

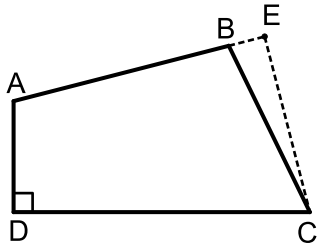
ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD. ידוע כי: $\sphericalangle D=90°$.

מסמנים את אורכי צלעות המרובע באופן הבא: $AD=3x$, $CD=8x$, $BC=5x$, $AB=6x$.



א. חשב את זווית BCD.

ב. האם המרובע ABCD הוא בר חסימה? נמק.

ג. ממשיכים את הצלע AB דרך B עד לנקודה E

כך ש-CE מאונך ל-AE.

חשב את היחס: $\frac{BE}{AE}$.

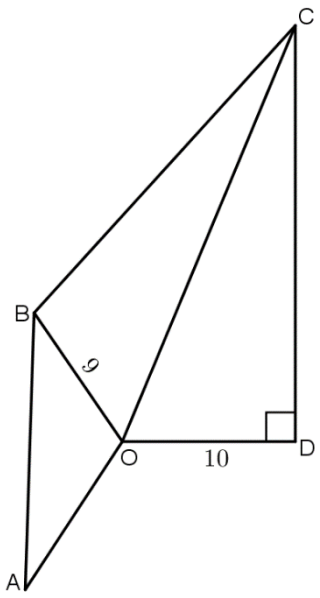
18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α.

המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO = 90°$.

נתונים האורכים: $DO = 10$, $BO = 9$.

מסמנים: $CD = 1.5m$, $BC = 1.4m$.



א. הבע באמצעות m את $\sin\alpha$.

(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$. מצא את m

אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

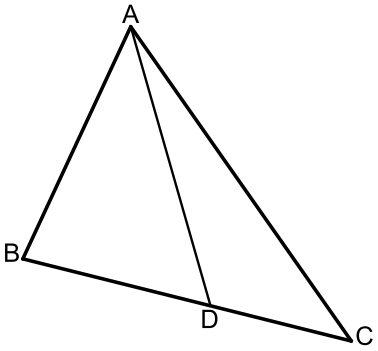
ג. חשב את זווית BOC.

19) במשולש ABC הזווית A היא בת $60°$.

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB = 60°$.

ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.



א. מצא את אורך הצלע BD.

ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.

(1) סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t

את אורך הצלע AC.

(2) מצא את t.

20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

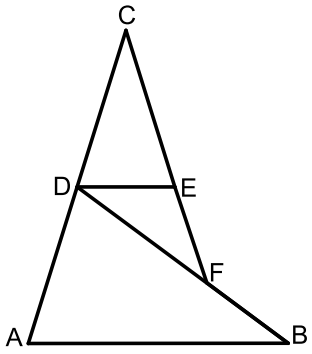
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות E , C ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD , DEF ו-DCE הם

שווי שוקיים (AB = BD , DC = CE , EF = DE).

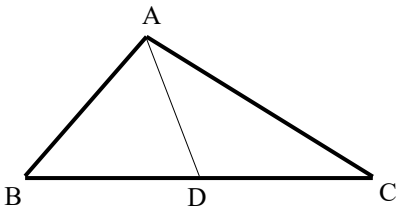
נתון כי: AD = 8.



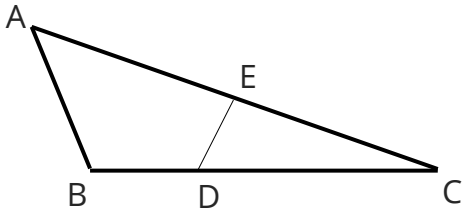
א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

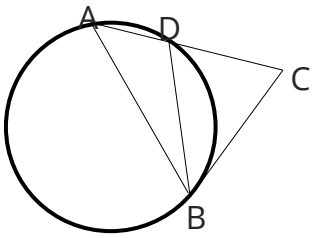
חשב את אורך הצלע BC.



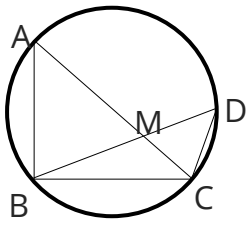
21) בשרטוט נתון: 6 ס"מ = AB , 8 ס"מ = AC ,
5 ס"מ = AD. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.
חשב את אורך הקטע BC.



22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.
נתון: $AB = a$, $BC = b$.
הבע באמצעות a ו- b את אורך הקטע DE.



23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R .
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$.
הבע באמצעות R , α ו- β את אורך הקטע BC.

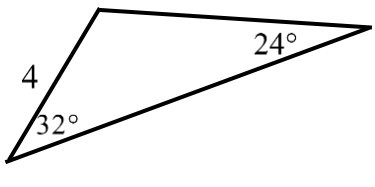


24) AC ו- BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R ,
שנפגשים בנקודה M. זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $AB = k$, $DM = p$, $DC = q$.
הבע באמצעות R , k , p ו- q את אורך הקטע MC.

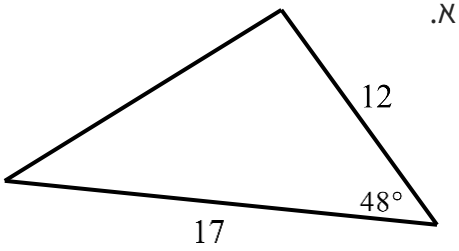
שאלות העוסקות בנוסחת השטח של משולש:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

ב.



א.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ
והוא יוצר זווית של $15°$ עם הבסיסים.

27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n. הזווית שבין אלכסוני המלבן היא θ.

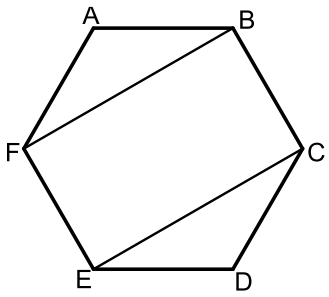
הוכח כי מתקיים: $\sin\theta = \frac{2mn}{m^2+n^2}$.

28) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B = 90°$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.

נתון: $AB = m$, $\sphericalangle A = \alpha$.

הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש BCD.

29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S.



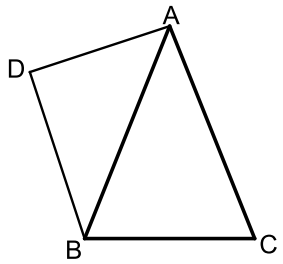
א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.

הבע באמצעות S את שטח המלבן.

30) המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α, (AB = AC). אורך הבסיס BC הוא k.

על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\sphericalangle D = 90°$.



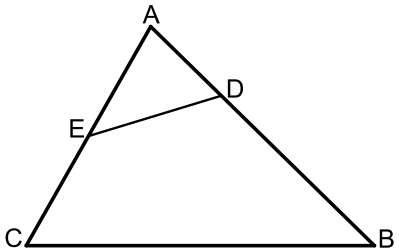
א. הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.

ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$

וכי: $\sphericalangle ABD = 40°$. מצא את זוויות המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

31) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.



הנקודה E היא אמצע הצלע AC

והנקודה D מקיימת: AD = 3 ס"מ.

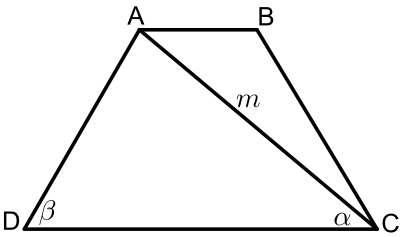
ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.

א. מצא את אורך הקטע DE.

ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

ג. חשב את שטח המרובע BCED.

32) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

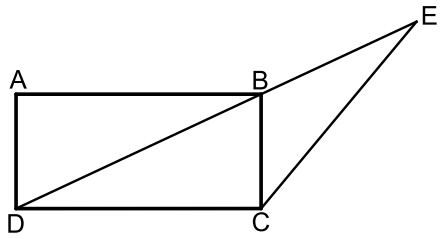
מסמנים: $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = m$.

א. הבע באמצעות α , β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.

ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $S_{ADC} / S_{ABC} = 3$.
הבע באמצעות α , β ו- m את הבסיס AB.

ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta = 60°$, $\alpha = 40°$ ו- $m = 8$.

33) המרובע ABCD הוא מלבן.



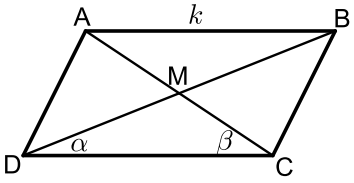
מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו
עד לנקודה E שמחוץ למלבן.
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ
וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ.
הזווית CBE היא $115°$.

א. מצא את אורך הקטע CE.

ב. מצא את אורך האלכסון BD.

ג. חשב את שטח המשולש DCE.

34) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים
את האלכסוניםAC ו-BD אשר נחתכים
בנקודה M כמתואר באיור.



מסמנים: $\sphericalangle ACD = \beta$, $\sphericalangle BDC = \alpha$, $AB = k$.

א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

ב. ענה על השאלות הבאות:

(1) הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המשולש DMC.

(2) הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המקבילית ABCD.

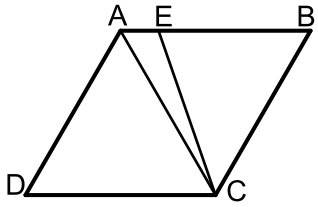
ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2 \sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

35) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\sphericalangle D = 60°$.

מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE

כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת

אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.



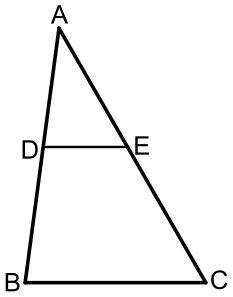
א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.

36) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.

נתון כי: $CE = 13$, $BC = 15$, $BD = \sqrt{129}$.

ידוע כי זווית AED היא $60°$.



א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע

ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

ג. חשב את שטח המשולש ADE.

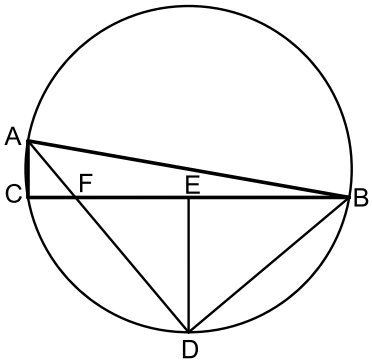
37) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה

מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים

גובה DE לצלע BC .

מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\sphericalangle ABC = 10°$.



א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.

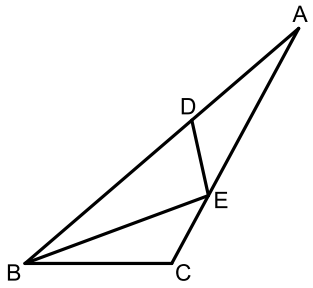
ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF

הוא 15.363 סמ"ר.

38) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

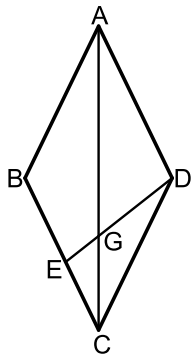
ידוע כי: $BD = 9$, $BE = 8$, $BC = 6$ וכן: $CE = DE$.



א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.

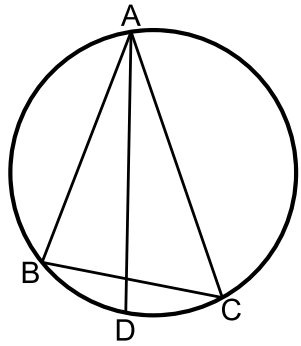
39) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.



א. חשב את זוויות המעוין.

ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m.
הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.
הזווית EDC תסומן ב- α.
(1) הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.
(2) הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.

40) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

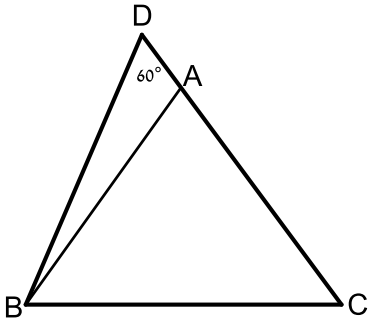


מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.
ידוע כי: $\sphericalangle ACB = 60°$, $\sphericalangle BAC = 40°$.
מסמנים: $AD = k$.

א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.
מצא את k (עגל למספר שלם).

41) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC).

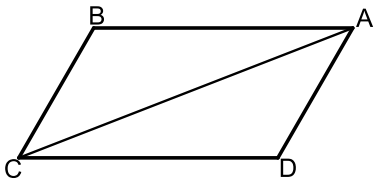


ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך
שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 60°$.
אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.

א. מצא את אורך הקטע AD.

ב. חשב את שטח המשולש ABC.

42) במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.

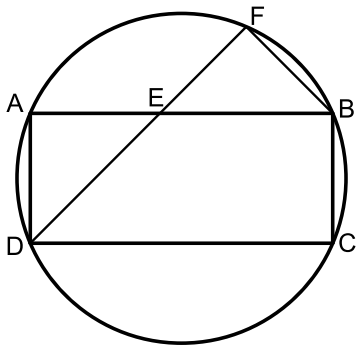


היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\sphericalangle B = 120°$.

א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.

ב. חשב את שטח המקבילית.

ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



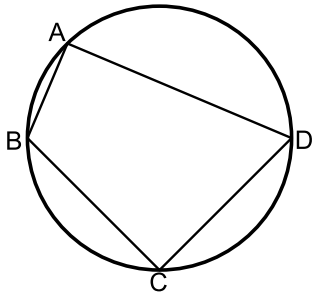
43) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- a.

א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.

ב. נתון גם כי: BC = BF .

(1) הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

(2) חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$
(אין צורך לסרטט אותן).

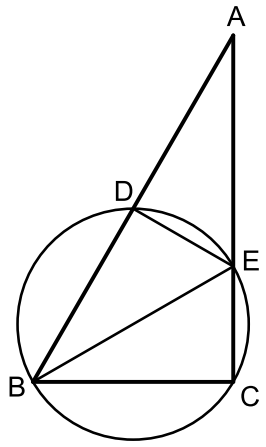


44) המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.
ידוע כי: $AD=3b$, $CD=a$, $BC=a$, $AB=b$.

א. הבע באמצעות a ו- b את $\cos\sphericalangle BCD$.

ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a=b\sqrt{5}$.

ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.
הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח
המרובע ABCD.



45) המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C=90°$ ובו: $\sphericalangle B=2\alpha$.
מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C
אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
המיתר BE חוצה את זווית B.

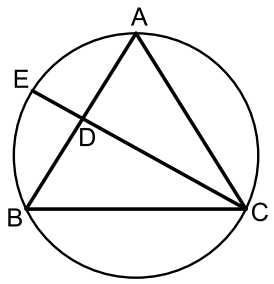
א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.

ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABE.

46) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β,
BE חוצה את זווית $\sphericalangle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB .

הוכח כי שטח המשולש ADE הוא: $S_{ADE}=-\dfrac{k^2\sin\frac{\beta}{2}\sin 4\beta}{4\sin\frac{3\beta}{2}}$.

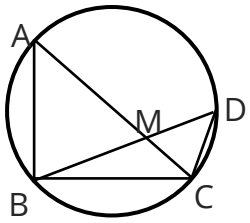
47) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) החסום במעגל.
מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
ידוע כי E היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$ והיחס בין
הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \alpha$.



א. מצא את זוויות המשולש ABC
(עגל למספרים שלמים).

ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.

48) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.
זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $\sphericalangle MBC = \alpha$, $\sphericalangle MCB = \beta$.



א. הבע באמצעות R, α ו-β
את שטח המשולש BDC.

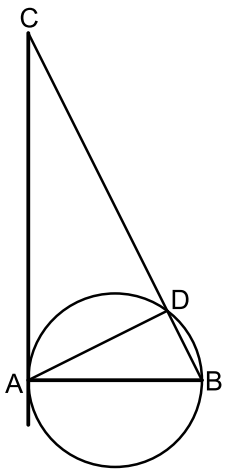
ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{BDC} = \frac{1}{2}R^2$. חשב את α.

49) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו-b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

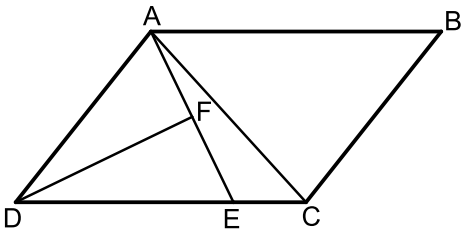
50) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.
ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.
המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.
מסמנים: $\sphericalangle BAD = \alpha$.



א. הבע באמצעות α ו-R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו-R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD
קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



51) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים: $3CE = DE$.

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי: $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF = \alpha$.

מסמנים: $CE = k$.

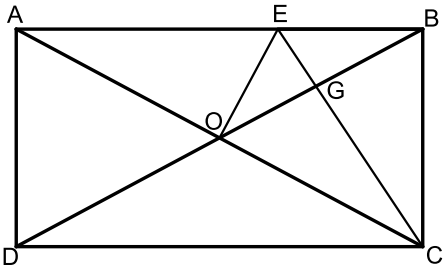
א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α .

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



52) המרובע ABCD הוא מלבן.

מעבירים את האלכסונים AC ו- BD .

הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן

ומחלקת אותה כך ש- $2BE = AE$.

ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC

ושווה ל-BE.

הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.

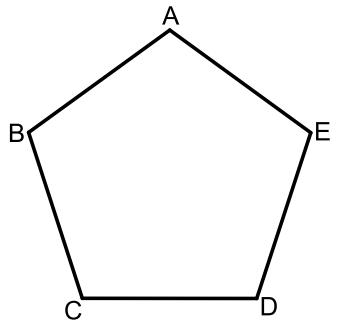
א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.

ב. הוכח כי מתקיים: $4GE = AE$.

ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.

חשב את שטח המלבן ABCD.

53) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE
(כל זוויותיו הן $108°$) בעל אורך צלע α.



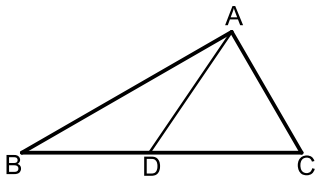
א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.

ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.

ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.

ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.

54) במשולש ABC הזווית C היא $60°$.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים
המשולשים ACD ו-ABD.
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ACD הוא: $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ.

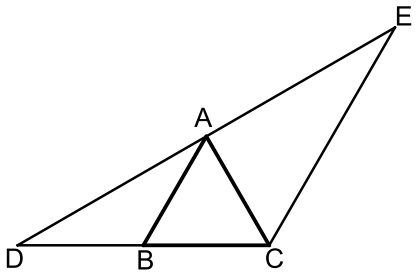


כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא: $R_2 = 3$ ס"מ.

א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 12+4\sqrt{3}$ ס"מ.
חשב את שטח המשולש.

55) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים
שני משולשים ABD ו-ACE.
ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.



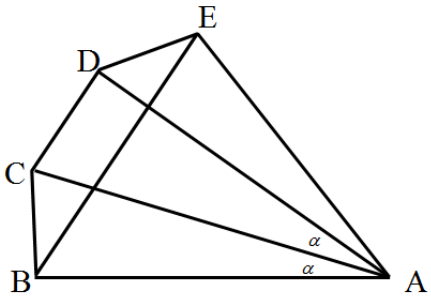
א. הוכח: $AB \parallel CE$.

ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.

(1) נתון: DC = 8 ס"מ וכי: $AC \perp DE$.

(2) חשב את שטח המשולש DCE.

(3) חשב את שטח המשולש ABD.



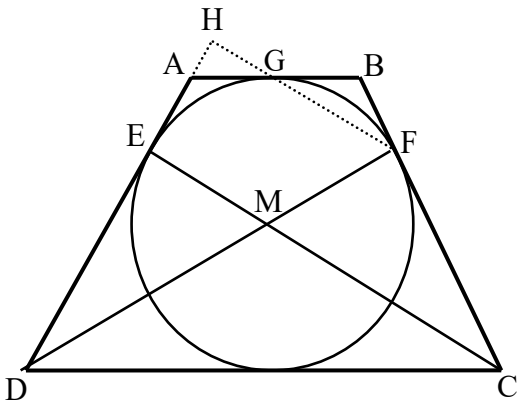
56) מהנקודה A מעבירים את
הקטעים AB , AC , AD ו-AE
כך שמתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \alpha$ ו- AB = AE .
מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
מתקיים: $CD \parallel BE$.
ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.

א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז
שווה שוקיים.

ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש (AC = AD).
הוכח כי: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

ג. ידוע כי: $\sphericalangle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\sphericalangle ADE = 3\alpha - 10$.
הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.

ד. נסמן: $AB = m$.
(1) הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.
(2) הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.
(3) מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר.
(עגל למספר שלם).

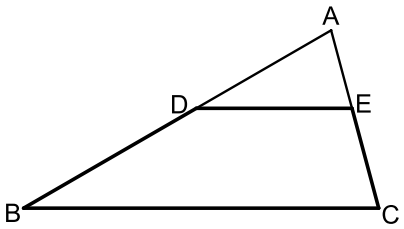


57) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים.
חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו
בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו- CE חוצים את זוויות הטרפז
ונחתכים בנקודה M.

א. הוכח כי הנקודה M היא
מרכז המעגל החסום.

ב. חשב את זוויות הטרפז.

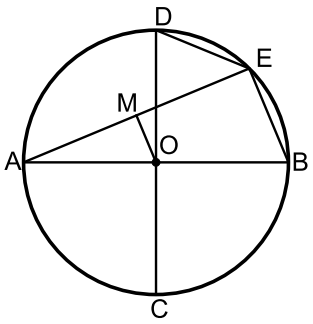
ג. ממשיכים את GF ואת AD
כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.



58) המרובע BDEC הוא טרפז $DE \parallel BC$.
המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A
כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = BC).
נתון: 18 ס"מ = AB, $\sphericalangle ADE = 30°$.

א. סמן את אורך הבסיס DE ב- x
ואת שטח הטרפז BDEC ב- S.
הבע את S באמצעות x.

ב. על הקטע AD בונים ריבוע.
ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.
חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.



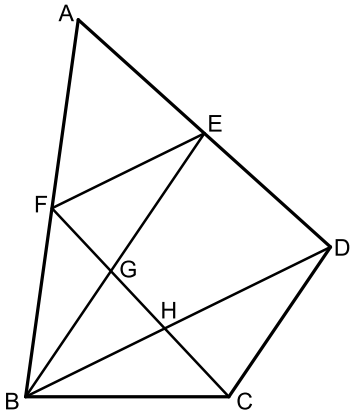
59) במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD
המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף
המעגל המקיימת: 15 ס"מ = BE + DE.
מעבירים את המיתר AE.
הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.

א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.

ב. מצא את אורך המיתר BE.
נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר.

ג. מצא את רדיוס המעגל.

ד. חשב את זווית B.



60) BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD.
הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AD ו- AB במרובע.
מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$.
נתון כי הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle BFE$ משלימות ל- $180°$.

א. הוכח: $\Delta BCD \sim \Delta BFE$.

ב. נתון כי: 7.5 ס"מ = BE וכי: $GE \cdot HD = 17\frac{1}{15}$.

(1) הוכח: $\Delta FGE \sim \Delta HCD$.

(2) חשב את אורך הקטע FE.

ג. (1) מצא את זווית $\sphericalangle EBD$.

(2) מצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED.

תשובות סופיות:

1) א. $y=$ 22.2 ס"מ , $x=$ 18.58 ס"מ ב. $\alpha=34.231°$

ג. $\alpha=41.382°$ או $\alpha=138.618°$ ד. $\alpha=155.526°$ או $\alpha=24.474°$

ה. $x=$ 3.606 ס"מ , $\alpha=73.898°$

2) א. $x=$ 5.646 ס"מ ב. $\alpha=20.742°$ ג. $\alpha=105.962°$

ד. $\alpha=90°$

3) AD = 13.064 ס"מ

4) GM = 3.360 ס"מ

5) $138.190°$, $41.810°$, $113.556°$, $66.444°$

6) AB = 14.56 ס"מ , $R=$ 9.242 ס"מ

7) $P=$ 22 ס"מ

8) AC = 10.790 ס"מ , $R=$ 5.395 ס"מ

9) DG = 18

10) $R=$ 10.5 ס"מ ב. $24.32°$

11) $\mathrm{CD}=R\sqrt{3}$, $\mathrm{DE}=1.48R$ ב. $r=1.15R$

12) א. $r=R\dfrac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$ ב. $\dfrac{\mathrm{CK}}{\mathrm{AK}}=\tan\alpha\tan\beta$ ג. $\beta_{\max}=18.43°$.

13) א. $68°$ ב. 11.66 ס"מ ג. $R=$ 6.29 ס"מ

14) א. $\mathrm{AC}=t\sqrt{13}$ ב. $\sphericalangle\mathrm{ACB}=16.1°$ ג. 27.712 סמ"ר $S_{\mathrm{ABCD}}=16\sqrt{3}\approx$.

15) א. 9.4 ס"מ ב.i. 10 ס"מ

16) ב. $\sphericalangle\mathrm{C}=28.9°$ ג. $R=13.77$

17) א. $64.04°$ ב. לא. ג. $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{7}$.

18) א. $\sin\alpha=\dfrac{1.5m}{\sqrt{100+2.25m^2}}$ ב. $m=16$ ג. $56.94°$

19) א. 4 ב.i. $1.5\sqrt{28}+3-t$ ב.ii. 3.

20) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ

21) $BC = 10$ ס"מ

22) $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$

23) $BC = \frac{2R\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$

24) $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$

25) א. $S = 75.801$ סמ"ר ב. $S = 8.641$ סמ"ר

26) $S = 16$ סמ"ר

28) $S_{\Delta BCD} = \frac{m^2\tan^2\alpha\sin 45°\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45°)}$

29) א. $\sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S$ ב. $\frac{2}{3}S$

30) א. $\frac{k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ ב. $44.4°\ ,\ 67.78°\ ,\ 67.78°$ ג. $S = 37.18$

31) א. $DE = 2\sqrt{1.6}$ ס"מ $= 2.53$ ס"מ ב. $R = 2$ ג. $S = 21.48$ סמ"ר

32) א. $DC = \frac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB = \frac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD} = 31.2$

33) א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

34) ב. i. $\frac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב. ii. $\frac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

35) א. $109.1°$ ב. $S = 86.6$

36) א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

37) א. $R = \frac{k}{2\sin^2 40} = 1.21k$ ב. $S = \frac{k^2\sin 10}{2\sin 50\sin^3 40}$ ג. $k = 6$

38) א. $40.72°$ ב. $S = 8.03$

39) א. $128.32°\ ;\ 51.68°$ ב. $1.27m\sin\alpha$ ג. $\frac{0.35m^2\sin^2\alpha\sin(128.32-\alpha)}{\sin(25.84+\alpha)}$

40) א. $BD = \frac{k\sin 20}{\sin 100}$ ב. $k = 7$

41 א. 5 ס"מ ב. $S=172.77$

42 א. BC = 3 ס"מ ו-AB = 7 ס"מ ב. $S=$ 18.18 סמ"ר ג. $R=\sqrt{\frac{37}{3}}$

43 ב.i. $R=a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 1.3a$ ב.ii. $45°$, $135°$

44 א. $\cos\sphericalangle BCD=\frac{a^2-5b^2}{a^2+3b^2}$ ג. $S=$ 14.4 סמ"ר.

45 א. $S=R^2\tan 2\alpha$ ב. $S=36\sqrt{3}$ סמ"ר.

47 א. $58°$, $58°$, $64°$ ב. BE = 7.75.

48 א. $S=2R^2\sin\alpha\cos\beta\sin\left(90°-\alpha+\beta\right)$ ב. $\alpha=22.5°$.

49 א. $\frac{b\sin\left(135°-\gamma\right)}{\sin 45°}$, $\frac{b\sin\left(\gamma-45°\right)}{\sin 45°}$ ב. $\gamma=75°$.

50 א. $S=R^2\sin 2\alpha$ ב. $S=\frac{2R^2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ ג. $\alpha=26.56°$.

51 א. $AE=6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE}=k+6k\sin\alpha+k\sqrt{25-24\cos 2\alpha}$

ג. $\alpha=14.47°$.

52 ג. 120 סמ"ר

53 א. 1.618α ב. 0.85α ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S=85.57$

54 ב. $S=8\sqrt{3}$

55 ג.i. $S_{CDE}=16\sqrt{3}$ ג.ii. $S_{ABD}=4\sqrt{3}$

56 ד.i. $BE=1.2175m$, $CD=0.4776m$, $DE=0.4663m$, $BC=0.4663m$

ד.ii. $0.7232m^2$ ד.iii. $m=$ 8 ס"מ

57 ב. $60°$, $120°$ ג. $\frac{2}{3}$

58 א. $S=81-0.25x^2$ ב. $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{16}{81}$

59 ב. BE = 10 ג. R = 13 ד. $\sphericalangle B=67.38°$

60 ב. (2) FE = 4 ס"מ ג. (1) $21.68°$ ג. (2) $R=$ 4.038 ס"מ.