

תוכן עניינים כללי:

פרק 1 - חוקי החזקות והשורשים	1
פרק 2 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים	12
פרק 3 - חוקי הלוגריתמים, משוואות אי-שוויונים לוגריתמיים	28
פרק 4 - מבוא לסדרות	57
פרק 5 - הסדרה החשבונית	64
פרק 6 - הסדרה ההנדסית	94
פרק 7 - סדרה הנדסית אינסופית	103
פרק 8 - מושגי יסוד וגופים במרחב	106
פרק 9 - הוקטור הגאומטרי	117
פרק 10 - הוקטור האלגברי	139
פרק 11 - בעיות גדילה ודעיכה	159
פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות	193
פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות	205
פרק 14 - חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות	217
פרק 15 - חשבון אינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות	230

שאלון 472

חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים:

1	חוקי החזקות והשורשים
2	סיכום חוקי החזקות והשורשים:
2	סיכום חוקי החזקות:
2	סיכום חוקי השורשים:
3	שאלות לפי נושאים:
3	שאלות בחוקי חזקות:
6	שאלות בחוקי שורשים:
9	שאלות העוסקות בכתיבה מדעית של מספרים:
10	תשובות סופיות:

סיכום חוקי החזקות והשורשים:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^0 = 1 & .1 & a^1 = a & .2 & a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 \\
 \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 \\
 \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9
 \end{array}$$

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .1 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt[n]{a^n} = a & .3 \\
 \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4 & \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6
 \end{array}$$

שאלות לפי נושאים:

שאלות בחוקי חזקות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

א. $a^2 a^6$	ב. $t^3 t^5 t^7$	ג. $b^2 b^5 b^{12} b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$	ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$	ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3 a^{19}}{a^{15}}$	ח. $\frac{x^{30}}{x^9 x^{18}}$	ט. $\frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}}$
י. $3^2 3^3 3^4$	יא. $\frac{2^{16} 2^2}{2^{10}}$	יב. $\frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

א. $\frac{3^4 2^7}{2^6 3^2}$	ב. $\frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}}$	ג. $\frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}$
------------------------------	---	--------------------------------------

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$
ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ד. $2^3 + 2^5$

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$
י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

(6) לפניך הביטויים הבאים: $\left((3^2)^3\right)^4$ ו- $\left((3^6)^n\right)^2$. מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 8^3}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$
------------------------------	--	--

(8) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^2 9 \cdot 81^2$	ב. $64^2 2^3 8^2$	ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$
ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

(9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{(2a^2 b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$	ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$
ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$	ד. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$

(10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ג. $(x^{12}y^3)^3$

ב. $(m^4n^3)^5$

א. $(a^2b)^3$

א. $\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$

ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$

ו. $\left(\frac{(b^{12}c)^2 c^{14}}{c(c^3b^5)^4 b^3}\right)^2$

ח. $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2$

ז. $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6$

(11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

ג. $\left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^27)^5}\right)^3$

ב. $\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2$

א. $\left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2$

(12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

ג. $\frac{1}{2^{10}}$

ב. $\frac{1}{5^3}$

א. $\frac{1}{4^6}$

א. $\frac{1}{125}$

ה. $\frac{1}{81}$

ד. $\frac{1}{8}$

(13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

ג. $\frac{1}{5^{-3}}$

ב. $\frac{1}{3^{-2}}$

א. $\frac{1}{4^{-3}}$

(14) חשב את הביטויים הבאים:

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

א. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים:

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

שאלות בחוקי שורשים:

(17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ב. $2^{\frac{3}{5}}$

א. $3^{\frac{1}{4}}$

ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$

ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

ח. $27^{\frac{1}{3}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$

(18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

ג. $\sqrt[3]{8}$

ב. $-\sqrt{25}$

א. $\sqrt{49}$

ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$

ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$

ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

ח. $\sqrt[4]{-16}$

ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$ | ב. $32^{\frac{3}{5}}$ | ג. $128^{\frac{2}{7}}$ |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$ |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \cdot \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$ | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ | |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$ | ב. $4\sqrt[3]{2}$ | ג. $2\sqrt[5]{3}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$ | ח. $-5\sqrt[4]{2}$ | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$ |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

ג. $\sqrt{63}$

ב. $\sqrt{48}$

א. $\sqrt{12}$

ה. $\sqrt{x^5}$

ד. $\sqrt[3]{54}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

ג. $\sqrt{320}$

ב. $\sqrt{50}$

א. $\sqrt{40}$

ו. $\sqrt[5]{160}$

ה. $\sqrt[3]{56}$

ד. $\sqrt[3]{108}$

ט. $\sqrt[6]{192}$

ח. $\sqrt[5]{972}$

ז. $\sqrt[4]{162}$

(26) פשט את הביטויים הבאים:

ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$

ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$

א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$

ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$

ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$

ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים:

ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$

א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$

ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$

שאלות העוסקות בכתיבה מדעית של מספרים:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0012)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
 א. a^7 ב. x^3 ג. 1 ד. 3^9 ה. 2^8 ו. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n = 16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
 א. 2 ב. 9 ג. 8^{18} ד. 3^7 ה. 3 ו. 3^5
- (6) $n = 2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8 ד. $b^2 c^6$ ה. $t^4 r^{12}$ ו. $x^{12} y^{18}$
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}
- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
 א. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ ה. $\frac{1}{2^5}$

- 16 .א 4 .ב -2 .ג 2 .ד -5 .ה 7 .ו (18)
- 5 .א ϕ .ב ϕ .ג -27 .ד
- $\frac{49}{16}$.א $\frac{32}{243}$.ב 125 .ג $\frac{1}{4}$.ד $\frac{1}{8}$.ה 4 .ו (19)
- $\frac{1}{2}$.א $\frac{10}{49}$.ב $\frac{27}{4}$.ג $\sqrt{2}$.ד (20)
- 2 .א 3 .ב 6 .ג 20 .ד 9 .ה 4 .ו (21)
- $\sqrt{2}$.א $\sqrt{5}$.ב $\sqrt{2}$.ג
- $\sqrt{x^3}$.א $\sqrt[3]{24}$.ב $\sqrt{9}$.ג $\sqrt{75}$.ד $\sqrt{18}$.ה (22)
- $\sqrt[3]{3}$.א $\sqrt{6}$.ב $\sqrt[5]{96}$.ג $\sqrt[3]{128}$.ד $\sqrt{20}$.ה (23)
- $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$.א $-\sqrt[4]{1250}$.ב $\sqrt[3]{-250}$.ג $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$.ד
- $x^2\sqrt{x}$.א $3\sqrt[3]{2}$.ב $3\sqrt{7}$.ג $4\sqrt{3}$.ד $2\sqrt{3}$.ה (24)
- $2\sqrt[5]{5}$.א $2\sqrt[3]{7}$.ב $3\sqrt[3]{4}$.ג $8\sqrt{5}$.ד $5\sqrt{2}$.ה $2\sqrt{10}$.ו (25)
- $2\sqrt[6]{3}$.א $3\sqrt[5]{4}$.ב $3\sqrt[4]{2}$.ג
- $\sqrt{2}$.א $4\sqrt{5}$.ב $\sqrt[4]{5}$.ג $6\sqrt[3]{2}$.ד $4\sqrt{7}$.ה $\sqrt{2}$.ו (26)
- $2\sqrt[5]{5^4}$ א $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$.ב $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ א $\frac{2}{\sqrt{3}}$.ג $8\sqrt{2}$.ד
- $\sqrt[8]{2^5}$.א $\frac{1}{7}$.ב 27 .ג $\sqrt[6]{5^{11}}$.ד $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$.ה $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.ו (27)
- $3 \cdot 10^{-4}$.א $2.34 \cdot 10^7$.ב $1.5 \cdot 10^{11}$.ג $1.5 \cdot 10^6$.ד $1.5 \cdot 10^7$.ה (28)
- $4.2 \cdot 10^{-10}$.א $4.2 \cdot 10^{-8}$.ב $4.2 \cdot 10^{-7}$.ג
- $1.6 \cdot 10^{-15}$.א $1.25 \cdot 10^{14}$.ב $1.25 \cdot 10^{11}$.ג $4 \cdot 10^{12}$.ד $9 \cdot 10^{12}$.ה (29)
- $3.43 \cdot 10^{-25}$.א $1.25 \cdot 10^{-16}$.ב $6.4 \cdot 10^{-14}$.ג

שאלון 472

משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים:

12.....	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
13.....	משוואות מעריכיות:
13.....	סיכום כללי:
13.....	שאלות:
13.....	תשובות סופיות:
14.....	משוואות עם חיבור וחסור איברים:
14.....	סיכום כללי:
14.....	שאלות:
14.....	תשובות סופיות:
15.....	משוואות עם קבוע אוילר:
15.....	סיכום כללי:
15.....	שאלות:
15.....	תשובות סופיות:
16.....	מערכת משוואות מעריכיות:
16.....	שאלות:
16.....	תשובות סופיות:
17.....	אי שוויונים מעריכיים:
17.....	סיכום כללי:
17.....	שאלות:
17.....	תשובות סופיות:
18.....	תירגול נוסף:
18.....	שאלות:
24	תשובות סופיות:

משוואות מעריכיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואה מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בסיסים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$	ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$
ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$	ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$
ה. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$	ו. $\frac{7^x}{343^3} = 1$

(2) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$
ג. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$	

תשובות סופיות:

(1) א. $x = 4$ ב. $x = -\frac{1}{3}$ ג. $x = -2$ ד. $x = 2, 8$ ה. $x = -4$ ו. $x = 9$
(2) א. $x = 0$ ב. $x = 2$ ג. $x = 2$

משוואות עם חיבור וחסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 2^x + 6 \cdot 2^x = 56 \\ \text{ב.} & 8^x + 3 \cdot 8^x = 256 \\ \text{ג.} & 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162 \\ \text{ד.} & 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227 \end{array}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735 \\ \text{ב.} & 5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29 \\ \text{ג.} & \sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1) \\ \text{ד.} & 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145 \end{array}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0 \\ \text{ב.} & 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0 \\ \text{ג.} & 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0 \\ \text{ד.} & 4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} \text{(1)} & \text{א. } x=3 & \text{ב. } x=2 & \text{ג. } x=4 \\ & \text{ד. } x=1 & & \\ \text{(2)} & \text{א. } x=\frac{1}{2} & \text{ב. } x=0 & \text{ג. } x=\frac{1}{4} \\ & \text{ד. } x=-2 & & \\ \text{(3)} & \text{א. } x=2,3 & \text{ב. } x=1,-2 & \text{ג. } x=0 \\ & \text{ד. } x=0 & & \end{array}$$

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & e^{3x} = e^{2x-1} \\ \text{ב.} & e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1} \\ \text{ג.} & e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \end{array}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \\ \text{ב.} & e^{2x} + e^x - 2 = 0 \\ \text{ג.} & e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1 \end{array}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס): $e^{3x} = x \cdot e^{3x}$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (1) & \text{א. } x = -1 & \text{ב. } x = -3 & \text{ג. } x = 2 \\ (2) & \text{א. } x = -1 & \text{ב. } x = 0 & \text{ג. } x = 1, -1 \\ (3) & x = 1 & & \end{array}$$

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

(1) פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases}$$

(2) פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

(3) פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases}$$

(4) פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases}$$

(5) פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases}$$

(6) פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$$

(7) פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4	(1,2) (3	(0,2) , (2,4) (2	(2,9) (1
(1,2) , (-1,0) (7	(-1,-2) (6	(3,2) (5	

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (2)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (4)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (3)$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ($\ln$) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (6)$$

$$e^x > 3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (2)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x = 0 \quad (4)$$

$$0 < x < 1 \quad (3)$$

$$x < 0 \text{ ו- } x > \ln 4 \quad (6)$$

$$x > \ln 3 \quad (5)$$

תירגול נוסף:

הערה:

לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בידאו והן ניתנו כבונוס לתרגול נוסף.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

$$5^x \cdot 25^{x-1} = 625 \quad (3) \qquad 3^{2x} = 27 \quad (2) \qquad 2^x = 32 \quad (1)$$

$$32^{\frac{x}{3}+5} = 4^{\frac{x}{2}-1} \quad (6) \qquad 3^x \cdot 81^{x+2} = 9^{2x-1} \quad (5) \qquad (4^{x-1})^2 = 8 \quad (4)$$

$$(3^x \cdot 27)^4 = 9 \quad (9) \qquad 6^{x^2-4} = 1 \quad (8) \qquad 100^x = 10000^{x+1} \quad (7)$$

$$25 \cdot 5^{x^2+x} = 5^x \quad (12) \qquad (2^{x^2})^4 \cdot 8^x = 2 \quad (11) \qquad (5^{2x} \cdot 125^{x-3})^3 = \frac{1}{25} \quad (10)$$

$$10^x (10^x)^x = 100 \quad (15) \qquad \frac{3^{x^2}}{3^{6(x+1)}} = 3 \quad (14) \qquad 4^{x^2} = 2^{x+1} \quad (13)$$

$$\frac{(3^x)^{3x}}{27} = \frac{3^x}{3} \quad (16)$$

פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

$$27^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} \quad (19) \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot 8^x \quad (18) \qquad 3^x = \frac{1}{27} \quad (17)$$

$$\frac{2^x}{8^{3x-2}} \left(\frac{2^{3-x}}{2^{x-4}}\right) = \frac{1}{4} \quad (22) \qquad 16 \cdot (2^{3x+5} \cdot 8^{x+5})^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+8} \quad (21) \qquad \frac{8}{32^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} \quad (20)$$

$$8 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = 27 \quad (25) \qquad 27 \left(\frac{3}{2}\right)^{4x+1} = 8 \quad (24) \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = \frac{4}{25} \quad (23)$$

$$27 \left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2+9x} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+7} = 125 \quad (27) \qquad 4 \left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} \left(\frac{7}{2}\right)^{3-x} = 49 \quad (26)$$

$$49 \left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2+x} \left(\frac{7}{5}\right)^{4-6x} = 25 \quad (28)$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי שורשים):

תזכורת: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\left(\sqrt{5^x}\right)^3 = 125 \quad (30)$$

$$\sqrt{3^{x+2}} = 81 \quad (29)$$

$$\left(9\sqrt{27}\right)^x \cdot 3^{x+2} = \frac{1}{9} \quad (32)$$

$$2^{2x-1} \cdot \sqrt{4^x \cdot 64} = 256 \quad (31)$$

$$\left(\frac{1}{49}\right)^x = \sqrt{7 \cdot 343^x \cdot \sqrt{7^x}} \quad (34)$$

$$\frac{125 \cdot 5^{x+1}}{\sqrt{25^x}} = \frac{\sqrt{5}}{5^{3-x}} \quad (33)$$

$$\sqrt[5]{256} = \frac{\sqrt{2^x}}{4 \cdot 8^x} \quad (36)$$

$$\sqrt[3]{8^x} \cdot (2 \cdot 32^x) = \sqrt[5]{1024} \quad (35)$$

$$\sqrt{10^{2x+1}} = 1000 \cdot \sqrt[3]{10^x} \quad (38)$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[5]{27^x}} = 1 \quad (37)$$

$$\sqrt{5^{4x+3}} = \frac{\sqrt[4]{25^{x-2}}}{125} \quad (40)$$

$$81 \cdot \sqrt[8]{3^x} = 27^{x+9} \quad (39)$$

$$27 \cdot \sqrt[3]{81} = 3^x \quad (42)$$

$$\sqrt{x+1} \sqrt{5^x} = 25 \quad (41)$$

$$9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt[3]{3} \quad (44)$$

$$100 \cdot \sqrt[3]{10^{x^2-3}} = 10,000 \quad (43)$$

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt[3]{8}}}} = 1 \quad (46)$$

$$\sqrt{32} \cdot 2^{x^2+4x} = \sqrt{\frac{1}{8}} \quad (45)$$

פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

$$5^{x+1} \cdot 3^{x-2} = 125 \quad (49)$$

$$4 \cdot 3^x \cdot 2^x = 144 \quad (48)$$

$$2^x \cdot 5^x = 1000 \quad (47)$$

$$2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392 \quad (52)$$

$$5 \cdot 3^{x+4} = 2187 \cdot 5^{x-2} \quad (51)$$

$$3^{x+2} \cdot 20 = 405 \cdot 2^x \quad (50)$$

$$\sqrt[3]{3^{x-1} \cdot 2^{x-2} \cdot 5^{x-3}} = 0.02 \quad (55)$$

$$7^{x^2-1} \cdot 10^{x^2+4} = 7 \cdot 10^6 \quad (54)$$

$$3^x \cdot 2^x = \sqrt{729} \cdot 10^3 \cdot 5^{-x} \quad (53)$$

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחסור):

$$\begin{array}{lll}
 2^x + 4 \cdot 2^x = 80 & \text{(58)} & 5^x + 6 \cdot 5^x = 875 & \text{(57)} & 3^x + 3^x = 18 & \text{(56)} \\
 8^x + 8^{x+2} = 1040 & \text{(61)} & 7 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = \frac{5}{27} & \text{(60)} & 7 \cdot 10^x - 10^x = 600 & \text{(59)} \\
 2^{x+3} + 2^{x-1} = \frac{17}{16} & \text{(64)} & 3^{x+2} - 3^{x-2} = 240 & \text{(63)} & 2^x + 2^{x+5} = 1056 & \text{(62)} \\
 5^{3x+2} + 3 \cdot 125^x = 28 & \text{(67)} & 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 245 & \text{(66)} & 3^{x-2} - 3^{x-3} = 54 & \text{(65)} \\
 (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 3.75 & \text{(70)} & 16^{x+\frac{1}{2}} - 4^{2x-\frac{1}{2}} = 14 & \text{(69)} & 2^{2x-1} + 4^{x+2} = 66 & \text{(68)} \\
 3^{3x+1} + 2178 = 27^{x+2} & \text{(73)} & 25^{2-x} - 5^{1-2x} = 124 & \text{(72)} & 3^{2-x} + 3^{1-x} = 4 & \text{(71)} \\
 8^{x+2} \cdot 3^{x-1} + 410 \frac{2}{3} = 4^{x+\frac{1}{2}} \cdot 6^{x+3} & \text{(75)} & 468 - 6^x = 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} & \text{(74)} \\
 10^{x+1} \cdot 2^{x-1} + 6 \cdot 10^3 = 5^{x+1} \cdot 4^{x+1} & \text{(76)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחסור):

$$\begin{array}{ll}
 3^x - 3^{2-x} = 8 & \text{(78)} \\
 7^{x+4} + 7^{-x} = 350 & \text{(80)} \\
 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0 & \text{(82)} \\
 36^{-x} - 7 \cdot 6^{-x} + 6 = 0 & \text{(84)} \\
 2 \cdot 2^{4x+1} + 3 \cdot 4^x = 1 & \text{(86)} \\
 2^{\frac{2}{3}x+3} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} = -1 & \text{(88)} \\
 \frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3 & \text{(90)} \\
 \frac{3^{x+2}}{3^{2x}+3^x-2} - \frac{6}{3^x+2} = \frac{3^x}{3^x-1} & \text{(92)} \\
 2^{x+2} + 2^{x-2} = 8.5 & \text{(77)} \\
 5^x + 5^{2-x} = 26 & \text{(79)} \\
 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0 & \text{(81)} \\
 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0 & \text{(83)} \\
 16^{x+2} + 96 \cdot 4^{x-1} = 1 & \text{(85)} \\
 4^{1.5x+1} + 3 \cdot 2^{6x-3} = 56 & \text{(87)} \\
 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x-2} - 26 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}x} = 3 & \text{(89)} \\
 \frac{8}{9^x+4} + 3 = -\frac{77}{81^x-16} & \text{(91)} \\
 \frac{25 \cdot 2^x - 68}{2^x - 2} = \frac{5 \cdot 2^{x+2} + 82}{2^x + 3} & \text{(93)}
 \end{array}$$

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x-1=y \\ 4 \cdot 3^x - 3^{y+2} = -15 \end{cases} \quad (96)$$

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad (95)$$

$$\begin{cases} y=x+1 \\ 3^x + 3^y = 36 \end{cases} \quad (94)$$

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = -1 \end{cases} \quad (99)$$

$$\begin{cases} 7^{3x-7y} = 7 \\ 2^{2x-12y} = 256 \end{cases} \quad (98)$$

$$\begin{cases} 2^{x+3y} = 8 \\ 3^{2x+7y} = 81 \end{cases} \quad (97)$$

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 29 \\ 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^y = 1298 \end{cases} \quad (102)$$

$$\begin{cases} 3^x - 7^y = 20 \\ 9^x - 3 \cdot 49^y = 582 \end{cases} \quad (101)$$

$$\begin{cases} 2^{x+1} + 3^{y+1} = 17 \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 3^y = 21 \end{cases} \quad (100)$$

(103) פתור את המשוואות המעריכיות הבאות (משוואות עם בסיס טבעי (e)):

$$e^{3x-5} = (e^{x+1})^2 \quad .ב.$$

$$e^{2x} = e^{x-1} \quad .א.$$

$$e^{4x-5} = e \cdot e^{x^2} \quad .ד.$$

$$e^{x^2-1} \cdot e^{6x} = e^6 \quad .ג.$$

$$\sqrt[3]{e^x} = e^{1-x} \quad .א.$$

$$(e^x)^2 \cdot e^{5x+2} \cdot e^{-4x^2} = 1 \quad .ה.$$

$$\sqrt[3]{e^{x^2+2}} = e^2 \cdot e^x \quad .ח.$$

$$\sqrt[5]{e^{4x+7}} \cdot \sqrt{e} = e^5 \cdot e^x \quad .ז.$$

$$\frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} = e^2 \cdot e^{x^2} \quad .ו.$$

$$e^{-x} \cdot \sqrt[4]{e^{4-x}} = 1 \quad .ז.$$

$$\sqrt[4]{\frac{e^x}{e^{3x-2}}} = e^{5+x} \quad .ב.$$

$$\frac{e^{x^2+6x-16}}{e^{4x}} = (e^2)^x \quad .א.$$

$$e^{-x-1} + e^{3-x} = e^3 \quad .י.$$

$$e^x + e^{x+2} = e^4 \quad .ג.$$

$$e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 \quad .טז.$$

$$e^{2x} - e^{2x-3} = \sqrt{e} \quad .טז.$$

$$e^{2x} + 11e^x + 30 = 0 \quad .יח.$$

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \quad .יח.$$

$$e^{3x} - 18e^{-3x} = 3 \quad .כ.$$

$$e^x - 1 = 6e^{-x} \quad .יט.$$

$$e^x - \sqrt[3]{e^x} = 0 \quad .כב.$$

$$2 \cdot \sqrt[4]{e^x} + 4 \cdot \sqrt[4]{e^{-x}} = 9 \quad .כא.$$

$$\frac{4 \cdot \sqrt[5]{e^x}}{e} - e^{-2} \cdot \sqrt[5]{e^{2x}} + 12 = 0 \quad .כד.$$

$$\frac{e^{2x}}{\sqrt[2]{e^x}} - 28 = 3 \cdot \sqrt[4]{e^{3x}} \quad .כג.$$

פתור את המשוואות המעריכיות הבאות (משוואות עם x שאינן במעריך):

$$xe^x = \frac{x}{e^2} \quad (105)$$

$$xe^x = \sqrt[3]{e} \cdot x \quad (104)$$

$$\frac{x}{3} = xe^x \quad (107)$$

$$2x + xe^x = 0 \quad (106)$$

$$e^x = xe^x \quad (109)$$

$$xe^x = 2e^x \quad (108)$$

$$xe^x = ex \quad (111)$$

$$2xe^x + e^x = 0 \quad (110)$$

$$xe^x + x = 0 \quad (113)$$

$$2xe^x = xe^x \quad (112)$$

$$xe^x = \frac{x}{e} \quad (115)$$

$$xe^x = \sqrt{e} \cdot x \quad (114)$$

$$xe^x = \frac{x}{\sqrt{e}} \quad (116)$$

פתור את המשוואות המעריכיות הבאות:

$$4 \cdot 1.04^x = 9 \cdot 1.03^x \quad (118)$$

$$5 \cdot 1.2^x = 7 \cdot 1.1^x \quad (117)$$

$$8 \cdot 1.3^x = 9 \cdot 1.07^x \quad (120)$$

$$3 \cdot 1.06^x = 2 \cdot 1.08^x \quad (119)$$

פתור את אי-השוויונים המעריכיים הבאים:

תזכורת: אם: $a > 1$: $a^x > a^y \rightarrow x > y$; ואם: $0 < a < 1$: $a^x > a^y \rightarrow x < y$.

$$3^{x-2} > 27 \quad (122)$$

$$2^x < 16 \quad (121)$$

$$5^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x \quad (124)$$

$$16^x < 8^{x+1} \quad (123)$$

$$2 \cdot 16^{x^2} \cdot 32^x > 1 \quad (126)$$

$$27 \cdot 3^{x^2} > 3^{x+3} \quad (125)$$

$$0.3^{6x-1} < 0.3^{13-x} \quad (128)$$

$$64^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 1024 \quad (127)$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2x} \quad (130)$$

$$0.6^{x+1} \geq 0.6^{x^2-1} \quad (129)$$

$$\left(\frac{1}{625}\right)^x < 5^{x^2} \quad (132)$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2} \cdot \sqrt{27^{x+1}} \geq 3 \quad (131)$$

$$27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{3x-1} < 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} \quad (134)$$

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{x^2-1} \geq 1000^{1-x} \quad (133)$$

$$81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+3x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} < 16 \quad (136)$$

$$4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-1} < 5 \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^x \quad (135)$$

$$\frac{1}{9} \leq 3^{x+2} \leq 27 \quad (138)$$

$$125 \cdot \sqrt[3]{5^x} > \sqrt[3]{5^{8x^2}} \quad (137)$$

$$1 \leq 125 \cdot 5^x \leq 5^{x^2+1} \quad (140)$$

$$1 \leq 4^{2x-1} \cdot 2^{x-1} \leq 128 \quad (139)$$

$$0 < 25^x \cdot 5^{x^2} < 5 \cdot \sqrt{625^x} \quad (142)$$

$$0 < 8^x \cdot 2^{x^2} < 16 \quad (141)$$

$$9^x - \frac{10}{9} \cdot 3^{x+2} + 9 < 0 \quad (144)$$

$$16^x - 4^x - 12 > 0 \quad (143)$$

$$2^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{16}{x-6}} \geq 5^x \quad (146)$$

$$2^x - 3 \cdot 2^{4-x} > 2 \quad (145)$$

$$7^{\frac{2x-3}{x-2}} < 343 \quad (147)$$

(148) פתור את אי-השוויונים המעריכיים הבאים:

$$e^{2x+1} > e^{4-x}$$

$$e^x > 2$$

$$e^{x^2+3} \geq (e^x)^4$$

$$e^{3x-1} < 4$$

$$e^{5x-27} < e^{x^3} \cdot (e^x)^5$$

$$(e^x)^6 \cdot e^{-x^2} \leq e^5$$

$$\sqrt[2]{e^{x+1}} > e^{x^2} \cdot e^1$$

$$e^{x^2-4x} \cdot e^7 < e^{2-x}$$

$$e^{2x} - 13e^x + 30 > 0$$

$$e^{3x^2} (e^x)^6 \leq e^{-3}$$

$$6e^{2x} - 5e^x - 1 < 0$$

$$e^{2x} + 7e^x + 12 > 0$$

$$e^x - 30\sqrt{e^x} + 81 \leq 0$$

$$e^{2x} - 13e^x + 22 < 0$$

$$-\sqrt{e^x} + 20 \cdot \sqrt[4]{e^x} - 64 \geq 0$$

תשובות סופיות:

2 (3	1.5 (2	5 (1
-40.5 (6	-10 (5	1.75 (4
-2.5 (9	± 2 (8	-2 (7
$\emptyset$ (12	$-1, \frac{1}{4}$ (11	$1\frac{2}{3}$ (10
1, -2 (15	7, -1 (14	-0.5, 1 (13
-0.5 (18	-3 (17	$1, -\frac{2}{3}$ (16
-4 (21	2 (20	0.8 (19
-1 (24	$\frac{2}{3}$ (23	1.5 (22
$-4, \frac{1}{2}$ (27	$\frac{2}{3}$ (26	$\emptyset$ (25
2 (30	6 (29	$-3, \frac{2}{3}$ (28
6.5 (33	$-\frac{8}{9}$ (32	2 (31
-1.44 (36	$\frac{1}{6}$ (35	$-\frac{2}{15}$ (34
-8 (39	3.75 (38	$\frac{5}{17}$ (37
-1, 4 (42	-2 (41	$-3\frac{2}{3}$ (40
-2 (45	$\emptyset$ (44	-1, 3 (43
2 (48	3 (47	-3, 1 (46
3 (51	2 (50	2 (49

$\pm\sqrt{2}$ (54	3 (53	2 (52
3 (57	2 (56	1 (55
-3 (60	2 (59	4 (58
3 (63	5 (62	$\frac{4}{3}$ (61
$\frac{1}{4}$ (66	6 (65	-3 (64
0.5 (69	1 (68	0 (67
0.5 (72	1 (71	0 (70
0 (75	2 (74	$\frac{1}{3}$ (73
2 (78	1 (77	2 (76
3 (81	-3, -1 (80	2, 0 (79
-1, 0 (84	-2, 1 (83	3, 2 (82
1 (87	-1 (86	-2.5 (85
1 (90	-4 (89	-6, -3 (88
3 (93	1 (92	-0.5 (91

(1,1) (96)	(2,1) (95)	(2,3) (94)
(1,1) (99)	(-2,-1) (98)	(9,-2) (97)
(2,2) ; (4.26,1.41) (102)	(3,1) ; (3.182,1.318) (101)	(2,1) (100)
0.75.1 -0.25,2.ה -3.ג' -4,4.ח' $1.75 - \ln \sqrt{e^3 - 1}$.ו $\frac{\ln 6}{3}$.ג $\ln 3$.ו' .5(ln 6 + 1) .ד	ϕ .ט -1,2.י' $\ln(e^4 + 1) - 4$.ט' ϕ .פ' $\ln 3$.פ' 0.ג	7.ג -1.ח (103) 0.8.ד4,-1.פ -15.5.י' $4 - \ln(e^2 + 1)$.א' $2 \ln 2, \ln 2$.ו $4 \ln 4, -4 \ln 2$.ח
0 (106)	-2, 0 (105)	$\frac{1}{3}, 0$ (104)
1 (109)	2 (108)	-1.098, 0 (107)
0 (112)	1, 0 (111)	-0.5 (110)
-1, 0 (115)	0.5, 0 (114)	0 (113)
83.93 (118)	3.87 (117)	-0.5, 0 (116)
	0.605 (120)	21.69 (119)
$x < 3$ (123)	$x > 5$ (122)	$x < 4$ (121)
$x < -1, x > -0.25$ (126)	$x < 0, x > 1$ (125)	$x \leq 0.25$ (124)
$x \leq -1, x \geq 2$ (129)	$x > 2$ (128)	$x > 2$ (127)
$x < -4, x > 0$ (132)	$-\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ (131)	$x \leq \frac{1}{9}$ (130)
$x > -1.5$ (135)	$x > 1$ (134)	$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ (133)
$-4 \leq x \leq 1$ (138)	$-1 < x < \frac{9}{8}$ (137)	$x < -4, x > \frac{1}{2}$ (136)
$-4 < x < 1$ (141)	$-3 \leq x \leq 1, x \geq 2$ (140)	$\frac{3}{5} \leq x \leq 2$ (139)

$$\ln 2 < x < \ln 11 \text{ .}\lambda'$$

שאלון 472

חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

תוכן העניינים:

28..... חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

30	הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:
30	סיכום כללי:
30	שאלות:
31	תשובות סופיות:
32	חוקי הלוגריתמים:
32	סיכום כללי:
32	שאלות:
33	תשובות סופיות:
34	חישובים עם חזקה לוגריתמית:
34	סיכום כללי:
34	שאלות:
34	תשובות סופיות:
35	הלוגריתם הטבעי:
35	סיכום כללי:
35	שאלות:
35	תשובות סופיות:
36	משוואות עם בסיסים שונים:
36	סיכום כללי:
36	שאלות:
36	תשובות סופיות:
37	אי-שוויונים לוגריתמיים:
37	סיכום כללי:
37	שאלות:
37	תשובות סופיות:

38	 תרגול נוסף:
38	 הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות:
41	 תשובות סופיות:
43	 חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:
45	 תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים:
47	 תשובות סופיות:
49	 מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות:
50	 תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים:
51	 הוצאת לוג משני אגפים:
52	 שאלות עם לוגריתם טבעי:
54	 תשובות סופיות:
56	 אי-שוויוניים לוגריתמיים:
56	 תשובות סופיות:

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.
 נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x + 4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\log_6(4x-2)=1 \quad \text{א.} \quad \log_4(4-x)=\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

$$\log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ג.} \quad \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ד.}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$(\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{א.} \quad 2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10 \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 5 \quad \text{ב. } 3 \quad \text{ג. } \frac{1}{2} \quad \text{ד. } \frac{2}{3} \quad \text{ה. } -2$$

$$\text{ו. } 4 \quad \text{ז. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } x = 65,536 \quad \text{ג. } x = 27 \quad \text{ד. } x = 4$$

$$\text{ה. } x = 5 \quad \text{ו. } x = 4$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 2 \quad \text{ב. } x = 2 \quad \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = 3$$

$$(4) \quad \text{א. } x = 1024, \frac{1}{1024} \quad \text{ב. } x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|---|--------------------------------------|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$ | ב. $\log_2 200 - \log_2 100$ |
| ג. $\log_3 60 - \log_3 540$ | ד. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$ |
| ה. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$ | ו. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$ |
| ז. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$ | |

(2) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

- א. $\log_5 (4x - 3) = \log_5 7$
- ב. $2 \log_2 (2x - 2) - \log_2 (16 - x) = \log_2 (x - 1) + 1$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

- א. $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$
- ב. $\log_2 \left(\frac{x}{4} \right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$
- ג. $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. 3 ב. 1 ג. -2 ד. 2
ה. -2 ו. 1 ז. -0.5
- (2) א. $x = 2.5$ ב. $x = 6$
- (3) א. $x = 16, \frac{1}{256}$ ב. $x = 2, \frac{1}{512}$ ג. $x = 4, \frac{1}{4}$

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$

ב. $4^{\log_2 5}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.
למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם **ל**.
מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\ln e^2 \quad \text{א.} \quad \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ב.} \quad \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} \quad \text{ג.}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\ln x = 2 \quad \text{א.} \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$3 \ln^2 x + \ln x = 2 \quad \text{א.} \quad \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \quad \text{ב.}$$

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$e^{\ln 3} \quad \text{א.} \quad e^{2 \ln 3} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.
את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 3^x = 6 \\ \text{ב.} & 2^x - 9 = 0 \\ \text{ג.} & 49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0 \end{array}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & e^{3x} = 3 \\ \text{ב.} & 4 + 3e^x = 9 \\ \text{ג.} & 3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א.} \quad x = \log_3 6 = 1.63 \quad \text{ב.} \quad x = \log_2 9 = 3.17$$

$$\text{ג.} \quad x = \log_7 3 = 0.564, \quad x = \log_7 5 = 0.827$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36 \quad \text{ב.} \quad x = \ln \frac{5}{3} = 0.51 \quad \text{ג.} \quad x = \ln \frac{1}{3} = -1.09, \quad x = 0$$

אי-שוויונים לוגריתמיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\log_6(x^2 - 5x) < 1 \quad (2)$$

$$\ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad (4)$$

$$\ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (6)$$

$$\log_2 x < \log_2(5x - 20) \quad (1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x) \quad (3)$$

$$\ln x < 3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$-1 < x < 0, 5 < x < 6 \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{e} < x < e^7 \quad (6)$$

$$x > 5 \quad (1)$$

$$-3 \leq x < \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$0 < x < e^3 \quad (5)$$

תרגול נוסף:

הערה:

לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בידאו והן ניתנו כבונוס לתרגול נוסף.

הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות:

חשב את ערכי הלוגריתמים הבאים:

תזכורת: הגדרת הלוגריתם: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (כאשר: $a > 0, a \neq 1, b > 0$).

$$\log_5 5 \quad (3)$$

$$\log_3 81 \quad (2)$$

$$\log_2 8 \quad (1)$$

$$\log_{125} 5 \quad (6)$$

$$\log_{32} 8 \quad (5)$$

$$\log_9 243 \quad (4)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 16 \quad (9)$$

$$\log_{32} 64 \quad (8)$$

$$\log_{49} 7 \quad (7)$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8} \quad (12)$$

$$\log_{\frac{1}{25}} 625 \quad (11)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 \quad (10)$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} 9 \quad (15)$$

$$\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125} \quad (14)$$

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} \quad (13)$$

$$\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3} \quad (18)$$

$$\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{343} \quad (17)$$

$$\log_{\sqrt[3]{5}} 125 \quad (16)$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{25}}} \sqrt[5]{125} \quad (21)$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{27}}} \sqrt[3]{81} \quad (20)$$

$$\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{128} \quad (19)$$

$$\log_{0.01} \frac{10}{\sqrt[4]{1000}} \quad (24)$$

$$\log \frac{\sqrt[5]{100}}{\sqrt{10}} \quad (23)$$

$$\log \frac{\sqrt{10}}{100} \quad (22)$$

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות:

$$\log_6 x = 1 \quad (27)$$

$$\log_2 x = 5 \quad (26)$$

$$\log_3 x = 2 \quad (25)$$

$$\log_7 x = 0 \quad (30)$$

$$\log_4 x = -2 \quad (29)$$

$$\log_3 x = -3 \quad (28)$$

$$\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3} \quad (33)$$

$$\log_{\frac{3}{5}} x = 4 \quad (32)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -2 \quad (31)$$

$$\log_{\sqrt{5}} x + 2 = 0 \quad (36)$$

$$7 \log_{128} x - 3 = 0 \quad (35)$$

$$4 \log_9 x - 2 = 0 \quad (34)$$

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות:

$$\log_x 25 = 2 \quad (39)$$

$$\log_x 6 = -1 \quad (38)$$

$$\log_x 3 = 1 \quad (37)$$

$$\log_x 64 = 3 \quad (42)$$

$$\log_x 625 = 4 \quad (41)$$

$$\log_x 64 = 2 \quad (40)$$

$$\log_x \frac{1}{81} = 4 \quad (45)$$

$$\log_x \frac{4}{9} = -2 \quad (44)$$

$$\log_x \frac{1}{8} = 3 \quad (43)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם):

$$\log_5 (6 - 7x) = 3 \quad (48)$$

$$\log_2 (x + 5) = 4 \quad (47)$$

$$\log_5 (x + 1) = 1 \quad (46)$$

$$\log_{64} (x + 3) = \frac{1}{3} \quad (51)$$

$$\log_4 (4x + 1) = \frac{1}{2} \quad (50)$$

$$\log_6 (3x - 2) = 0 \quad (49)$$

$$\log_{0.2} (2x + 1) = -2 \quad (54)$$

$$\log_{\sqrt{3}} (7x + 2) = 2 \quad (53)$$

$$\log_{\sqrt{5}} (3x + 1) = 4 \quad (52)$$

$$\log_3 \left(x^2 - \frac{2x}{9} \right) = -3 \quad (57)$$

$$\log_6 (13x - x^2) = 2 \quad (56)$$

$$\log_4 (10x - x^2) = 2 \quad (55)$$

$$\log_3 (x - 2x^2 + 28) = 3 \quad (60)$$

$$\log_2 (x^2 - 6x + 13) = 3 \quad (59)$$

$$\log_2 (x^2 - 6x + 10) = 1 \quad (58)$$

$$\log_7 (x^4 - 80) = 0 \quad (63)$$

$$\log_3 (x^3 - 44) = 4 \quad (62)$$

$$\log_4 (x^3 - 11) = 2 \quad (61)$$

$$\log_2 \frac{x^2 - 5}{x} = 2 \quad (66)$$

$$\log_3 \frac{20x + 68}{5x + 2} = 2 \quad (65)$$

$$\log_4 \frac{3x - 1}{x + 2} = 1 \quad (64)$$

$$\log_x (2x^2 - 6x + 5) = 2 \quad (69)$$

$$\log_x (3x^2 - 5x + 3) = 2 \quad (68)$$

$$\log_x (2x^2 - 9x) = 2 \quad (67)$$

$$\log_{x+2} (4x + 5) = 2 \quad (72)$$

$$\log_x (2x^2 + x - 6) = 2 \quad (71)$$

$$\log_x (4x^2 - 3x) = 2 \quad (70)$$

$$\log_{\sqrt{x+1}} (x^2 - x - 2) = 2 \quad (75)$$

$$\log_{\sqrt{x}} \left(\frac{8}{x} \right) = 4 \quad (74)$$

$$\log_{x-3} (3x - 11) = 2 \quad (73)$$

$$\log_{\sqrt{x^2+3}} (4 + 3x + 3x^2) = 2 \quad (78)$$

$$\log_{\sqrt{x+3}} (x + 5) = 4 \quad (77)$$

$$\log_4 (10x - x^2) = 2 \quad (76)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם מספר פעמים):

$$2\log_9(\log_5(2x-1))=1 \quad (80)$$

$$\log_3(\log_2 x)=1 \quad (79)$$

$$\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(x^2-7.5x))=-\frac{1}{2} \quad (82)$$

$$\log_2(\log_3(x+3)+30)=5 \quad (81)$$

$$\log_{25}(2-5^{x+2})=x+2 \quad (84)$$

$$\log_2\left(\log_{0.25}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right)=-1 \quad (83)$$

$$\log_5\left(4+\log_6\left(3+\log_4(x^2+15)\right)\right)=1 \quad (86)$$

$$\log_5(\log_3(\log_3(5x^2+7)))=0 \quad (85)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(5 \cdot 2^x + 1) = 4 \quad (88)$$

$$\log_2(5^x + 3) = 7 \quad (87)$$

$$\log_5(5^x + 120) - x = 2 \quad (90)$$

$$\log_2(12 - 2^x) = x + 1 \quad (89)$$

$$\log_9(10 \cdot 3^x - 9) = x \quad (92)$$

$$\log_4(5 \cdot 2^{x+1} - 16) = x \quad (91)$$

$$\log_4(17 - 4^x) + x = 2 \quad (94)$$

$$\log_5(30 - 5^x) + x = 3 \quad (93)$$

$$\log_2(5 \cdot 2^{x+1} - 1) = 2x + 4 \quad (96)$$

$$\log_5(49 \cdot 5^x - 120) = 2x + 1 \quad (95)$$

$$3\log_2\left(9 \cdot 2^{\frac{x}{3}+1} - 1\right) = 15 + 2x \quad (98)$$

$$\log_8(3 - 23 \cdot 8^{3x}) = 6x + 1 \quad (97)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות:

הדרכה: היעזר בהצבה של: $\log_a x = t$, פתור משוואה עבור t והחזר את ההצבה למציאת x עפ"י הגדרת הלוגריתם.

$$(\log_2 x)^2 + 2 \cdot \log_2 x - 15 = 0 \quad (100)$$

$$(\log_3 x)^2 = 16 \quad (99)$$

$$\log_7 x - \frac{6}{\log_7 x} = 1 \quad (102)$$

$$2 \cdot (\log_4 x)^2 - 5 \cdot \log_4 x = 3 \quad (101)$$

$$\frac{5 \cdot \log_{64} x - 1}{(\log_{64} x)^2} = 6 \quad (104)$$

$$\frac{12}{\log_3 x + 1} - \frac{2}{\log_3 x} = 3 \quad (103)$$

$$\sqrt{\log_{16} x} + \sqrt{\log_{16} x + 2} = 2 \quad (106)$$

$$\log_3 x + \sqrt{\log_3 x} = 2 \quad (105)$$

$$(\log_3 x)^2 - \sqrt{(\log_3 x)^2 + 27} = 3 \quad (107)$$

תשובות סופיות:

2.5 (4	1 (3	4 (2	3 (1
$\frac{6}{5}$ (8	$\frac{1}{2}$ (7	$\frac{1}{3}$ (6	0.6 (5
1.5 (12	-2 (11	-3 (10	-4 (9
9 (16	6 (15	-3 (14	-2 (13
$-\frac{8}{9}$ (20	$-\frac{7}{15}$ (19	$-\frac{1}{12}$ (18	-9 (17
$-\frac{1}{8}$ (24	-0.1 (23	-1.5 (22	-0.9 (21
$\frac{1}{27}$ (28	6 (27	32 (26	9 (25
$\frac{81}{625}$ (32	9 (31	1 (30	$\frac{1}{16}$ (29
0.2 (36	8 (35	3 (34	0.5 (33
8 (40	5 (39	$\frac{1}{6}$ (38	3 (37
1.5 (44	0.5 (43	4 (42	5 (41
-17 (48	11 (47	4 (46	$\frac{1}{3}$ (45
8 (52	1 (51	0.25 (50	1 (49
9, 4 (56	8, 2 (55	12 (54	$\frac{1}{7}$ (53
$1, -\frac{1}{2}$ (60	1, 5 (59	4, 2 (58	$\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$ (57
-9 (64	± 3 (63	5 (62	3 (61
1.5 (68	9 (67	5, -1 (66	2 (65
1 (72	2 (71	$\emptyset$ (70	5 (69
2, 8 (76	3 (75	2 (74	5 (73
63 (80	8 (79	$-1, -\frac{1}{2}$ (78	-1 (77

-2 (84	$\pm \frac{1}{2}$ (83	13.5, -6 (82	6 (81
4 (88	3 (87	± 7 (86	± 2 (85
0, 2 (92	3, 1 (91	1 (90	2 (89
-3, -1 (96	0.974, 1 (95	0, 2 (94	2, 1 (93
$8, \frac{1}{32}$ (100	$81, \frac{1}{81}$ (99	-12, -3 (98	$-\frac{1}{3}$ (97
8, 4 (104	$\sqrt[3]{3}, 9$ (103	$343, \frac{1}{49}$ (102	$64, \frac{1}{2}$ (101
	$27, \frac{1}{27}$ (107	2 (106	3 (105

חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

תזכורת – חוקי הלוגריתמים:

$$\log_x (x)^n = n \cdot \log_a x \quad \log_x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \quad \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--|---|
| $\log_8 4 + \log_8 16$ (2) | $\log_3 6 + \log_3 1.5$ (1) |
| $\log_5 150 - \log_5 6$ (4) | $\log_2 10 + \log_2 6.4$ (3) |
| $\log_2 768 - \log_2 6$ (6) | $\log_4 192 - \log_4 3$ (5) |
| $\log_{0.2} 2 - \log_{0.2} 10$ (8) | $\log_{81} 120 - \log_{81} 40$ (7) |
| $2\log_6 2 + \log_6 9$ (10) | $\log_{0.25} 80 - \log_{0.25} 5$ (9) |
| $3\log_3 6 + \log_3 3.375$ (12) | $\log_4 1.6 + 2\log_4 \sqrt{10}$ (11) |
| $\log_4 24 + \log_4 5 - \log_4 10 - \log_4 3$ (14) | $\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 4$ (13) |
| $\log_6 10 - \log_6 5 - \log_6 288 + \log_6 4$ (16) | $\log_5 50 + \log_5 20 - \log_5 2 - \log_5 4$ (15) |
| $\frac{1}{2} \left(\log_5 \frac{5}{2} + \log_5 2 \right) + \log_5 10 - \frac{1}{3} \log_5 8$ (18) | $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 25 + 2 \log_{\sqrt{3}} 2 - \log_{\sqrt{3}} 60$ (17) |
| $-\frac{1}{4} \log_{\sqrt{7}} 81 + 2 \log_{\sqrt{7}} 6 - \log_{\sqrt{7}} 84$ (20) | $\frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 3 + \frac{3}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 4$ (19) |

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

טיפ: הפוך את המספרים השלמים לביטוי לוגריתמי לפי: $k = \log_a a^k$

וחבר אותם לביטויים הנוספים לפי חוקי הלוגריתמים.

- | | | |
|--|---|---|
| $\frac{\log_7 4 + \log_7 8}{\log_7 2}$ (23) | $\frac{\log_4 125}{\log_4 5}$ (22) | $\frac{\log_3 16}{\log_3 8}$ (21) |
| $\frac{\log_7 5 + \log_7 3 - 4}{\log_7 225 - \log_2 256}$ (26) | $\frac{\log_2 5 - \log_2 2 + 1}{\log_2 200 - 3}$ (25) | $\frac{\log_3 6 + 2}{\log_3 108 - \log_3 2}$ (24) |
| $\frac{2 - 2\log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2\log_3 18}$ (29) | $\frac{\log_4 18 - \log_4 2 + \log_4 36}{2\log_4 6 - 3\log_4 8 + 4}$ (28) | $\frac{2 - 3\log 5 + \log 50}{1 + \log 128 - 5\log 2}$ (27) |

חשב את ערכי הביטויים הבאים (הלוגריתם לפי בסיס 10):

$$\begin{array}{lll} \frac{\log 8}{\log \sqrt{8}} & (32) & \frac{\log 8}{\log 16} & (31) & \frac{\log 27}{\log 9} & (30) \\ \frac{\log 36 + 0.5 \log 6}{\log 12 - \log 2} & (35) & \frac{\log 72 - \log 8}{\log \sqrt{27}} & (34) & \frac{\log 24 - \log 3}{\log 2} & (33) \\ & & & & \frac{1 + \log 5}{\log 2 + 2 \log 5} & (36) \end{array}$$

(37) הוכח את נכונות השוויונים הבאים (לפי בסיס 10):

$$\begin{array}{l} \frac{\log 125 - 1 + \log 2}{\log 5 + 1 - \log 2} = 1 \quad \text{א.} \\ \frac{2 - \log 25 + 2 \log 8}{\log \sqrt[3]{16}} = 6 \quad \text{ב.} \\ \frac{\log 9 + 2 \log 5 + \log 4}{\log 10 - \log 2 + \log 6} = 2 \quad \text{ג.} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (איחוד ביטויים באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\begin{array}{ll} \log_{15} x + \log_{15} (x - 2) = 1 & (39) & \log_4 x + \log_4 (x - 6) = 2 & (38) \\ \log_{35} (x - 8) + \log_{35} (x - 6) = 1 & (41) & \log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2 & (40) \\ \log_3 (x + 105) - \log_3 (x + 1) = 3 & (43) & \log_2 (x + 14) - \log_2 x = 3 & (42) \\ \log_2 (2x + 8) = 2 + \log_2 (5 - x) & (45) & \log_2 (3x + 4) - \log_2 (x - 2) = 1 & (44) \\ \log_2 (11x + 4) - \log_2 (2x + 1) = \log_2 (2x + 3) & (47) & \log_3 (x^2 + 11) = 1 + \log_3 (2x + 1) & (46) \\ & & \log_5 (30x + 9) - \log_5 (4x + 5) = \log_5 (3x + 2) & (48) \\ & & 2 \log_5 (x + 1) = \log_5 (2x + 3.5) + \log_5 x & (49) \\ & & \log_2 (x - 4) + \log_2 (x + 2) - \log_2 (x - 3) = 3 & (50) \\ & & \frac{\log_7 (12x - 35)}{2 \log_7 x} = 1 & (51) \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם וקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_2(5^x + 19) = 3 + \log_2(8 - 5^x) \quad (53) \qquad \log_3(2^x + 2) - \log_3(2^x - 14) = 2 \quad (52)$$

$$\log_3(25^x + 8) - 2 = x \log_3 5 \quad (55) \qquad 1 + (x + 2) \log_3 2 = \log_3(4^x + 32) \quad (54)$$

$$x \log_2 4 = \log_2(2^x + 28) + x - 3 \quad (57) \qquad \log_3(9^{x+3} - 1) = x + 5 + \log_3(3^{x+3} - 1) \quad (56)$$

פתור את המשוואות הבאות (פתיחה באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\log_4(16x) \cdot \log_4(64x) = 12 \quad (59) \qquad \log_3 x \cdot \log_3(3x) = 6 \quad (58)$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{8} = -2 \quad (61) \qquad \log_2(32x) \cdot \log_2(128x) = 48 \quad (60)$$

$$\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = \log_4(4x) \quad (63) \qquad \log_3\left(\frac{27}{x}\right) \cdot \log_3(81x) = 10 \quad (62)$$

$$(\log_3 3x)^2 = \log_3 3x^2 + 1 \quad (65) \qquad \log_2 x^2 \cdot \log_2(8x) = \log_2\left(\frac{16}{x}\right) \quad (64)$$

$$\log_3(27x^3) \cdot \log_3(3x^2) = \log_3\left(\frac{81}{x}\right) + 3 \quad (67) \qquad (\log_5 25x)^2 = \log_5 25x^2 + 1 \quad (66)$$

$$2 \log_5 x \cdot \log_5\left(\frac{125}{x^2}\right) = 2 \quad (69) \qquad \log_2\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \log_2(32x^2) = \log_2\left(\frac{x}{128}\right) + 2 \quad (68)$$

$$\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2(2x)}{\log_2 x} = 1 \frac{7}{9} \quad (71) \qquad \frac{\log_7\left(\frac{343}{x^2}\right)}{(\log_7 x)^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad (70)$$

תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים:

(72) נתון: $\log_2 7 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \log_2 14 \quad \text{ב. } \log_2 49$$

(73) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \log_3 125 \quad \text{ב. } \log_3 0.2$$

(74) נתון: $\log_{24} 6 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \log_{24} 2 \quad \text{ב. } \log_{24} 3$$

(75) נתון: $\log 4 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log 16$ ב. $\log 2$ ג. $\log 8$

(76) נתון: $\log_3 6 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 30$ ב. $\log_3 1.2$ ג. $\log_3 150$

(77) נתון: $\log_4 3 = a$, $\log_4 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_4 0.12$ ב. $\log_4 2.4$

(78) נתון: $\log_7 8 = a$, $\log_7 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_7 40$ ב. $\log_7 320$

(79) נתון: $\log_5 3 = a$, $\log_5 2 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_5 \sqrt{6}$ ב. $\log_5 \sqrt[3]{72}$

(80) נתון: $\log_8 10 = a$, $\log_8 3 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_8 \sqrt{0.03}$ ב. $\log_8 \sqrt[5]{\frac{10}{27}}$

(81) נתון: $\log_3 7 = a$, $\log_3 8 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 \frac{64}{343}$ ב. $\log_3 \sqrt[4]{\frac{49}{512}}$

חשב את ערכי הביטויים הבאים באמצעות הנוסחה: $a^{\log_a b} = b$:

(85) $10^{\log 2}$	(84) $0.24^{\log_{0.24} 6}$	(83) $5^{\log_5 12}$	(82) $2^{\log_2 3}$
(89) $27^{\log_3 2}$	(88) $9^{\log_3 4}$	(87) $3^{3 \log_3 4}$	(86) $2^{2 \log_2 3}$
(93) $\sqrt{6}^{\log_{36} 4}$	(92) $125^{-\log_5 3}$	(91) $32^{\log_2 3}$	(90) $8^{\log_2 3}$
(97) $3^{\log_9 2}$	(96) $\sqrt[3]{5}^{\log_5 64}$	(95) $\sqrt[5]{8}^{\log_2 243}$	(94) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$
(101) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\sqrt{49}} 81}$	(100) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{5}} 4}$	(99) $5^{\log_{125} 8}$	(98) $64^{\log_2 5}$
(105) $\sqrt{27}^{1+\log_3 2}$	(104) $4^{\frac{\log_4 9}{2}}$	(103) $3^{2-\log_3 6}$	(102) $5^{1+\log_5 2}$
			(106) $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

תשובות סופיות:

3 (5	2 (4	6 (3	2 (2	2 (1
2 (10	-2 (9	1 (8	0.25 (7	7 (6
3 (15	1 (14	3 (13	6 (12	2 (11
-2 (20	10.5 (19	1.5 (18	-2 (17	-2 (16
0.5 (25	1 (24	5 (23	3 (22	$\frac{4}{3}$ (21
1.5 (30	0.5 (29	2 (28	1 (27	0.5 (26
2.5 (35	$\frac{4}{3}$ (34	3 (33	2 (32	0.75 (31
4 (40	5 (39	8 (38	הוכחה (37	1 (36
2 (45	$\emptyset$ (44	3 (43	2 (42	13 (41
8 (50	0.5 (49	$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (48	$1, -\frac{1}{4}$ (47	4, 2 (46
1.292, 0 (55	3, 2 (54	1 (53	4 (52	5, 7 (51
$2, \frac{1}{2^{13}}$ (60	$4, \frac{1}{4^6}$ (59	$9, \frac{1}{27}$ (58	2 (57	$\emptyset$ (56
$3, \frac{1}{3}$ (65	$\sqrt{2}, \frac{1}{16}$ (64	2 (63	$\frac{1}{9}, 3$ (62	2, 4 (61
$49, 7^6$ (70	$\sqrt{5}$ (69	1, 0.2973 (68	$\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}$ (67	0.2 (66
				$3, 2\frac{1}{7}$ (71
		ב. $2a$		א. $a+1$ (72
		ב. $-a$		א. $3a$ (73
		ב. $\frac{3a-1}{2}$		א. $\frac{1-a}{2}$ (74
	א. $1.5a$	ב. $0.5a$		א. $2a$ (75
	א. $a+2b$	ב. $a-b$		א. $a+b$ (76

$a+1-b$.ג

$a-2b$.ח (77

$2a+b$.ג

$a+b$.ח (78

$b+\frac{2}{3}a$.ג

$\frac{b+a}{2}$.ח (79

$\frac{a-3b}{5}$.ג

$\frac{b-2a}{2}$.ח (80

$\frac{2a-3b}{4}$.ג

$2b-3a$.ח (81

9 (86

2 (85

6 (84

12 (83

3 (82

243 (91

27 (90

8 (89

16 (88

64 (87

4 (96

27 (95

4 (94

$\sqrt[4]{4}$ (93

$\frac{1}{27}$ (92

$\frac{1}{81}$ (101

0.25 (100

2 (99

5^6 (98

$\sqrt{2}$ (97

$\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$ (106

$\sqrt{216}$ (105

3 (104

1.5 (103

10 (102

מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

תזכורת: $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$, $a, m > 0 \neq 1$.

$$\log_2 5 \cdot \log_{25} 4 \quad (2)$$

$$\log_3 6 \cdot \log_6 3 \quad (1)$$

$$\log_{0.1} 5 \cdot \log_{25} 100 \quad (4)$$

$$\log_{27} 4 \cdot \log_2 3 \quad (3)$$

$$\log_5 8 \cdot \log_7 25 \cdot \log_2 49 \quad (6)$$

$$\log_{\sqrt{3}} 7 \cdot \log_{\sqrt{343}} 9 \quad (5)$$

$$\log_{81} 49 \cdot \log_{32} 3 \cdot \log_7 2 \quad (8)$$

$$\log_4 169 \cdot \log_9 64 \cdot \log_{13} 243 \quad (7)$$

הוכח את השוויוניים שלפניך:

$$\log_6 \frac{1}{8} \cdot \log_2 6 = -3 \quad (10)$$

$$\log_7 25 \cdot \log_5 7 = 2 \quad (9)$$

$$\log_3 8 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 = 3 \quad (12)$$

$$\log_4 25 \cdot \log_5 4 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{16} 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 25 = 1 \quad (14)$$

$$\log_7 2 \log_5 7 \log_{16} 5 = 0.25 \quad (13)$$

$$\log_a b \cdot \log_c a + \log_b a \cdot \log_c b = \log_c ab \quad (16)$$

$$\log_2 25 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{81} 2 = 1 \quad (15)$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\log_{81} x + \log_3 x = 5 \quad (18)$$

$$\log_2 x + \log_8 x = 4 \quad (17)$$

$$\log_3 x + 3 \log_{27} x^2 = 3 \quad (20)$$

$$5 \log_5 x - \log_{\frac{1}{25}} x = 11 \quad (19)$$

$$\log_5 x \cdot \log_{125} x = 3 \quad (22)$$

$$\log_2 x^3 + 4 \log_{16} x = 8 \quad (21)$$

$$\log_3 (81x) \cdot \log_{27} \left(\frac{x}{9} \right) = \frac{7}{3} \quad (24)$$

$$\log_2 (8x) \cdot \log_{16} x = 7 \quad (23)$$

$$\log_x 2 + \log_2 x = 2 \quad (26)$$

$$\log_2 (32x^2) \cdot \log_8 \left(\frac{4}{x^3} \right) = -12 \quad (25)$$

$$4 \log_x 5 = 3 + 2 \log_{25} x \quad (28)$$

$$\log_x 3 - 6 \log_{27} x = 1 \quad (27)$$

$$\log_6 (16x - 3) \cdot \log_{x\sqrt{5}} 6 = 2 \quad (30)$$

$$\log_3 (6 - x) \cdot \log_x 3 = 2 \quad (29)$$

$$\log_2 (4x) + \log_{8x} 4 = 3.5 \quad (32)$$

$$\log_5 x = 4.5 + \log_{5x} 125 \quad (31)$$

$$\log_x (27x) \cdot \log_{81x} \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5} = 0 \quad (34)$$

$$\log_x 4 + 3 \log_{4x} 16 = 4 \quad (33)$$

$$3 \cdot \log_{\sqrt{x}}(6x) - \log_{36} x = 4 \quad (36)$$

$$2 \log_{4x} 8 \cdot \log_{\frac{x}{2}}(16x) = 9 \quad (35)$$

$$\log_x 5 \cdot \log_{5x}(5x^2) = 2 \cdot \log_{25x} 5 \quad (37)$$

תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים:

(38) נתון: $\log_2 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_5 2$

ב. $\log_4 5$

ג. $\log_{16} 5$

(39) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32} 36$

ג. $\log_{216} 96$

(40) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 15$

ב. $\log_{15} 3$

ג. $\log_9 25$

(41) נתון: $\log 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log 80$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{80} 2000$

(42) נתון: $\log_5 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{36} 30$

ב. $\log_{216} 180$

ג. $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{125}$

(43) נתון: $\log 2 = 0.3$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{\sqrt{2}} 100$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{\frac{1}{4}} 5$

(44) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לכל $a, b > 0 \neq 1$ מתקיימת הטענה הבאה: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

ב. נתון: $\log_a 5 = b$. הוכח כי מתקיים: $\log_a b = \frac{b}{\log_b 5}$.

ג. נתון: $2 \cdot \log_3 a \cdot \log_{(b+c)} 3 = 1$.

הוכח כי לכל: $a, b, c > 0 \neq 1$ מתקיים: $a^2 = b + c$.

הוצאת לוג משני אגפים:

פתור את המשוואות הבאות (הוצאת לוג משני אגפים):

(47) $x^{1+\log_3 x} = 729$

(46) $x^{\log_3 x} = 3$

(45) $x^{\log_2 x} = 16$

(50) $x^{9-3\log_2 x} = \frac{x}{8}$

(49) $x^{2\log_3 x+8} = x$

(48) $x^{3\log_5 x+2} = 5$

שאלות עם לוגריתם טבעי:

(51) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\ln \sqrt{e}$	ב. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
ג. $\ln \sqrt[4]{e \cdot e^2}$	ד. $\ln \sqrt[5]{\frac{1}{e^3}}$
ה. $\ln^2 e$	ו. $\ln e^2$
ז. $\ln 16 + \ln 3 - \ln 12 - \ln 4$	ח. $2 \ln e + 3 \ln \sqrt{e} - \ln e^3$
ט. $\frac{3 \ln x + 4 \ln \frac{1}{x^2} - \ln \sqrt[4]{x}}{\ln x^3 + 2 \ln \sqrt{x}}$	י. $\frac{3 \ln x - 4 \ln \sqrt{\frac{1}{x}} - \ln \sqrt[4]{x}}{\ln x^3 + 2 \ln \frac{1}{\sqrt{x}}}$
יא. $e^{\ln 3}$	יב. $e^{2 \ln 3}$
יג. $\sqrt[3]{e^{6 \ln 5}}$	יד. $\frac{e^{\ln 7} - \ln^3 e^2 + 3 \ln \sqrt{e}}{\ln 5e^2 + \ln 0.2}$
יז. $\frac{\ln \frac{4}{e^3} + e^{3 \ln 2} - 2 \ln 2}{\ln^3 \sqrt[4]{e}}$	

(52) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם לוגריתם טבעי $(\ln)$):

א. $\ln x + 7 = 0$	ב. $5 + 2 \ln x = 14$
ג. $\ln(x+1) = 3$	ד. $\ln(5-x) = 2$
ה. $\ln(1-3x) = 4$	ו. $3 \ln(2x-3) = 18$
ז. $\ln(x^2 - 2x - 2) = 0$	ח. $\ln(x^2 + 5x + 5) = 0$
ט. $\ln(e^x - 1) = 0$	י. $\ln(2e^x - 3) = x$
יא. $3 \ln^5 x = 20.4$	יב. $2 \ln^4 x + 3 = 165$
יג. $\ln(x-3) + \ln(x+4) = -\ln 10$	יד. $\ln(6-x) + \ln(x+2) = \ln 15$

$$\frac{\ln(2x^2 - 6x - 7)}{\ln(3 - x)} = 2 \quad \text{ז.ט}$$

$$\ln(x + 2) - \ln(x - 1) = 2 \quad \text{ז.ו}$$

$$\ln(e^{2x} + 5) - \ln(e^x + 1) = \ln 3 \quad \text{י.ח}$$

$$\frac{\ln(4x + 3)}{\ln(x^2)} = \frac{1}{2} \quad \text{י.ז}$$

$$\frac{2 \ln^2 x - 5 \ln x}{2} + 1 = 0 \quad \text{ז.כ}$$

$$\ln(1 - e^x) - \ln(6 + e^x) = 6 \quad \text{י.ט}$$

$$x \ln x = 2x \quad \text{כ.ב}$$

$$x \ln x = 3 \ln x \quad \text{כ.א}$$

$$2 \ln^2 x + 2 = 2.5 \ln x^2 \quad \text{ז.ד}$$

$$5 \ln^2 x - 3 = \ln x^2 \quad \text{כ.ג}$$

53 פתור את המשוואות הבאות (משוואות מעריכיות עם פתרון המבוטא ע"י $(\ln)$):

$$3e^x + 7 = 5 \quad \text{ב.}$$

$$e^x = 17 \quad \text{א.}$$

$$e^{2x-3} = 5 \quad \text{ד.}$$

$$3e^x + 7 = 5e^x \quad \text{ג.}$$

$$e^{2x} + 7e^x = 30 \quad \text{א.}$$

$$3e^{x+8} + 2 = e^{\ln 6} \quad \text{ה.}$$

$$2e^x - 9 = 3(\sqrt{e})^x \quad \text{ז.}$$

תשובות סופיות:

1 (1	1 (2	$\frac{2}{3}$ (3	-1 (4
$2\frac{2}{3}$ (5	12 (6	15 (7	0.1 (8
8 (17	81 (18	25 (19	3 (20
4 (21	$125, \frac{1}{125}$ (22	$16, \frac{1}{128}$ (23	$27, \frac{1}{243}$ (24
0.07, 4 (25	2 (26	$\sqrt{3}, \frac{1}{3}$ (27	$5, \frac{1}{625}$ (28
2 (29	0.2, 3 (30	$\frac{1}{5\sqrt{5}}, 5^5$ (31	$\frac{1}{4\sqrt{2}}, 2$ (32
4 (33	3 (34	$4, \frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ (35	$6^6, \frac{1}{36}$ (36
$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ (37	$\frac{1}{a} \cdot \aleph$ (38	$\frac{a}{2} \cdot \beth$	$\frac{a}{4} \cdot \aleph$
$2a-1 \cdot \aleph$ (39	$0.8a \cdot \beth$	$\frac{a+2}{3a} \cdot \aleph$	
$a+1 \cdot \aleph$ (40	$\frac{1}{a+1} \cdot \beth$	$a \cdot \aleph$	
$3a+1 \cdot \aleph$ (41	$\frac{2a+1}{3a} \cdot \beth$	$\frac{a+3}{3a+1} \cdot \aleph$	
$\frac{a+1}{2a} \cdot \aleph$ (42	$\frac{2a+1}{3a} \cdot \beth$	$-\frac{1.5}{a} \cdot \aleph$	
$13\frac{1}{3} \cdot \aleph$ (43	$1\frac{7}{9} \cdot \beth$	$-1\frac{1}{6} \cdot \aleph$	
0.25, 4 (45	$3, \frac{1}{3}$ (46	$9, \frac{1}{27}$ (47	$\frac{1}{5}, \sqrt[3]{5}$ (48
$\frac{1}{81}, \sqrt{3}$ (49	$8, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (50		
0.5 $\cdot \aleph$ (51	$\frac{2}{3} \cdot \beth$	$\frac{3}{4} \cdot \aleph$	1 $\cdot \aleph$
2 $\cdot \beth$	0 $\cdot \beth$	0.5 $\cdot \aleph$	$2\frac{3}{8} \cdot \beth$
3 $\cdot \aleph$	9 $\cdot \beth$	25 $\cdot \aleph$	$\frac{1}{4} \cdot \beth$
			320 $\cdot \beth$

$5 - e^2$.ד $e^3 - 1$.ג $e^{4.5} \approx 90.017$.ב $e^{-7} \approx 0.00091 \approx 0.001$.א (52)

$-4, -1$.פ-1, 3 .ז $\frac{e^6 + 3}{2} \approx 203.214$.ו -17.87 .ה

4.337 .א' $\ln 3$.י $\ln 2$.ט

$3, 1$.ז' 3.014 .ג' $e^3 \approx 20.086, e^{-3} \approx 0.05$.ב'

$0, \ln 2$.פ' -0.6 .ז' -4 .ט' $\frac{e^2 + 2}{e^2 - 1} \approx 1.47$.טו

$1, 3$.כא $e^2 \approx 7.389, \sqrt{e} \approx 1.649$.כ ϕ .טז

$e^2, 1.649$.כד $e, 0.548$.כג e^2 .כב

$\ln 3.5 \approx 1.25$.ג $\ln 17 \approx 2.83$.א (53)

$\ln\left(\frac{4}{3}\right) - 8 \approx -7.712$.ה $\frac{\ln 5 + 3}{2} \approx 2.3$.ד

$2 \ln 3 \approx 2.198$.ז $\ln 3 \approx 1.099$.ו

אי-שוויוניים לוגריתמיים:

פתור את אי-השוויוניים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \log_5(x-2) \leq 1 & (2) \\ \log_4(x-3) < 0 & (1) \\ \log(x+4) \geq \log(10-2x) & (4) \\ \log_{0.5}(3-x) < -2 & (3) \\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2+3) > \log_{\frac{1}{3}}(x+5) & (6) \\ \log_2(x+2) < \log_2(2x-3) & (5) \\ \log_2(x^2-3x)-2 > 0 & (8) \\ \log_{0.5}\left(x^2-\frac{1}{2}x\right) > 1 & (7) \\ \log_4\left(\frac{x+3}{x-2}\right) > \frac{1}{2} & (10) \\ \log_2\left(x^2-\frac{9}{16}\right) < 0 & (9) \\ \log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 > 0 & (12) \\ \log_2\left(\frac{x-5}{x+2}\right) \geq 1 & (11) \end{array}$$

(13) פתור את אי-השוויונים הבאים (שימוש בלוגריתם הטבעי $(\ln)$):

$$\begin{array}{ll} \ln(x+1) > \ln(2-x) & \text{ב.} \\ \ln x > \ln 3 & \text{א.} \\ \ln(x^2+4) > \ln(2x+3) & \text{ד.} \\ 2\ln x > 3 & \text{ג.} \\ \ln(9x+1) \geq \ln(1+x^3) & \text{ו.} \\ \ln(4x-x^2) \leq \ln(6x+3) & \text{ה.} \\ 6\ln x - (\ln x)^2 \leq 0 & \text{פ.} \\ \ln^2 x - 8\ln x + 7 > 0 & \text{ז.} \\ 2 - 3\ln x + \ln^2 x \leq 0 & \text{ט.} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} x < -1 & (3) & 2 < x \leq 7 & (2) & 3 < x < 4 & (1) \\ -1 < x < 2 & (6) & x > 5 & (5) & 2 \leq x < 5 & (4) \\ -\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4} & (9) & x < -1, x > 4 & (8) & -\frac{1}{2} < x < 0, \frac{1}{2} < x < 1 & (7) \\ 0 < x < 4, x > 16 & (12) & -9 \leq x < -2 & (11) & 2 < x < 7 & (10) \\ x > -1.5, x \neq 1 & \text{ד.} & x > e^{1.5} & \text{ג.} & 0.5 < x < 2 & \text{ב.} & x > 3 & \text{א.} & (13) \\ 0 < x < e, x > e^7 & \text{ז.} & 0 \leq x \leq 3 & \text{ו.} & 0 < x < 4 & \text{ה.} \\ & & e \leq x \leq e^2 & \text{פ.} & 0 < x \leq 1, x \geq e^6 & \text{ט.} \end{array}$$

שאלון 472

מבוא לסדרות

תוכן העניינים:

58		מבוא לסדרות:
58		סיכום כללי:
59		שאלות:
63		תשובות סופיות:

מבוא לסדרות:

סיכום כללי:

מהי סדרה?

המונח "סדרה" מתייחס לאוסף של עצמים המסודרים לפי סדר מסוים, כתלות בהקשר. במתמטיקה, סדרה היא רשימה מסודרת של איברים (לרוב מספרים), כאשר לכל איבר יש מקום קבוע המוגדר על ידי מספר טבעי, הנקרא גם המיקום של האיבר בסדרה.

ייצוג של סדרת מספרים:

סדרה מיוצגת לרוב באמצעות אות גדולה (כגון A) וערכי איבריה מסומנים באמצעות האות a_n כאשר האינדקס n (המספר הקטן בתחתית האות) מייצג את מיקום האיבר בסדרה.

דוגמה:

סדרת המספרים: 8, 11, 71, 2, -6 - כוללת 5 איברים:

$$a_1 = -6, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 71, \quad a_4 = 11, \quad a_5 = 8$$

נסמן איבר כללי בסדרה ב- a_n כאשר n מציין את מיקום האיבר בסדרה.

הגדרה:

נוסחת האיבר הכללי (המסומן ב- a_n) היא "תבנית" או "חוקיות" סימבולית המאפשרת למצוא את הערך של כל איבר בסדרה מבלי שנצטרך לרשום את כל האיברים שלפניו.

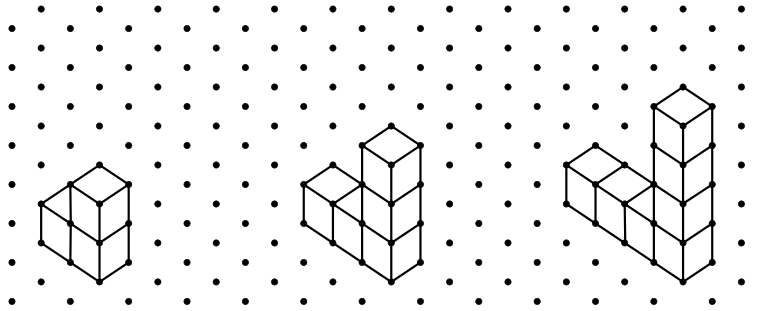
כלל נסיגה:

כלל נסיגה (או נוסחת נסיגה) היא דרך אלגברית המאפשרת להגדיר סדרה באמצעות הקשר שבין האיבר הכללי לבין מספר איברים שקדמו לו. כדי להגדיר כלל נסיגה עלינו לדעת:

- ערכו של האיבר הראשון בסדרה (או איבר כלשהו בסדרה).
- החוקיות של הסדרה, כפי שמתוארת ע"י הכלל עצמו.

שאלות:

(1) בסרטוט שלפניכם שלושה מבנים ראשונים בסדרה:



- א. כמה קוביות תהיינה במבנה ה-7?
 ב. איזו מבין הנוסחאות הבאות יכולה לייצג נכונה את מספר הקוביות שיש בכל מבנה?

$$a_n = 1 + 2n \quad (1)$$

$$a_n = 2n + 3 \quad (2)$$

$$a_n = n + 2 \quad (3)$$

$$a_n = 1 + n \quad (4)$$

- ג. איזה כלל נסיגה עשוי לייצג בצורה מתאימה את הסדרה?

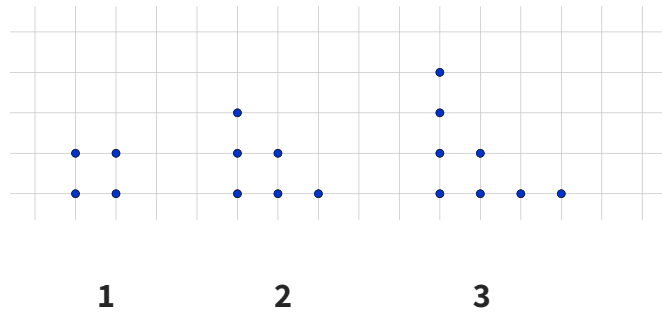
$$a_n = a_{n-1} + 2n, a_1 = 3 \quad (1)$$

$$a_n = a_{n-1} - 2, a_1 = 1 \quad (2)$$

$$a_n = a_{n-1} + 2, a_1 = 3 \quad (3)$$

$$a_n = 2a_{n-1}, a_1 = 3 \quad (4)$$

(2) בסרטוט שלושה מבנים ראשונים בסדרה:



- א. (1) כמה נקודות תהיינה במבנה שבמקום הרביעי?
 (2) כמה נקודות תהיינה במבנה שבמקום העשירי?
 ב. בחרו ביטוי אלגברי המתאים למספר הנקודות במקום ה- n (n מספר טבעי):
- (1) $a_n = 2n + 1$
 (2) $a_n = n + 1$
 (3) $a_n = 2n + 2$
- ג. מה מקומו של המבנה שבו 44 נקודות?
 ד. האם קיים איבר בסדרה שבו 55 נקודות? נמקו.

(3) לפניכם סדרה A המוגדרת לפי נוסחת האיבר הכללי הבאה: $a_n = n + n^2$.

- א. כתבו את שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. קבעו האם קיים איבר בסדרה השווה ל-90. במידה וכן, מצאו את מיקומו בסדרה.
 ג. הראו כי לא קיים בסדרה איבר שערכו 80.
 ד. כתבו כלל נסיגה מתאים לתיאור הסדרה.

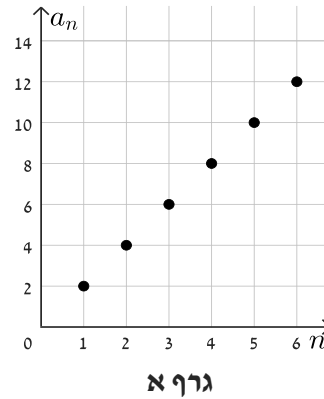
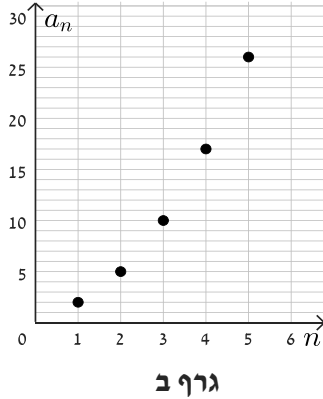
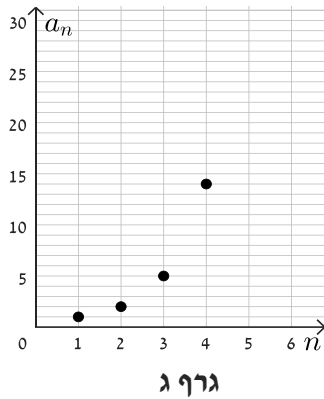
(4) נתונה סדרה A המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

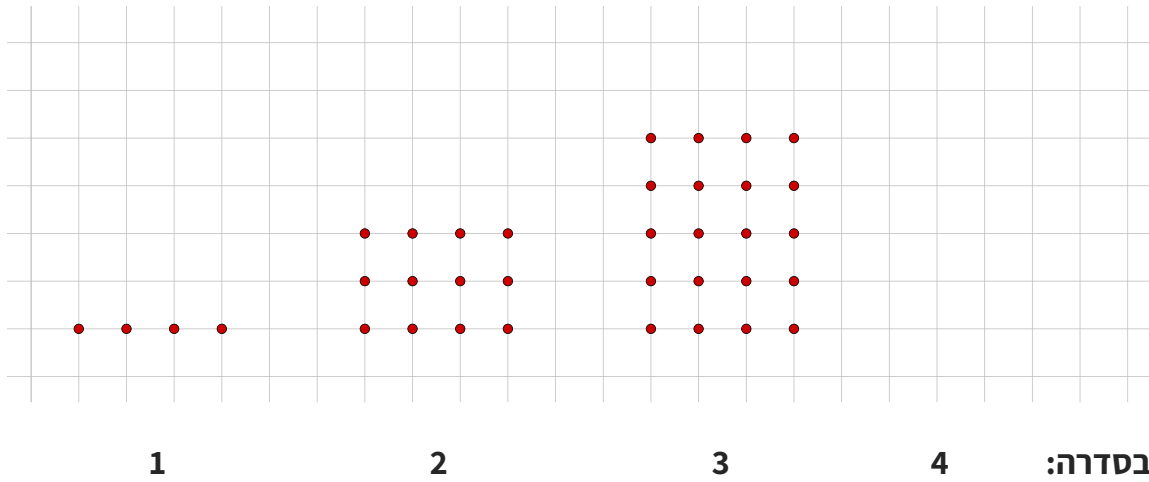
א. השלימו את הטבלה הבאה:

מיקום בסדרה	1	2	3	4
ערך האיבר				

ב. קבעו איזה ייצוג מבין 3 הייצוגים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הסדרה. נמקו.



(5) נתונה סדרה A המורכבת ממבנים עם נקודות.
בסרטוט שלושה מבנים המייצגים שלושה איברים ראשונים בסדרה:



א. סרטטו את המבנה הרביעי.

ב. השלימו את הטבלה:

מקום	1	2	3	4	5	60
מספר נקודות						

ג. כתבו ביטוי אלגברי המתאים למספר הנקודות במקום ה- n (n מספר טבעי).

ד. באיזה מקום בסדרה נמצא המבנה שיש בו 44 נקודות? נמקו.

ה. כתבו כלל נסיגה מתאים לתיאור מספר הנקודות שבכל איבר בסדרה.

תשובות סופיות:

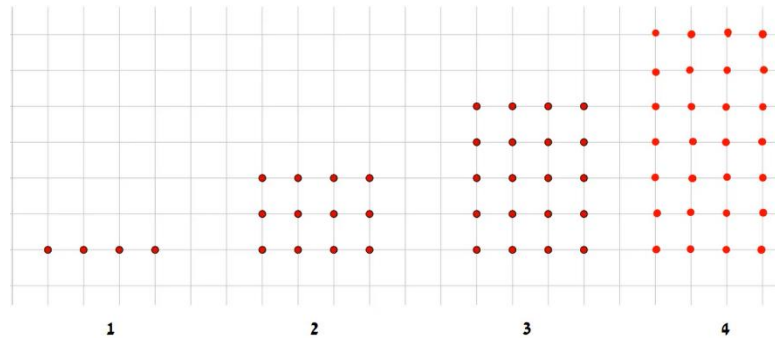
- (1) א. 15 קוביות ב. נוסחה 1 ג. נוסחה 3.
(2) א. (1) 10 נקודות א. (2) 22 נקודות ב. ביטוי 3 ג. המקום ה-21.
ד. לא.

(3) א. 2,6,12 ב. כן, $n = 9$ ג. ראו סרטון ד.
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

- (4) א. להלן טבלה: ב. גרף ג.

מיקום בסדרה	4	3	2	1
ערך האיבר	14	5	2	1

- (5) א. להלן סרטוט:



- ב. להלן טבלה:

מקום	8	5	4	3	2	1
מספר נקודות	60	36	28	20	12	4

ג. $a_n = 8n - 4$ ד. $n = 6$ ה.
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 8 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

שאלון 472

הסדרה החשבונית

תוכן העניינים:

64.....הסדרה החשבונית.

66	נוסחת האיבר הכללי:
66	סיכום כללי:
67	שאלות:
70	תשובות סופיות:
71.....	מציאת האיבר הראשון והפרש הסדרה:
71.....	סיכום כללי:
71.....	שאלות:
72	תשובות סופיות:
73	חיבור משוואות לפי תיאור מילולי:
73	סיכום כללי:
73	שאלות:
74	תשובות סופיות:
75	איברים חיוביים ושליליים:
75	סיכום כללי:
75	שאלות:
75	תשובות סופיות:
76	תכונת הממוצע החשבוני:
76	סיכום כללי:
76	שאלות:
77	תשובות סופיות:
78	כלל נסיגה של סדרה חשבונית:
78	סיכום כללי:
78	שאלות:
79	תשובות סופיות:

80		סכום סדרה חשבונית:
80		סיכום כללי:
81		שאלות:
83		תשובות סופיות:
84		מציאת מספר האיברים מנוסחת הסכום:
84		סיכום כללי:
84		שאלות:
85		תשובות סופיות:
86		מעבר מנוסחת סכום לנוסחת איבר כללי:
86		סיכום כללי:
86		שאלות:
86		תשובות סופיות:
87		הרכבה של סדרות חשבוניות:
87		שאלות:
88		תשובות סופיות:
89		סכום איברים העומדים במקומות הזוגיים והאי-זוגיים:
89		סיכום כללי:
90		שאלות:
91		תשובות סופיות:
92		שאלות מסכמות:
92		שאלות:
93		תשובות סופיות:

נוסחת האיבר הכללי:

סיכום כללי:

סדרה חשבונית:

סדרה שבה ההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא מספר קבוע נקראת סדרה חשבונית. נסמן את ההפרש באות d (מלשון: difference).

דוגמאות:

- הסדרה: $2, 7, 12, 17, \dots$
- הסדרה: $21, 13, 5, -3, -11, -19, \dots$
- הסדרה: $5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \dots$

סיכום:

כאשר חוקיות מסוימת מתגלה בתור כזו שבה כל איבר מתקבל ע"י תוספת של מספר קבוע לאיבר שלפניו החל מהאיבר השני, והחוקיות הזו ממשיכה כך ללא שינוי, אז מדובר בסדרת מספרים שהיא חשבונית.

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית a_n שבה האיבר הראשון הוא a_1 והפרשה הוא d היא:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

כאשר:

- a_1 - האיבר הראשון בסדרה.
- d - הפרש הסדרה.
- n - מיקומו של האיבר ה- n בסדרה.
- a_n - ערכו של האיבר העומד המקום ה- n בסדרה.

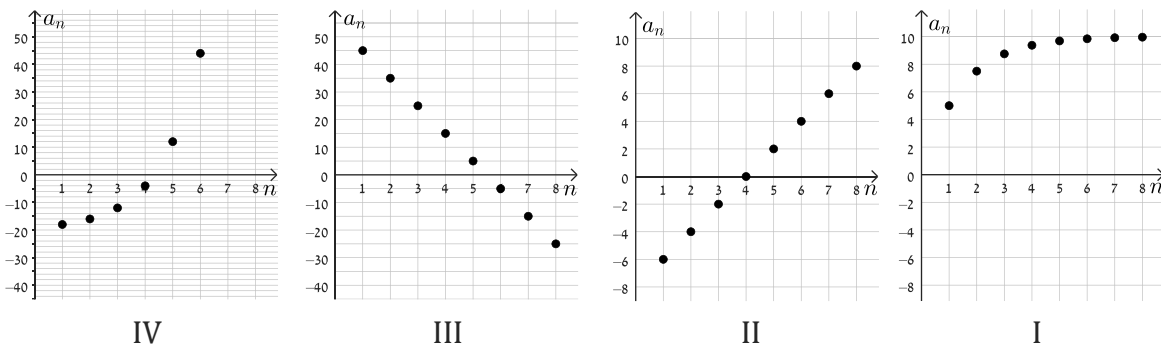
שאלות:

(1) קבעו אלו מבין הסדרות הבאות הן חשבוניות ואילו אינן חשבוניות. נמקו.

- הסדרה: $10, 12, 14, 16, 18, \dots$
- הסדרה: $-5, 5, -5, 5, -5, 5, \dots$
- הסדרה: $0, -6, -12, -18, -24, -30, \dots$
- הסדרה: $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

(2) לפניכם ייצוגים של מספר גרפים.

קבעו לגבי כל גרף האם הוא ניתן לייצוג כסדרה חשבונית. נמקו.



(3) לפניכם סדרות חשבוניות. כתבו מהו a_1 ומהו d בכל אחת מהן.

- $1, 3, 5, \dots$
- $-1, 4, 9, 14, \dots$
- $6, 2, -2, -6, \dots$
- $80, 75, 70, 65, \dots$
- $4\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3}, 10\frac{1}{3}, \dots$
- $-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{14}{5}, \dots$

(4) ענו על השאלות הבאות:

- נתונה הסדרה החשבונית הבאה: $7, 7.5, 8, \dots$. מצאו את: a_9 .
- נתונה הסדרה החשבונית הבאה: $12, 10.5, 9, \dots$. מצאו את: a_{15} .
- נתונה הסדרה החשבונית הבאה: $4, -1, -6, \dots$. מצאו את: a_{24} .
- נתונה הסדרה החשבונית הבאה: $-10, -6, -2, \dots$. מצאו את: a_{32} .

(5) ענו על השאלות הבאות:

- האיבר הרביעי בסדרה חשבונית הוא 7 והפרש הסדרה הוא 2. מהו האיבר הראשון בסדרה?

- ב. האיבר ה-11 בסדרה חשבונית הוא 12 והפרש הסדרה הוא -6.
מה הוא האיבר הראשון בסדרה?
- ג. האיבר ה-19 בסדרה חשבונית הוא -67 והפרש הסדרה הוא -4.
מה הוא האיבר הראשון בסדרה?

- (6) האיבר החמישי בסדרה חשבונית הוא 25 והפרש הסדרה הוא 6.
א. מהו האיבר הראשון?
ב. מהו האיבר השמיני? (חשבו בצורה ישירה ובאמצעות הנוסחה והשווה).

- (7) בסדרה חשבונית האיבר הרביעי הוא 12 והפרש הסדרה הוא 5.
מצאו את האיבר ה-17 בסדרה.

- (8) מצאו את ערך האיבר a_n בסדרות החשבוניות הבאות:
- א. $a_1 = 4, d = 9, n = 17$ ב. $a_1 = -35, d = -2, n = 15$
- ג. $a_1 = 68, d = -7, n = 20$ ד. $a_1 = 5.5, d = 4\frac{1}{3}, n = 28$

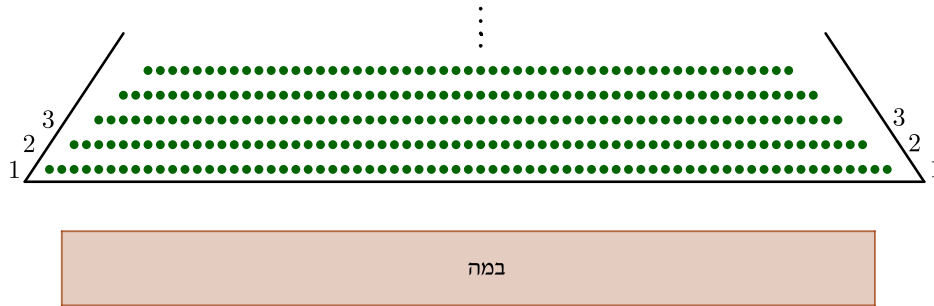
- (9) ענו על השאלות הבאות:
- א. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 5 והאיבר ה-13 הוא 77.
מצאו את הפרש הסדרה.
- ב. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא 3 והאיבר ה-27 הוא 107.
מצאו את הפרש הסדרה.
- ג. האיבר הראשון בסדרה חשבונית הוא -10 והאיבר ה-20 הוא -48.
מצאו את הפרש הסדרה.

- (10) מצאו כמה איברים יש בכל אחת מהסדרות החשבוניות הבאות:
- א. $3, 6, 9, \dots, 36$ ב. $-6, -1, 4, \dots, 39$
- ג. $-60, -51, \dots, 129$ ד. $-120, 105, \dots, -180$

- (11) מצאו את מספר איברי הסדרה בסדרות החשבוניות הבאות:
- א. $a_1 = -1, d = -3, a_n = -79$ ב. $a_1 = 4, d = 9, a_n = 103$
- ג. $a_1 = -6, d = 10, a_n = 274$ ד. $a_1 = -5, d = 9, a_n = 202$

(12) מצאו כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$.

(13) נתון אולם אירועים כפי שמופיע באיור הבא, וצורתו היא טרפזית. ידוע כי מספר הכיסאות בכל שורה קטן ב-4 ביחס לשורה שלפניה. באולם ישנן 9 שורות הממוספרות בסדר עולה מהבמה לאחור. ידוע כי בשורה הראשונה (הקדמית ביותר) ישנם 68 כיסאות.



- א. (1) מהו האיבר הראשון בסדרה?
(2) מהו הפרש הסדרה?
- ב. כתבו את נוסחת האיבר הכללי לסדרה החשבונית המתארת את מספר הכיסאות שיש בכל שורה באולם.
- ג. כמה כיסאות יש בשורה 8?

תשובות סופיות:

- (1) א. חשבונית ב. לא חשבונית ג. חשבונית ד. לא חשבונית.
- (2) I. אינה חשבונית, II. סדרה חשבונית, III. סדרה חשבונית, IV. אינה חשבונית.
- (3) א. $a_1 = 1, d = 2$ ב. $a_1 = -1, d = 5$ ג. $a_1 = 6, d = -4$
- ד. $a_1 = 80, d = -5$ ה. $a_1 = 4\frac{1}{3}, d = 3$ ו. $a_1 = -\frac{2}{5}, d = -\frac{6}{5}$
- (4) א. $a_9 = 11$ ב. $a_{15} = -9$ ג. $a_{24} = -111$ ד. $a_{32} = 114$
- (5) א. $a_1 = 1$ ב. $a_1 = 72$ ג. $a_1 = 5$
- (6) א. $a_1 = 1$ ב. $a_8 = 29$
- (7) $a_{17} = 77$
- (8) א. $a_n = 148$ ב. $a_n = -63$ ג. $a_n = -65$ ד. $a_n = 122.5$
- (9) א. $d = 6$ ב. $d = 4$ ג. $d = -2$
- (10) א. 12 ב. 10 ג. 22 ד. 21
- (11) א. 27 ב. 12 ג. 29 ד. 24
- (12) 20 איברים.
- (13) א. (1) $a_1 = 68$ א. (2) $d = -4$ ב. $a_n = 72 - 4n$ ג. $a_8 = 40$

מציאת האיבר הראשון והפרש הסדרה:

סיכום כללי:

ניתן לבטא איבר כלשהו בסדרה חשבונית בידיעת מיקומו ע"י האיבר הראשון והפרש הסדרה בלבד, למשל: $a_5 = a_1 + 4d$ או: $a_{20} = a_1 + 19d$.
לפי עיקרון זה, ניתן לחבר מערכת של שתי משוואות כדי למצוא את a_1 ואת d .

שאלות:

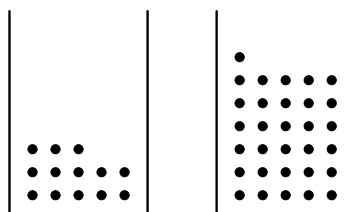
(1) בסדרה חשבונית האיבר העשירי הוא 73 והאיבר ה-16 הוא 103.
מצאו את a_1 ואת d .

(2) בסדרה חשבונית נתון: $\begin{cases} a_9 = 42 \\ a_{13} = 62 \end{cases}$. מצאו את a_1 ואת d .

(3) בסדרה חשבונית נתון: $\begin{cases} a_{16} = 132 \\ a_{10} = 78 \end{cases}$. מצאו את a_1 ואת d .

(4) בסדרה חשבונית נתון: $a_{18} = 51$, $a_{11} = 30$.
חשבו את האיבר החמישי בסדרה.

(5) משחק מסוים מורכב מסדרה של קופסאות ובהן כדורים.
ידוע כי מספר הכדורים בקופסאות המשחק מהווה סדרה חשבונית.
מספר הכדורים בקופסה הרביעית הוא 13 ומספר הכדורים בקופסה העשירית הוא 31.
א. האם בקופסה הראשונה יש את מספר הכדורים הגדול ביותר או הקטן ביותר? נמקו.
ב. מצאו את מספר הכדורים בקופסה הראשונה ואת הפרש הסדרה.



- (6) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצאו כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

תשובות סופיות:

- (1) $a_1 = 28, d = 5$
 (2) $a_1 = 2, d = 5$
 (3) $a_1 = -3, d = 9$
 (4) $a_5 = 12, (a_1 = 0, d = 3)$
 (5) א. הקטן ביותר ב. $a_1 = 4, d = 3$
 (6) 48 איברים.

חיבור משוואות לפי תיאור מילולי:

סיכום כללי:

תיאור מילולי כללי	כתיבה משוואה מתאימה
a גדול ב-5 מ- b	$a = b + 5$
a גדול פי 3 מ- b	$a = 3b$
סכום האיברים a ו- b הוא 20	$a + b = 20$
ההפרש בין a ל- b הוא 6	$a - b = 6$

שאלות:

- (1) בסדרה חשבונית האיבר הרביעי גדול ב-6 מהאיבר השני, והאיבר ה-11 הוא 33. מצאו את האיבר הראשון והפרש הסדרה.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השביעי גדול פי 5 מהאיבר השני והאיבר השישי הוא 21. מצאו את האיבר הראשון והפרש הסדרה.
- (3) בסדרה חשבונית נתון: $a_{12} = 27$. האיבר התשיעי גדול פי שלושה מהאיבר השני.
א. מהו הפרש הסדרה?
ב. מצאו את ערכם של האיבר השני והאיבר התשיעי בסדרה.
- (4) בסדרה חשבונית האיבר השמיני גדול ב-6 מהאיבר החמישי. האיבר האחד עשר גדול פי 3 מהאיבר הראשון. מצאו את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.
- (5) בסדרה חשבונית סכום האיברים החמישי והשמיני הוא 12 והאיבר השלישי הוא 13. מצאו את a_1 ואת d .
- (6) בסדרה חשבונית סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 33 והאיבר התשיעי הוא 39. מצאו את a_1 ואת d .

(7) בסדרה חשבונית נתון:
$$\begin{cases} a_3 + a_7 = 32 \\ a_6 + a_9 = 47 \end{cases}$$
 .מצאו את a_1 ואת d .

(8) בסדרה חשבונית סכום האיברים החמישי והשמיני הוא עשרים ואחד.
ההפרש בין האיבר התשיעי לאיבר השני הוא 35.
חשבו את האיבר התשיעי בסדרה.

(9) באמפיתיאטרון 20 שורות. מספר המושבים בשורה הראשונה הוא 120.
מספר המושבים בכל שורה גדול יותר מאשר בשורה הקודמת בגודל קבוע.
מספר המושבים בשורה ה-8 הוא 155. מצאו כמה מושבים בשורה האחרונה.

(10) תלמיד פתר תרגילים בחשבון. מספר התרגילים שפתר בכל יום היוו סדרה חשבונית.
במשך שלושת הימים הראשונים פתר 54 תרגילים.
ביום השישי פתר מחצית מהתרגילים שפתר ביום הראשון.
א. כמה תרגילים פתר ביום הראשון?
ב. כמה ימים עבד אם ביום האחרון פתר רק 6 תרגילים?

(11) בתחרות שחמט חולקו פרסים. כל פרס היה קטן מקודמו במספר קבוע.
הפרס הראשון היה גדול פי 2 מהפרס ה-11, והפרס השלישי היה גדול ב-700 ₪
מסכום הפרסים ה-15 וה-16. הפרס האחרון בתחרות היה 200 ₪.
מצאו כמה פרסים חולקו בתחרות.

תשובות סופיות:

(1) $a_1 = 3, d = 3$

(2) $a_1 = 1, d = 4$

(3) א. $d = 2$ ב. $a_2 = 7, a_9 = 21$

(4) $a_1 = 10, d = 2$

(5) $a_1 = 17, d = -2$

(6) $a_1 = 7, d = 4$

(7) $a_1 = 4, d = 3$

(8) $a_1 = -17, d = 5$

(9) 215 מושבים.

(10) א. 20 תרגילים. ב. 8 ימים. (11) 19 פרסים.

איברים חיוביים ושליילים:

סיכום כללי:

- סדרה עולה שבה האיבר הראשון הוא שלילי ($a_1 < 0$), היא סדרה שבה מספר סופי של איברים שליליים.
- סדרה יורדת שבה האיבר הראשון הוא חיובי ($a_1 > 0$), היא סדרה שבה מספר סופי של איברים חיוביים.

שאלות:

- (1) בחשבון בנק הופקדו בשבוע הראשון 147 ₪. בכל שבוע עוקב, הבנק לוקח עמלה קבועה של 30 ₪ מהחשבון עבור דמי ניהול.
- א. מצאו את נוסחת האיבר הכללי, a_n , המייצגת את יתרת הכסף בחשבון בשבוע ה- n .
- ב. (1) מהי היתרה החיובית הנמוכה ביותר שתהיה בחשבון לפני שתהיה בחשבון יתרת חובה (מינוס)?
- (2) מה מספר השבוע שממנו והלאה יתרת החשבון תהיה בחובה (מינוס)?
- ג. במשך כמה שבועות (כולל השבוע הראשון) יתרת החשבון היא חיובית?
- (2) נועם פתח ערוץ יוטיוב חדש. כדי לקדם את הערוץ, הוא השקיע מכספו האישי בפרסום ממומן. ביום הראשון להפעלת הערוץ, היתרה בחשבונו היא 210- ₪ (הפסד בשל הוצאות הפרסום). ידוע כי לערוץ הכנסה קבועה של 45 ₪ המתקבלת מפרסום בסוף כל יום.
- א. מצאו את נוסחת האיבר הכללי, a_n , המייצגת את יתרת החשבון של הערוץ בתחילת היום ה- n לפעילותו.
- ב. מהי היתרה השלילית הגדולה ביותר שתוצג בחשבון של נועם?
- ג. החל מאיזה יום פעילות של הערוץ, היתרה תהיה חיובית?

תשובות סופיות:

- (1) א. $a_n = 177 - 30n$ ב. (1) 27 ש"ח ב. (2) $n = 6$ ג. 5 שבועות.
- (2) א. $a_n = -255 + 45n$ ב. -30 ג. החל מהיום השישי.

תכונת הממוצע החשבוני:

סיכום כללי:

הגדרה:

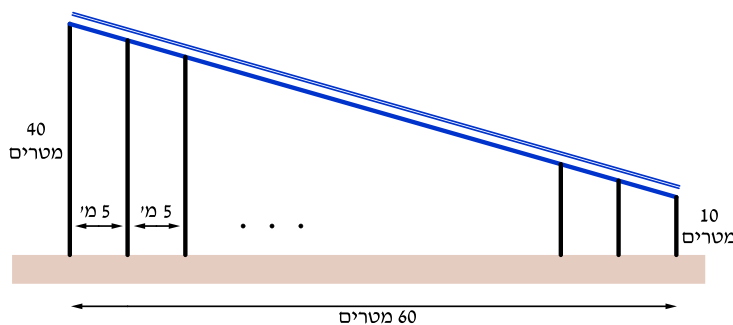
יהיו a, b, c שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית.

$$2b = a + c \text{ או: } b = \frac{a+c}{2}$$

לתכונה זו קוראים תכונת הממוצע החשבוני.

שאלות:

- (1) מסילת רכבת הרים יורדת במקטע מסוים בשיפוע קבוע מגובה של 40 מטרים ועד לגובה של 10 מטרים. כדי לתמוך במסילה, הותקנו תחתיה עמודי תמיכה אנכיים במרווחים אופקיים שווים זה מזה. בשל השיפוע הקבוע, הפרש הגבהים בין כל שני עמודים סמוכים הוא קבוע.



- א. גבהי העמודים יוצרים סדרה חשבונית.
- (1) מהו ערכו של האיבר הראשון בסדרה a_1 ?
 - (2) מהו ערכו של האיבר האחרון בסדרה a_n ?
- ב. נתון כי המרחק האופקי הכולל בין העמוד הראשון לעמוד האחרון הוא 60 מטרים, וכי המרחק האופקי בין כל שני עמודים סמוכים הוא 5 מטרים.
- (1) כמה עמודי תמיכה מותקנים לאורך המקטע (כולל העמוד הראשון והאחרון)?
 - (2) מצאו את הפרש הסדרה החשבונית.
- ג. (1) מה מיקומו של העמוד האמצעי בסדרת העמודים האנכיים?
- (2) הראו כי בסדרה שהתקבלה, גובהו של העמוד האמצעי שווה לממוצע הגבהים של העמודים בקצות מקטע המסילה.

(2) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית: x , $2 - x$, $3x + 5$, x^2 .

א. מצאו את x (הבחינו בין שני ערכים אפשריים).

ב. עבור כל אחד מערכי ה- x שמצאתם:

(1) מצאו את שלושת האיברים.

(2) מצאו את הפרש הסדרה.

ג. עבור כל אחד מערכי ה- x שמצאתם, כתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה

בהנחה ש- x^2 הוא האיבר הראשון בה.

תשובות סופיות:

(1) א. $a_1 = 40$ (1) א. $a_n = 10$ (2) ב. $n = 13$ (1) ב. $d = -2.5$ (2)

ג. $n = 7$ (1) ג. $a_7 = 25$ (2)

(2) א. $x = 8$, $x = -1$ ב. עבור $x = 8$: $d = -35$, -6 , 29 , 64 , עבור $x = 1$: $d = 1$, 3 , 2 , 1 .

כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל הנסיגה של סדרה חשבונית שבה האיבר הראשון הוא a_1 והפרשה d הוא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_1 \end{cases}$$

כלל:

כדי להוכיח כי סדרה היא חשבונית יש להראות כי ההפרש בין איבר לאיבר שלפניו הוא גודל קבוע שאינו תלוי ב- n . במילים אחרות: $a_{n+1} - a_n = \text{const.}$

שאלות:

(1) סדרה מוגדרת לפי כלל נסיגה לכל n טבעי: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4 \\ a_1 = -3 \end{cases}$

- מצאו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
- הוכיחו כי מדובר בסדרה חשבונית.
- כתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.
- מצאו את ערכו של האיבר העומד במקום ה-45 בסדרה.

(2) סדרה מוגדרת לפי כלל נסיגה לכל n טבעי: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 3 \\ a_6 = 27 \end{cases}$

- הוכיחו כי מדובר בסדרה חשבונית.
- מצאו את האיבר הראשון בסדרה זו.
- כתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.
- מצאו כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

(3) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$

הוכיחו שהסדרה חשבונית ומצאו מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

תשובות סופיות:

- (1) א. $-3, 1, 5, 9$ ב. הוכחה ג. $a_n = 42 - 7$ ד. $a_{45} = 173$
- (2) א. הוכחה ב. $a_1 = 42$ ג. $a_n = 45 - 3n$ ד. 14 איברים.
- (3) $a_{19} = 59$

סכום סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

הגדרה:

נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ שבה n איברים והפרשה הוא d .
סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n ויחושב לפי הנוסחה:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + d(n-1)]$$

הערות:

- הנוסחה מקשרת בין האיבר הראשון a_1 , הפרש הסדרה d , מספר האיברים שיש לסכום n וסכום הסדרה עצמו S_n . בהתאם לכך ניתן לבקש למצוא את כל אחד מהגדלים הנ"ל כאשר האחרים נתונים.

- אם האיבר הראשון a_1 והאיבר האחרון a_n בסדרה ידועים, אז ניתן לחשב את

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

סכום האיברים לפי הנוסחה הבאה:

שאלות:

(1) חשבו את סכום הסדרה הבאה: $4, 7, 10, \dots, 34$ בשתי דרכים:

א. בעזרת הנוסחה: $S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

ב. בעזרת הנוסחה: $S = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$.

(2) נתונה סדרה חשבונית ובה $a_1 = 2$ ו- $d = 3$.

א. חשבו את סכום חמשת האיברים הראשונים באופן ידני.

ב. היעזרו בנוסחת הסכום וחשבו את סכום חמשת האיברים הראשונים.

(3) נתונות הסדרות החשבוניות הבאות.

בכל סדרה חשבו את סכום האיברים הנדרש.

א. $5, 7, 9, \dots$ מצאו את S_8 .

ב. $3, 7, 11, \dots$ מצאו את S_{15} .

ג. $8, 2, -4, \dots$ מצאו את S_{25} .

ד. $10, 3, -4, \dots$ מצאו את S_{16} .

(4) בכל אחת מהסדרות החשבוניות הבאות נתון הפרש וסכום כל איבריה.

מצאו את האיבר הראשון.

א. $S_{10} = 210, d = 4$

ב. $S_{24} = 768, d = 2$

ג. $S_{22} = -539, d = -3$

ד. $S_{53} = -1484, d = -1$

(5) בכל אחת מהסדרות החשבוניות הבאות נתון האיבר הראשון וסכום כל איבריה.

מצאו את הפרש הסדרה.

א. $S_{18} = 981, a_1 = 12$

ב. $S_{30} = 1080, a_1 = 7$

ג. $S_{25} = 2100, a_1 = -12$

ד. $S_{13} = 624, a_1 = 9$

(6) בסדרה חשבונית שבה 10 איברים הפרש הסדרה הוא 6 וסכום כל איברי הסדרה הוא 300.

חשבו את האיבר הראשון בסדרה.

(7) נתונה סדרה חשבונית בת 7 איברים. האיבר הראשון הוא 3 וסכום כל איבריה הוא 105.

חשבו את הפרש הסדרה.

(8) בסדרה חשבונית ידוע כי האיבר הראשון הוא 2 וכי האיבר השביעי הוא 38. מצאו את סכום 15 האיברים הראשונים בסדרה.

(9) בסדרה חשבונית האיבר החמישי גדול פי 2 מהאיבר השלישי. סכום עשרת האיברים הראשונים הוא 90. חשבו את האיבר השביעי בסדרה.

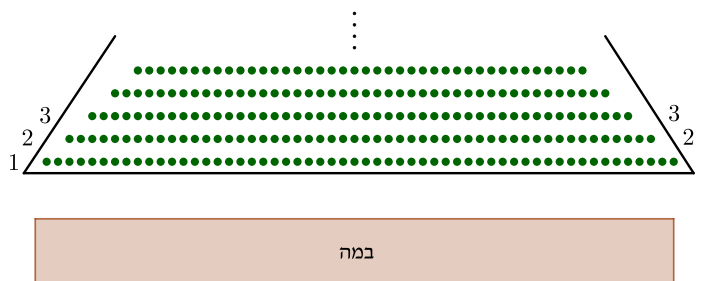
(10) המשכורת החודשית ההתחלתית של עובד במפעל היא 3600 ₪. בכל חודש עולה משכורתו ב-100 ₪.

- א. מה תהיה משכורתו בחודש התשיעי לעבודתו?
- ב. כמה השתכר העובד במשך 9 חודשים?

(11) מיטל רצה ביום הראשון 3 ק"מ ובכל יום רצה 1 ק"מ יותר מאשר ביום הקודם. א. כמה ק"מ רצה מיטל ביום השמיני? ב. כמה ק"מ רצה מיטל בשמונת הימים הראשונים בסה"כ?

(12) באמפיתיאטרון של מתנ"ס שכונתי ישנן 12 שורות. בשורה הראשונה יש 7 כיסאות ובכל שורה יש 3 כיסאות יותר מאשר בשורה שלפניה. כמה כיסאות יש בכל השורות יחדיו?

(13) נתון אולם אירועים כפי שמופיע באיור הבא, וצורתו היא טרפזית. ידוע כי מספר הכיסאות בכל שורה קטן ב-2 ביחס לשורה שלפניה. באולם ישנן 9 שורות הממוספרות בסדר עולה מהבמה לאחור. ידוע כי בשורה הראשונה (הקדמית ביותר) ישנם 56 כיסאות.



- א. כתבו את נוסחת האיבר הכללי המתאימה לתיאור מספר הכיסאות בכל שורה.
- ב. שני אמנים מעוניינים להופיע באולם: לאחד קהל של 400 איש, ולשני קהל של 500 איש. עבור איזה מהאמנים קיבולת האולם תספיק? נמקו באמצעות חישוב.

- (14)** נועם החליט לחסוך כסף לטיול ארוך בחו"ל.
 בחודש הראשון לעבודתו, הוא הפקיד בחיסכון 1000 ש.
 בכל חודש לאחר מכן, בזכות בונוס קבוע על התמדה, הוא הצליח להגדיל את סכום ההפקדה החודשי שלו ב-100 ש לעומת החודש הקודם.
 א. כתבו ביטוי לאיבר הכללי, a_n , המייצג את סכום ההפקדה בחודש ה- n .
 ב. נועם מתכנן לחסוך במשך שנה שלמה (12 חודשים).
 מהו סכום הכסף הכולל שיהיה ברשותו בתום התקופה?
 ג. במידה והטיול שנועם מתכנן לעשות עולה 15,000 ש, האם הסכום שחסך יספיק לו?
- (15)** נתונה הסדרה החשבונית שאיבריה הראשונים הם: $-72, -66, -60, -54, \dots$.
 א. מצאו כמה איברים שליליים קיימים בסדרה.
 ב. חשבו את סכומם של כל האיברים השליליים בסדרה.
 ג. מהו מספר האיברים המינימלי שיש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי שסכום הסדרה יהיה חיובי?

תשובות סופיות:

- (1)** 209.
(2) א. 40. ב. 40.
(3) א. 96. ב. 465. ג. -2370. ד. -680.
(4) א. 3. ב. 9. ג. 7. ד. -2.
(5) א. 5. ב. 2. ג. 8. ד. 6.5.
(6) $a_1 = 3$.
(7) $d = 4$.
(8) $S_{15} = 660$.
(9) $a_7 = 12$.
(10) א. 4400 ש. ב. 36000 ש.
(11) א. 10 ק"מ. ב. 52 ק"מ.
(12) 282 כיסאות.
(13) א. $a_n = 58 - 2n$. ב. יתאים לקהל של 400 איש.
(14) א. $a_n = 100n + 900$. ב. 18600 ש. ג. כן.
(15) א. 12 איברים. ב. -468. ג. 26 איברים.

מציאת מספר האיברים מנוסחת הסכום:

סיכום כללי:

כאשר יש למצוא את n מנוסחת הסכום, תתקבל משוואה ריבועית עבורו. במקרים אלו נפתור אותה ע"י שימוש בנוסחת השורשים ונפסול פתרונות שליליים או שאינם שלמים.

שאלות:

- (1) נתונה סדרה חשבונית שבה $a_1 = 10$ ו- $d = -2$. כמה איברים יש לחבר כדי לקבל את הסכום 30?
 א. ציירו את איברי הסדרה ומצאו את כל הפתרונות האפשריים.
 ב. אמתו את תוצאתכם ע"י שימוש בנוסחת הסכום.
- (2) נתונה הסדרה: $\dots, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$. מצאו כמה איברים יש לחבר, החל מהאיבר הראשון, כדי לקבל את הסכום 90.
- (3) בסדרה חשבונית האיבר הראשון הוא 3 והפרש הסדרה הוא 9. סכום כל האיברים בסדרה הוא 435. כמה איברים בסדרה?
- (4) נתונה סדרה חשבונית: $\dots, 9, 7, 5$. סכום כל האיברים בסדרה הוא 60. חשבו את מספר איברי הסדרה.
- (5) בסדרה חשבונית האיבר השלישי הוא 50 והאיבר השמיני הוא 30. כמה איברים בסדרה אם סכומם 418 (מצאו את כל האפשרויות).
- (6) עדן צועדת ביום הראשון 2.5 ק"מ ובכל יום צעידה, צועדת 1.5 ק"מ יותר מאשר ביום הקודם. במשך כמה ימים צעדה עדן מרחק כולל של 92.5 ק"מ בסך הכול?
- (7) שיר קוראת ספר. ביום הראשון קראה 6 עמודים ובכל יום קראה 4 עמודים יותר מאשר ביום הקודם. בספר 336 עמודים בסך הכל. במשך כמה ימים קראה שיר את הספר?



- (8) מגדל מורכב מקוביות המונחות זו על זו.
אורך הצלע של הקובייה התחתונה הוא 20 ס"מ.
הצלע של כל קובייה אחרת קצרה ב-2 ס"מ מזו שמתחתיה.
גובה המגדל 90 ס"מ. כמה קוביות במגדל?

תשובות סופיות:

- (1) א. $n = 5$ או $n = 6$. ב. אימות ע"י נוסחת הסכום.
- (2) 3 איברים או 12 איברים ראשונים.
- (3) 10 איברים.
- (4) 6 איברים.
- (5) 11 איברים או 19 איברים יתנו את המבוקש.
- (6) 10 ימים.
- (7) 12 ימים.
- (8) 6 קוביות.

מעבר מנוסחת סכום לנוסחת איבר כללי:

סיכום כללי:

בסדרה חשבונית, הקשר שבין האיבר הכללי a_n לסכום הסדרה S_n הוא:
 $S_n - S_{n-1} = a_n$ לכל $n \geq 2$.

שאלות:

(1) בכל אחת מן הסדרות הבאות, נתונה נוסחת סכום n האיברים הראשונים של סדרה. מצאו את נוסחת האיבר הכללי והוכיחו כי מדובר בסדרות חשבוניות.

א. $S_n = n^2 + 8n$

ב. $S_n = n^2 - 5n$

ג. $S_n = -2n^2 + 7n$

(2) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצאו את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכיחו כי הסדרה חשבונית ומצאו את הפרשה.

תשובות סופיות:

(1) א. $a_n = 2n + 7$ ב. $a_n = 2n - 6$ ג. $a_n = -4n + 9$

(2) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$

הרכבה של סדרות חשבוניות:

שאלות:

(1) מגדירים שתי סדרות חשבוניות:

- סדרה A: $1, 9, 17, 25, \dots$

- סדרה B: $5, 13, 21, 29, \dots$

א. חשבו את סכום 30 האיברים הראשונים בכל אחת מן הסדרות A ו-B.

מגדירים כעת סדרה חדשה C המורכבת מאיברי הסדרות A ו-B באופן הבא:

$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots$

ב. (1) הסבירו מדוע הסדרה C היא חשבונית.

(2) חשבו את סכום 60 האיברים הראשונים בסדרה C.

ג. (1) הראו כי מתקיים השוויון: $S_{60}(C) = S_{30}(A) + S_{30}(B)$.

כלומר: סכום 30 האיברים הראשונים של הסדרה A ועוד סכום 30 האיברים

של הסדרה B שווים לסכום כל 60 האיברים בסדרה C.

(2) הסבירו את משמעות התוצאה.

(2) לליאן ניתנה משימה לחשב את סכום 100 האיברים הראשונים בסדרה הבאה:

$3, 7, 15, 19, 27, 31, \dots$

כדי לבצע את החישוב, נעזרה ליאן באחותה, אליון, שהציעה את דרך הפעולה הבאה.

אליון הבחינה כי ניתן לפצל את הסדרה המקורית לשתי סדרות חשבוניות נפרדות.

סדרה 1: $3, 15, 27, \dots$

סדרה 2: $7, 19, 31, \dots$

א. (1) כמה איברים יש לחבר מכל סדרה לפי הצעתה של אליון, כדי להגיע לסכום של 100

האיברים הראשונים בסדרה המקורית?

(2) מצאו את הערך של האיבר האחרון בכל אחת משתי הסדרות הללו.

ב. (1) חשבו את הסכום של כל סדרה בנפרד.

(2) מצאו את הסכום שליואן נתבקשה לחשב.

(3) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 9, 14, 19, \dots, 599$.

מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצאו את סכום האיברים שנותרו.

תשובות סופיות:

- (1)** א. סדרה A: 3510, סדרה B: 3630 ב. (1) ראו סרטון ב. (2) 7140.
- ג. (1) ראו סרטון ג. (2) ראו סרטון.
- (2)** א. (1) 50 איברים א. (2) סדרה 1: 591, סדרה 2: 595.
- ב. (1) סדרה 1: 14850, סדרה 2: 15050 ב. (2) 29900.
- (3)** 23920.

סכום איברים העומדים במקומות הזוגיים והאי-זוגיים:

סיכום כללי:

הגדרות:

- סדרה בעלת מספר זוגי של איברים $\leftarrow$ סדרה בעלת $2n$ איברים.
- סדרה בעלת מספר אי-זוגי של איברים $\leftarrow$ סדרה בעלת $2n+1$ איברים.

תת הסדרה המתקבלת		קריטריון
סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים	סדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים	
n איברים	n איברים	סדרה בעלת $2n$ איברים
$n+1$ איברים	n איברים	סדרה בעלת $2n+1$ איברים
a_1	a_2	האיבר הראשון
$2d$	$2d$	הפרש הסדרה

שאלות:

(1) בטבלה שלפניכם נתונות סדרות חשבוניות שונות.

מלאו את הטבלה עבור הסדרות החלקיות:

סדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

סדרת איברים העומדים במקומות הזוגיים			סדרת איברים העומדים במקומות האי-זוגיים			הסדרה
איבר ראשון	הפרש חדש	מס' איברים	איבר ראשון	הפרש חדש	מס' איברים	
						סדרה חשבונית שבה 21 איברים: ... 8, 3, -2.
						סדרה חשבונית שבה 30 איברים: ... 7, 10, 13.
						סדרה חשבונית שבה 15 איברים: ... 12, 14, 16.
						סדרה חשבונית שבה 44 איברים: ... -6, -12, -18.

(2) נתונה סדרה חשבונית שבה $a_1 = 1$ ו- $d = 4$.

א. רשמו לפי סדר את 10 האיברים הראשונים בסדרה:

ב. בסדרה זו מוחקים את האיברים השני, הרביעי, השישי, השמיני והעשירי.

כלומר, מוחקים כל איבר הנמצא במקום זוגי בסדרה.

חשבו את סכום האיברים שנותרו בסדרה באמצעות חישוב ישיר ובאמצעות

נוסחת הסכום.

ג. חשבו את סכום 50 האיברים שלא נמחקו.

ד. חשבו את סכום 50 האיברים שנמחקו.

תשובות סופיות:

(1) להלן טבלה:

סדרת איברים העומדים במקומות הזוגיים			סדרת איברים העומדים במקומות האי-זוגיים			הסדרה
מס' איברים	הפרש חדש	איבר ראשון	מס' איברים	הפרש חדש	איבר ראשון	
10	10	3	11	10	-2	סדרה חשבונית: שבה 21 איברים: ... 8, 3, -2.
15	-6	10	15	-6	13	סדרה חשבונית: שבה 30 איברים: ... 7, 10, 13.
7	4	14	8	4	12	סדרה חשבונית: שבה 15 איברים: ... 12, 14, 16.
22	12	-12	22	12	-18	סדרה חשבונית: שבה 44 איברים: ... -6, -12, -18.

(2) א. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37. ב. 85. ג. 9850. ד. 10050.

שאלות מסכמות:

שאלות:

- (1) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7 וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
- מצאו את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
 - מצאו את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
 - מצאו כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.
- (2) לפניכם שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.
- ענו על הסעיפים הבאים:
 - מצאו את x .
 - מצאו את הפרש הסדרה.
 - ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצאו את a_1 .
 - האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.
- מצאו את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- (3) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
- הוכיחו: $a_5 = 0$.
 - נתון: $a_3 - a_1 = 24$. מצאו את a_1 ואת d .
 - מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$. מצאו את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- (4) נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{cases}$. לשני הטורים אותו מספר איברים.
- ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.
- מצאו את מספר האיברים שבכל טור.
 - מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצאו את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

- (5) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.
- א. הוכיחו את הטענות הבאות:
- (1). $a_1 = -4d$
- (2). $S_9 = 0$
- ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5. מצאו את a_1 ואת d .
- ג. מצאו את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

- (6) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר. ההצעה הראשונה: לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם. ההצעה השנייה: לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם. ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.
- א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.
- ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

- (1) א. $a_1 = 50, d = -6$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$
- (2) א. (1). $x = -50$ א. (2). $d = 11$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
- (3) א. הוכחה ב. $a_1 = 12, d = -3$ ג. $b_5 = -3$
- (4) א. $n = 81$ ב. $n = 16$
- (5) א. הוכחה ב. $a_1 = -8, d = 2$ ג. $n = 36$
- (6) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.

שאלון 472

הסדרה ההנדסית

תוכן העניינים:

94.....הסדרה ההנדסית

95	נוסחת האיבר הכללי:
95	סיכום כללי:
96	שאלות:
98	תשובות סופיות:
99	סכום סדרה הנדסית:
99	סיכום כללי:
99	שאלות:
102.....	תשובות סופיות:

נוסחת האיבר הכללי:

סיכום כללי:

הגדרה:

סדרה הנדסית היא סדרה שבה כל איבר מתקבל ע"י כפל בקבוע של האיבר שלפניו. לגודל הקבוע קוראים בשם **מנת הסדרה** ומסמנים אותה ב- q .

דוגמאות לסדרות הנדסיות:

- $q = \frac{6}{2} = 3$ ו- $a_1 = 2$ בסדרה זו 2 , 6 , 18 , 54 ,
- $q = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$ ו- $a_1 = 96$ בסדרה זו 96 , 24 , 12 , 3 ,
- $q = \frac{-3}{1} = -3$ ו- $a_1 = 1$ בסדרה זו 1 , -3 , 9 , -27 ,

סיווג סדרות הנדסיות לפי מנת הסדרה:

נתונה הסדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא חיובי, $a_1 > 0$. ניתן לאפיין אותה לפי q באופן הבא:

- אם $q > 1$ אז הסדרה היא **עולה**.
 - אם $0 < q < 1$ אז הסדרה היא **מתכנסת ויורדת**.
 - אם $q < 0$ אז הסדרה מחליפה סימנים:
 - כאשר $-1 < q < 0$ הסדרה מחליפה סימנים וקטנה – מתכנסת.
 - כאשר $q < -1$ הסדרה מחליפה סימנים וגדלה בערכה המוחלט.
- במקרה שבו $q < 0$ (מנת הסדרה שלילית) אומרים כי הסדרה **אינה עולה ואינה יורדת**.
ניסוח אחר: הסדרה **מתנדנדת**.

שאלות:

(1) בסדרה הנדסית נתון: $a_3 = 27$, $a_6 = 729$.

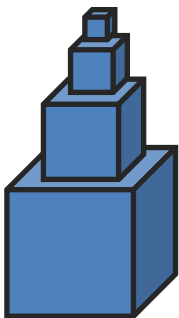
- מצאו את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.
- בסדרה 7 איברים, מצאו את האיבר האחרון.
- האם יתכן שהמספר 6,460 הוא איבר בסדרה? נמקו תשובתכם.

(2) השלימו את הטבלה הבאה:

4 איברים ראשונים בסדרה הנדסית	a_1 - איבר ראשון	q -מנה	a_n - איבר כללי
2, 6, 18, 54, ...			
			$3 \cdot 2^{n-1}$
	-2	5	
-1, 4, -16, 64, ...			
			$-8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
	1	-3	
$9, 3, 1, \frac{1}{3}$			

(3) שרון בונה מגדל מקוביות משחק המונחות זו על גבי זו.

הקוביות מסודרות כך שאורך הצלע של כל קובייה קטן פי 2 מאורך הצלע של הקובייה שמתחתיה. אורך הצלע של הקובייה הראשונה (התחתונה והגדולה ביותר) הוא 64 ס"מ. נפח הקובייה האחרונה (העליונה והקטנה ביותר) הוא 8 סמ"ק.



- מצאו את אורך הצלע של הקובייה האחרונה.
- כתבו סדרה הנדסית מתאימה לתיאור השאלה ומצאו את האיבר הראשון ואת מנת סדרה זו.
- מצאו כמה קוביות משחק יש לשרון.

(4) מצאו כמה איברים יש בכל אחת מן הסדרות ההנדסיות הבאות:

- א. $4, 12, 36, \dots, 26244$
- ב. $3, 96, 192, \dots, 384$
- ג. $-2, 2048, \dots, -8192$
- ד. $\frac{1}{343}, -\frac{1}{49}, \frac{1}{7}, \dots, 343$



(5) מנוע הופעל ומהירותו החלה לעלות בהדרגה.

מספר הסיבובים שמבצע המנוע בכל שנייה יוצר סדרה הנדסית, כך שבכל שנייה מספר הסיבובים גדל פי גודל קבוע לעומת השנייה שקדמה לה. ידוע כי בשנייה השישית לפעולתו הוא ביצע 8 סיבובים, וכי בשנייה העשירית הוא ביצע 128 סיבובים.

- א. מצאו מנת הסדרה.
- ב. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

(6) המספרים: $2x+24$, x , $x+5$ הם שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. מצאו את x (הבחינו בין שני מקרים) ותארו את הסדרות ההנדסיות המתקבלות.

תשובות סופיות:

(1) א. $a_1 = q = 3$ ב. $a_7 = 2187$ ג. לא.

(2) להלן טבלה מלאה:

4 איברים ראשונים בסדרה הנדסית	a_1 - איבר ראשון	q -מנה	a_n - איבר כללי
2, 6, 18, 54, ...	2	3	$2 \cdot 3^{n-1}$
3, 6, 12, 24, ...	3	2	$3 \cdot 2^{n-1}$
-2, -10, -50, -250, ...	-2	5	$-2 \cdot 5^{n-1}$
-1, 4, -16, 64, ...	-1	-4	$-1 \cdot (-4)^{n-1}$
-8, -4, -2, -1, ...	-8	0.5	$-8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
1, -3, 9, -27, ...	1	-3	$1 \cdot (-3)^{n-1}$
9, 3, 1, $\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{3}$	$9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) א. 2 ס"מ. ב. $a_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$ ג. 6 קוביות משחק.

(4) א. 9 איברים ב. 8 איברים ג. 7 איברים ד. 7 איברים.

(5) א. $q = 2$ ב. $a_1 = \frac{1}{4}$.

(6) $x = -4$ והסדרה אינה עולה ואינה יורדת, או $x = -30$ והסדרה יורדת.

סכום סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

נוסחת סכום איברים:

נוסחה למציאת סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה q

$$\text{היא: } S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

מציאת איבר כללי באמצעות הפרש סכומים:

הקשר שבין סכום איברים לנוסחת האיבר הכללי: $n \geq 2 : S_n - S_{n-1} = a_n$

שאלות:

(1) חשב את הסכומים של הסדרות ההנדסיות הבאות:

- סכום 5 האיברים הראשונים של הסדרה: $1, 3, 9, \dots$
- סכום 7 האיברים הראשונים של הסדרה: $2, 8, 32, \dots$
- סכום 6 האיברים הראשונים של הסדרה: $180, 90, 45, \dots$
- סכום 8 האיברים הראשונים של הסדרה: $4, -12, 36, \dots$

(2) בסדרה הנדסית האיבר הראשון הוא 3 ומנתה 2.

מה הוא סכום 10 האיברים הראשונים בסדרה?

(3) נתונה סדרה הנדסית שבה האיבר השלישי הוא 18 והאיבר החמישי הוא 162.

- מה הוא סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה אם ידוע כי כל איבריה הם שליליים?
- מה הוא סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה אם ידוע כי היא אינה עולה ואינה יורדת?

(4) נתונה נוסחת סכום m האיברים הראשונים של סדרה: $S_n = \frac{1-5^n}{2}$.

- א. מהו סכום 4 האיברים הראשונים בסדרה?
 ב. מצאו את האיבר הכללי של הסדרה.
 ג. הוכיחו כי הסדרה היא הנדסית ומצאו את מנתה ואת האיבר הראשון שלה.

(5) נתונות נוסחאות סכום m האיברים הראשונים של שתי סדרות:

1. $S_n = 2(1-3^n)$

2. $S_n = 1-(-3)^n$

- א. חשבו את סכום 6 האיברים הראשונים בכל סדרה.
 ב. מצאו את האיבר הכללי בכל סדרה והוכיחו כי שתי הסדרות הן הנדסיות.
 ג. (1) מצאו את האיבר הראשון בכל סדרה.
 (2) מה תוכלו לומר על הסדרות?

(6) בטבלה שלפניכם נתונות סדרות הנדסיות שונות.

מלאו את מספר האיברים, את המנה החדשה ואת האיבר הראשון עבור הסדרות המתקבלות מהאיברים העומדים במקומות הזוגיים, והמקומות האי-זוגיים.

סדרת איברים העומדים במקומות הזוגיים	סדרת איברים העומדים במקומות האי-זוגיים			הסדרה
	מס' איברים	מנה חדשה	איבר ראשון	
				סדרה הנדסית שבה 13 איברים: 2, 6, 18, ...
				סדרה הנדסית שבה 22 איברים: -24, 12, -6, ...
				סדרה הנדסית שבה 18 איברים: $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, \dots$
				סדרה הנדסית שבה 41 איברים: $\frac{2}{3}, -1, 1.5, \dots$

(7) נתונה סדרה הנדסית A בעלת 30 איברים: $5, 10, 20, 40, \dots$. מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים ויוצרים סדרה חדשה B.

- א. כתבו את 4 האיברים הראשונים של הסדרה B.
- ב. הוכיחו כי הסדרה B היא הנדסית ומצאו את מנתה.
- ג. (1) חשבו את סכום כל איברי הסדרה A.
(2) חשבו את סכום כל איברי הסדרה B.

(8) נתונה סדרה הנדסית A שבה 9 איברים: $486, 162, 54, \dots$.

- א. מצאו את האיבר האחרון בסדרה.
 - ב. חשבו את סכום הסדרה.
- מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים כך שנוצרת סדרה חדשה B.
- ג. הוכיחו כי הסדרה B היא הנדסית ומצאו את מנתה.
 - ד. כתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה B.
 - ה. חשבו את סכום כל איברי הסדרה B.

(9) נתונות שתי סדרות הנדסיות, בכל אחת 10 איברים:

A: $5, 15, 45, 135, \dots$

B: $-5, 15, -45, 135, \dots$

- א. כתבו את נוסחת האיבר הכללי של כל סדרה.
 - ב. כתבו את נוסחת סכום n האיברים הראשונים בכל סדרה.
- יוצרים סדרה חדשה C, המקיימת: $c_n = a_n \cdot b_n$.
- ג. (1) הוכיחו כי הסדרה C היא הנדסית.
(2) כתבו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה C.
 - ד. כתבו את נוסחת סכום n האיברים הראשונים בסדרה C.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad S_5 = 121 \quad \text{ב.} \quad S_7 = 10922 \quad \text{ג.} \quad S_6 = 354.375 \quad \text{ד.} \quad S_8 = -6560$$

$$(2) \quad S_{10} = -3069$$

$$(3) \quad S_5 = -242 \quad \text{ב.} \quad S_5 = -122$$

$$(4) \quad S_4 = -312 \quad \text{ב.} \quad a_n = -2 \cdot 5^{n-1} \quad \text{ג.} \quad q = 5$$

$$(5) \quad \text{א. סדרה 1: } S_6 = -1456, \text{ סדרה 2: } S_6 = -728$$

$$\text{ב. סדרה 1: } a_n = -4 \cdot 3^{n-1}, \text{ סדרה 2: } a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$$

ג. (1) סדרה 1: $a_1 = -4$, סדרה 2: $a_1 = 4$ ג. (2) לסדרות איבר ראשון נגדי ומנת סדרה נגדית.

(6) להלן טבלה מלאה:

הסדרה	סדרת איברים העומדים במקומות האי-זוגיים			סדרת איברים העומדים במקומות הזוגיים		
	מס' איברים	מנה חדשה	איבר ראשון	מס' איברים	מנה חדשה	איבר ראשון
סדרה הנדסית שבה 13 איברים: 2, 6, 18, ...	7	9	2	6	9	6
סדרה הנדסית שבה 22 איברים: -24, 12, -6, ...	11	0.25	-24	11	0.25	12
סדרה הנדסית שבה 18 איברים: $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, \dots$	9	16	0.125	9	16	0.5
סדרה הנדסית שבה 41 איברים: $\frac{2}{3}, -1, 1.5, \dots$	21	2.25	$\frac{2}{3}$	20	2.25	-1

$$(7) \quad \text{א. } -40, 20, -10, 5 \quad \text{ב.} \quad q = -2$$

$$\text{ג. (1)} \quad S_{30} = 5(2^{30} - 1) = 5,368,709,115 \quad \text{ג. (2)} \quad S_{30} = -\frac{5}{3}(2^{30} - 1) = -1,789,569,705$$

$$(8) \quad \text{א.} \quad a_9 = \frac{2}{81} \quad \text{ב.} \quad S_9 = -728 \frac{26}{27} \quad \text{ג.} \quad q = -\frac{1}{3} \quad \text{ד.} \quad a_n = -486 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{ה.} \quad S_9 = -368 \frac{14}{27}$$

$$(9) \quad \text{א. סדרה A: } a_n = 5 \cdot 3^{n-1}, \text{ סדרה B: } a_n = -5 \cdot (-3)^{n-1}$$

$$\text{ב. סדרה A: } S_n = \frac{5}{2}(3^n - 1), \text{ סדרה B: } S_n = \frac{5}{4}((-3)^n - 1)$$

$$\text{ג. (1)} \quad q_C = -9 \quad \text{ג. (2)} \quad c_n = 2.5 \cdot (-9)^{n-1} \quad \text{ד.} \quad S_C = 2.5((-9)^n - 1)$$

שאלון 472

סדרה הנדסית אינסופית

תוכן העניינים:

103.....סדרה הנדסית אינסופית

104..... כללי:

104..... סיכום כללי:

105..... שאלות:

105..... תשובות סופיות:

סיכום כללי:

• הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

• נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

• סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה:}$$

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית

מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{באופן הבא:}$$

שאלות:

- (1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$
- (2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- (3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).
- (4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.
- (5) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
 א. מצא את מנת הסדרה.
 ב. הוכח כי שני איברים בסדרה הנתונה יוצרים סדרה חדשה b_n .
 ג. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
 ד. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
 ט. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .

תשובות סופיות:

- (1) $S = 18$
- (2) $a_1 = 24$
- (3) $q = \frac{4}{5}, a_1 = 12\frac{1}{2}$ או $q = \frac{1}{5}, a_1 = 50$
- (4) $S = 18\frac{2}{3}$
- (5) א. $q = 0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$ ט. $a_1 = 200$

שאלון 472

מושגי יסוד וגופים במרחב

תוכן העניינים:

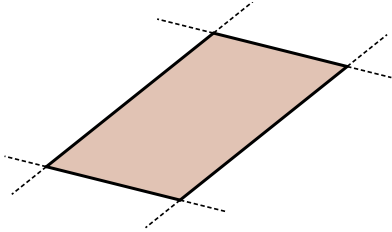
מושגי יסוד וגופים במרחב.....106

107.....	כללי:
107.....	סיכום כללי – מושגים במרחב:
109.....	סיכום כללי – צורות מרחביות:
113.....	שאלות:
115.....	תשובות סופיות:

סיכום כללי – מושגים במרחב:

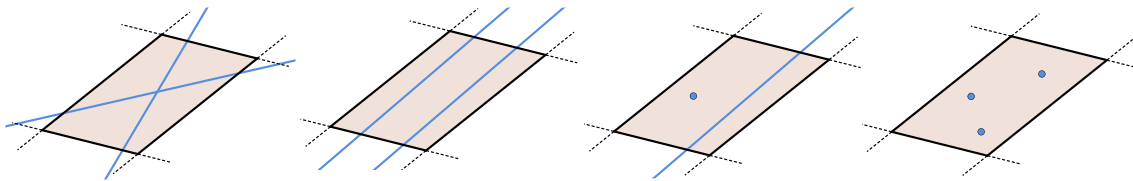
מישור:

משטח אינסופי חסר עובי.



דרכים להגדיר מישור:

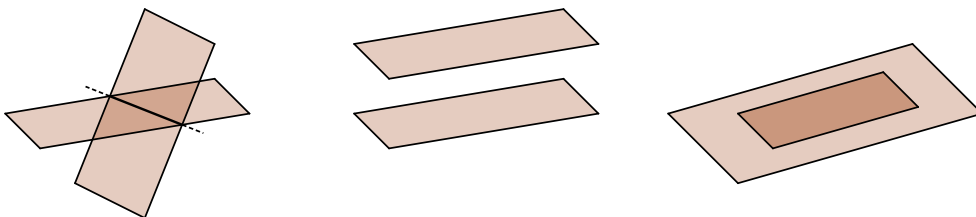
- על ידי 3 נקודות שאינן על אותו הישר.
- על ידי נקודה מחוץ לישר.
- על ידי ישרים נחתכים או מקבילים זה לזה.



מצבים הדדים בין מישורים:

לשני מישורים ייתכנו 3 מצבים הדדים:

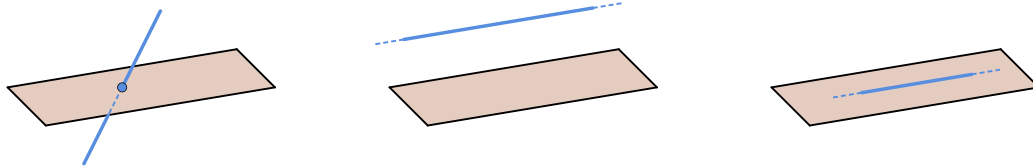
- מישורים נחתכים – זוג מישורים עם קו משותף אשר 'נפגשים' לכל אורכו נקראים מישורים הנחתכים זה את זה. הקו החותך נקרא ישר החיתוך של המישורים.
- מישורים מקבילים – זוג מישורים שלעולם לא ייפגשו.
- מישורים מתלכדים – זוג מישורים החולקים אינסוף נקודות משותפות. במילים אחרות: כל נקודה הנמצאת על מישור אחד, נמצאת גם על האחר, והפוך.



מצבים הדדיים בין ישר ומישור:

לישר ומישור ייתכנו 3 מצבים הדדיים והם:

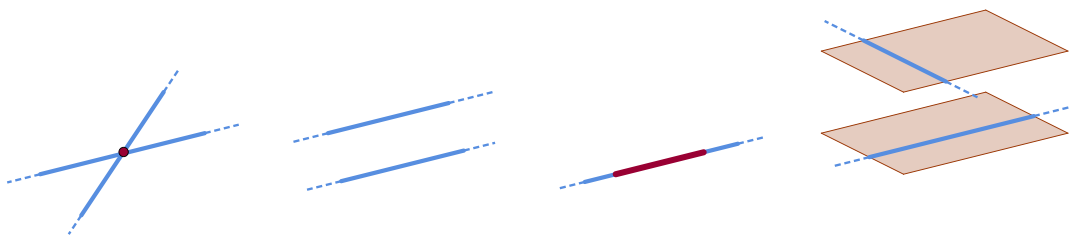
- הישר חותך את המישור – יש לישר ולמישור נקודה משותפת אחת בלבד והיא נקראת נקודת החיתוך של הישר והמישור.
- הישר מוכל בתוך המישור – יש לישר ולמישור אינסוף נקודות משותפות.
- הישר מקביל למישור – אין לישר ולמישור נקודות משותפות כלל.



מצבים הדדיים בין ישרים במרחב:

לשני ישרים יש 4 מצבים הדדיים שונים:

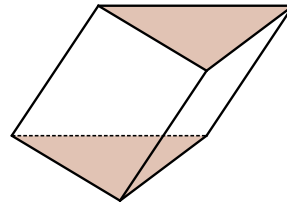
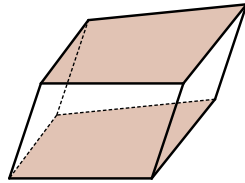
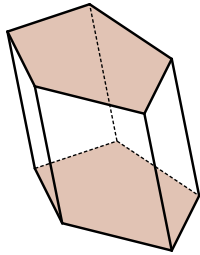
- הישרים נחתכים – לשני הישרים יש נקודת אחת משותפת.
- הישרים מקבילים – אין לישרים אף נקודה משותפת.
(דרך נוספת: הישרים נמצאים על מישורים מקבילים ולא נפגשים לעולם).
- הישרים מתלכדים – יש לשני הישרים אינסוף נקודות משותפות.
(דרך נוספת: כל נקודה הנמצאת על ישר אחד, נמצאת גם על הישר השני).
- הישרים מצטלבים – שני הישרים נמצאים במישורים מקבילים שונים ופונים לכיוונים שונים בכל מישור.



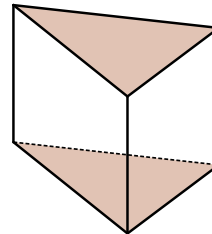
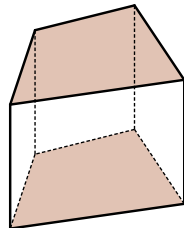
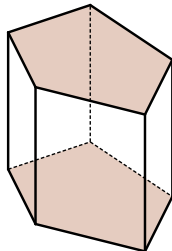
סיכום כללי – צורות מרחביות:

המנסרה:

גוף תלת-ממדי שיש לו שני בסיסים זהים (למשל שני משולשים זהים או שני ריבועים זהים וכו') הנמצאים אחד מעל השני במקביל. הבסיסים מחוברים ביניהם על ידי פאות מקביליות שיוצרות את הדפנות הצדדיות של המנסרה.



**מנסרה
שאינה ישרה**



מנסרה ישרה

בסיס במנסרה:

בסיס במנסרה הוא אחד משתי הצורות הזהות (העליונה או התחתונה) של המנסרה.

פאות במנסרה:

הפאות הן כל המקביליות אשר מרכיבות את 'קירות' המנסרה. במנסרה יש שני בסיסים ופאות צדדיות.

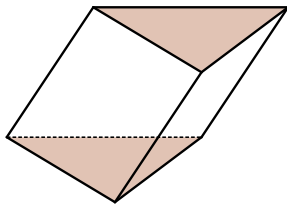
מקצועות:

המקצועות הם הקטעים הישרים (צלעות) שנוצרים עקב מפגש של שתי פאות במנסרה. בעצם אלו הם ה-"קצוות" של המנסרה ומרכיבים את השלד של המנסרה.

אלכסונים:

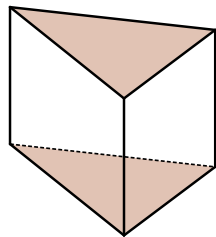
האלכסונים הם קווים ישרים שמחברים בין שני קודקודים (פינות) של המנסרה שלא נמצאים על אותה פאה. ישנם שני סוגים של אלכסונים במנסרה:

- אלכסוני הבסיס: נמצאים בתוך מישור הבסיס של המנסרה.
- אלכסוני המנסרה: מחברים קודקוד של בסיס אחד עם הקודקוד הנגדי לו בבסיס השני.



מנסרה שאינה ישרה ("נטויה"):

מנסרה שבה הפאות הצדדיות לא עומדות בזווית ישרה לבסיסים - המנסרה "נוטה" לצד.

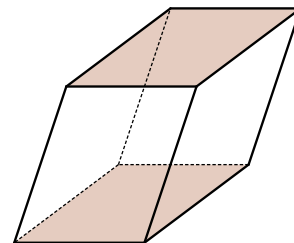
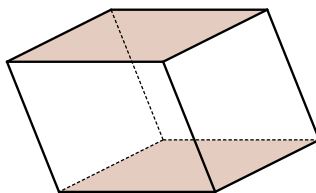


מנסרה ישרה:

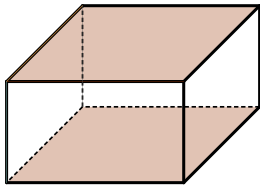
מנסרה שבה הפאות הצדדיות עומדות בזווית ישרה (90°) לבסיסים. במילים אחרות - הקווים המחברים בין הבסיסים הם אנכיים לבסיסים.

המקבילון:

מקבילון הוא מקרה מיוחד של מנסרה נטויה שבה הבסיסים הם מקבילים והפאות הן מקבילות.

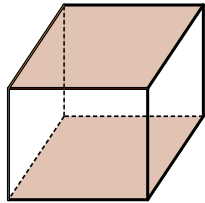


תיבה:



תיבה היא מנסרה ישרה שבה הבסיסים הם מלבנים זהים.

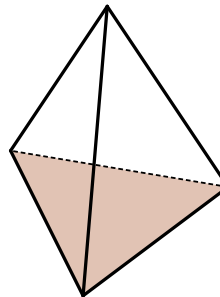
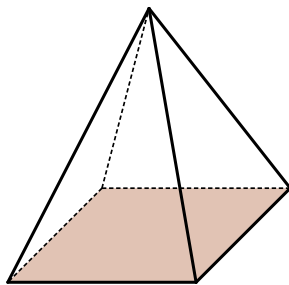
קובייה:



קובייה היא מקרה מיוחד של תיבה שבה כל 6 הפאות הן ריבועים זהים. בקובייה, כל המקצועות שווים באורכם.

פירמידה ישרה:

פירמידה ישרה היא גוף תלת-ממדי שיש לו בסיס אחד (יכול להיות משולש, ריבוע, מחומש וכו') וקודקוד אחד (נקודה עליונה). הקודקוד נמצא בדיוק מעל מרכז הבסיס, כך שהקו המחבר בין הקודקוד למרכז הבסיס עומד בזווית ישרה (90°) לבסיס.



קודקוד הפירמידה:

הנקודה העליונה של הפירמידה - המקום שבו נפגשות כל הפאות הצדדיות. זהו הקודקוד היחיד שלא נמצא על הבסיס.

גובה בפירמידה:

קטע היוצא מקודקוד הפירמידה ומגיע לבסיס הפירמידה, כך שהוא בזווית ישרה (90°) לבסיס. בפירמידה ישרה הגובה עובר דרך מרכז הבסיס.

מקצוע בסיס:

כל אחד מהקטעים הישרים שמרכיבים את היקף הבסיס - כלומר הצלעות של הצורה שמהווה את הבסיס (צלע של משולש, ריבוע, מחומש וכו').

מקצוע צדדי:

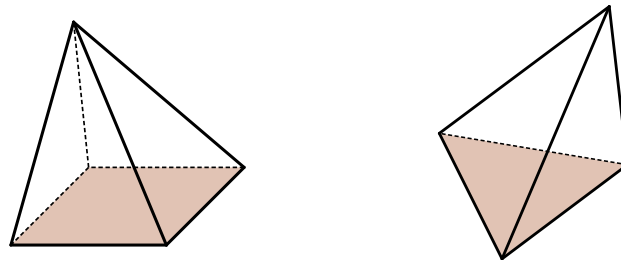
קטע המחבר בין קודקוד הפירמידה לאחד מקודקודי הבסיס.
אלו הם ה"קצוות" של הפאות הצדדיות.

פאה צדדית:

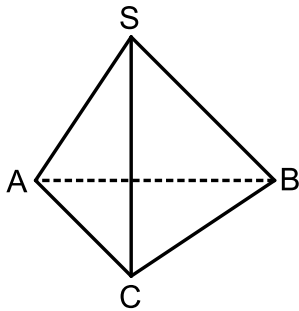
כל אחד מהמצולעים שמחברים בין מקצוע בסיס לקודקוד הפירמידה.
בפירמידה ישרה כל הפאות הצדדיות הן משולשים שווים שוקיים.

פירמידה שאינה ישרה:

פירמידה נטויה היא פירמידה שבה הקודקוד העליון לא נמצא מעל מרכז הבסיס.
כלומר, הקו המחבר בין הקודקוד למרכז הבסיס לא עומד בזווית ישרה לבסיס.
הפירמידה "נוטה" לצד.

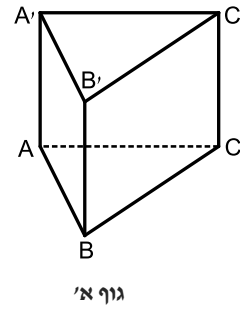
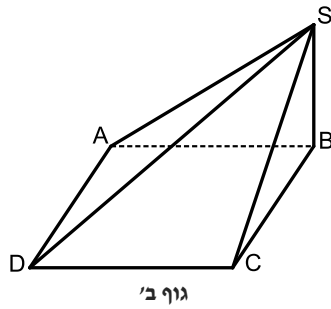


שאלות:



- (1)** לפניהם סרטוט של הפירמידה המשולשת ABCS.
- א. המישור של בסיס הפירמידה נפרש באחת מ-3 הדרכים הבאות. כתבו דוגמאות מתאימות לכל סעיף:
- (1) באמצעות שני ישרים נחתכים.
 - (2) באמצעות שלוש נקודות שאינן על ישר אחד.
 - (3) באמצעות ישר ונקודה מחוץ לישר.
- ב. מה המצב ההדדי בין מישור ASC למישור ABC?
- ג. מי הם המישורים שהישר BC הוא ישר החיתוך שלהם?
- ד. מה המצב ההדדי בין:
- (1) הישר BS למישור BSC?
 - (2) הישר BS למישור ABC?
 - (3) הישר AC לישר BS?
- ה. הנקודות E ו-F הן אמצעי המקצועות BS ו-CS בהתאמה.
- (1) מה המצב ההדדי בין הישר EF לישר BC?
 - (2) מה המצב ההדדי בין הישר EF למישור ASC?
 - (3) מה המצב ההדדי בין הישר EF למישור ABC?
- (2)** כתבו נקודות דמיון ושוני בין הגופים הבאים:
- א. מנסרה משולשת, תיבה, קובייה, מקבילון.
- ב. פירמידה מרובעת ישרה ופירמידה מרובעת שאינה ישרה.

(3) לפניכם שני גופים במרחב:



עבור כל אחד מהגופים:

- א. כתבו את סוג הגוף.
- ב. תנו דוגמה אחת לכל אחד מהסעיפים הבאים:
 - (1) שני ישרים נחתכים.
 - (2) שני ישרים מקבילים.
 - (3) שני ישרים מצטלבים.
 - (4) קבעו מישור מסוים לפי ישר ונקודה מחוץ לישר.
 - (5) קבעו מישור מסוים על ידי ישרים נחתכים או מקבילים.
 - (6) שני מישורים נחתכים.
 - (7) שני מישורים מקבילים.
 - (8) ישר שנמצא במישור.
 - (9) ישר ומישור שנחתכים בנקודה אחת.
 - (10) ישר ומישור מקבילים.

תשובות סופיות:

1) א. $\{AB, BC\}$, $\{AC, BC\}$, $\{AC, AB\}$

א. A, B, C (2) א. $\{BC, A\}$, $\{AC, B\}$, $\{AB, C\}$ (3)

ב. המישורים נחתכים. ג. SBC, ABC .

ד. (1) הישר מוכל במישור. ד. (2) הישר חותך את המישור.

ד. (3) הישרים מצטלבים. ה. (1) הישרים מקבילים זה לזה.

ה. (2) הישר חותך את המישור. ה. (3) הישר מקביל למישור.

2) א. דימיון:

- בכל הגופים הנ"ל יש שני מישורים המקבילים זה לזה הנקראים בסיסים.

- המקצועות הצדדיים בכל גוף שווים זה לזה ומקבילים זה לזה.

א. שוני:

- במנסרה משולשת הבסיס הוא משולש בעוד שבשאר הגופים הבסיס הוא מרובע.

- במקבילון, המקצועות הצדדיים לא מאונכים לבסיסים ובשאר הגופים הם כן.

- במקבילית, הפאות הצדדיות הן מקבילות בעוד שבשאר הגופים הפאות הצדדיות הן מלבנים.

- בקובייה הפאות הצדדיות שוות לבסיסים ובשאר הגופים הפאות הצדדיים לא בהכרח שוות

למצולעי הבסיס.

ב. דימיון:

- בשני הגופים יש מישור בסיס אחד, הוא מרובע, ויש קודקוד פירמידה.

- הפאות הצדדיות בשני הגופים הן משולשים.

ב. שוני:

- בפירמידה ישרה, כל המקצועות הצדדיים שווים וכל הפאות הצדדיות הן משולשים

שווי-שוקיים בעוד שבפירמידה שאינה ישרה, המקצועות הצדדיים שונים באורכים והפאות

הצדדיות הן משולשים כלליים כלשהם.

- בפירמידה ישרה, הגובה לבסיס שיוצא מקודקוד הפירמידה נופל בנקודת מפגש האלכסונים

(מרכז הבסיס) בעוד שבפירמידה שאינה ישרה, הגובה ייפול בנקודה כלשהי בבסיס.

3) גוף א: א. מנסרה משולשת ישרה.

ב. (1) AB, BC ב. (2) AA', BB' (יש עוד אפשרויות)

ב. (3) $AB, B'C'$ (יש עוד אפשרויות) ב. (4) מישור $BB'C'C$ ע"י BC, C' .

ב. (5) נחתכים: הבסיס ABC ע"י AB, BC . מקבילים: הפאה $AA'C'C$ ע"י $AC \parallel A'C'$

ב. (6) $AA'B'B, ABC$ ב. (7) $A'B'C', ABC$ ב. (8) $A'B'C'$ והישר $A'B'$

ב. (9) המישור $BB'C'C$ והישר $A'B'$.

ב. (10) המישור $AA'B'B$ והישר CC' .

גוף ב: א. פירמידה מרובעת שאינה ישרה.

- ב. (1) SB, SA ב. (2) AB, CD או AD, BC ב. (3) AD, SC
- ב. (4) C, AD (יש עוד אפשרויות) ב. (5) נחתכים: הפאה SBC ע"י SB, SC .
- מקבילים: מישור הבסיס $ABCD$ ע"י AB המקביל ל- CD .
- ב. (6) SAD, SDC ב. (7) אין. ב. (8) SAB והישר AB
- ב. (9) המישור $ABCD$ וכל אחד ממקצועות SA, SB, SC, SD .
- ב. (10) המישור SDC והישר AB , המישור SBC והישר AD .

שאלון 472

הוקטור הגאומטרי

תוכן העניינים:

117הוקטור הגאומטרי

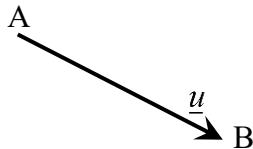
118.....	הוקטור הגאומטרי:
118.....	סיכום כללי:
119.....	שאלות:
121.....	תשובות סופיות:
122.....	פעולות בוקטורים גאומטריים:
122.....	סיכום כללי:
124.....	שאלות:
128.....	תשובות סופיות:
129.....	צירוף לינארי של וקטורים:
129.....	סיכום כללי:
130.....	שאלות:
132.....	תשובות סופיות:
133.....	מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:
133.....	סיכום כללי:
133.....	שאלות:
135.....	תשובות סופיות:
136.....	נפחים:
136.....	סיכום כללי:
136.....	שאלות:
138.....	תשובות סופיות:

הוקטור הגאומטרי:

סיכום כללי:

וקטור גיאומטרי:

וקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.
ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$).
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



וקטורים קוליניאריים:

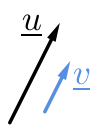
וקטורים הנמצאים על ישרים מקבילים או על אותו ישר.
שני וקטורים קוליניאריים (השונים מ-0) יכולים להיות באותו הכיוון או בכיוונים מנוגדים.

וקטורים קוליניאריים על ישרים מקבילים

כיוונים מנוגדים



כיוון זהה



וקטורים קוליניאריים על אותו ישר

כיוונים מנוגדים



כיוון זהה



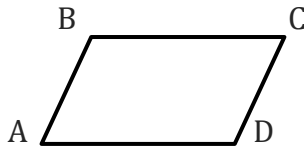
וקטורים שווים:

וקטורים שווי אורך ובעלי כיוונים זהים.

וקטורים נגדיים:

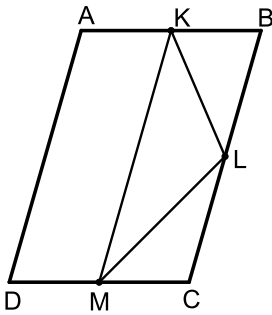
וקטורים שווי אורך ובעלי כיוונים נגדיים.
הוקטור הנגדי ל- $\overrightarrow{AB}$ מסומן על ידי $\overrightarrow{BA}$ או $-\overrightarrow{AB}$.

שאלות:



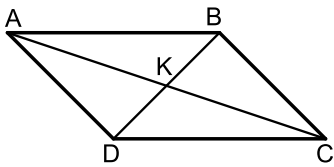
(1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$

מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



(2) נתונה מקבילית ABCD ועליה הנקודות K, L, M-י.

ידוע כי K היא אמצע AB, L היא אמצע BC ו-M היא אמצע CD. מצאו וכתבו את כל זוגות הווקטורים הקולינאריים הקיימים בסרטוט.



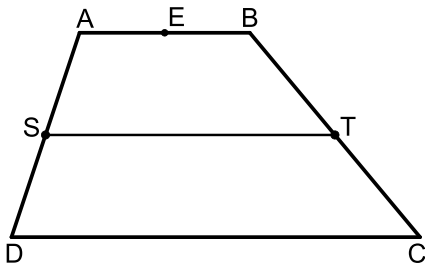
(3) במקבילית ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה K.

א. רשמו את כל הווקטורים הקולינאריים לווקטור $\overrightarrow{DK}$.

ב. רשמו וקטור השווה ל- $\overrightarrow{DK}$ ווקטור השווה ל- $-\overrightarrow{DK}$.

ג. רשמו שלושה וקטורים השווים בגודלם ל- $\overrightarrow{DK}$.

ד. רשמו זוג של וקטורים נגדיים הקיימים באיור.



(4) נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$) ובו E היא אמצע הבסיס AB.

מעבירים את קטע האמצעים ST בטרפז.

מצאו ורשמו את כל הזוגות של הווקטורים הקולינאריים.

(5) בטרפז שווה שוקיים KLMN ($MN \parallel KL$, $KN = ML$) הנקודה T היא אמצע הבסיס KL.

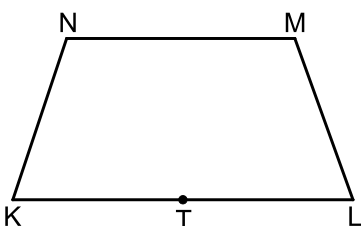
נתון $KT = KN$. נסמן: $\overrightarrow{KT} = \underline{v}$, $\overrightarrow{KN} = \underline{u}$.

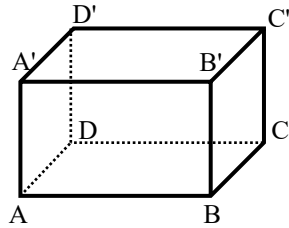
א. רשמו את כל הווקטורים השווים ל- $\underline{u}$.

ב. רשמו את כל הווקטורים השווים ל- $-\underline{v}$.

ג. רשמו חמישה זוגות של וקטורים קולינאריים.

ד. האם נכון כי $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM}$? נמקו.



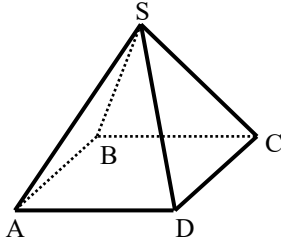


(6) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים

ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.

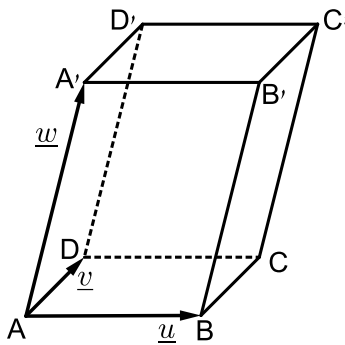


(7) בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים

ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



(8) נתון מקבילון $ABCD A'B'C'D'$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. רשמו את הווקטורים השווים לוקטור:

(1) $\underline{u}$ (2) $\underline{v}$ (3) $\underline{w}$ (4) $-\underline{v}$ (5) $-\underline{w}$.

ב. הנקודות E ו-F הן אמצעי המקצועות DC ו-D'C' בהתאמה.

(1) רשמו את כל הווקטורים הקולינאריים לוקטור $\overrightarrow{DE}$.

(2) רשמו את כל הווקטורים השווים לוקטור $\overrightarrow{DE}$.

(3) רשמו את כל הווקטורים הנגדיים לוקטור $\overrightarrow{FE}$.

ג. (1) אילו מישורים מוגדרים ע"י הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$?

(2) מה המצב ההדדי בין מישורים אלו.

תשובות סופיות:

$$\underline{u} = \overrightarrow{DC}, \underline{v} = \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{LB}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{CL}, \overrightarrow{KM}, \overrightarrow{MK}, \overrightarrow{DA}\} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KB}, -\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{BK} \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BK}, \overrightarrow{KB} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{BK}, \overrightarrow{KB} \quad \text{ג.}$$

$$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\}, \{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}\}, \{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}\}, \{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}\}, \{\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{CK}\}, \{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KC}\} \quad \text{ד.}$$

$$\{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BT}, \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}, \overrightarrow{CT}\} : \text{על BC} \quad (4)$$

$$\{\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SD}, \overrightarrow{DS}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}\} : \text{על AD}$$

$$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ST}, \overrightarrow{TS}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}\} : \text{בסיסים AB, CD}$$

$$\overrightarrow{LT} \quad \text{ב.} \quad \text{א. אין כאלו.} \quad (5)$$

$$\{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{KT}\}, \{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{TK}\}, \{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{KL}\}, \{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{TK}\}, \{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{LT}\}, \{\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{LK}\} \quad \text{ג.}$$

$$\text{ד.} \quad \text{א.}$$

$$\underline{w} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}, \underline{u} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}, \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} \quad (6)$$

$$\underline{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \underline{w} = \overrightarrow{AS} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} = \underline{v} \quad (2) \quad \text{א.} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'} = \underline{u} \quad (1) \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{D'D} = -\underline{w} \quad (4) \quad \text{א.} \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \underline{w} \quad (3) \quad \text{א.}$$

$$\left\{ \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC'} \right\} \quad (1) \quad \text{ב.}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{D'D} = -\underline{w} \quad (3) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{D'F} = \overrightarrow{FC'} \quad (2) \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג.} \quad (2) \quad \text{המישורים מקבילים זה לזה.} \quad \text{ג.} \quad (1) \quad A'B'C'D', ABCD$$

פעולות בוקטורים גאומטריים:

סיכום כללי:

חיבור וקטורים בשיטת ראש-זנב:

בחיבור של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ לוקטור הסכום $\underline{u} + \underline{v}$, נחבר את הראש של הוקטור $\underline{u}$ לזנב של הוקטור $\underline{v}$. וקטור הסכום (הוקטור השקול) מתחיל בזנב של הוקטור הראשון ($\underline{u}$) ומסתיים בראש של הוקטור השני ($\underline{v}$).

בחיבור של יותר משני וקטורים נחזור על תהליך כאשר הראש של כל וקטור יתחבר לזנב של כל וקטור נוסף. וקטור הסכום יתחיל בזנב של הוקטור הראשון ויסתיים בראש של הוקטור האחרון בחיבור.

חיבור לפי כלל המקבילית:

כדי למצוא את וקטור הסכום של שני וקטורים נוכל להעתיק אחד כך ששני הוקטורים יתחילו מאותה הנקודה. נשלים מקבילים ע"י הוספת וקטורים קוליניאריים לכל אחד מן הוקטורים. האלכסון במקבילית אשר מתחיל בנקודה ההתחלה המשותפת לוקטורים הוא וקטור הסכום. כיוונו הוא מנקודת ההתחלה המשותפת ועד לנקודת הקודקוד הנגדי של המקבילית.

פעולת החיבור בין וקטורים היא **חילופית**, כלומר: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$.

חיסור וקטורים:

כדי לחסר שני וקטורים $\underline{u} - \underline{v}$, נתייחס לפעולה כאל חיבור של הוקטור המחוּסר ($\underline{u}$) עם הוקטור הנגדי לוקטור המחוסר ($-\underline{v}$), כלומר: $\underline{u} + (-\underline{v})$. נסרטט את הוקטור הנגדי ל- $\underline{v}$ ונחבר אותו לוקטור $\underline{u}$ לפי שיטת ראש-זנב או כלל המקבילית.

חיסור בשיטת כלל המשולש:

כדי למצוא את הוקטור $\underline{u} - \underline{v}$ יש למקם את שני הוקטורים כך שיתחילו מאותה הנקודה. הוקטור המתקבל ע"י חיבור הראשים שלהם יהיה $\underline{u} - \underline{v}$ או $\underline{v} - \underline{u}$ בהתאם לכיוונו:

- עבור $\underline{u} - \underline{v}$ יש ללכת נגד הכיוון של $\underline{v}$ ועם הכיוון של $\underline{u}$.
- עבור $\underline{v} - \underline{u}$ יש ללכת נגד הכיוון של $\underline{u}$ ועם הכיוון של $\underline{v}$.

כלל המשולש כמקרה פרטי מתוך כלל המקבילית:

בחיבור של שני וקטורים ליצירת המקבילית ניתן להפיק את סכום הוקטורים $\underline{u} + \underline{v}$, את ההפרש $\underline{u} - \underline{v}$ ואת ההפרש $\underline{v} - \underline{u}$ יחדיו.

חוק הקיבוץ:

בהינתן 3 וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ ניתן למצוא את וקטור הסכום $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ ע"י:

- קיבוץ של $(\underline{u} + \underline{v})$ תחילה, וחיבור וקטור הסכום שלהם עם $\underline{w}$.
 - קיבוץ של $(\underline{v} + \underline{w})$ תחילה, וחיבור וקטור הסכום שלהם עם $\underline{u}$.
- במילים אחרות: $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$.

הערה:

ניתן להרחיב את חוק הקיבוץ ליותר מ-3 וקטורים.

סקלר:

הסקלר הוא גודל מספרי ללא חשיבות לכיוון.

כפל וקטור בסקלר:

בהכפלת וקטור פי סקלר, כיוון הוקטור נשמר (עם הסקלר חיובי) וגודלו משתנה לפי גודל הסקלר. אם הסקלר הוא שלילי, אז הוקטור יצביע לכיוון ההפוך (הראש והזנב יתחלפו).

חוק הפילוג:

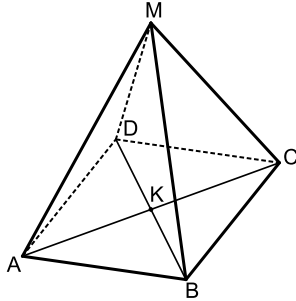
בהינתן הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ וסקלר a מתקיים: $a(\underline{u} + \underline{v}) = a \cdot \underline{u} + a \cdot \underline{v}$.

וקטורים מקבילים ושווים:

זוג וקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{CD}$ הם קוליניאריים רק אם קיים סקלר α עבורו: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$ (כאשר α הוא מספר ממשי השונה מאפס).

שאלות:

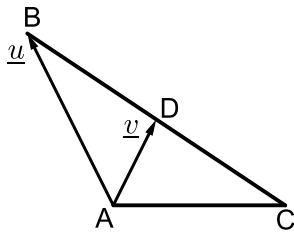
- (1) לפניכם סרטוט של פירמידה ABCDM שבו הבסיס ABCD הוא מעוין. הנקודה K היא מפגש אלכסוני המעוין.



מצאו את הוקטורים השווים לכל אחד מהביטויים הבאים ורשמו אותם בעזרת הקודקודים שבאיור.

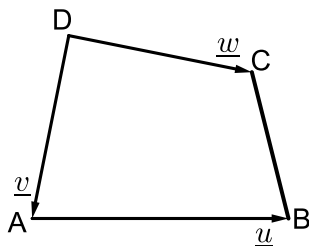
- א. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$
- ב. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DM}$
- ג. $\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{AM}$
- ד. $(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{DM}) + \overrightarrow{KC}$
- ה. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MB}$
- ו. $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{KA}$
- ז. $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{KC}) + \overrightarrow{KD}$

- (2) במשולש ABC שלפניכם, הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.



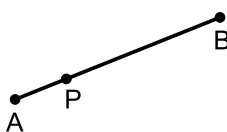
- מסמנים את הוקטורים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$.
- א. (1) הביעו את $\overrightarrow{BD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 - (2) הביעו את $\overrightarrow{BC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
 - ב. הביעו את $\overrightarrow{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

- (3) לפניכם מרובע ABCD ובו מסמנים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{w}$.

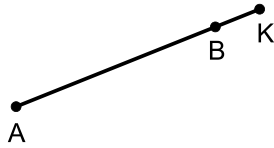


- א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את:
- (1) $\overrightarrow{BD}$
 - (2) $\overrightarrow{AC}$
 - (3) $\overrightarrow{BC}$
- ב. הוסיפו נקודה K באמצע הצלע BC והביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את:
- (1) $\overrightarrow{BK}$
 - (2) $\overrightarrow{KA}$

- (4) הנקודה P נמצאת על הקטע AB ומקיימת: $AP = \frac{1}{4} AB$.



- מסמנים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
- הביעו באמצעות $\underline{u}$ את: $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PB}$.



(5) הנקודה K נמצאת על המשך הקטע AB מהצד של B.

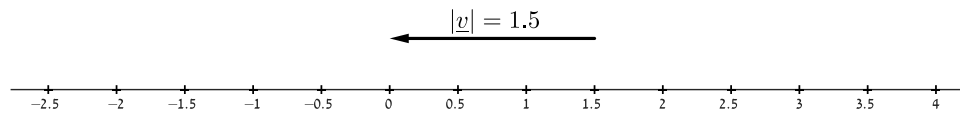
ידוע כי: $BK = \frac{2}{9} AB$, ומסמנים: $\overrightarrow{BK} = \underline{u}$.

הביעו באמצעות $\underline{u}$ את: $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AB}$.

(6) לפניכם ציר מספרים עם יחידות מידה (שנתות) ווקטור $\underline{v}$.

סרטטו על ציר המספרים את הוקטורים הקולינאריים הבאים:

$$-\underline{v}, -2\underline{v}, 3\underline{v}, -\frac{1}{3}\underline{v}, \frac{5}{3}\underline{v}, -2\frac{1}{3}\underline{v}$$

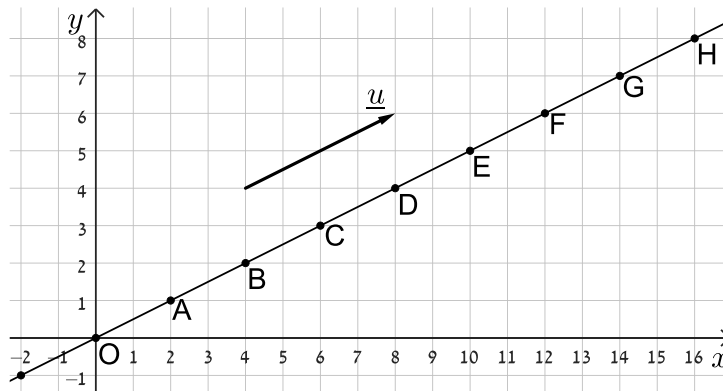


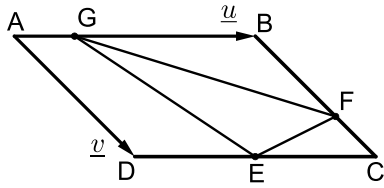
(7) במערכת הצירים הבאה נתון הישר $y = \frac{1}{2}x$ ועליו נקודות A, B, C, D, E, F, G, H.

הנקודה O היא ראשית הצירים ומגדירים וקטור $\underline{u}$ כמתואר.

סרטטו על הישר וקטורים קולינאריים ל- $\underline{u}$ הבאים וכתבו בעזרת הנקודות וקטורים

מתאימים לכל דרישה: $-2\underline{u}, -\frac{1}{2}\underline{u}, 3\underline{u}, -3\underline{u}, \frac{5}{2}\underline{u}, -4\underline{u}$.





8 נתונה מקבילית ABCD ובה: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$

הנקודה E היא אמצע DC וידוע כי: $\frac{CF}{BF} = \frac{1}{2}$

וכי: $AB = 4 \cdot AG$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את:

(1) $\overrightarrow{AG}$

(2) $\overrightarrow{DE}$

(3) $\overrightarrow{GE}$

ב. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את:

(1) $\overrightarrow{GB}$

(2) $\overrightarrow{BF}$

(3) $\overrightarrow{GF}$

ג. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטור $\overrightarrow{EF}$.

9 במקבילית ABCD ידוע כי הנקודות E, F ו-G הן אמצעי הצלעות AB, BC ו-CD בהתאמה.

מסמנים: $\overrightarrow{EF} = \underline{u}$, $\overrightarrow{EG} = \underline{v}$

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AD}$.

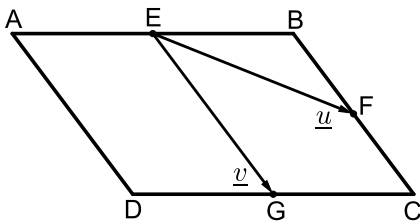
ב. הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטורים:

(1) $\overrightarrow{GF}$

(2) $\overrightarrow{DB}$

ג. (1) האם הוקטורים $\overrightarrow{GF}$ ו- $\overrightarrow{DB}$ הם קולינאריים? נמקו.

(2) הראו כי הוקטור $\overrightarrow{GF}$ שווה למחצית מהוקטור $\overrightarrow{DB}$.



10 בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע, נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על הצלע AD כך ש- $\frac{AP}{PD} = \frac{1}{5}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הוקטור $\overrightarrow{AP}$.

ב. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הוקטור $\overrightarrow{PS}$.

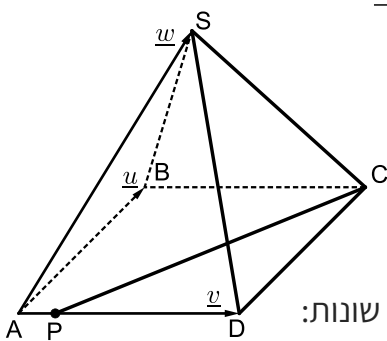
ג. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הוקטור $\overrightarrow{PC}$.

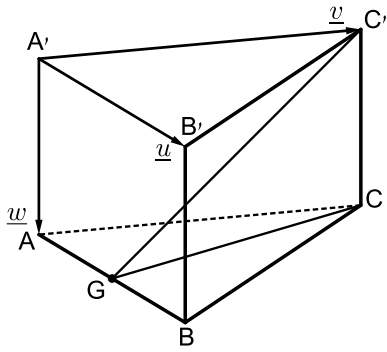
ד. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הוקטור $\overrightarrow{SC}$ בשתי דרכים שונות:

(1) בעזרת בחירת מסלול הכולל וקטור עם הנקודה P.

(2) בעזרת בחירת מסלול שאינו כולל וקטור עם הנקודה P.

והראו כי מתקבל אותו הערך.





11 נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$ ובה G היא אמצע AB .

מסמנים: $\overrightarrow{A'B'} = \underline{u}$, $\overrightarrow{A'C'} = \underline{v}$, $\overrightarrow{A'A} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את:

$$\overrightarrow{AG} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{GC} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{GC'} \quad (3)$$

ב. האם הוקטורים $\overrightarrow{GC'}$ ו- $\overrightarrow{BC'}$ הם קולינאריים? נמקו.

תשובות סופיות:

$$\overrightarrow{AM} \text{ א. } \overrightarrow{AM} \text{ ב. } \overrightarrow{KM} \text{ ג. } \overrightarrow{AM} \text{ ד. } \overrightarrow{AM} \text{ ה. } \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BD} \text{ ו. } \overrightarrow{KM}$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\underline{v} - \underline{u} \text{ ב. } \overrightarrow{BC} = -2\underline{u} + 2\underline{v} \text{ (2) א. } \overrightarrow{BD} = -\underline{u} + \underline{v} \text{ (1) א. } \quad (2)$$

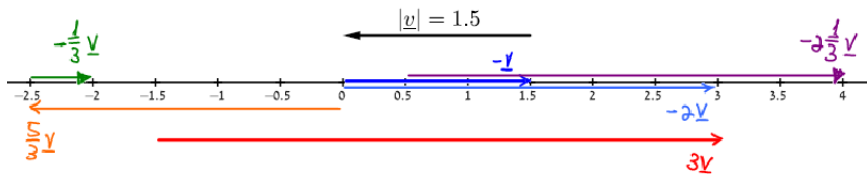
$$\overrightarrow{BC} = \underline{w} - \underline{u} - \underline{v} \text{ (3) א. } \overrightarrow{AC} = -\underline{v} + \underline{w} \text{ (2) א. } \overrightarrow{BD} = -\underline{u} - \underline{v} \text{ (1) א. } \quad (3)$$

$$\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{w} \text{ (2) ב. } \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\underline{w} - \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} \text{ (1) ב.}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\underline{u}, \overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\underline{u}, \overrightarrow{PB} = -\frac{3}{4}\underline{u} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{AK} = 5.5\underline{u}, \overrightarrow{AB} = 4.5\underline{u} \quad (5)$$

$$\text{להלן ציר מספרים:} \quad (6)$$



$$\overrightarrow{DO} = -2\underline{u}, \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\underline{u}, \overrightarrow{BH} = 3\underline{u}, \overrightarrow{HB} = -3\underline{u}, \overrightarrow{BG} = \frac{5}{2}\underline{u}, \overrightarrow{HO} = -4\underline{u} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{GE} = \frac{1}{4}\underline{u} + \underline{v} \text{ (3) א. } \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\underline{u} \text{ (2) א. } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\underline{u} \text{ (1) א. } \quad (8)$$

$$\overrightarrow{GF} = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \text{ (3) ב. } \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\underline{v} \text{ (2) ב. } \overrightarrow{GB} = \frac{3}{4}\underline{u} \text{ (1) ב.}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} \text{ ג.}$$

$$\overrightarrow{DB} = 2\underline{u} - 2\underline{v} \text{ (2) ב. } \overrightarrow{GF} = \underline{u} - \underline{v} \text{ (1) ב. } \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AB} = 2\underline{u} - \underline{v} \text{ א. } \quad (9)$$

$$\overrightarrow{PC} = \underline{u} + \frac{5}{6}\underline{v} \text{ ג. } \overrightarrow{PS} = \underline{w} - \frac{1}{6}\underline{v} \text{ ב. } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{6}\underline{v} \text{ א. } \quad (10)$$

$$\overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \text{ ד.}$$

$$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \text{ (3) א. } \overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v} \text{ (2) א. } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\underline{u} \text{ (1) א. } \quad (11)$$

$$\text{ב. ל.א.}$$

צירוף לינארי של וקטורים:

סיכום כללי:

צירוף לינארי של וקטורים במישור:

וקטור $\underline{a}$ הוא צירוף לינארי או קומבינציה לינארית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ אם הוא ניתן להבעה בצורה $\underline{a} = t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$ כאשר s ו- t הם סקלרים.

משפט:

כל וקטור במישור ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של שני וקטורים לא קולינאריים במישור. כל צירוף כזה נמצא במישור שנקבע על ידי שני וקטורים לא קולינאריים, או במישור המקביל אליו.

צירוף לינארי של וקטורים במרחב:

וקטור $\underline{a}$ הוא צירוף לינארי או קומבינציה לינארית של שלושה וקטורים: $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ אם הוא ניתן להבעה בצורה $\underline{a} = r \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v} + t \cdot \underline{w}$ כאשר r , s ו- t הם סקלרים.

משפט:

כל וקטור במרחב ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של שלושה וקטורים שלא נמצאים באותו מישור.

הערה:

ניתן להרחיב את הגדרת הצירוף הלינארי למספר וקטורים כרצוננו, אולם לא נעסוק ביותר משלושה וקטורים.

- צירוף לינארי של שני וקטורים שאינם קולינאריים תמיד ייתן וקטור שנמצא במישור הנקבע על ידי הווקטורים עצמם (או במישור המקביל לו).
- צירוף לינארי של שלושה וקטורים שאינם באותו המישור, תמיד יימצא במרחב.

משפט:

כדי להראות כי שני וקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{CD}$ הם מקבילים נבדוק האם הם קולינאריים. במילים אחרות, נבדוק האם: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$ עבור סקלר α כלשהו. במידה וקיים α שכזה אז הישרים שעליהן מונחים הקטעים AB ו- CD מקבילים זה לזה.

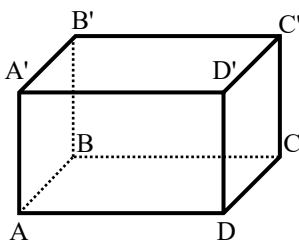
משפט:

כדי להראות כי 3 נקודות A, B ו-C נמצאות על אותו הישר:

- נגדיר 2 וקטורים בין הנקודות, למשל: $\vec{AB}$ ו- $\vec{AC}$.
- נראה כי ניתן להציג וקטור אחד ע"י כפל בסקלר של השני: $\vec{AB} = \alpha \cdot \vec{AC}$.

מאחר וקיים α המקיים את המשוואה, הרי ששני הוקטורים הם קוליניאריים. וקטורים קוליניאריים עם נקודה משותפת (A) מונחים על אותו הישר. לכן הנקודות A, B ו-C הן על אותו הישר.

שאלות:



(1) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

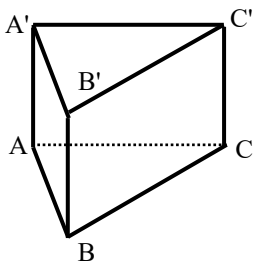
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α ו- β את הוקטור $\vec{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הוקטור $\vec{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הוקטור $\vec{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?



(2) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C' ובה נתון: $\vec{AA'} = \underline{w}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AB} = \underline{u}$.

הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'} = \alpha$

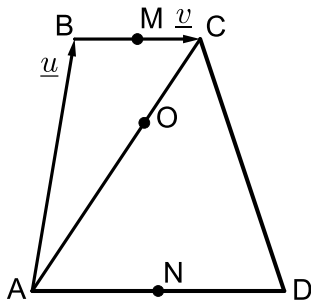
והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α ו- β את הוקטור $\vec{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הוקטור $\vec{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הוקטור $\vec{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'.

הבע את α באמצעות β .



(3) בטרפז ABCD ($AD \parallel BC$) נתון: $AD = 2BC$.

הנקודה O מחלקת את האלכסון AC

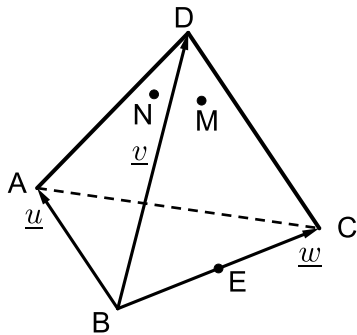
ביחס של $OC : AO = 1 : 2$.

הנקודות M ו-N הן אמצעי הצלעות BC ו-AD בהתאמה.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{BC} = \underline{v}$.

א. הציגו את הווקטורים $\vec{MN}$, $\vec{CA}$, $\vec{CO}$ כצירוף לינארי של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. הראו כי הנקודות M, O, N נמצאות על אותו ישר.



(4) בפירמידה משולשת ABCD הנקודה E היא אמצע BC.

נסמן: $\vec{BA} = \underline{u}$, $\vec{BD} = \underline{v}$, $\vec{BC} = \underline{w}$.

הנקודות M ו-N מקיימות: $\vec{BM} = \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{6}\underline{w}$, $\vec{BN} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$.

א. (1) מאלו וקטורים מורכב הוקטור $\vec{BM}$?

(2) קבעו על איזו פאה נמצאת הנקודה M. נמקו.

ב. (1) מאלו וקטורים מורכב הוקטור $\vec{BN}$?

(2) קבעו על איזו פאה נמצאת הנקודה N. נמקו.

ג. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים הבאים:

(1) $\vec{DE}$ (2) $\vec{DM}$ (3) $\vec{EA}$ (4) $\vec{MN}$

ד. הוכיחו כי הנקודות D, M, E נמצאות על ישר אחד.

ה. הוכיחו כי: $MN \parallel AE$.

תשובות סופיות:

$$\text{ג. ל.א.} \quad \alpha = 1 \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{PQ} = (1 - \alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1 + \beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\beta}{1 - \beta} \quad \text{ג.} \quad \beta = 1 \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{NM} = (\beta - 1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\text{ג.} \quad \overrightarrow{CO} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v}, \quad \overrightarrow{CA} = -\underline{u} - \underline{v}, \quad \overrightarrow{MN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (3)$$

$$\text{א.} \quad \overrightarrow{BM}: \underline{v}, \underline{w} \quad (1) \quad \text{א.} \quad \text{DBC} \quad (2) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{BN}: \underline{u}, \underline{v} \quad (1) \quad \text{ב.} \quad \text{ABD} \quad (2) \quad (4)$$

$$\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\underline{w} + \underline{u} \quad (3) \quad \text{ג.} \quad \overrightarrow{DM} = -\frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{6}\underline{w} \quad (2) \quad \text{ג.} \quad \overrightarrow{DE} = -\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad (1) \quad \text{ג.}$$

$$\text{ג.} \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{6}\underline{w} \quad (4) \quad \text{ד. שאלת הוכחה.} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.}$$

מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

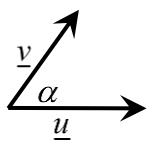
סיכום כללי:

הגדרה:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



• ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

• גודל של ווקטור נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2 = \underline{u}^2$

הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס.

שאלות:

(1) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

ב. $\alpha = 120^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 4$

א. $\alpha = 60^\circ$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$

ד. $\alpha = 180^\circ$, $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 8$

ג. $\alpha = 30^\circ$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$

ו. $\alpha = 90^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 7$

ה. $\alpha = 0^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 3$

(2) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 4$

א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 3$

ד. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$

ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 9$

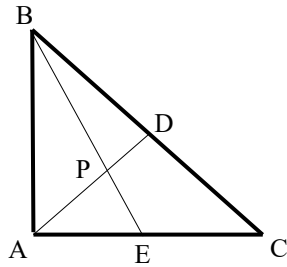
(3) נתונים שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}| = 6$, $|\underline{v}| = 3$. הזווית ביניהם היא 120° .

חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

- (4) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = 5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$.

- (5) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}| = 6$, $|\underline{v}| = 3$. הזווית ביניהם היא 120° .
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$, $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

- (6) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC = 90^\circ$).



הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

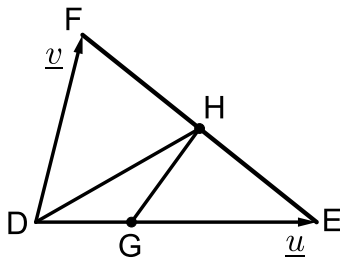
נתון: $AC = 12$, $AB = 8$, $\frac{AP}{PD} = 3$.

חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.

- (7) הנקודה H היא אמצע הצלע EF במשולש DEF.

הנקודה G נמצאת על DE כך ש: $DG : GE = 1 : 2$.

נסמן: $\overrightarrow{DE} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DF} = \underline{v}$ ונתון כי: $|\underline{DE}| = 9$, $|\underline{DF}| = 5$.



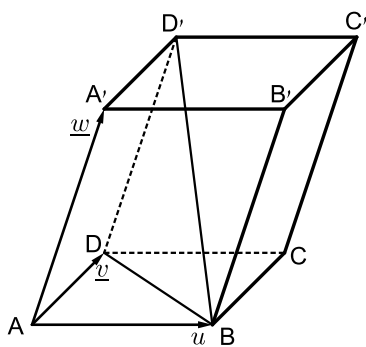
א. בטאו את $\overrightarrow{DH}$ ו- $\overrightarrow{GH}$ בעזרת $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. נתון $|\overrightarrow{GH}| = 3$.

(1) חשבו את $\underline{u} \cdot \underline{v}$

(2) חשבו את שטח המשולש DEF.

- (8) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתון: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle A'AD = \sphericalangle A'AB = 60^\circ$.



מסמנים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

נתונים הגדלים: $|\underline{u}| = 2$, $|\underline{v}| = 1$, $|\underline{w}| = 3$.

א. חשבו את: $\underline{u} \cdot \underline{v}$, $\underline{u} \cdot \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$.

ב. (1) הביעו את הווקטור $\overrightarrow{DB}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

(2) חשבו את אורך הווקטור $\overrightarrow{DB}$.

ג. (1) חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle BDD'$.

(2) חשבו את שטח המשולש $\triangle BDD'$.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } -10 \quad \text{ג. } 6\sqrt{3} \quad \text{ד. } -24 \quad \text{ה. } 15 \quad \text{ו. } 0$$

$$(2) \quad \text{א. } 60^\circ \quad \text{ב. } 150^\circ \quad \text{ג. } 90^\circ \quad \text{ד. } 0^\circ$$

$$(3) \quad |\overrightarrow{PQ}| = 18.248$$

$$(4) \quad |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{29}$$

$$(5) \quad 31.87^\circ$$

$$(6) \quad 55.49^\circ$$

$$(7) \quad \text{א. } \overrightarrow{GH} = \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}, \quad \overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v}) \quad \text{ב. } (1) \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 3 \quad \text{ג. } (2) \quad 22.45 \text{ יח"ש.}$$

$$(8) \quad \text{א. } \underline{v} \cdot \underline{w} = 1.5, \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = 3, \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = 1 \quad \text{ב. } (1) \quad \overrightarrow{DB} = \underline{u} - \underline{v} \quad \text{ג. } (2) \quad |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{3}$$

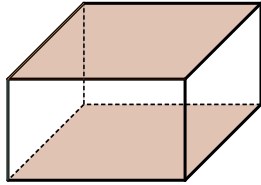
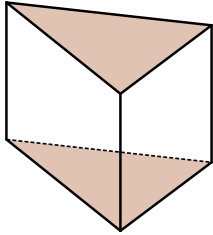
$$\text{ג. } (1) \quad \angle BDD' = 73.22^\circ \quad \text{ג. } (2) \quad 2.487 \text{ יח"ש.}$$

נפחים:

סיכום כללי:

נפח של מנסרה:

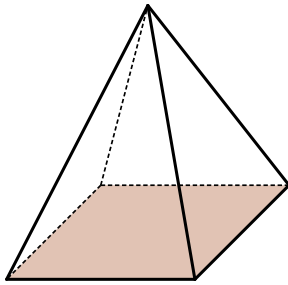
כדי לחשב את הנפח של מנסרה יש להכפיל את שטח הבסיס שלה בגובה שלה:



$$V_{\text{מנסרה}} = S_{\text{בסיס}} \cdot \text{גובה}$$

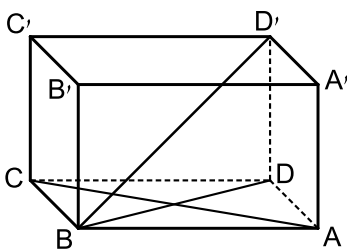
נפח של פירמידה:

נפח הפירמידה מחושב ע"י חלוקת מכפלת שטח הבסיס בגובה פי 3:



$$V_{\text{פירמידה}} = \frac{S_{\text{בסיס}} \cdot \text{גובה}}{3}$$

שאלות:

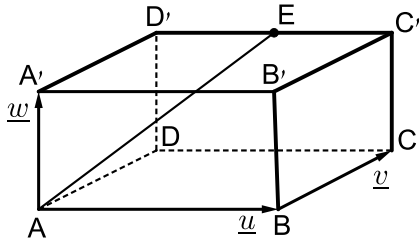


- (1) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא מלבן. אורך אלכסון המלבן $ABCD$ הוא 5 יח"א. והזווית החדה בין אלכסוני המלבן היא 60° . הזווית בין אלכסון התיבה BD' לאלכסון הבסיס BD היא 30° .
- א. (1) מדוע משולש $ABDD'$ הוא ישר זווית? נמקו.
(2) חשבו את אורך המקצוע הצדדי של התיבה.
- ב. חשבו את נפח התיבה.
- ג. פי כמה גדול נפח התיבה מנפח הפירמידה $ABDD'$?

(2) במנסרה ישרה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא מקבילית.

הנקודה E היא אמצע המקצוע $D'C'$.

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, ונתון: $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 8$, $|\underline{w}| = 5$, $|\overrightarrow{AE}| = 11$.



א. הביעו את הווקטור $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ב. חשבו את $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

ג. חשבו את זווית $\angle BAD$.

ד. (1) חשבו את שטח בסיס המנסרה $ABCD$.

(2) חשבו את נפח המנסרה.

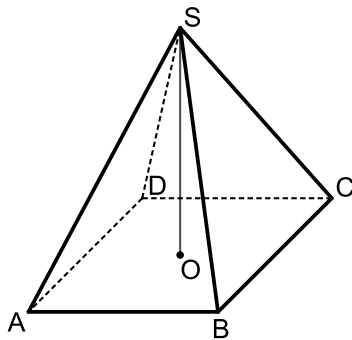
ה. האם $\angle AD'E = 90^\circ$? נמקו.

(3) נתונה פירמידה ישרה $SABCD$ שבה הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע.

מורידים גובה SO בפירמידה כאשר O היא נקודת מפגש אלכסוני הריבוע.

מסמנים: $\overrightarrow{SO} = \underline{w}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

שטח הריבוע $ABCD$ הוא 81 יח"ש ונפח הפירמידה $SABCD$ הוא 216 יח"נ.



א. (1) מצאו את אורך צלע ריבוע הבסיס.

(2) מצאו את אורכו של גובה הפירמידה.

ב. הוכיחו כי: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} = 0$.

ג. (1) הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את: $\overrightarrow{SA}$.

(2) מצאו את גודלו של $\overrightarrow{SA}$.

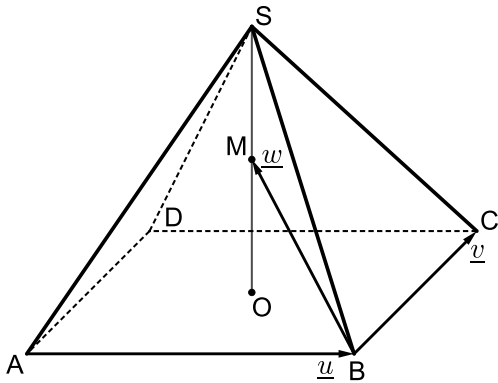
מעבירים את האלכסון AC בבסיס הפירמידה.

ד. (1) הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את: $\overrightarrow{AO}$.

(2) חשבו את הזווית של $\angle SAO$.

ה. חשבו את נפח הפירמידה $SAOD$.

- (4) בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא מלבן, מורידים גובה SO כאשר הנקודה O היא נקודת מפגש אלכסוני הבסיס. הנקודה M היא אמצע SO ומעבירים את הקטע BM. מסמנים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BM} = \underline{w}$. $|\underline{u}| = |\underline{w}| = 8$, $|\underline{v}| = 4$ וידוע כי:



- א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את $\overrightarrow{OS}$.
 ב. (1) איזה משולש הוא המשולש BMC? נמקו.
 (2) היעזרו בטריגונומטריה ובטאו את $\cos \angle MBC$ במשולש MBC.
 (3) חשבו את $\underline{v} \cdot \underline{w}$.
 ג. (1) איזה משולש הוא המשולש AMB? נמקו.
 (2) חשבו את $\underline{u} \cdot \underline{w}$.
 ד. הסבירו מדוע $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.
 ה. מצאו את אורכו של גובה הפירמידה SO.
 ו. חשבו את הנפח של הפירמידה SABCD.

תשובות סופיות:

- (1) א. (1) ראו הסבר בפתרון הידאו. א. (2) 2.886 יח"א.
 ב. 31.25 יח"נ. ג. פי 6.
 (2) א. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 16$ ג. $\angle BAD = 75.52^\circ$
 ד. (1) 61.96 יח"ש ד. (2) 309.838 יח"נ ה. לא. $\angle ADE = 102.24^\circ$.
 (3) א. (1) 9 יח"א = AB א. (2) 8 יח"א ב. שאלת הוכחה.
 ג. (1) $\overrightarrow{SA} = \underline{w} - \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$ ג. (2) 10.22 יח"א.
 ד. (1) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$ ד. (2) $\angle SAO = 51.49^\circ$ ה. 54 יח"נ.
 (4) א. $\overrightarrow{OS} = \underline{u} - \underline{v} + 2\underline{w}$ ב. (1) שווה שוקיים. ב. (2) $\cos \angle MBC = \frac{1}{4}$
 ב. (3) $\underline{v} \cdot \underline{w} = 8$ ג. (1) שווה צלעות. ג. (2) $\underline{u} \cdot \underline{w} = -32$
 ד. שאלת הוכחה. ה. 15.49 יח"א. ו. 165.24 יח"נ.

שאלון 472

הוקטור האלגברי

תוכן העניינים:

139.....הוקטור האלגברי:

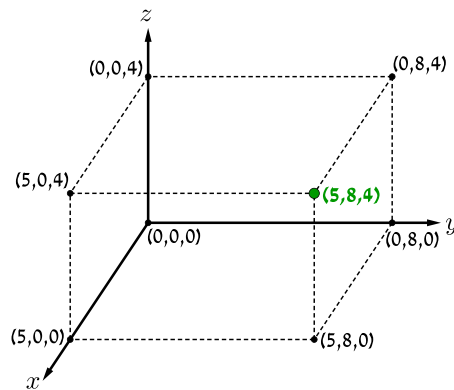
140.....	מערכת צירים תלת מימדית:
140.....	סיכום כללי:
141.....	שאלות:
141.....	תשובות סופיות:
142.....	וקטור בייצוג אלגברי:
142.....	סיכום כללי:
143.....	שאלות:
147.....	תשובות סופיות:
148.....	פעולות אלגבריות בין וקטורים:
148.....	סיכום כללי:
149.....	שאלות:
152.....	תשובות סופיות:
153.....	וקטורים קוליניארים:
153.....	סיכום כללי:
153.....	שאלות:
154.....	תשובות סופיות:
155.....	המכפלה הסקלרית בייצוג אלגברי:
155.....	סיכום כללי:
156.....	שאלות:
158.....	תשובות סופיות:

מערכת צירים תלת מימדית:

סיכום כללי:

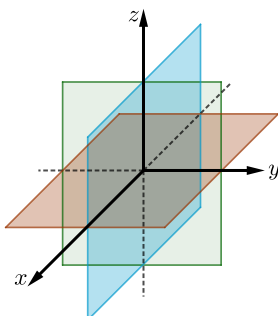
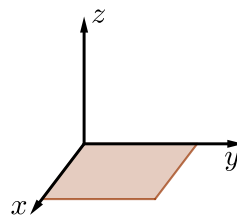
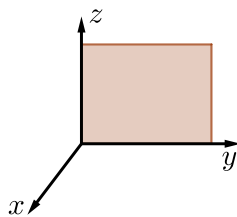
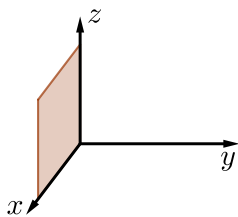
נקודה במערכת צירים בשלושה מימדים:

כדי למצוא את שיעורי הנקודה במרחב, נדמיין תיבה שקודקוד אחד שלה הוא ראשית הצירים והקודקוד הנגדי לה הוא הנקודה עצמה. אורך, רוחב וגובה התיבה מייצגים את ההתקדמות על הצירים x , y , ו- z בהתאמה.



מישורי הצירים:

- המישור $[xy]$ מאונך לציר ה- z ובו שיעור ה- z של כל הנקודות שעליו הוא 0. לכן במישור זה נוכל לומר: $z = 0$.
- המישור $[yz]$ מאונך לציר ה- x ובו שיעור ה- x של כל הנקודות שעליו הוא 0. לכן במישור זה נוכל לומר: $x = 0$.
- המישור $[xz]$ מאונך לציר ה- y ובו שיעור ה- y של כל הנקודות שעליו הוא 0. לכן במישור זה נוכל לומר: $y = 0$.



אוקטנטים במערכת צירים תלת-מימדית:

מישורי הצירים מחלקים את מערכת הצירים התלת-מימדית ל-8 אזורים הנקרא **אוקטנטים**.

שאלות:

(1) לפניכם מספר נקודות, קבעו לגבי כל אחת האם היא נמצאת על ציר ה- x , על ציר ה- y או על ציר ה- z :

א. $(6,0,0)$	ב. $\left(-\frac{1}{3},0,0\right)$	ג. $(0,0,3)$
ד. $(0,0,-17)$	ה. $(0,-4,0)$	ו. $(0,\sqrt{2},0)$

(2) לפניכם מספר נקודות.

קבעו לגבי כל נקודה האם היא נמצאת על מישור $[xy]$, על מישור $[xz]$, או על מישור $[yz]$.

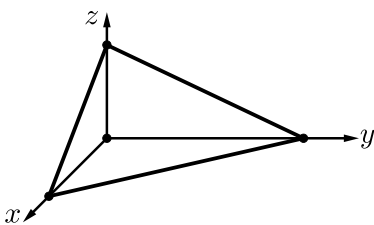
א. $(8,-2,0)$	ב. $(0,4,16)$	ג. $(3,0,-2)$
ד. $(-1,0,4)$	ה. $(0,2,2)$	ו. $(3,5,0)$

(3) נתונה פירמידה $OABC$.

קודקודי הפירמידה הם: $O(0,0,0)$, $C(0,5,0)$, $B(2,0,0)$, $A(0,0,2)$.

א. הוסיפו את הקודקודים לתרשים.

ב. חשבו את אורכי המקצועות AB , AC ו- BC .

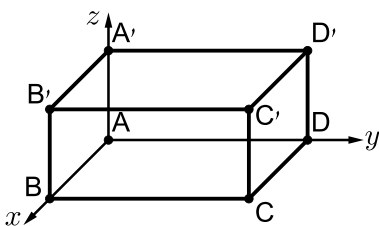


(4) באיור שלפניכם נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.

נתונה הנקודה $C'(12,10,28)$.

א. מצאו את שיעורי הנקודות: A' , D' , B .

ב. חשבו את אורכי המקצועות: BC , $A'D'$, CD .



תשובות סופיות:

(1) א. ציר ה- x ב. ציר ה- x ג. ציר ה- z ד. ציר ה- z ה. ציר ה- y ו. ציר ה- y .

(2) א. מישור $[xy]$ ב. מישור $[yz]$ ג. מישור $[xz]$ ד. מישור $[xz]$ ה. מישור $[yz]$ ו. מישור $[xy]$.

(3) א. ראו קודקודים בסרטון הידאו. ב. $BC = 5.38$, $AC = 5.38$, $AB = 2.82$.

(4) א. $A'(0,0,28)$, $D'(0,10,28)$, $B(12,0,0)$ ב. $BC = A'D' = 10$, $CD = 12$.

וקטור בייצוג אלגברי:

סיכום כללי:

וקטור במישור שמוצאו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x_1, y_1) ייכתב: $\underline{u} = (x_1, y_1)$.
אם O היא ראשית הצירים ו- P היא הנקודה (x_1, y_1) אז ניתן לכתוב גם: $\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1)$.

וקטור במרחב שמוצאו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0,0)$ וסופו בנקודה (x_1, y_1, z_1) ייכתב: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$.
אם O היא ראשית הצירים ו- P היא הנקודה (x_1, y_1, z_1) אז ניתן לכתוב גם: $\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1, z_1)$.

וקטורי היחידה:

במערכת הצירים התלת-ממדית, אנחנו מגדירים שלושה וקטורי יחידה בסיסיים שכל אחד מהם "מצביע" לכיוון של ציר אחר. לוקטורים האלו קוראים וקטורי היחידה של מערכת הצירים.

- $\hat{e}_x = (1, 0, 0)$ הוא וקטור היחידה בכיוון ציר ה- x .
- $\hat{e}_y = (0, 1, 0)$ הוא וקטור היחידה בכיוון ציר ה- y .
- $\hat{e}_z = (0, 0, 1)$ הוא וקטור היחידה בכיוון ציר ה- z .

ניתן לכתוב כל וקטור ע"י תיאור כמות הצעדים שיש להתקדם בכל ציר.

נוסחאות אמצע קטע בתלת-מימד:

אם הנקודה M היא אמצע הקטע שקצותיו הן A ו- B כאשר: $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$
אז שיעורי הנקודה M הם: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

נוסחאות מרחק בין שתי נקודות במרחב:

המרחק בין שתי נקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ יחושב באופן הבא:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

וקטור שמוצאו לא בראשית הצירים:

- וקטור כללי במישור:

וקטור $\overrightarrow{AB}$, המתחיל בנקודה $A(x_1, y_1)$ ומסתיים בנקודה $B(x_2, y_2)$, ייכתב:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

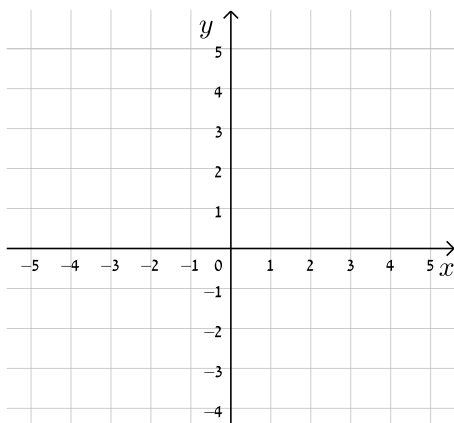
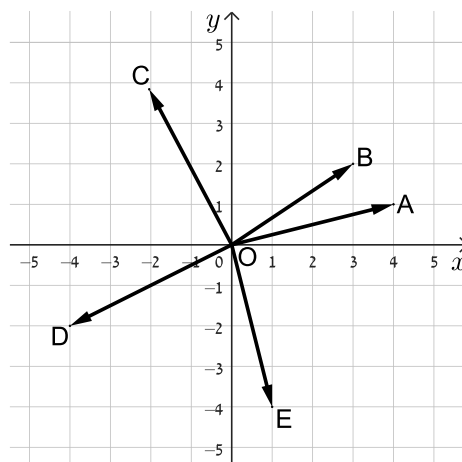
- וקטור כללי במרחב:

וקטור $\overrightarrow{AB}$, המתחיל בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ ומסתיים בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$, ייכתב:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

שאלות:

(1) כתבו את הייצוג האלגברי של כל אחד מהוקטורים הבאים:



(2) סרטטו את הווקטורים הבאים:

א. $\underline{u} = (4, 2)$

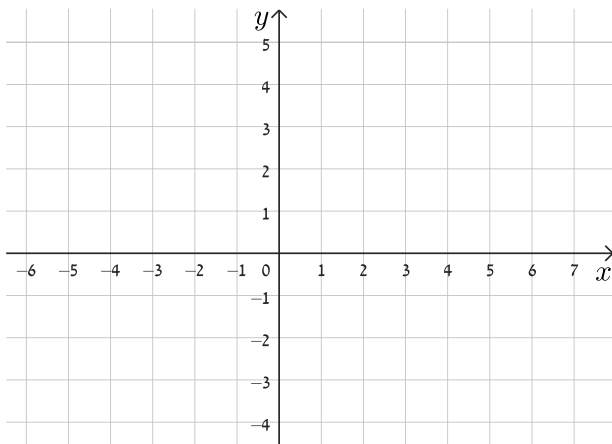
ב. $\underline{v} = (-5, 1)$

ג. $\underline{w} = (3, -4)$

ד. $\underline{a} = (0, 3)$

ה. $\underline{b} = (-5, 0)$

(3) סרטטו במערכת הצירים שלפניכם את הווקטורים הבאים, כך שנקודת מוצאם



היא ראשית הצירים.

א. $\underline{u} = (3, 4)$

ב. $\underline{v} = (0, -2)$

ג. $\underline{w} = (5, -2)$

ד. $\underline{a} = (-3, 0)$

(4) כתבו את ההצגה האלגברית של הוקטור $\overrightarrow{AB}$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

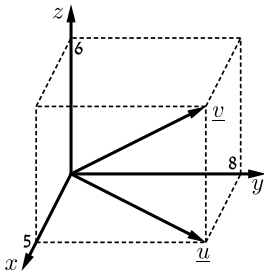
א. $A(4, -2, -1)$, $B(0, 7, 1)$

ב. $A(0, 0, -5)$, $B(4, 4, 0)$

ג. $A(13, -3, 0)$, $B(0, 10, 6)$

(5) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

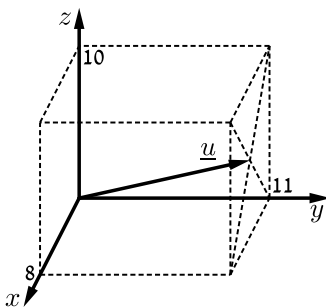
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט:



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת

הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט:

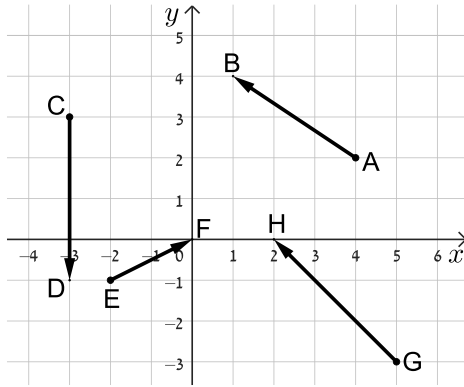


(7) נתון הוקטור $\overrightarrow{AB} = (4, 5, 1)$. מצאו בכל סעיף את שיעורי הנקודה A:

א. $B(3, 2, 0)$

ב. $B(0, 7, -4)$

ג. $B(6, 6, 1)$



(8) כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטורים הבאים:

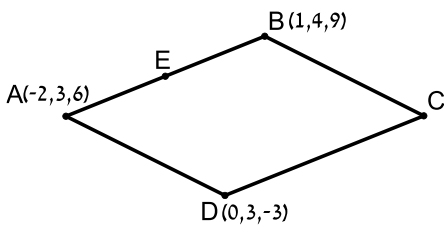
(9) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3, 5)$ ו- $B(6, 1)$.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8, 11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

(10) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.

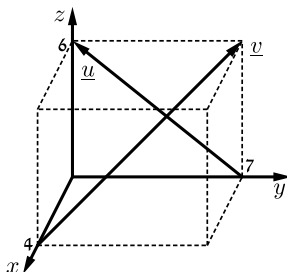
(11) נתונה מקבילית $ABCD$ ששיעורי קודקדיה A, B ו- D מופיעים באיור.



- א. כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{BA}$.
 ב. מצאו את שיעורי הנקודה E , אמצע הצלע AB .
 ג. כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{DE}$.

(12) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$:



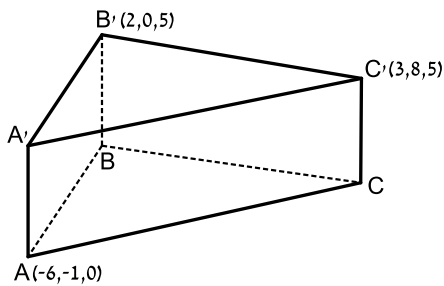
(13) לפניכם מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

נתונות הנקודות המופיעות באיור וכן: $\overrightarrow{BB'} = (-8, 1, 2)$.

א. מצאו את ההצגה האלגברית של הוקטור $\overrightarrow{B'C'}$.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד A' .

ג. כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{AC'}$.



(14) נתון מקבילון $ABCD A'B'C'D'$ ובו:

$A(2, 1, 0)$, $B(5, 13, -1)$, $D'(4, 3, 7)$

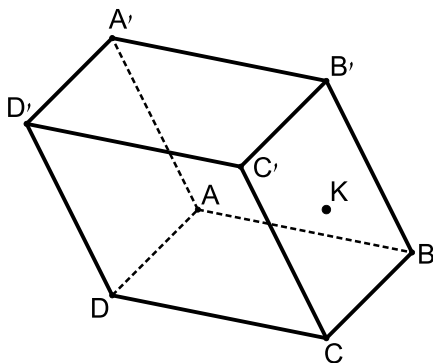
נתון הוקטור $\overrightarrow{C'D'} = (-3, -12, 1)$.

א. מצאו את שיעורי הקודקוד C' .

הנקודה K היא מפגש אלכסוני הפאה הצדדית $BCC'B'$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה K .

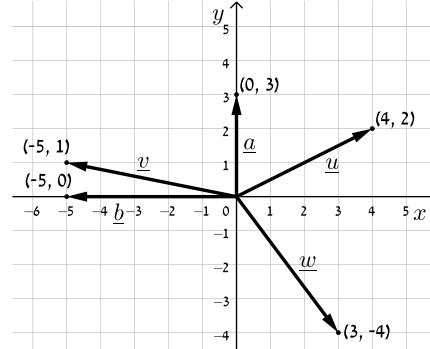
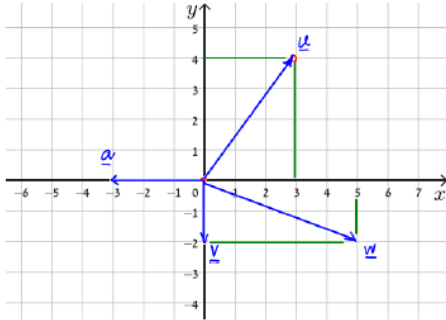
ג. כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטורים: $\overrightarrow{AK}$ ו- $\overrightarrow{KC'}$.



תשובות סופיות:

(1) $\overrightarrow{OA} = (4, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (3, 2)$, $\overrightarrow{OC} = (-2, 4)$, $\overrightarrow{OD} = (-4, -2)$, $\overrightarrow{OE} = (1, -4)$

(2) להלן איור: (3) להלן איור:



(4) א. $\overrightarrow{AB} = (-4, 9, 2)$ ב. $\overrightarrow{AB} = (4, 4, 5)$ ג. $\overrightarrow{AB} = (-13, 13, 6)$

(5) $\underline{u} = (5, 8, 0)$, $\underline{v} = (5, 8, 6)$

(6) $\underline{u} = (4, 11, 5)$

(7) א. $A(-1, -3, -1)$ ב. $A(-4, 2, -5)$ ג. $A(2, 1, 0)$

(8) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (0, -4)$, $\overrightarrow{EF} = (2, 1)$, $\overrightarrow{GH} = (-3, 3)$

(9) א. $\overrightarrow{AB} = (9, -4)$ ב. $Q(12, 8)$

(10) א. $\overrightarrow{EF} = (5, -1, 0)$ ב. $N(-1, -5, 10)$

(11) א. $\overrightarrow{BA} = (-3, -1, -3)$ ב. $E\left(-\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$ ג. $\overrightarrow{DE} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 10\frac{1}{2}\right)$

(12) $\underline{u} = (0, -7, 6)$, $\underline{v} = (-4, 7, 6)$

(13) א. $\overrightarrow{B'C'} = (1, 8, 0)$ ב. $A'(-14, 0, 2)$ ג. $\overrightarrow{AC'} = (9, 9, 5)$

(14) א. $C'(7, 15, 6)$ ב. $K(6, 14, 25)$ ג. $\overrightarrow{AK} = (4, 13, -25)$, $\overrightarrow{KC'} = (1, 1, 3.5)$

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

סיכום כללי:

חיבור וחסור וקטורים במישור:

כדי לחבר שני וקטורים $\underline{u} = (x_1, y_1)$ ו- $\underline{v} = (x_2, y_2)$ יש לבצע חיבור/חסור של שיעוריהם:

$$\underline{u} + \underline{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\underline{u} - \underline{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

כפל וקטור בסקלר במישור:

כדי להכפיל $\underline{u} = (x_1, y_1)$ פי סקלר k ($k \neq 0$) יש להכפיל את כל אחד משיעוריו פי k :

$$k \cdot \underline{u} = (k \cdot x_1, k \cdot y_1)$$

חיבור וחסור וקטורים במרחב:

כדי לחבר שני וקטורים $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ו- $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ יש לבצע חיבור/חסור של שיעוריהם:

$$\underline{u} + \underline{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

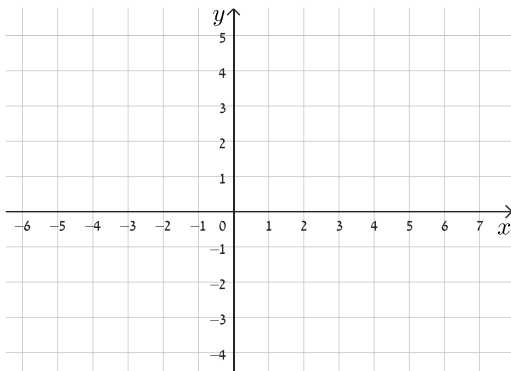
$$\underline{u} - \underline{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

כפל וקטור בסקלר במרחב:

כדי להכפיל $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ פי סקלר k ($k \neq 0$) יש להכפיל את כל אחד משיעוריו פי k :

$$k \cdot \underline{u} = (k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1)$$

שאלות:



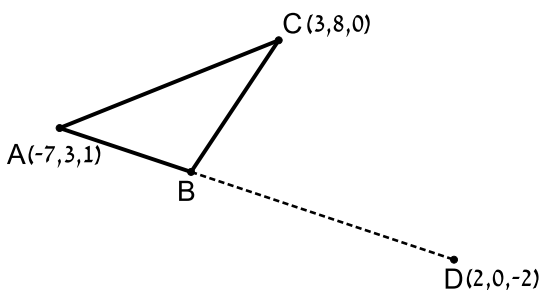
(1) לפניכם מערכת צירים ריקה.

ענו על הסעיפים הבאים.

- ציירו את הוקטור $\underline{u} = (2, 4)$ שמוצאו בראשית.
- ציירו את הוקטור $2\underline{u}$ שמוצאו בנקודה $A(0, -3)$.
- ציירו את הוקטור $-\frac{1}{2}\underline{u}$ שסופו בנקודה $D(-3, 1)$.

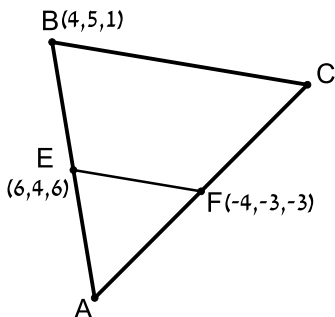
(2) נתון משולש ABC ובו שיעורי הקודקודים A ו-C מופיעים באיור.

הנקודה $D(2, 0, -2)$ נמצאת על המשך AB (מהכיוון של B) ומקיימת: $BD = 2AB$.



- מצאו את הוקטורים $\overrightarrow{AD}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.
- בטאו את הוקטור $\overrightarrow{AB}$ כתלות בוקטור $\overrightarrow{AD}$.
- מצאו את שיעורי הקודקוד B.
- הראו אלגברית כי מתקיים: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

(3) במשולש ABC, הקטע EF הוא קטע אמצעים.



- נתונים שיעורי הקודקוד B, וקצות הקטע E ו-F.
- כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{EB}$ ושל הוקטור $\overrightarrow{AB}$.
- מצאו את שיעורי הנקודה A בשתי דרכים:
(1) בעזרת נוסחת אמצע קטע.
(2) בעזרת הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{AB}$.
- כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{AC}$.

(4) נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (4, 5)$ ו- $\underline{v} = (8, -3)$.

כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטורים הבאים:

- | | |
|---|--|
| א. $4\underline{u} + \underline{v}$ | ב. $2\underline{v} - 5\underline{u}$ |
| ג. $\frac{\underline{u} + 2\underline{v}}{3}$ | ד. $\frac{1}{4}\underline{u} - \frac{3}{5}\underline{v}$ |

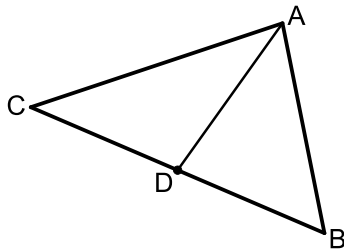
(5) נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (6, 2, 0)$ ו- $\underline{v} = (3, 5, 1)$.
כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטורים הבאים:

א. $3\underline{u} + 5\underline{v}$ ב. $\frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{5}\underline{v}$ ג. $2\underline{v} + 5\underline{u}$

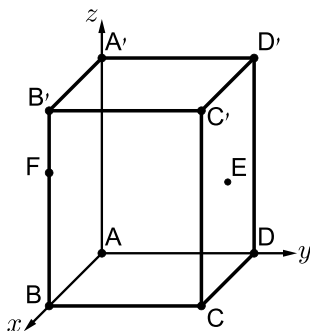
(6) נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
חשב את:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$
ד. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$ ו. $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(7) נתונים הוקטורים הבאים: $\underline{u} = (4, 0, 9)$, $\underline{v} = (-1, 3, -5)$.
חשב את ערכי הוקטורים הבאים: $\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{u} - \underline{v}$, $\underline{u} - 2\underline{v}$, $3\underline{u} + 2\underline{v}$.

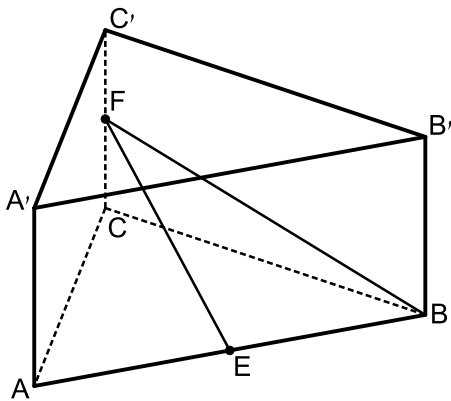


(8) נתון משולש ABC ובו הקטע AD הוא תיכון ל-BC.
ידוע כי: $A(5, 1, 2)$, $B(0, -6, 1)$, $C(4, 7, 2)$.
א. מצאו את הייצוג האלגברי של הוקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{CB}$.
ב. מצאו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{AD}$.



(9) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבה הקודקוד A נמצא בראשית הצירים.
ידוע כי: $AA' = 22$, $CD = 14$, $AD = 18$.
הנקודה E היא מפגש האלכסונים בפאה $CDD'C'$,
והנקודה F מקיימת: $B'F:BF = 1:2$.
א. מצאו את שיעורי הנקודות E ו-F.
ב. רשמו את הייצוג האלגברי של הוקטורים $\overrightarrow{BE}$ ו- $\overrightarrow{BF}$.
ג. רשמו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{EF}$.

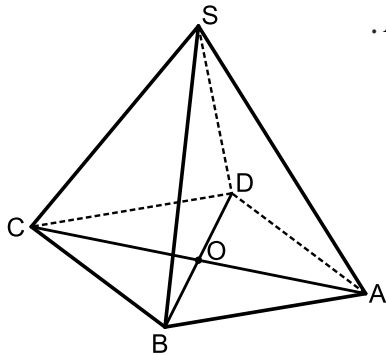
10 נתונה מנסרה משולשת ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הם ABC ו- $A'B'C'$. ידוע כי: $A(0,0,0)$, $C(-3,7,1)$ וכן הוקטורים: $\overrightarrow{AB} = (2,8,4)$ ו- $\overrightarrow{AA'} = (10,-2,-1)$.



הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות AB ו- CC' .

- כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{AE}$.
- כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{CF}$.
- כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{EF}$.
- כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{BF}$.
- מצאו את שיעורי הקודקוד B.

11 בפירמידה ישרה SABCD ידוע כי הבסיס ABCD הוא מקבילית. הנקודה O היא ראשית הצירים ונתון: $A(-2,-5,-2)$, $B(2,1,-1)$.



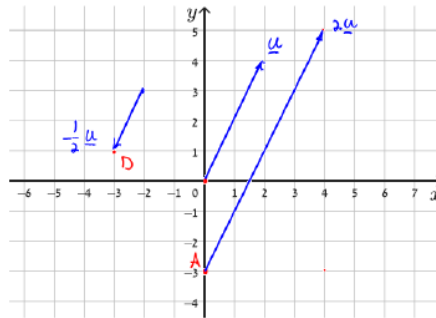
כמו כן ידוע כי: $\overrightarrow{SC} = (3,4,-11)$.

- מצאו את שיעורי הקודקוד C.
- כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{CB}$.
- כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{SB}$.
- סמנו נקודה F באמצע המקצוע SA וכתבו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{BF}$.

12 נתונים שלושה ווקטורים: $\underline{u} = (6,-1,z)$, $\underline{v} = (0,y,4)$, $\underline{w} = (x,5,-10)$.

- מצא את ערכם של x, y, z המקיימים: $\underline{u} + 2\underline{v} = \underline{w}$.
- מצא את ערכם של x, y, z המקיימים: $2\underline{v} - 3\underline{w} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$.
- כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{u} = (6,y,z)$, $\underline{v} = (y-1,2,x)$, $\underline{w} = (x,2z,-10)$?

תשובות סופיות:



(1) להלן איור:

(2) $\overrightarrow{AD} = (9, -3, -3)$, $\overrightarrow{DC} = (1, 8, 2)$ א. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$ ב. $B(-4, 2, 0)$ ג.

(3) $\overrightarrow{EB} = (-2, 1, -5)$, $\overrightarrow{AB} = (-4, 2, -10)$ א. $A(8, 3, 4)$ ב. $\overrightarrow{AC} = (-24, -12, -28)$ ג.

(4) $(24, 17)$ א. $(-4, -31)$ ב. $\left(6\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ג. $(-3.8, 3.05)$ ד.

(5) $(33, 37, 5)$ א. $(24, 0, 0.2)$ ב. $(36, 20, 2)$ ג.

(6) $(-6, 2, 8)$ א. $(-2, 1, 3)$ ב. $(-17, 7, 24)$ ג.

$(2.5, -1, -3.5)$ ד. $(9.5, 9.5, -18)$ ה. $(19, 19, -36)$ ו.

(7) $(5, 7, 1)$ א. $(-8, -16, 8)$ ב. $(8, 12, 0)$ ג.

(8) $\overrightarrow{AC} = (-1, 6, 0)$, $\overrightarrow{CB} = (-4, -13, -1)$ א. $\overrightarrow{AD} = \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ב.

(9) $E(7, 18, 11)$, $F\left(14, 0, 14\frac{2}{3}\right)$ א. $\overrightarrow{BE} = (-7, 8, 11)$, $\overrightarrow{BF} = \left(0, 0, 14\frac{2}{3}\right)$ ב.

ג. $\overrightarrow{EF} = \left(7, -18, 3\frac{2}{3}\right)$

(10) $\overrightarrow{AE} = (1, 4, 2)$ א. $\overrightarrow{CF} = \left(5, -1, -\frac{1}{2}\right)$ ב. $\overrightarrow{EF} = \left(1, 2, -1\frac{1}{2}\right)$ ג.

ד. $\overrightarrow{BF} = \left(0, -2, -3\frac{1}{2}\right)$ ה. $B(2, 8, 4)$

(11) $C(2, 5, 2)$ א. $\overrightarrow{CB} = (0, -4, -3)$ ב. $\overrightarrow{SB} = (3, 0, -14)$ ג.

ד. $\overrightarrow{BF} = \left(-3\frac{1}{2}, -3, 6\frac{1}{2}\right)$

ה. $x = -1$, $y = 9\frac{2}{3}$, $z = 72$

א. $x = 6$, $y = 3$, $z = -18$

ג. $x = -4\frac{8}{9}$, $y = -4\frac{4}{9}$, $z = -\frac{2}{9}$

וקטורים קוליניאריים:

סיכום כללי:

וקטורים קולינאריים בייצוג אלגברי:

וקטורים $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ו- $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ הם קולינאריים אם שיעורי הנקודות שלהם מקיימות:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \alpha$$

במקרה זה מתקיים: $\underline{v} \parallel \underline{u}$ וניתן לכתוב: $\underline{v} = \alpha \cdot \underline{u}$.

מקרה פרטי:

אם $\alpha = 1$ אז ניתן לומר כי הוקטורים שווים זה לזה, כלומר הם באותו הכיוון ובאותו הגודל.
במקרה זה מתקיים: $x_1 = x_2 ; y_1 = y_2 ; z_1 = z_2$.

נקודות על ישר בייצוג אלגברי:

אם שני וקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ הם קולינאריים ויוצאים מאותה הנקודה (A) אז הנקודות B, A, C נמצאות על ישר אחד.

שאלות:

(1) קבעו האם זוגות הוקטורים הבאים הם קולינאריים.

במידה וכן מצאו את α המקיים: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.

א. $\overrightarrow{CD} = (3, 0, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (4, 3, -3)$

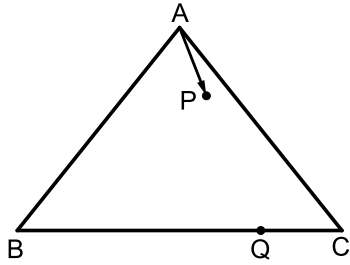
ב. $\overrightarrow{CD} = (3, -18, 3)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 6, 1)$

ג. $\overrightarrow{CD} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 4)$

ד. $\overrightarrow{CD} = (3, 0.5, 1.25)$, $\overrightarrow{AB} = (12, 2, 5)$

- (2) נתון משולש ABC . הנקודה Q נמצאת על הצלע BC ומקיימת: $CQ : BQ = 1 : 3$. הנקודה P נמצאת בתוך המשולש כך שהוקטור $\overrightarrow{AP}$ שווה ל- $\overrightarrow{AP} = (1.5, 2, -1)$.

ידוע גם כי: $\overrightarrow{AB} = (6, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (6, 10, -6)$.
הראו כי הנקודות A, P ו- Q נמצאות על ישר אחד.



תשובות סופיות:

- (1) א. אינם קוליניאריים ב. אינם קוליניאריים ג. קוליניאריים ד. קוליניאריים.
(2) שאלת הוכחה.

המכפלה הסקלרית בייצוג אלגברי:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית:

המכפלה הסקלרית בין שני וקטורים $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ו- $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

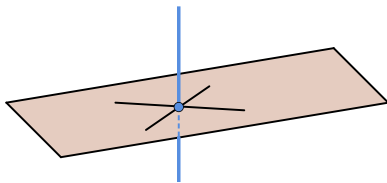
גודל של וקטור:

גודל של וקטור $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ יחושב: $|\underline{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

זווית בין וקטורים:

הזווית α שבין הוקטורים $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ו- $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב ע"י שימוש במכפלה הסקלרית באופן הבא:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



ישר המאונך למישור:

נעזר במכפלה הסקלרית כדי למצוא מתי ישר מאונך למישור. נעשה זאת ע"י ידיעת הוקטור שבכיוון הישר.

משפט:

ישר המאונך למישור, מאונך לכל הישרים המוכלים במישור ועוברים דרך עקב האנך (נקודת החיתוך).

שאלות:

(1) נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (4, 3, 1)$, $\underline{v} = (-2, 6, 5)$.

א. מצאו את המכפלה הסקלרית: $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

ב. מצאו את אורכי הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ג. חשבו את α , הזווית החדה בין שני הוקטורים.

(2) נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (-2, 1, 1)$, $\underline{v} = (4, 7, 1)$.

מניחים את שני הוקטורים כך שנקודת המוצא שלהם משותפת.

א. הראו כי הוקטורים מאונכים זה לזה.

ב. חשבו את אורך היתר במשולש הנוצר ע"י שני הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ ווקטור המחבר את קצותיהם.

(3) שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ אינם ידועים.

נתון כי: $\underline{u} + \underline{v} = (3, 7, -2)$, $\underline{u} - \underline{v} = (-1, 0, 5)$.

מצאו את $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ואת הזווית החדה שבין שני הוקטורים.

(4) נתונים הוקטורים הבאים: $\underline{v} = (5, -1, 0)$, $\underline{u} = (1, -3, 2)$.

חשב את הגדלים של הוקטורים הבאים: $4\underline{u} - 3\underline{v}$, $2\underline{v} + \underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$.

(5) חשב את הזווית שבין הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

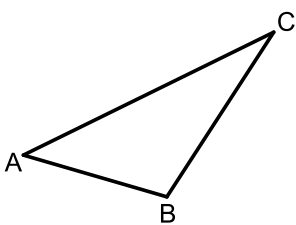
(6) נתון משולש ABC שבו: $A(4, 9, 5)$, $B(0, 7, 2)$, $C(0, 0, 3)$.

א. כתבו את הייצוג האלגברי של הוקטורים: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

ב. חשבו את זוויות המשולש.

ג. מצאו את היקף המשולש.

ד. מצאו את שטח המשולש.



(7) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:

$A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

(8) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:

$$A(1,2,0), B(-2,5,3), C(-1,8,4), D(4,3,-1)$$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(9) נתונות הנקודות הבאות: $A(1,0,2), B(3,7,-4), C(6,9,0), D(7,4,10), E(9,11,4)$

א. הראה כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמק.

(10) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקדיו הם: $A(-3,2,1), B(0,3,2), C(5,-1,0)$

(11) נתונה פירמידה משולשת SRPQ שבסיסה PRQ הוא משולש ישר זווית.

מניחים את הפירמידה במערכת צירים כך ש-R נמצאת בראשית הצירים.

הנקודה C היא מפגש התיכונים בפאה SRP.

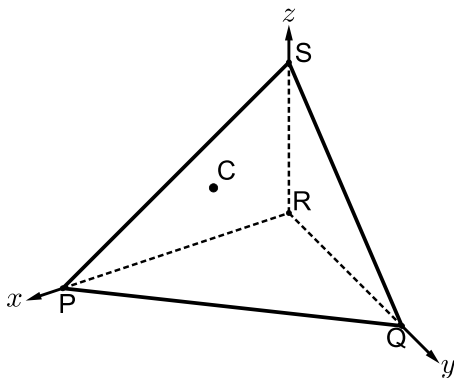
$$\text{ידוע כי: } \overrightarrow{SP} = (6,0,-4), \overrightarrow{PQ} = (-6,5,0), PR = 6$$

א. מצאו את שיעורי הנקודות P, Q ו-S.

ב. חשבו את נפח הפירמידה.

ג. מצאו את הייצוג האלגברי של הוקטורים $\overrightarrow{SC}$ ו- $\overrightarrow{QC}$.

ד. חשבו את הזווית $\angle SCQ$.



(12) נתון מקבילון $ABCD A'B'C'D'$, שבו הנקודה A נמצאת בראשית הצירים.

$$\text{ידוע כי: } \overrightarrow{BD} = (4,-6,-4), B(0,6,1)$$

א. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

ב. (1) חשבו את אורכי המקצועות AB ו-AD.

(2) חשבו את הזווית החדה שבין המקצועות AB ו-AD.

(3) חשבו את שטח מקבילית הבסיס ABCD.

מהקודקוד D' מורידים וקטור לנקודה E שנמצאת

במישור הבסיס ABCD.

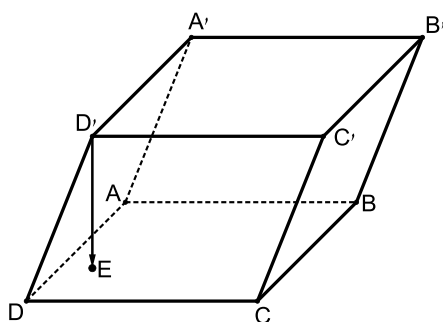
$$\text{נתון כי: } \overrightarrow{CD'} = (8,-6,16), E(3,2,2)$$

ג. מצאו את הייצוג האלגברי של הוקטור $\overrightarrow{D'E}$.

ד. הראו כי הוקטור $\overrightarrow{D'E}$ מאונך למישור הבסיס ABCD.

ה. (1) חשבו את אורכו של הוקטור $\overrightarrow{D'E}$.

(2) חשבו את נפח המקבילון.



(13) נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

תשובות סופיות:

(1) א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 15$ ב. $|\underline{u}| = \sqrt{26} = 5.1$, $|\underline{v}| = \sqrt{65} = 8.06$ ג. $\alpha = 68.6^\circ$

(2) א. מתקבל $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ולכן $\underline{u} \perp \underline{v}$ ב. $|\underline{w}| = \sqrt{72} = 8.48$

(3) $\alpha = 64.64^\circ$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 9$

(4) $|\underline{u}| = \sqrt{14}$; $|\underline{v}| = \sqrt{26}$; $|2\underline{v} + \underline{u}| = \sqrt{150}$; $|4\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{266}$

(5) א. 97.277° ב. 90° ג. 180°

(6) א. $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-4, -9, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (0, -7, 1)$

ב. $\sphericalangle A = 42.34^\circ$, $\sphericalangle B = 106.8^\circ$, $\sphericalangle C = 30.86^\circ$ ג. $P_{ABC} = 22.5$ יח"א

ד. $S_{ABC} = 18.225$ יח"ש

(7) שאלת הוכחה.

(8) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

(9) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

(10) 10.173 יח"ש.

(11) א. $P(6, 0, 0)$, $Q(0, 5, 0)$, $S(0, 0, 4)$ ב. $V_{SRPQ} = 20$ יח"נ

ג. $\overrightarrow{SC} = \left(2, 0, -2\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{QC} = \left(2, -5, \frac{4}{3}\right)$ ד. $\sphericalangle SCQ = 88.62^\circ$

(12) א. $C(4, 6, -2)$ ב. $AD = 5$, $AB = 6.08$ (1) ב. 95.66° (2) ג. $\overrightarrow{DE} = (-9, 2, -12)$

ב. $S_{ABCD} = 30.265$ יח"ש (3)

ד. הוכחה. ה. $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{229} = 15.132$ יח"א (1)

ה. $V = 460.21$ יח"נ (2)

(13) א. $\underline{w} = (-3, -6, 5)$ או $\underline{w} = (3, 6, -5)$

שאלון 472

בעיות גדילה ודעיכה

תוכן העניינים:

159..... בעיות גדילה ודעיכה

- 161..... חזרה על תכונות הפונקציה המעריכית:
- 161..... סיכום כללי:
- 162..... שאלות:
- 163..... תשובות סופיות:
- 164..... הבחנה בין תהליכים מעריכיים ושאינם מעריכיים:
- 164..... סיכום כללי:
- 164..... שאלות:
- 165..... תשובות סופיות:
- 166..... בעיות גדילה ודעיכה:
- 166..... סיכום כללי:
- 166..... שאלות:
- 172..... תשובות סופיות:
- 173..... מציאת הכמות ההתחלתית:
- 173..... סיכום כללי:
- 173..... שאלות:
- 175..... תשובות סופיות:
- 176..... מציאת קצב הגדילה או הדעיכה:
- 176..... סיכום כללי:
- 176..... שאלות:
- 177..... תשובות סופיות:
- 178..... קצב המתייחס למחזורי זמן שונים:
- 178..... סיכום כללי:
- 178..... שאלות:
- 178..... תשובות סופיות:

179.....	מציאת הזמן:
179.....	סיכום כללי:
179.....	שאלות:
181.....	תשובות סופיות:
182.....	זמן מחצית החיים:
182.....	סיכום כללי:
182.....	שאלות:
183.....	תשובות סופיות:
184.....	שאלות עם שני תהליכים:
184.....	שאלות:
186.....	תשובות סופיות:
187.....	שאלות מרובות שלבים:
187.....	שאלות:
190.....	תשובות סופיות:
191.....	אי-שוויונות בגדילה ודעיכה:
191.....	שאלות:
192.....	תשובות סופיות:

חזרה על תכונות הפונקציה המעריכית:

סיכום כללי:

הגדרה:

פונקציה מהצורה: $f(x) = a^x$, כאשר $a > 0$ ו- $a \neq 1$ נקראת **פונקציה מעריכית**.

- אם $a > 1$ הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- אם $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

מעבר לציר הזמן:

נסמן את הפונקציה המעריכית ביחס לציר זמן t כך: $f(t) = a^t$.

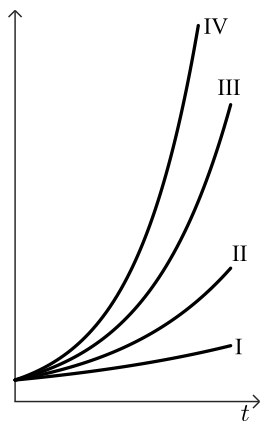
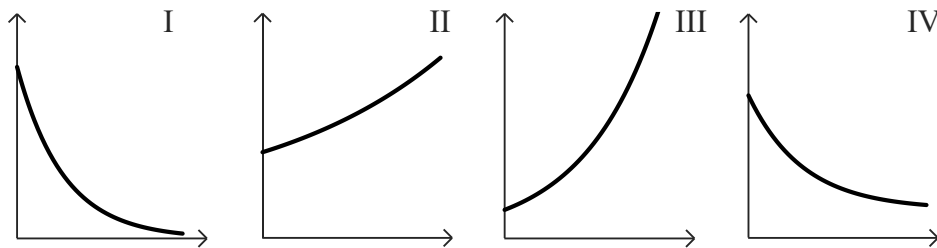
תכונות הפונקציה המעריכית:

עבור פונקציה מהצורה $f(t) = a^t$ כאשר $a > 0$ ו- $a \neq 1$ מתקיים:

- הפונקציה $f(t)$ תמיד חיובית.
- הפונקציה $f(t)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0,1)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה $f(t)$ עולה וככל כ- a גדול יותר כך הפונקציה עולה 'מהר' יותר.
- עבור $0 < a < 1$ הפונקציה $f(t)$ יורדת וככל כ- a קטן יותר כך הפונקציה יורדת 'מהר' יותר.

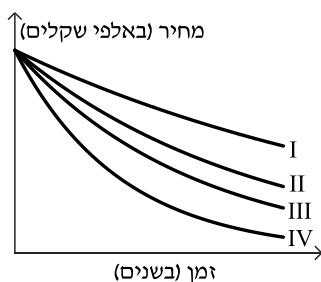
שאלות:

- (1) לפניכם ארבעה תיאורים מילוליים וארבעה גרפים.
קבעו איזה גרף מבין גרפים I-IV מתאים לכל תיאור.
א. ביישוב מתפתח, האוכלוסייה גדלה פי 2 בכל שנה.
ב. ירידת ערכו של טאבלט לאורך חודשי השנה מיום יציאתו לשוק.
ג. עלייה מתונה בערכו של פריט אספנות נדיר לאורך השנים.
ד. חומר כימי מסוים מתפרק בקצב קבוע מדי שעה.



- (2) נתונות ארבעת הפונקציות המעריכיות הבאות:
 $f(t) = 1.02^t$, $g(t) = 1.2^t$, $h(t) = 1.05^t$, $k(t) = 1.34^t$
קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-IV מתאים לכל פונקציה.

- (3) נתונות 4 פונקציות מעריכיות המתארות את תהליך ירידת הערך של רכבים חדשים.
המשוואות שמתארות כל פונקציה הן:



- $f(t) = 0.92^t$, $g(t) = 0.8^t$, $h(t) = 0.5^t$, $k(t) = 0.74^t$
קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-IV מתאים לכל משוואה.

תשובות סופיות:

- (1) א. גרף III ב. גרף IV ג. גרף II ד. גרף I.
- (2) I: $f(t)$, II: $h(t)$, III: $g(t)$, IV: $k(t)$.
- (3) I: $f(t)$, II: $g(t)$, III: $k(t)$, IV: $h(t)$.

הבחנה בין תהליכים מעריכיים ושאינם מעריכיים:

סיכום כללי:

תהליך ליניארי – קצב קבוע:

תהליך שבו אנו מוסיפים או מחסרים גודל קבוע בכל פרק זמן.
דוגמה: הוספה של 10 ש"ל לכיסך בסוף התחלתי בכל יום.

תהליך מעריכי – קצב משתנה:

תהליך שבו אנו כופלים (גדילה) או מחלקים (דעיכה) בכמות קבועה בכל פרק זמן.
דוגמה: הכפלה פי 2 של כמות מסוימת בכל חודש.

שאלות:

(1) קבעו לגבי כל אחד מהתיאורים הבאים האם הוא מתאר תהליך גדילה או דעיכה מעריכיים,

או שאינו מתאר זאת. נמקו את קביעתכם.

- א. כמות העצים בחורשה מסוימת גדלה פי 1.2 מדי שנה.
- ב. המהירות של מכונית עולה ב-20 קמ"ש בכל דקה.
- ג. כמות הדגים באקווריום מסוים גדלה פי 2 בכל שבוע.
- ד. חומר רדיואקטיבי מאבד 20% מערכו בכל שעה.
- ה. קרחון מאבד מנפחו 10% בכל שנה.
- ו. מחיר דירה עולה ב-4% מדי שנה.
- ז. מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.
- ח. מספר החיידקים במבחנה מכפיל את עצמו כל 20 דקות.
- ט. כמות המשקעים השנתית הממוצעת יורדת ב-3 מ"מ בכל שנה.
- י. אדם מפקיד כסף בבנק בריבית דריבית שנתית קבועה של 3%.
- יא. ריכוז החומר הפעיל בתמיסה פוחת ב-15% בכל יום.
- יב. אוכלוסיית עיר גדלה ב-1,200 תושבים בכל שנה.
- יג. כמות הפחמן הדו-חמצני באטמוספירה גדלה באחוז קבוע מדי עשור.
- יד. הטמפרטורה של כוס מים חמים יורדת ב-2 מעלות צלזיוס בכל דקה.
- טו. בכל שעה, 5% מהסוללה של הטלפון הנייד מתרוקנים.
- טז. גובה העץ עולה ב-5 סנטימטרים בכל שנה.
- יז. מספר המשתמשים באפליקציה חדשה גדל פי 1.5 בכל חודש.

תשובות סופיות:

- (1)** גדילה מעריכית: א, ג, ו, ח, י, יג, יז.
דעיכה מעריכית: ד, ה, ז, יא, טו.
עליה לינארית: ב, יב, טז.
ירידה לינארית: ט, יד.

בעיות גדילה ודעיכה:

סיכום כללי:

הגדרה:

בעיית גדילה ודעיכה עוסקת בגודל התחלתי אשר גדל פי ערך מסוים במשך הזמן (או קטן פי ערך זה). ערך זה נקרא **קצב הגדילה או הדעיכה** של הבעיה.

הנוסחה של בעיות גדילה ודעיכה: $f(t) = f(0) \cdot q^t$.
כאשר:

- $f(0)$ - הכמות ההתחלתית / הערך ההתחלתי.
- q - קצב הגדילה/הדעיכה.
- t - הזמן.
- $f(t)$ - הערך לאחר פרק זמן t .

שאלות:

- (1)** הערך של קרקע גדל פי 2 בכל שנה.
- א. בתחילה, ערך הקרקע הוא 50,000 ש.
 - ב. מהם הגדלים $f(0)$ ו- q המאפיינים את השאלה?
 - ג. כתבו את נוסחת הגדילה המתאימה לשאלה.
 - ד. מצאו את ערך הקרקע לאחר 3 שנים.
 - ה. מצאו את ערך הקרקע לאחר 5 שנים.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו את הקצב מתוך אחוז הגדילה או הדעיכה הנתון.

- א. מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- ב. מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- ג. אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
- ד. מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- ה. כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- ו. מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- ז. רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- ח. מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו את אחוז הגדילה או הדעיכה מתוך הקצב הנתון.

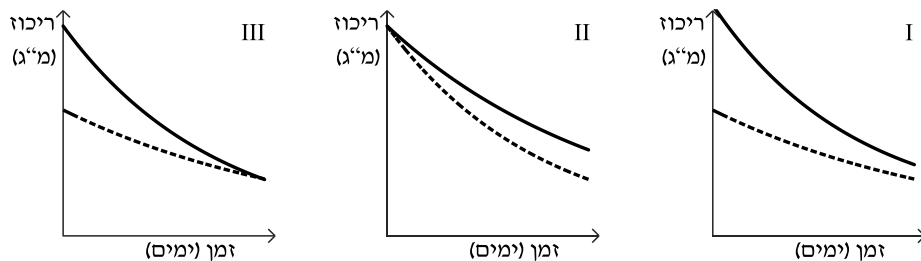
- א. $q = 1.2$
- ב. $q = 1.6$
- ג. $q = 0.85$
- ד. $q = 0.72$

(4) הפונקציה: $f(t) = 300 \cdot 1.4^t$ מתארת את כמות השועלים ביער מסוים מדי שנה.

- א. כמה שועלים היו ביער כאשר החל תהליך הגדילה המעריכי?
- ב. האם נכון לומר כי הפונקציה מתארת תהליך של גדילה מעריכית בקצב שנתי קבוע של 4%? נמקו את תשובתכם.
- ג. ביער הנמצא במדינה סמוכה נספרה אוכלוסיית השועלים מדי שנה כאשר בספירה הראשונה מצאו כי ישנם 500 שועלים. בהנחה כי הפונקציה המתאימה לתיאור קצב הגדילה של השועלים היא: $g(t) = 500 \cdot 1.2^t$ מה הוא אחוז הגדילה השנתי?
- ד. כתבו פונקציה מתאימה ליערות נוספים שבהם מספר דומה של שועלים לשל היער הראשון, ואחוז הגדילה הוא:

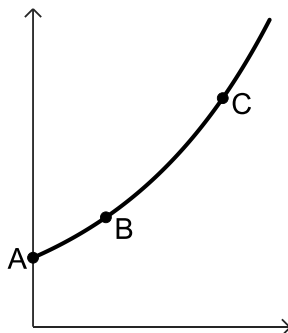
50% (3)	15% (2)	5% (1)
---------	---------	--------

- (5) במסגרת מחקר רפואי, נמדד ריכוז התחלתי של וירוס מסוים בשני מטופלים, א' ו-ב', ונמצא שהוא זהה בשניהם: 40 מ"ג (מיליגרם) לליטר דם. עם תחילת הטיפול, החלו המטופלים לקבל חיסון מותאם. קצב דעיכת ריכוז הנגיף בגופם מתואר על ידי שתי פונקציות מעריכיות שונות כאשר t מייצג את מספר הימים שחלפו מתחילת הטיפול: הפונקציה: $f(t) = 40 \cdot 0.95^t$ מתארת את דעיכת ריכוז הנגיף במטופל א' מדי יום. הפונקציה: $g(t) = 40 \cdot 0.92^t$ מתארת את דעיכת ריכוז הנגיף במטופל ב' מדי יום.
- איזה חיסון מפרק מהר יותר את ריכוז הנגיף?
 - מה יהיה הפרש הריכוזים לאחר שבוע? ולאחר חודש?
 - קבעו באיזה מהסרטוטים I-III הגרפים המתוארים מתאימים ל- $f(t)$ ו- $g(t)$. נמקו את תשובתכם.



- בגרף שבחרתם, קבעו לאיזו פונקציה מתאים הגרף הרציף ולאיזו פונקציה מתאים הגרף המקווקו. נמקו.

- (6) נתונה פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(t) = f(0) \cdot q^t$. רועי מפקיד מדי שבוע סכום כסף קבוע לחיסכון הגדל בקצב מעריכי. הפונקציה $f(t)$ מתארת את סכום הכסף הכולל בחיסכון של רועי (באלפי שקלים) מיום ההפקדה הראשונה.



- הסבירו מה כל אחד מהצירים מייצג ומה היחידות שלו.
- מסמנים את הנקודות A, B ו-C על גרף הפונקציה $f(t)$. ידוע כי: $A(0,1)$, $B(3,1.19)$, $C(8,2.4)$.
- הסבירו מהי המשמעות של כל נקודה.
- בכמה אחוזים גדל סכום הכסף של רועי מדי שבוע?
- כתבו את הייצוג האלגברי השלם של $f(t)$.

7) כמות האצות סביב אגם מסוים מתרבה באחוז קבוע של 4% מדי שנה.

בשנת 2010 בוצעה ספירה ראשונה ובה נמצאו 250 ק"ג של אצות.

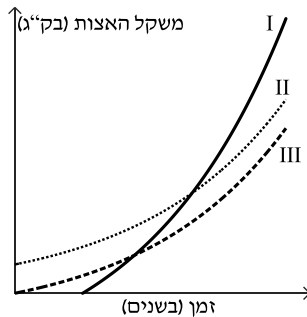
א. כתבו ייצוג אלגברי מהצורה: $f(t) = f(0) \cdot q^t$ המתאר את משקל האצות השנתי בק"ג

החל משנת 2010.

ב. כמה ק"ג אצות יהיו סביב האגם בשנת 2030?

ג. קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-III מייצג נכונה את הגידול השנתי במשקל האצות.

ד. חשבו את נקודת החיתוך עם ציר ה-y בגרף שבחרתם וסמנו אותה בתרשים.



8) מכבים קומקום חשמלי מיד כשהמים מגיעים לטמפרטורה של 100°C (מעלות צלזיוס).

תהליך ההתקררות של המים הוא מעריכי כך שבכל דקה שחולפת, טמפרטורת המים יורדת בשיעור קבוע של 5% ביחס לטמפרטורה הקודמת.

א. (1) מהו קצב הדעיכה של טמפרטורת המים מדי דקה?

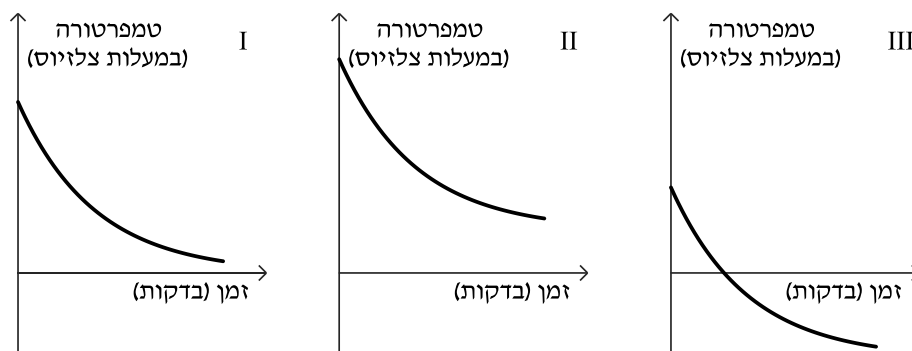
(2) כתבו פונקציה מהצורה: $f(t) = f(0) \cdot q^t$ המתארת את טמפרטורת המים לאחר

t דקות.

ב. (1) מה תהיה טמפרטורת המים לאחר 5 דקות ולאחר 10 דקות?

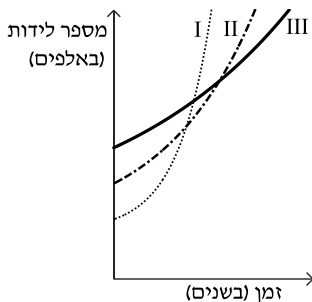
(2) מה תהיה טמפרטורת המים לאחר שעה? (זכרו: בשעה יש 60 דקות).

ג. איזה מבין הגרפים I-III מתאר נכונה את הפונקציה $f(t)$?



- (9)** כמות הדגים בבריכה גדלה בכל חודש ב-14.2%.
 בזמן הבדיקה הראשונה היו בבריכה $4 \cdot 10^3$ ק"ג דגים.
 א. קבעו מה הוא הגודל $f(0)$ בפונקציה $f(t) = f(0) \cdot q^t$ בהנחה כי הפונקציה מתארת את כמות הדגים בכל חודש.
 ב. קבעו מה הוא q וכתבו את הביטוי האלגברי המלא לפונקציה $f(t)$.
 ג. חשבו את:
 (1) הערך $f(5)$.
 (2) מספר הדגים לאחר חצי שנה בבריכה.
 (3) מספר הדגים לאחר שנתיים בבריכה.

- (10)** נתונות 3 פונקציות מעריכיות המתארות את הגדילה במספר הלידות (באלפים)
 בעיר מסוימת מדי שנה. המשוואות המתארות כל פונקציה הן:
 $f(t) = 12 \cdot 1.05^t$, $g(t) = 10 \cdot 1.21^t$, $h(t) = 11 \cdot 1.08^t$
 קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-III מתאים לכל משוואה.



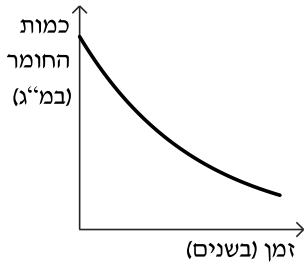
- (11)** נתונות ארבעת הפונקציות הבאות:
 $f(t) = 34 \cdot 0.88^t$, $g(t) = 5 \cdot 1.1^t$, $h(t) = 25 \cdot 1.2^t$, $k(t) = 7 \cdot 0.8^t$
 עליכם לקבוע לאיזה תהליך מתאימה כל פונקציה:
 א. מנייה נסחרת במחיר התחלתי של 5 ש"ח וערכה עולה באחוז חודשי קבוע (בשקלים).
 ב. גדילה של מספר הנדבקים (באלפי נדבקים) במחלה ויראלית במשך עונת החורף.
 ג. דעיכה של עוצמת הקול של סירנת אמבולנס בשיעור קבוע (בדציבלים).
 ד. כמות המלח (באלפי ק"ג) בים המלח פוחתת ב-12% מדי שנה.

(12) חוקרים השתמשו בחומר מעקב רדיואקטיבי כדי לבדוק את זרימת המים באגם מסוים.

כמות החומר במים דועכת באופן מעריכי לאורך השנים.

לפניכם גרף הפונקציה: $f(t) = 12 \cdot 0.75^t$ המתאר את כמות החומר (ביחידות מ"ג) לאורך

השנים החל משנת 1980.



א. מה הייתה כמות החומר ההתחלתית שבה השתמשו

החוקרים בתחילת המחקר?

ב. בכמה אחוזים דועך החומר מדי שנה?

באגם סמוך החליטו לבצע בדיקה דומה, והשתמשו בכמות התחלתית גדולה יותר של אותו חומר. עם זאת, קצב הדעיכה של החומר מהיר יותר.

ג. איזו פונקציה מבין הפונקציות הבאות מתארת נכונה

את קצב הדעיכה של החומר באגם הסמוך?

$$(1) \quad g(t) = 12 \cdot 1.05^t \quad (2) \quad h(t) = 15 \cdot 0.75^t \quad (3) \quad k(t) = 15 \cdot 0.6^t$$

באגם שלישי ביצעו בדיקה זהה, תוך שימוש בכמות התחלתית זהה של חומר מעקב כמו באגם המקורי (זה המתואר בפונקציה $f(t)$). ידוע כי הפער בין כמות החומר באגם השלישי לבין

כמות החומר באגם המקורי הולך וגדל עם השנים.

ד. נסחו פונקציה אפשרית המתארת את כמות החומר (במ"ג) באגם השלישי והסבירו

בקצרה מדוע הפונקציה שבחרתם מתאימה לתיאור זה.

תשובות סופיות:

- (1) א. $q = 2, f(0) = 50,000$ ב. $f(t) = 50000 \cdot 2^t$ ג. 400,000 ש.ד.
- (2) א. 1.2 ב. 0.6 ג. 1.05 ד. 1.15 ה. 2 ו. 3.
- (3) א. 20% ב. 60% ג. 15% ד. 28%.
- (4) א. 300 ב. לא ג. 20% ד. $h(t) = 300 \cdot 1.05^t$ (1).
- ד. $k(t) = 300 \cdot 1.15^t$ (2) ד. $r(t) = 300 \cdot 1.5^t$ (3).
- (5) א. חיסון של מטופל ב' ב. לאחר שבוע: 5.62 מ"ג, לאחר חודש: 5.64 מ"ג. ג. גרף II ד. רציף: $f(t)$, מקווקו: $g(t)$.
- (6) א. ראו סרטון ב. ראו סרטון ג. 6% ד. $f(t) = 1 \cdot 1.06^t$.
- (7) א. $f(t) = 250 \cdot 1.04^t$ ב. 547.78 ק"ג ג. גרף II ד. $(0, 250)$.
- (8) א. (1) 0.95 א. $f(t) = 100 \cdot 0.95^t$ (2) ב. (1) $f(5) = 77.37^\circ\text{C}, f(10) = 59.87^\circ\text{C}$ ג. גרף I.
- (9) א. $f(0) = 4000$ ב. $f(t) = 4 \cdot 10^3 \cdot 1.412^t, q = 1.412$ ג. (1) $f(5) = 7769.45$ ג. (2) $f(6) = 8872.72$ ג. (3) $f(24) = 96838.15$.
- (10) גרף I: $g(t)$, גרף II: $h(t)$, גרף III: $f(t)$.
- (11) א. $g(t)$ ב. $h(t)$ ג. $k(t)$ ד. $f(t)$.
- (12) א. 12 מ"ג ב. 25% ג. (3) $k(t)$ ד. $r(t) = 12 \cdot 0.7^t$.

מציאת הכמות ההתחלתית:

סיכום כללי:

נעזר בנוסחת הגדילה והדעיכה כאשר הקצב q ידוע ונתונה נקודה מסוימת בזמן עם הערך המתקבל עבורה. במקרה זה נוכל לבדוד את $f(0)$ ולמצוא את הכמות ההתחלתית.

שאלות:

- (1)** מחירה של דירה בשכונה מסוימת הוא 1.6 מיליון ₪.
מחיר הדירה גדל בקצב מעריכי קבוע של 4% בשנה.
א. (1) מה הוא הערך $f(0)$ בפונקציה: $f(t) = f(0) \cdot q^t$ המתארת את מחיר הדירה השנתי במיליוני ₪?
(2) מה הוא ערכו של q ?
(3) כתבו את הביטוי האלגברי המלא: $f(t) = f(0) \cdot q^t$.
ב. מה יהיה מחיר הדירה:
(1) בעוד 3 שנים.
(2) בעוד 5.5 שנים.
ג. מה יהיה מחיר הדירה:
(1) לפני 3 שנים.
(2) לפני 6.5 שנים.
- (2)** מחירו של מעבד מחשב חדשני גדל בכל שנה באותו אחוז.
כיום מחיר המעבד הוא 4000 ₪ ובעוד שנתיים מחירו הוא 4400 ₪.
א. מה הוא קצב הגדילה של מחיר המעבד?
ב. מה יהיה מחיר המעבד בעוד 5 שנים?
ג. מה יהיה מחיר המעבד לפני שנה?
ד. המעבד הושק לראשונה לפני 3 שנים. מה היה מחירו ההתחלתי?

(3) כמות העצים ביער מתרבה לפי סדרה הנדסית. כיום יש ביער $3 \cdot 10^5$ עצים.

בעוד שנתיים יהיו $8 \cdot 10^6$ עצים.

א. כמה עצים יהיו ביער בעוד 6 שנים ו-5 חודשים?

ב. כמה עצים היו ביער לפני שנתיים?

(4) במדינה מסוימת יש 16 מיליון תושבים.

ידוע כי אוכלוסיית התושבים במדינה זו גדלה בצורה מעריכית עם קצב שנתי של 3.7%.

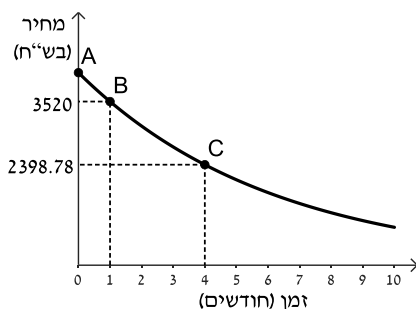
א. פי כמה גדלה אוכלוסיית המדינה מדי שנה?

ב. מה יהיה גודל האוכלוסייה בעוד 10 שנים?

ג. מה היה גודל האוכלוסייה במדינה לפני 10 שנים?

ד. קבעו ללא חישוב: האם כמות האוכלוסייה שתתווסף למדינה ב-10 השנים הראשונות

גדולה/קטנה/שווה לכמות האוכלוסייה שתתווסף למדינה ב-10 שנים לאחריהן?



(5) המחיר של טלפון נייד חדש קטן באופן מעריכי מדי חודש.

הגרף שלפניכם מתאר את מחיר הטלפון (בש"ח) מדי חודש

כפונקציה של הזמן בחודשים שחלפו מההשקה.

א. בהסתמך על הגרף:

(1) מהו מחיר הטלפון לאחר 4 חודשים מההשקה?

(2) מהו מחיר ההשקה של הטלפון? (הנקודה A).

ב. בכמה אחוזים קטן מחירו של הטלפון מדי חודש?

ג. האם הטענה הבאה נכונה או שגויה? נמקו בעזרת חישוב מתאים.

הירידה במחיר הטלפון במשך ארבעת החודשים

הראשונים גדולה פי 2 מהירידה במחיר בחודש הראשון בלבד.

לאחר שנה, הוציא היצרן דגם חדיש יותר שמחירו 4500 ש.

היצרן פרסם כי הוא מוכן לרכוש את הטלפונים הישנים במחירם שלאחר שנה.

ד. לשיר יש את הדגם הישן של הטלפון והיא מעוניינת למכור אותו חזרה ליצרן.

כמה כסף תקבל בעבורו?

ה. לליאן יש גם את הדגם הישן, אך היא מעוניינת לבצע החלפה לדגם החדש.

כמה כסף יהיה עליה להוסיף ליצרן בעסקת ההחלפה הזו?

תשובות סופיות:

- (1) א. $f(0) = 1.6$ (1) א. $q = 1.04$ (1) א. $f(t) = 1.6 \cdot 1.04^t$ (3) א. ג. (1) 1.422 מיליון ש. ב. (1) 1.8 מיליון ש. ג. (2) 1.24 מיליון ש. ד. 3475.17 ש.
- (2) א. $q = 1.048$ ב. $f(5) = 5076.23$ ג. 3816.8 ש. ב. 11250 עצים. ג. 11.126 מיליון תושבים. ד. 1.037
- (3) א. $1.127 \cdot 10^7$ עצים ב. 23 מיליון תושבים ג. הטענה אינה נכונה. ד. קטנה.
- (4) א. 1.037 ב. 12% ג. הטענה אינה נכונה. ד. 862.68 ש.
- (5) א. (1) 2398.78 ש. א. (2) 4000 ש. ב. 12% ג. הטענה אינה נכונה. ד. 862.68 ש. ה. 3637.31 ש.

מציאת קצב הגדילה או הדעיכה:

סיכום כללי:

ניתן למצוא את קצב הגדילה/הדעיכה בשאלה אם נקבל שני נתונים:
 - הגודל ההתחלתי.
 - הגודל לאחר פרק זמן נתון כלשהו.
 נחבר משוואה לפי הנוסחה המרכזית שלנו ונחלץ את q .

שאלות:

(1) מצאו את q :

א. $25 = 10 \cdot q^6$

ב. $512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40}$

ג. $10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25}$

ד. $9.35 = 7 \cdot q^{10.5}$

ה. $6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{\frac{1}{3}}$

ו. $13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3}$

(2) כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית.

אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה 500 טונות ובשנת 1990 היא הייתה 10,000 טונות, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?

(3) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית.

החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים.

בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג.

בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.

א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?

ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?

(4) מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.

- א. מהו קצב ירידת ערך המכונית השנתית?
ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנים?

(5) מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.

- א. מצאו מהו אחוז הריבוי השנתי.
ב. מצאו פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

תשובות סופיות:

- | | | | |
|------------------------|--------------------|-----------------|----------------|
| (1) א. $q = \pm 1.165$ | ב. $q = \pm 0.747$ | ג. $q = 0.7324$ | ד. $q = 1.028$ |
| ה. $q = 0.22$ | ו. $q = 1.03$ | | |
| (2) $P = 7.77\%$ | | | |
| (3) א. $q = 0.967$ | ב. 70.146 ק"ג. | | |
| (4) א. $q = 0.9065$ | ב. 77%. | | |
| (5) א. $P = 3.18\%$ | ב. פי 6.145. | | |

קצב המתייחס למחזורי זמן שונים:

סיכום כללי:

הגודל q מתאר את קצב הגדילה או הדעיכה והוא מיוחס לפרק זמן מסוים. בשאלות שבהן יש למצוא כמות לאחר פרק זמן שאינו נתון ביחידות הזמן של q , יהיה עלינו להמיר את החישוב כך שבחירת t תתאים לערך פרק הזמן הרצוי בהתאם ל- q .

שאלות:

- (1) בבריכת דגים מסוימת, אוכלוסיית הדגים גדלה בקצב מעריכי קבוע. נמצא כי כמות הדגים גדלה ב-30% מדי חודשיים.
 - א. מצאו בכמה אחוזים גדלה כמות הדגים מדי חודש?
 - ב. אם ידוע כי בתחילת שנת 2025 היו בבריכה 10,000 דגים, כמה דגים יהיו בה בדיוק לאחר שלושה רבעונים? (זכרו: רבעון הוא תקופה של 3 חודשים).
- (2) רועי הפקיד 5000 ₪ בתוכנית חיסכון בנקאית בתחילת שנת 2010. תוכנית זו מציעה ריבית דריבית קבועה בשיעור של 12% כל 5 שנים. מה הסכום הצפוי להיות בתוכנית החיסכון של רועי בתחילת שנת 2028?
- (3) בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.
 - א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?
 - ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?
- (4) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?

תשובות סופיות:

- (1) א. 14% ב. 32519 דגים.
- (2) 7518.91 ₪.
- (3) א. $q = 1.032$ ב. 2115 תוכים.
- (4) 3.5%.

מציאת הזמן:

סיכום כללי:

כלל:

פתרון משוואה מהצורה: $q^t = b$ ($q > 0, q \neq 1, b > 0$) הוא: $t = \frac{\ln b}{\ln q}$.

נעזר במשוואה כדי לבודד את t מהמשוואה $f(t) = f(0) \cdot q^t$ ולקבל: $t = \frac{\ln\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right)}{\ln(q)}$.

שאלות:

(1) מצאו את t :

א. $10 \cdot 1.05^t = 70$

ב. $62 \cdot 0.8^t = 39.68$

ג. $7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5$

(2) הריבית השנתית שמציע בנק מסוים בעבור פתיחת חשבון חיסכון היא 2.4%.

אדם הפקיד בחשבון החיסכון 12,000 ש.

תוך כמה שנים יהיה בחשבונו 15,000 ש?

(3) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנים.

אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?

(4)

מדען שוקל כמות חומר רדיואקטיבית 3 פעמים ביום מסוים.

בשקילה הראשונה כמות החומר היא 120 גרם.

לאחר מספר שעות, התבצעה השקילה השנייה, וכמות החומר הייתה 61.44 גרם.

בשקילה השלישית כמות החומר הייתה 31.457 גרם.

א. נתונים ארבעה ערכים אפשריים לקצב השינוי q .

איזה מבין הערכים אפשרי לתאר את q על פי נתוני השאלה? נמקו.

(1) $q = -0.8$ (2) $q = 0.8$ (3) $q = -1.08$ (4) $q = 1.08$

ב. השתמשו בערך של q שמצאתם בסעיף א ומצאו לאחר כמה שעות התבצעה השקילה השנייה.

ג. המדען שקל את החומר בפעם הראשונה בשעה 7:00.

באיזו שעה התבצעה השקילה השלישית?

(5)

כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה.

בשנת 1990 נספרה כמות מסוימת של עצים ביער ובשנת 2000 כמות העצים ביער גדלה

ל-8050 עצים בסה"כ. מסמנים ב- $f(0)$ את מספר העצים ביער בשנת 1990.

א. מצאו את $f(0)$.

לאחר שבוצעה הספירה בשנת 2000, החלו להשתמש בעצים לצרכים תעשייתיים

ובכך קצב העצים דעך באחוז הגדול פי 2 מאחוז הגדילה.

ב. קבעו איזה מבין הגרפים I-III מתאר את כמות העצים ביער החל משנת 1990 ועד לשנת 2005.



ג. לאחר כמה שנים יהיו ביער פחות מ-1933 עצים?

ד. לאחר כמה שנים יהיו ביער פחות עצים מאשר כמות העצים שנספרה בשנת 1990?

תשובות סופיות:

- (1) א. $t = 39.88$ ב. $t = 2$ ג. $t = 33.011$
- (2) לאחר 9.4 שנים.
- (3) לאחר 7.47 שנים.
- (4) א. $q = 0.8$ ב. לאחר 3 שעות ג. בשעה 13:00.
- (5) א. $f(0) = 1989$ ב. גרף III ג. לאחר 4 שנים
- ד. לאחר 4 שנים.

זמן מחצית החיים:

סיכום כללי:

נוסחה:

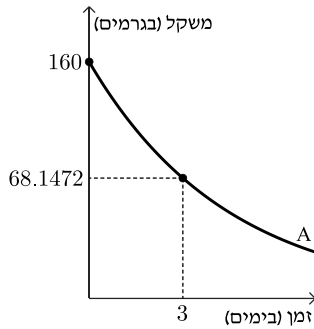
זמן המחצית החיים של תהליך דעיכה מעריכי בקצב q הוא: $t = -\frac{\ln 2}{\ln q}$.

הערה:

ניתן לכתוב את הנוסחה גם: $t = \frac{\ln(1/2)}{\ln q}$.

שאלות:

- (1) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית.
אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
- (2) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים.
תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
- (3) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים.
מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות.
מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות.
באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?



(4) נתונים שני חומרים רדיואקטיביים A ו-B המתפרקים בקצב שונה.

לוקחים 160 גרם מחומר A וכמות כלשהי מחומר B.

הגרף שלפניכם מתאר את משקלו של חומר A בימים.

א. (1) מצאו את קצב הדעיכה של חומר A.

(2) מצאו את זמן מחצית החיים של חומר A.

ידוע כי זמן מחצית החיים של חומר B גדול פי 3 מזמן

מחצית החיים של חומר A.

ב. (1) מהו זמן מחצית החיים של חומר B?

(2) מהו קצב הדעיכה היומי של חומר B?

(3) מהו אחוז הדעיכה היומי של חומר B?

ג. מה היא הכמות ההתחלתית של חומר B אם ידוע כי במשך זמן השווה

לזמן מחצית החיים של חומר A נשארו ממנו 80 גרם?

תשובות סופיות:

(1) 12.425 שעות.

(2) 9.358 ימים.

(3) קצת לפני השעה 18:00.

(4) א. (1) $q = 0.752$ א. (2) 2.43 ימים ב. (1) 7.31 ימים ב. (2) 0.91.

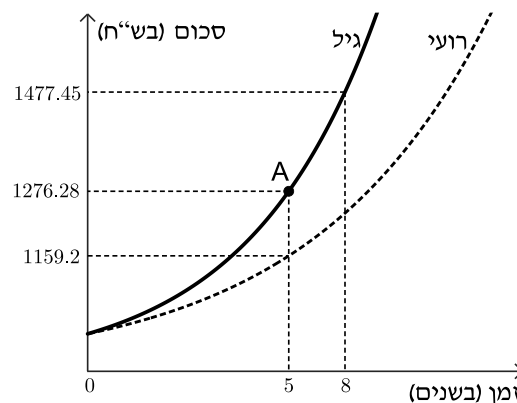
ב. (3) $P = 9\%$ ג. 100.6 גרם.

שאלות עם שני תהליכים:

שאלות:

(1) אביהם של גיל ורועי החליט לפתוח עבורם תוכניות חיסכון פיננסי בחברת השקעות 'עמיד ילדינו'.

החברה נתנה הצעות שונות לכל אחד מהתוכניות ובהן קצב גדילה שנתי שונה. האב פתח לכל ילד תוכנית חיסכון והפקיד בה את אותו הסכום ההתחלתי. קצב הגדילה של החסכונות בכל תוכנית מתואר בגרפים הבאים:



- א. מה הוא אחוז הריבית השנתית בתוכנית של גיל?
- ב. מצאו מהו סכום הכסף הכולל שהפקיד האב עבור שני בניו יחד ביום פתיחת התוכניות.
- ג. מהו קצב הגדילה השנתי של סכום הכסף בתוכנית החיסכון של רועי?
- ד. כעבור כמה שנים מרגע פתיחת התוכניות, יהיה סכום הכסף בחיסכון של גיל גדול ב-5% מסכום הכסף בחיסכון של רועי?
- ה. לאחר כמה שנים מתחילת פתיחת התוכניות יהיה סכום הכסף בחשבונו של רועי שווה לסכום הכסף שהיה בחשבונו של גיל כפי שמיוצג בנקודה A?

(2) בדקו את ירידת הערך של שני מעבדי מחשב, A ו-B, המיוצרים ע"י חברות מתחרות. הבדיקה נערכה לאורך מספר חודשים מרגע השקתם.

ירידת הערך של מעבד A מתוארת ע"י הפונקציה: $f(t) = 2400 \cdot 0.88^t$.

ירידת הערך של מעבד B מתוארת ע"י הפונקציה $g(t)$.

ידוע כי לאחר 7 חודשים ערכו של מעבד A היה 75% מערכו של מעבד B.

א. (1) בכמה אחוזים יורד ערכו של מעבד A מדי חודש?

(2) מה ערכו של מעבד A לאחר 7 חודשים?

ב. מצאו מה היה ערכו של מעבד B לאחר 7 חודשים?

נתון כי לאחר 5 חודשים מרגע ההשקה, מחירי שני המעבדים היו זהים.

ג. קבעו איזה גרף מבין הגרפים II-I מתאים ל- $f(t)$ ואיזה מתאים ל- $g(t)$.

נמקו את קביעתכם.

ד. ידוע כי מעבד B מאבד 1.6% מערכו מדי חודש.

(1) כתבו את קצב הדעיכה החודשי של מעבד B.

(2) מצאו את מחירו ההתחלתי של מעבד B.

(3) רשמו את הביטוי האלגברי עבור הפונקציה $g(t)$.

(3) אדם מעוניין להפקיד סכום כסף מסוים בתוכנית חיסכון למשך 18 חודשים.

לפניו שתי הצעות מבנקים שונים, כאשר בשתיהן סכום הכסף גדל באחוז קבוע מדי שנה:

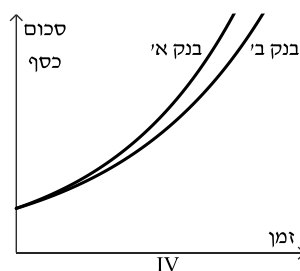
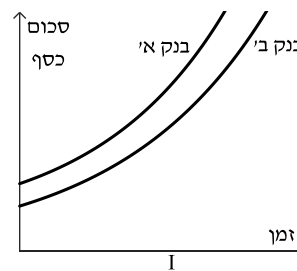
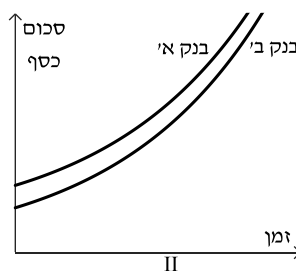
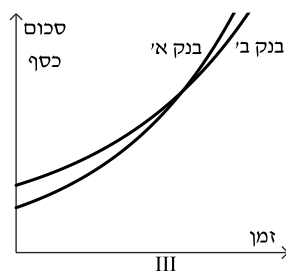
בנק א' מציע ריבית של 3% בכל שנתיים.

בנק ב' מציע ריבית של 4.5% בכל שלוש שנים.

א. באיזה בנק כדאי לאדם לבחור עבור תקופת החיסכון המתוכננת (18 חודשים)?

ב. לפניכם ארבעה גרפים (I-IV) המתארים את השינוי בסכום הכסף כפונקציה של הזמן.

קבעו איזה גרף מתאים לכל בנק. נמקו את בחירתכם.



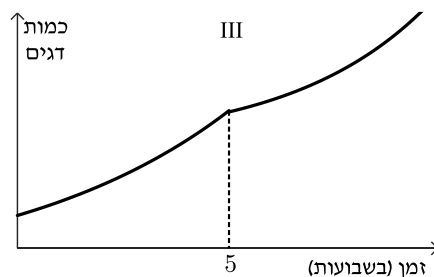
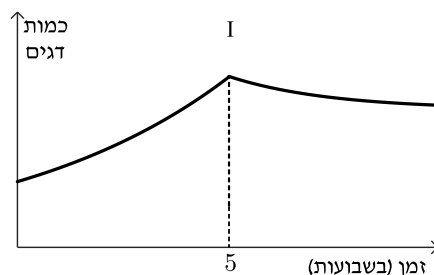
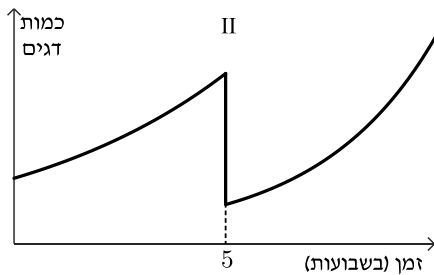
תשובות סופיות:

- (1) א. $p = 5\%$ ב. 2000 ₪ ג. $q = 1.03$ ד. 2.537 שנים.
ה. לאחר 8.253 שנים.
- (2) א. (1) $p = 12\%$ א. (2) 980.82 ₪ ב. 1307.76 ₪
ג. גרף I: $g(t)$, גרף II: $f(t)$.
- ד. (1) $q_b = 0.984$ ד. (2) 1464 ₪ ד. (3) $g(t) = 1464 \cdot 0.984^t$.
- (3) א. בנק א'. ב. גרף IV.

שאלות מרובות שלבים:

שאלות:

- (1) סוחר רכש בריכה ובה 1000 דגי סלמון. כמות הדגים בבריכה גדלה מדי שבוע באחוז קבוע של 7%. לאחר 5 שבועות מרגע הרכישה, הוציא הסוחר 500 דגים מהבריכה לצורך מכירה.
- א. כמה דגים יהיו בבריכה לאחר 5 שבועות **לפני** המכירה של הסוחר?
- ב. כמה דגים יהיו בבריכה לאחר חודשיים (חודש בן 4 שבועות) מרגע הרכישה? נתון כי מיד לאחר הוצאת 500 הדגים מהבריכה, השתנה קצב הגידול של הדגים והוא עלה ל-10% בשבוע. כמה דגים יהיו בחלוף חודשיים מרגע המכירה במקרה זה?
- ג. קבעו איזה גרף מבין הגרפים I-III מתאר נכונה את תהליך הגידול של הדגים בבריכה עבור המקרה המתואר בסעיף ב'. נמקו את קביעתכם.



(2) בתרבית חיידקים נמדדו ברגע המדידה הראשון $4 \cdot 10^4$ חיידקים.

לאחר 4 שעות, גדלה הכמות ל- $5 \cdot 10^5$ חיידקים.

ידוע כי קצב הגדילה של החיידקים הוא מעריכי.

א. מצאו את קצב הגדילה השעתי של החיידקים בתרבית.

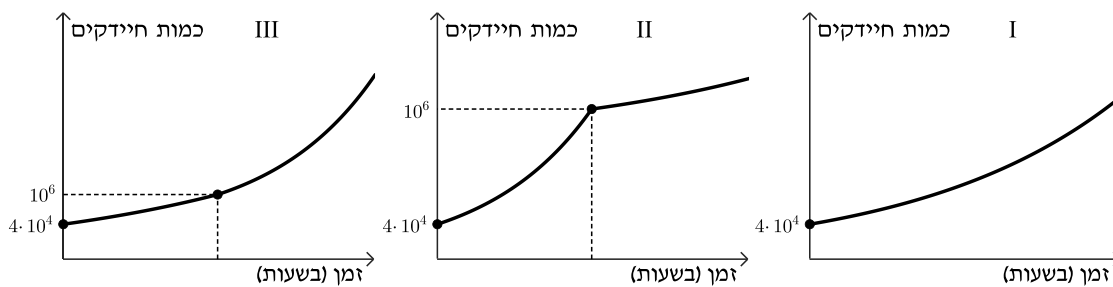
ב. מדען גילה כי ברגע שכמות החיידקים בתרבית מגיעה ל- 10^6 , חל שינוי בתנאי הגידול

וקצב הגדילה השעתי קטן ב-30%.

כמה זמן יעבור מרגע המדידה הראשונה ועד שיהיו בתרבית 10^7 חיידקים.

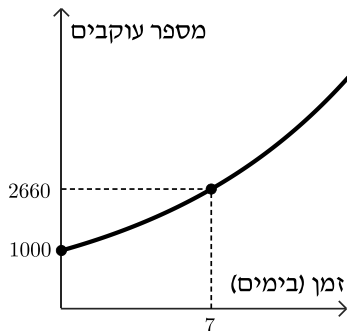
ג. לפניכם שלושה גרפים I-III, קבעו איזה מהם מתאר נכונה את כמות החיידקים בתרבית

מרגע המדידה הראשונה. נמקו את קביעתכם.



3 מספר העוקבים אחר משפיען ברשת חברתית גדל מדי יום באחוז קבוע. ביום פתיחת הערוץ היו למשפיען $f(0)$ עוקבים.

הגרף שלפניכם מתאר את מספר העוקבים ב-30 הימים הראשונים.



א. בהסתמך על נתוני הגרף מצאו:

(1) כמה עוקבים היו למשפיען ביום השקת הערוץ.

(2) מה הוא אחוז הגידול היומי במספר העוקבים

אחר הערוץ של המשפיען.

(עגלו את תשובתכם לאחוז שלם).

ב. פי כמה גדל מספר העוקבים של המשפיען

במהלך 30 ימי הפעילות הראשונים שלו?

לאחר 30 ימים, התפרסמו ידיעות שקריות אודות המשפיען ומספר העוקבים החל לקטון

באחוז יומי קבוע. נתון כי אחוז הדעיכה היומי גדול פי 2 מאחוז הגדילה היומי שהיה לפני כן.

ג. כעבור כמה ימים מרגע שהחל מספר העוקבים לקטון, תחזור כמות העוקבים לכמות

שהייתה ביום השקת הערוץ?

ד. לפניכם שלושה גרפים I, II, III, קבעו איזה מהם מתאר נכונה את מספר העוקבים החל מיום

השקת הערוץ ועד לחזרת הכמות לערכה ההתחלתי. נמקו את קביעתכם.



תשובות סופיות:

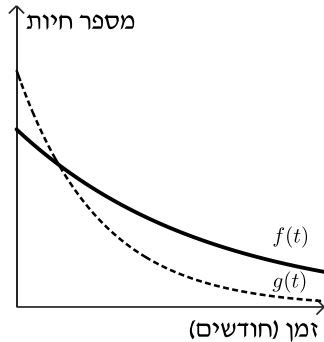
- | | | | |
|------------------------|-------------------|--------------|-----------------|
| (1) א. (1) 1402 דגים | א. (2) 1105 דגים | ב. 1200 דגים | ג. גרף II. |
| (2) א. $q = 1.8803$ | ב. 13.48 שעות | ג. גרף II. | |
| (3) א. (1) 1000 עוקבים | א. (2) $q = 1.15$ | ב. פי 66.211 | ג. 11.768 ימים. |
| ד. גרף III. | | | |

שאלות:

(1) הגרף שלפניכם מתאר את הירידה במספר השועלים והיגוארים באזור אקלימי חם מהרגיל לאורך מספר שבועות. מספר השועלים ומספר היגוארים קטן בקצב מעריכי קבוע מדי שבוע.

מספר השועלים מיוצג ע"י הפונקציה: $f(t) = 1350 \cdot 0.83^t$

ומספר היגוארים מיוצג ע"י הפונקציה: $g(t) = g(0) \cdot q^t$.



א. קבעו אלו מהטענות הבאות היא הנכונה:

(1) $q > 1$

(2) $0.83 < q < 1$

(3) $0.4 < q < 0.83$

ב. קבעו אלו מהטענות הבאות היא הנכונה:

(1) $g(0) > 1350$

(2) $g(0) = 1350$

(3) $g(0) < 1350$

ג. הציעו ייצוג אלגברי אשר יכול להתאים לתיאור הפונקציה $g(t)$.

(2) מספר הדבורים בכוורת א' גדל בצורה מעריכית לפי הפונקציה: $f(t) = 520 \cdot 1.08^t$.

ידוע כי קצב הגדילה של הדבורים הוא חודשי.

בכוורת ב' היו ברגע הספירה הראשון כ-800 דבורים ומספרם גדל בכל חודש פי q .

א. אם ידוע כי לאחר פרק זמן מסוים, השתווה מספר הדבורים בשתי הכוורות,

בהסתמך על נתוני השאלה, קבעו איזה מהתנאים הבאים מתקיים עבור q :

(1) $q > 1.08$

(2) $q = 1.08$

(3) $q < 1.08$

ב. אלו מבין הפונקציות הבאות מתארת נכונה את מספר הדבורים בכוורת ב'

כפונקציה של הזמן?

(1) $g(t) = 800$

(2) $g(t) = 800 \cdot 1.2^t$

(3) $g(t) = 800 \cdot 0.94^t$

(4) $g(t) = 800 \cdot 1.05^t$

תשובות סופיות:

(1) א. $0.4 < q < 0.83$ ב. $g(0) > 1350$ ג. $g(t) = 1500 \cdot 0.7^t$

(2) א. $q < 1.08$ ב. $g(t) = 800 \cdot 1.05^t$

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים:

193.....חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות

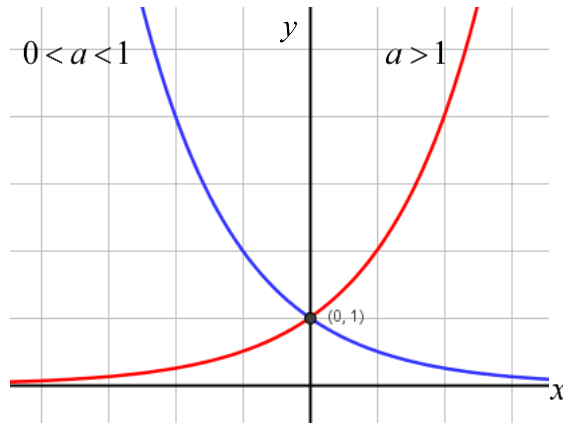
194.....	גזירה של פונקציות מעריכיות:
194.....	סיכום כללי:
195.....	שאלות:
196.....	תשובות סופיות:
197.....	שאלות עם משיקים:
197.....	שאלות:
197.....	תשובות סופיות:
198.....	אסימפטוטות של פונקציות מעריכיות:
198.....	שאלות:
198.....	תשובות סופיות:
199.....	חקירת פונקציות מעריכיות:
199.....	שאלות:
201.....	תשובות סופיות:
202	שאלות שונות מבחינות:
202	שאלות:
204	תשובות סופיות:

גזירה של פונקציות מעריכיות:

סיכום כללי:

להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$

עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

- (1) הפונקציות מוגדרות לכל x .
- (2) הפונקציות תמיד חיוביות.
- (3) הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1)$.
- (4) עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:

תכונות נוספות:

- (1) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
 (2) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

שאלות:

- (1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$ ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$
 ג. $f(x) = 2^{3x}$ ד. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

- (2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x) = x \cdot e^x$ ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$ ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

- (3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

- (4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$ ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

תשובות סופיות:

- (1) $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$.א
- (2) $3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$.ג
- (3) $(1+x)e^x$.א
- (4) $\frac{x(2-x)}{e^x}$.א
- ג. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$
- ד. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$
- ב. $2xe^{4x}(1+2x)$
- ג. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
- ב. $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}}$
- א. $2^x(1+x \ln 2 + \ln 2)$
- א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$

שאלות עם משיקים:

שאלות:

(1) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה: $A(1, e)$.

(2) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה: $x = 0$.

(3) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

תשובות סופיות:

$$y = ex \quad (1)$$

$$y = 3x + 1 \quad (2)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e-1)x + e \quad (3)$$

אסימפטוטות של פונקציות מעריכיות:

שאלות:

(1) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = (x+2) \cdot e^x$.

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{3-x}$.

(3) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$.

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$.

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = (e^x - 2)^2$.

תשובות סופיות:

(1) אסימפטוטה אנכית: אין. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$ כאשר $x \rightarrow -\infty$

(2) אסימפטוטה אנכית: $x = 3$. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$ כאשר $x \rightarrow -\infty$

(3) אסימפטוטה אנכית: $x = 0$. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$ כאשר $x \rightarrow \infty$

(4) אסימפטוטה אנכית: $x = 0$. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$ כאשר $x \rightarrow -\infty$

(5) אסימפטוטה אנכית: אין. אסימפטוטה אופקית: $y = 4$ כאשר $x \rightarrow -\infty$

חקירת פונקציות מעריכיות:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{2x-1}{e^x}$	ב. $f(x) = \frac{3}{e^x-1}$
ג. $f(x) = \frac{x+1}{e^x-5}$	ד. $f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$
ה. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}$	

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$.

(3) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

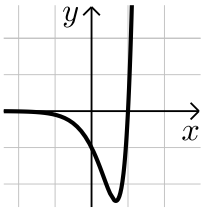
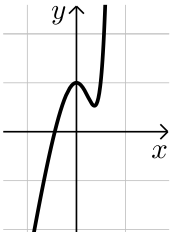
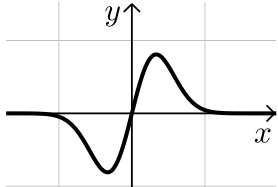
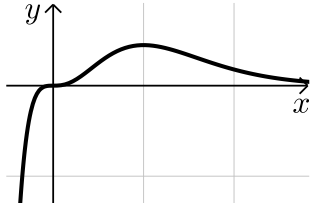
(6) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

- (1) א. כל x ב. $x \neq 0$ ג. $x \neq \ln 5$
 ד. $x \neq \ln 2, x \neq 0$ ה. כל x
- (2) $\min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$
- (3) $\min(3, e^3)$
- (4) א. כל x ב. $\min(2, -e^2)$ ג. תחומי עלייה: $x > 2$ תחומי ירידה: $x < 2$
 ד. $(3,0), (0,-3)$ ה. להלן סקיצה:
- 
- (5) א. כל x ב. $\max(0,3), \min(\ln 3, 1.59)$ ג. תחומי עלייה: $x < 0$ או $x > \ln 3$
 תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$ ד. $(0,3)$ ה. להלן סקיצה:
- 
- (6) א. כל x ב. $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right), \max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$ ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ תחומי ירידה: $x < -1$ או $x > 1$
 ד. $(0,0)$ ה. להלן סקיצה:
- 
- (7) א. כל x ב. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$ ג. עולה: $x < 3$, יורדת: $x > 3$
 ד. $(0,0)$ ה. להלן סקיצה:
- 

שאלות שונות מבחינות:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2 + 6x + k}}$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2 + 6x + 1}} \leq e^2$.

(3) לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

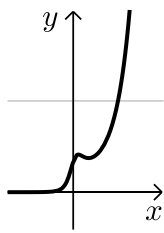
(4) הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- ב. מצא את הנקודות המקיימות $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ו. קבע כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x) = -0.01$.

תשובות סופיות:



(1) א. כל x ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$ ה. להלן סקיצה:

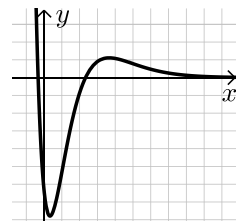
ג. עולה: $x < \frac{1}{6}, x > \frac{1}{2}$ יורדת: $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$ ד. $(0,1)$



(2) א. $k=1, f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1, e^2)$ ה. להלן סקיצה:

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך

הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$



ה. להלן סקיצה:

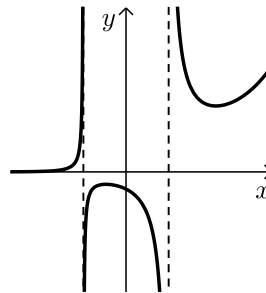
(3) א. $a = \frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1 < x < 11$ יורדת: $x < 1, x > 11$

ד. $(-1, 0), (7, 0), (0, -7e)$

(4) א. $m = -6, f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$

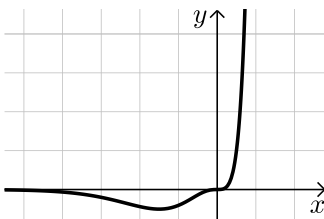
ב. $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right), \min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$ ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

ד. להלן סקיצה:



(5) א. כל x ב. $x = 0, -1.5$ נקודת הקיצון היא: $\min(-1.5, -0.168)$

ג. עולה: $x < -1.5, x > -1.5$ יורדת: $(0,0)$ ה. להלן סקיצה:



ו. 2 פתרונות.

שאלון 472

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות

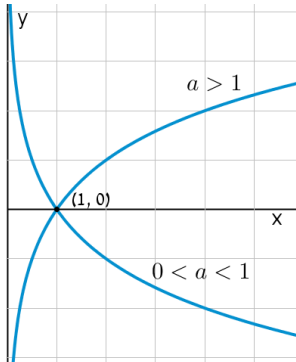
תוכן העניינים:

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות.....205

206	גזירה של פונקציות לוגריתמיות:
206	סיכום כללי:
207	שאלות:
208	תשובות סופיות:
209	שאלות עם משיקים:
209	שאלות:
209	תשובות סופיות:
210.....	אסימפטוטות של פונקציות לוגריתמיות:
210.....	שאלות:
210.....	תשובות סופיות:
211.....	חקירת פונקציות לוגריתמיות:
211.....	שאלות:
212.....	תשובות סופיות:
213.....	שאלות שונות מבחינות:
213.....	שאלות:
216.....	תשובות סופיות:

גזירה של פונקציות לוגריתמיות:

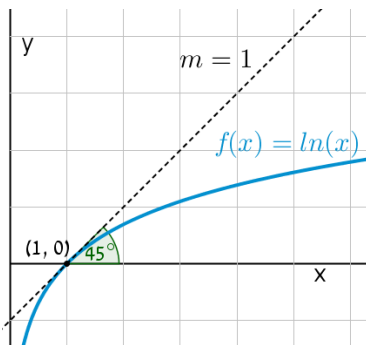
סיכום כללי:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$ עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$

ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$

ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

תשובות סופיות:

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \text{ג} \qquad f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \cdot \text{א} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \text{ד} \qquad f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \cdot \text{ז}$$

$$f'(x) = -\tan x \cdot \text{ה}$$

$$f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \cdot \text{ב} \qquad f'(x) = \ln x + 1 \cdot \text{א} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \cdot \text{ה} \qquad f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \cdot \text{ד} \qquad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot \text{ז}$$

$$f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \cdot \text{ז} \qquad f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \cdot \text{ב} \qquad f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \cdot \text{א} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \cdot \text{ד}$$

שאלות עם משיקים:

שאלות:

(1) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

תשובות סופיות:

$$y = \frac{1}{e}x \quad (1)$$

אסימפטוטות של פונקציות לוגריתמיות:

שאלות:

(1) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$.

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$.

(3) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = x \ln x$.

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = x^2 \ln(-x)$.

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = 3 \ln x + \frac{6}{\ln x}$.

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{4x}{\ln x}$.

תשובות סופיות:

(1) אסימפטוטה אנכית: $x = 0$. אסימפטוטה אופקית: אין.

(2) אסימפטוטה אנכית: $x = 0$. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$ כאשר $x \rightarrow \infty$.

(3) אסימפטוטה אנכית: אין (יש נקודת אי הגדרה בראשית הצירים). אסימפטוטה אופקית: אין.

(4) אסימפטוטה אנכית: אין (יש נקודת אי הגדרה בראשית הצירים). אסימפטוטה אופקית: אין.

(5) אסימפטוטות אנכיות: $x = 0$, $x = 1$. אסימפטוטה אופקית: אין.

(6) אסימפטוטה אנכית: $x = 1$ (וגם יש נקודת אי הגדרה בראשית הצירים).

אסימפטוטה אופקית: אין.

חקירת פונקציות לוגריתמיות:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- א. $f(x) = \ln x$ ב. $f(x) = \ln(x^2)$
- ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$ ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
- ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$ ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
- ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

(3) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

תשובות סופיות:

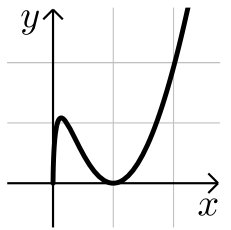
(1) א. $x > 0$ ב. $x \neq 0$ ג. $x > 10$ או $x < -2$ ד. $x > \ln 4$

ה. $0 < x \neq e$ ו. $x > 0$ וגם $x \neq e^3, e^{-1}$ ז. $x \geq e$

(2) $\max(1, -1)$

(3) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

(4) א. $x > 0$ ב. $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$ ה. להלן סקיצה:



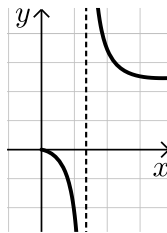
ג. עלייה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$.

ד. $(1, 0)$

(5) א. $0 < x \neq e$ ב. $\min(e^2, e^2)$

ג. עלייה: $x > e^2$, ירידה: $0 < x < e^2$ וגם $x \neq e$

ד. אין. ה. להלן סקיצה:



ו. $k > e^2$

שאלות שונות מבחינות:

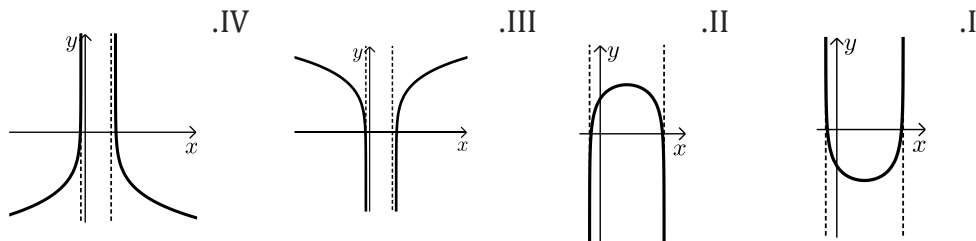
שאלות:

(1) נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
 (1) לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 (2) לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 (3) לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 (4) לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
 ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה.
 הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

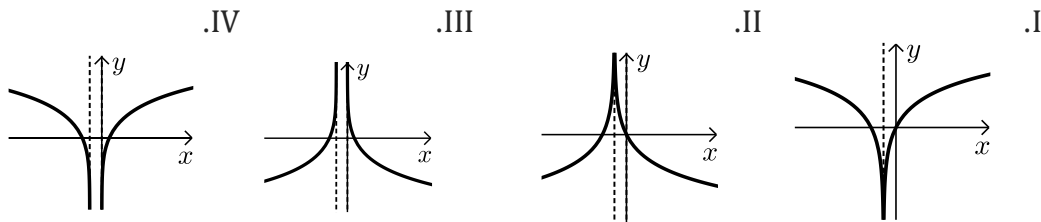
(2) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, IV.
 איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



(3) נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



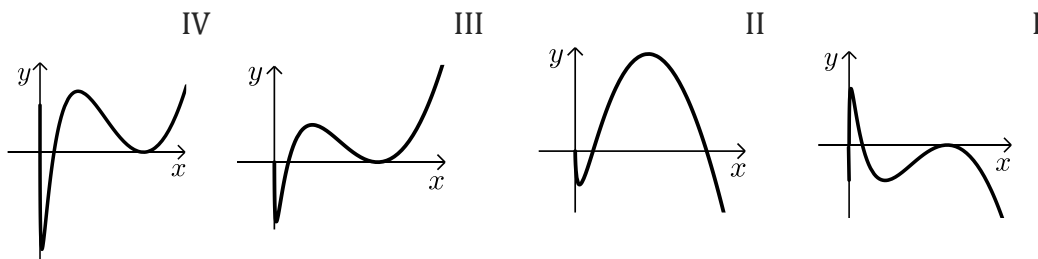
ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השלילות של הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות:
 - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.
- לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^3 x - 3 \ln x$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה: $g(x) = \ln x$.

(7) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, a פרמטר חיובי, $a \neq 1$.

- א. הבע באמצעות a את:
 - (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - (2) הנקודה המקיימת $y' = 0$.
 - (3) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - (4) האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
- ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום: $x > e - 2$. מצא את a .
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.
- ד. נתון הישר: $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

(8) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
 - (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - (2) יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ?
- אם כן מצא אותה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

1. א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x > 0, x \neq 1$ ותחום ההגדרה

של $g(x)$ הוא: $x > 0$.

א. ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$ מדובר

במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

א. iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$ יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$ יורדת: $x > e$.

א. iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$.

$$\text{נכפול: } y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$$

2. א. $x > 7, x < -1$ ב. $x = -1, 7$ ג. עולה: $x > 7$ יורדת: $x < -1$.

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.

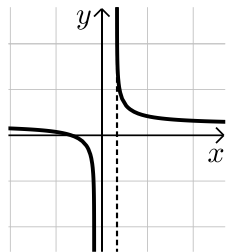
באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

3. א. $x \neq -1$ ב. $x = -1$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$.

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $-2 < x < 0, x \neq -1$.

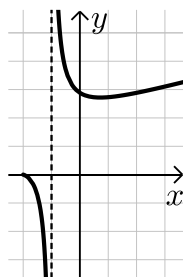
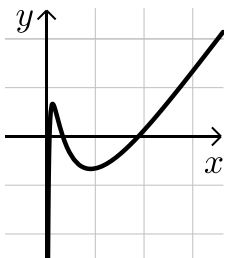
4. א. $x > -\frac{1}{3}$ ב. מתקבל: $y' = \frac{3}{(3x+1)\ln 2} > 0$ ה. להלן סקיצה:



5. א. $x \neq 0$ ב. $\max(-0.606, 0.53), \max(0.606, 0.53)$ ג. עולה: $0 < x < 0.606, x < -0.606$ יורדת: $0.606 < x < 0, -0.606 < x < 0$.

6. א. $a = 6$ ב. $(-4, 0), (-2, 0)$ ג. $(-30, 6), (24, 6)$.

7. א. $x > 2$ ב. מתקבל: $y' = \frac{2}{(x^2-4)\ln 4} > 0$ ה. להלן סקיצה:



ג. $x = 2 \frac{4}{15} \approx 2.266$ ד. להלן סקיצה:

8. א. $x > 2, x \neq 3$ ב. $y = -\frac{5}{4\ln 4}x + \frac{5+\ln 16}{\ln 4}$ ג. $\left(\frac{4(5+\ln 16)}{5}, 0\right), \left(0, \frac{5+\ln 16}{\ln 4}\right)$ ד. להלן סקיצה:

$$\left(\frac{4(5+\ln 16)}{5}, 0\right), \left(0, \frac{5+\ln 16}{\ln 4}\right)$$

$$S = \frac{2(5+\ln 16)^2}{5\ln 4}$$

שאלון 472

חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים:

217 חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות

218..... אינטגרלים מעריכיים:

218..... סיכום כללי:

218..... שאלות:

221..... תשובות סופיות:

222 תרגול נוסף:

222 שאלות:

228 תשובות סופיות:

אינטגרלים מעריכיים:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

$$\begin{aligned} \int e^x dx &= e^x + c \\ \int e^{mx+n} dx &= \frac{e^{mx+n}}{m} + c \end{aligned}$$

שאלות:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

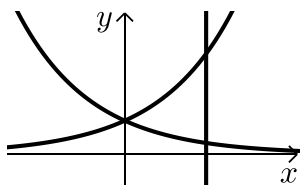
$$\begin{aligned} &\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx \quad \text{א.} \\ &\int (e^x + e^{-x})^2 dx \quad \text{ג.} \\ &\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx \quad \text{ב.} \end{aligned}$$

2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(\ln 2, 3\frac{1}{4})$.

3) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$.

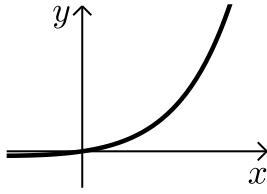
מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.



4) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

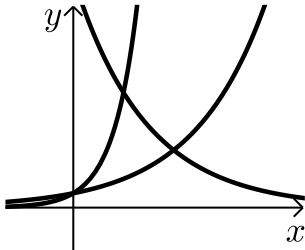
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

לישר $x = \ln 3$.



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - e^x$.

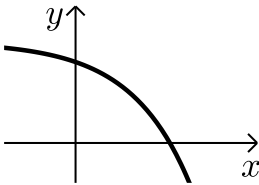
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x = 2$.



(6) נתונות הפונקציות:

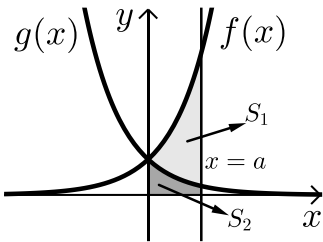
$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{3x}, \quad h(x) = 16e^{-x}$$

חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = 5 - e^x$.

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק
וציר ה- x . מניתן להשאיר e ו- $\ln$ בתשובה.



(8) באיור שלפניך מתוארים הגרפים

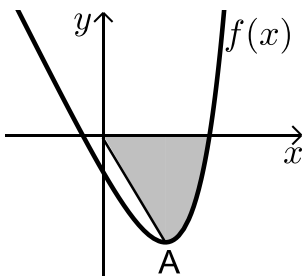
$$f(x) = e^{2x} \text{ ו- } g(x) = e^{-2x} - 1$$

של הפונקציות: $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x} - 1$.
מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x = a$ ($a > 0$),
כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .

ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .

מצא את a .



(9) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

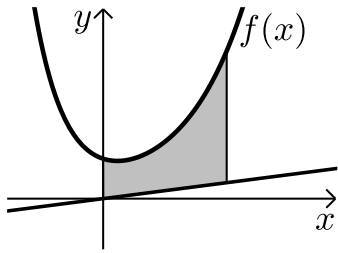
א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A
עם הראשית.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x ,

אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



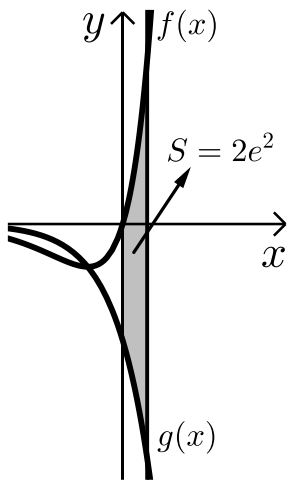
(10) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2}\right)$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 0.1x$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר y והאנך $x = 2$.



(11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

מעבירים ישר $x = a$ ($a > 0$), החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם,

ציר ה- y והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את a .

תשובות סופיות:

$$\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c \quad \text{ג.} \quad 3e^{2x-\frac{1}{2}} + c \quad \text{א.} \quad 5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c \quad (1)$$

$$f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1 \quad (3)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 1\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 18.41 \quad (5)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 3\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 0.192 \quad (7)$$

$$a = \ln 2 \quad (8)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 4.744 \quad \text{ג.} \quad y = -(e+2)x \quad \text{ב.} \quad A(1, -e-2) \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$1.52 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}, \quad a = -2 \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$a = 2 \quad \text{ב.} \quad y' = xe^x \quad \text{א.} \quad (11)$$

תרגול נוסף:

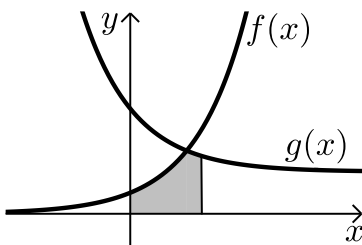
הערה:

לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בידאו והן ניתנו כבונוס לתרגול נוסף.

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x-1}$.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר $x = 2$ והצירים.



(2) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:

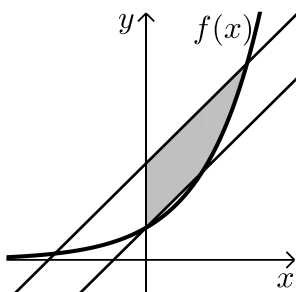
$$f(x) = e^x \text{ ו- } g(x) = ke^{-x} + 2 \text{ ידוע כי הגרפים חותכים}$$

זה את זה בנקודה שבה $x = \ln 3$.

א. מצא את k .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של

הפונקציות, הצירים והישר: $x = \ln 4$.



(3) באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x) = e^x$.

מעבירים ישר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה

עם ציר ה- y ודרך הנקודה שבה $x = 1$.

א. מצא את משוואת הישר.

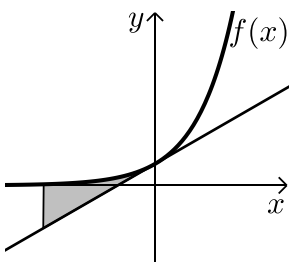
ב. מעבירים ישר נוסף המקביל לישר שמצאת קודם

וחותך את ציר ה- y בנקודה: $y = 3$.

ג. מצא את משוואת הישר השני.

ד. חשב את השטח הכלוא בין שני הישרים, ציר ה- y וגרף הפונקציה

אם ידוע כי הישר השני חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1.8$.



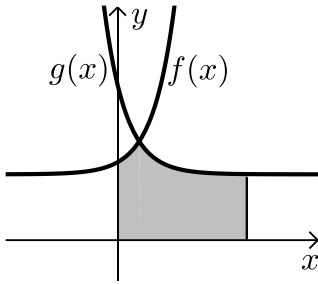
(4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המשיק לגרף

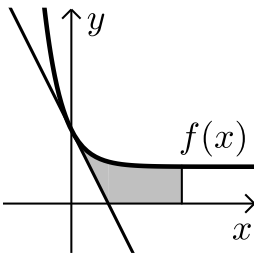
הפונקציה: $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- y .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

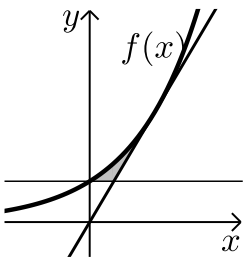
חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר: $x = -3$.



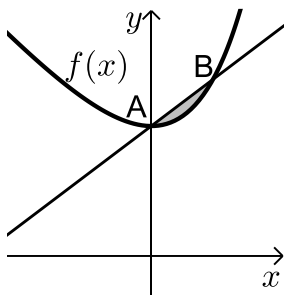
- (5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^{ax-1} + 2$ ו- $g(x) = e^{1-ax} + 2$. ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = \frac{1}{3}$.
- מצא את a וכתוב את הפונקציות.
 - חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- x והישר $x = 2$.



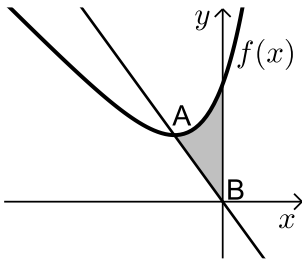
- (6) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{-2x} + 1$.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
 - מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
 - חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר: $x = 3$.



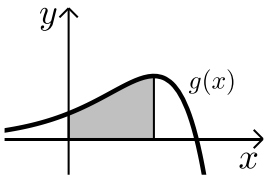
- (7) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{x+2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ ומעבירים ישר המקביל לציר ה- x ויוצא מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- כתוב את משוואת המשיק והראה כי הוא עובר דרך ראשית הצירים.
 - חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



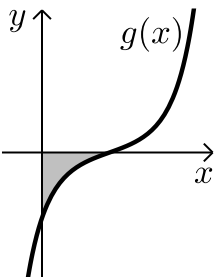
- (8) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - x + 1$. הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה ובה $x_B = 1$.
- מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.
 - חשב את השטח הכלוא בין הישר AB וגרף הפונקציה.



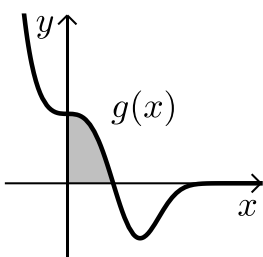
- 9** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x+2} - 2x - 1$. הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה B נמצאת בראשית הצירים.
- מצא את שיעורי הנקודה A.
 - כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.
 - חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר AB וציר ה-y.



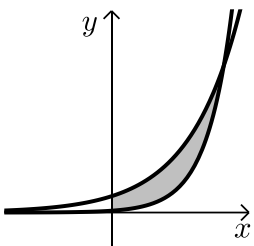
- 10** נתונה הפונקציה: $f(x) = (a-x)e^x$.
- הוכח כי: $f'(x) = (a-1-x)e^x$.
 - שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=3$ הוא אפס. מצא את a.
 - באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = (3-x)e^x$. מורידים אנך לציר ה-x מנקודת הקיצון של הפונקציה. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, הצירים והאנך.



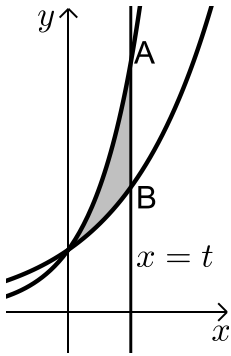
- 11** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^2-2x+k}$.
- ידוע ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=3$ הוא $4e^3$.
 - כתוב את נגזרת הפונקציה $f(x)$.
 - באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $g(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$ והצירים.



- 12** נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot e^{-9x^3}$.
- הוכח: $f'(x) = (1-27x^3)e^{-9x^3}$.
 - באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $g(x) = (1-27x^3)e^{-9x^3}$. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 13** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 9^x$ ו- $g(x) = 9 \cdot 3^x$.
- מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
 - חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים וציר ה-y.



14 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 2^x \text{ ו- } g(x) = 4^x - 1. \text{ ישר } x = t \text{ חותך את הגרפים}$$

של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור.

ידוע כי אורך הקטע AB הוא 240.

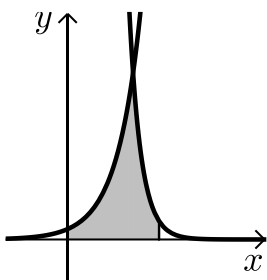
א. מצא את t .

ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים

על ציר ה- y .

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות

והישר שמצאת.



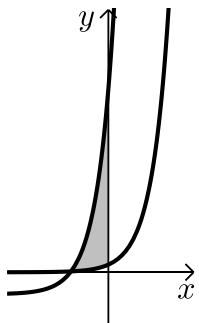
15 נתונות הפונקציות: $f(x) = 2^x$ ו- $g(x) = 4^{k-x} - 1$.

ידוע כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 4$.

א. מצא את k .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של

שתי הפונקציות, הישר $x = 8$ וציר ה- x .



16 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

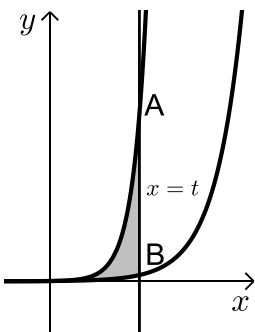
$$f(x) = 3^{x+2} \text{ ו- } g(x) = 3^{x+5} - 26.$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- y .

ג. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של

שתי הפונקציות וציר ה- y .



17 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 3^x \text{ ו- } g(x) = 9^x - 1. \text{ ישר } x = t, (t > 0) \text{ חותך את}$$

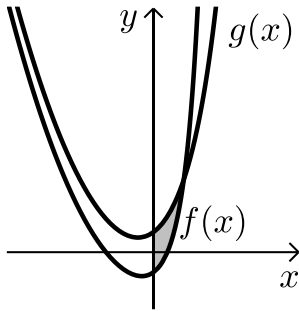
הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור.

ידוע כי אורך הקטע AB הוא 702.

א. מצא את t .

ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה- y .

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.



(18) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{2x} + x^2 + k$

ו- $g(x) = 2e^x + x^2$. ידוע כי המרחק בין שתי נקודות

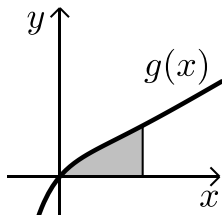
החיתוך של הגרפים עם ציר ה- y הוא 4.

א. מצא את k .

ב. מצא את נקודת החיתוך שבין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של

שתי הפונקציות וציר ה- y .



(19) ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = -(x+1)e^{-x}$.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = xe^{-x} + kx$.

ג. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

שבה $x=1$ הוא 1.

ד. מצא את k וכתוב את הפונקציה.

ה. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=2$.

(20) ענה על הסעיפים הבאים:

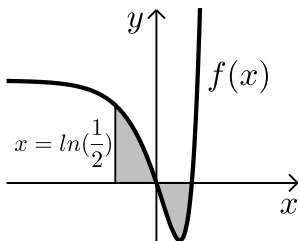
א. חשב את האינטגרל: $\int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 4} (e^{2x} - 5e^x + 4) dx$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = \ln 0.5$.

ד. הסבר מדוע התוצאות שקיבלת בסעיפים א' וב' שונות.



(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - e^{-x}$.

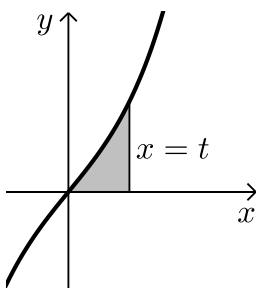
א. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים ישר $x=t$, $(t > 0)$, המאונך לציר ה- x

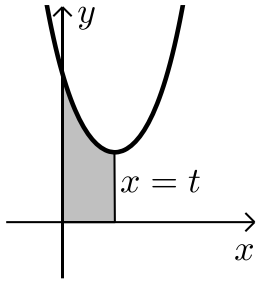
וחותך את גרף הפונקציה.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

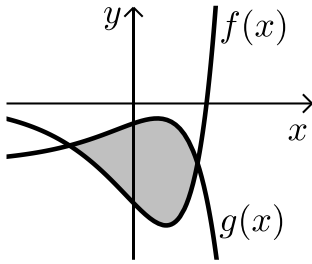
ציר ה- x והאנך הוא: $S = 1\frac{1}{3}$. מצא את t .



(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} + 16e^{-2x}$.



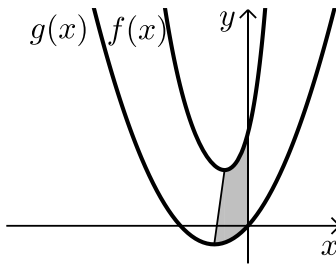
- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ב. מעבירים ישר $x = t$, $(t > 0)$ כמתואר באיור.
ידוע כי השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה והצירים הוא: $S = 7.5$.
הוכח כי ישר זה יוצא מנקודת הקיצון שמצאת בסעיף א'.



(23) באיור שלפניך נתונות הפונקציות:

$$f(x) = 2e^{2x} - 7e^x \quad \text{ו-} \quad g(x) = 3e^x - e^{2x} - 3$$

- א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים.



(24) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 4e^{2x} + e^{-x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = x^2 + 2x - 1$$

- א. מצא את נקודות הקיצון של כל פונקציה וקבע את סוגן.
- ב. מעבירים ישר המחבר את נקודות הקיצון של שני הגרפים כמתואר באיור.
כתוב את משוואת הישר הנ"ל (עגל תוצאות למספרים שלמים).
- ג. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- y והישר הנ"ל.

תשובות סופיות:

$$S = \frac{e^4 - 1}{2e} \quad (1)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 2.825 \quad \text{ב.} \quad k = 3 \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$S \sim \psi'' \text{ יח } 3 \quad \text{ג.} \quad y = (e-1)x + 3 \quad \text{ב.} \quad y = (e-1)x + 1 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 2.45 \quad \text{ב.} \quad y = x + 1 \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$S \sim \psi'' \text{ יח } 4.54 \quad \text{ב.} \quad g(x) = e^{1-3x} + 2, \quad f(x) = e^{3x-1} + 2, \quad a = 3 \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$S \sim \psi'' \text{ יח } 2.5 \quad \text{ג.} \quad (1, 0) \quad \text{ב.} \quad y = -2x + 2 \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$S = \frac{e^3 - 2e^2 - e}{2} \sim 1.3 \quad \text{ב.} \quad y = e^3 x \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 1.5 - \frac{e}{2} \approx 0.14 \quad \text{ב.} \quad y = (e-2)x + 2 \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$y = \frac{5 - \ln 4}{\ln 2 - 2} x \sim y = -2.76x \quad \text{ב.} \quad A(\ln 2 - 2, 5 - \ln 4) \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 3.433 \quad \text{ג.}$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 2e^2 - 4 \approx 10.78 \quad \text{ג.} \quad a = 4 \quad \text{ב.} \quad (10)$$

$$S = \frac{e-1}{e} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$S = \frac{1}{3\sqrt[3]{e}} \quad \text{ב.} \quad (12)$$

$$S = \frac{32}{\ln 3} \quad \text{ב.} \quad (2, 81) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$S = \frac{225}{\ln 4} \quad \text{ג.} \quad t = 4 \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$S = \frac{735}{32 \ln 2} \quad \text{ב.} \quad k = 6 \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 52 \cdot \frac{4 - \ln 3}{\ln 3} \quad \text{ג.} \quad (0, 9), (0, 217) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1) \quad \text{א.} \quad (16)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } \frac{338}{\ln 3} \quad \text{ג.} \quad t = 3 \quad \text{א.} \quad (17)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } \ln 27 \quad \text{ג.} \quad (\ln 3, 7.2) \quad \text{ב.} \quad k = -3 \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 3 - \frac{3}{e^2} \quad \text{ג.} \quad k = 1, \quad g(x) = xe^{-x} + x \quad \text{ב.} \quad f'(x) = xe^{-x} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$S \sim 2.6 \quad \text{ב.} \quad 4 \ln 8 - 9 \frac{5}{8} \approx -1.3 \quad \text{א.} \quad (20)$$

ג. בסעיף א' חושב ערך האינטגרל בלבד. בסעיף ב' ניתן לראות כי חלקו שלילי ולכן יש לפצל אותו כדי לקבל ערך מקסימלי.

$t = \ln 3$.ג (21)

$(\ln 2, 8)$.ח (22)

$S = 13\frac{1}{3} - 2\ln 27 \sim 6.74$.ג $(\ln 3, -3)$, $\left(\ln \frac{1}{3}, -2\frac{1}{9}\right)$.ח (23)

$S \sim 3.46$ יח"ש"ג $y = 13x + 12$.ג $\min(-1, -1)$, $\min\left(\ln \frac{1}{2}, 3\right)$.ח (24)

שאלון 472

חשבון אינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

תוכן העניינים:

230.....חשבון אינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

231.....אינטגרלים לוגריתמיים:

231.....סיכום כללי:

231.....שאלות:

234תשובות סופיות:

235תרגול נוסף:

235שאלות:

239תשובות סופיות:

אינטגרלים לוגריתמיים:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + c \\ \int \frac{1}{ax+b} dx &= \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c \end{aligned}$$

שאלות:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

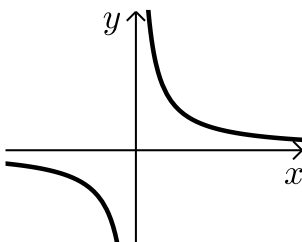
$$\text{א. } \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx \quad \text{ב. } \int \frac{x^2+3x-4}{x} dx \quad \text{ג. } \int \frac{x+3}{x^2-9} dx$$

(2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(5, 28)$.

(3) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1, -2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

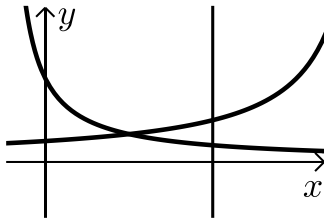


(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x = -1$, $x = -4$ וציר ה- x .

ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



(5) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $f(x) = \frac{4}{8-x}$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=4$ והצירים.

(6) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x-1}$

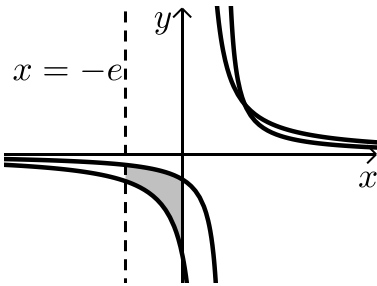
ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות,

ציר ה- y והישר $x=-e$.



(7) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

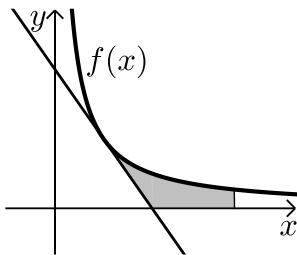
שבה: $x=2$ היא: $y=4-x$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$

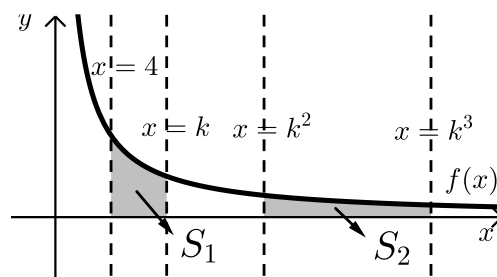
והמשיק בתחום: $x > 0$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x=e^2$.



(8) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$ בתחום: $x > 0$

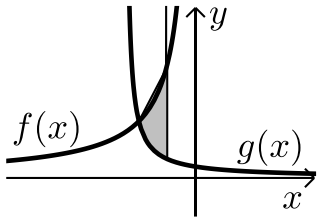
מעבירים את הישרים: $x=k^3$, $x=k^2$, $x=k$, $x=4$ ($k > 4$) כמתואר באיור.



א. הבע באמצעות k את השטחים: S_1 ו- S_2 .

ב. הראה כי ההפרש: $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצא את k .



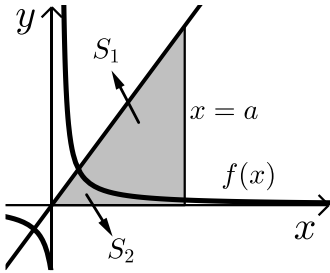
(9) נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



(10) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3x-1}$

והישר: $y = x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות

הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מעבירים אנך לציר ה- x - $x = a$ הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 המתוארים האיור.

ג. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$.

ד. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $S_1 : S_2$.

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{2} + 3x - 4 \ln|x| + c \quad \text{ב.} \quad 3 \ln|x| + 2 \ln|x+1| - \frac{4 \ln|3x-1|}{3} + c \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\ln|x-3| + c \quad \text{א.}$$

$$f(x) = x^2 - \ln|x-4| + 3 \quad (2)$$

$$f(x) = x^3 + \ln|x| - x - 2 \quad (3)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } \ln 4 \quad (4)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 2.17 \quad (5)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 1.76 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad a = 2 \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } 6 - 4 \ln 2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$k = 8 \quad \text{א.} \quad S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ב.} \quad S_1 = 2 \ln k - \ln 16, \quad S_2 = 2 \ln k \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$S = \psi'' \text{ יח } \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \quad \text{א.} \quad (-2, 2) \quad \text{ב.} \quad g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$a = 2 \quad \text{ב.} \quad (10)$$

תרגול נוסף:

הערה:

לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בידאו והן ניתנו כבונוס לתרגול נוסף

שאלות:

(1) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 8x - \frac{k}{x}$.

ידוע כי יש לפונקציה נקודת מינימום $(1,1)$.

א. מצא את k ואת הפונקציה $f(x)$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? נמק את תשובתך.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x+a}{x}$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 6.

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=e$.



(3) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{10}{x} \text{ ו- } g(x) = -x + 7.$$

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

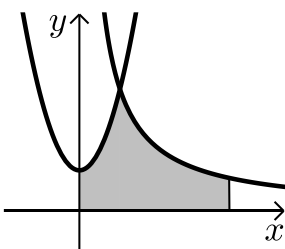
(4) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x}$ ו- $g(x) = x^2 + 2$.

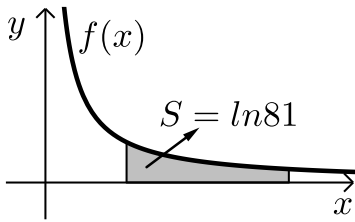
ידוע כי הגרפים נחתכים בנקודה שבה $x=2$.

א. מצא את a .

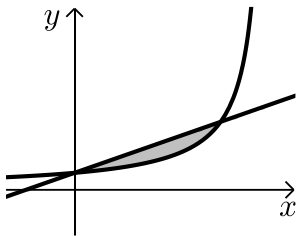
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים,

הצירים והישר $x=e^2$.

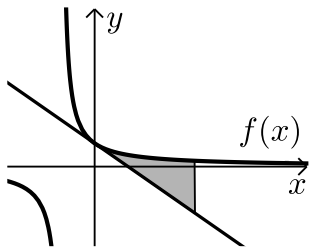




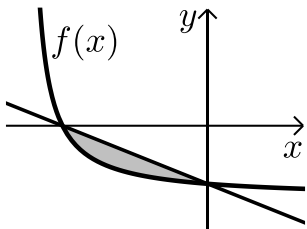
- (5) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$.
ידוע כי השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- x והישרים: $x = 4$ ו- $x = 4+t$ הוא $\ln 81$.
מצא את t .



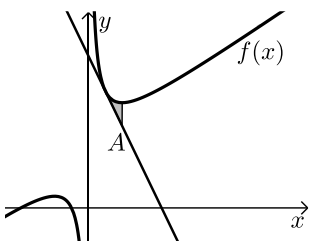
- (6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{4e-x}$
והישר: $g(x) = \frac{3}{4e^2}x + \frac{3}{4e}$.
א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות.



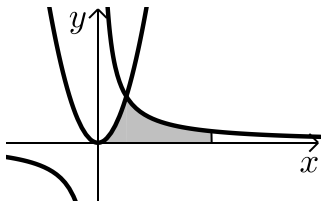
- (7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{ax+5}$, a פרמטר.
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך
שלה עם ציר ה- y הוא -0.12 .
א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
ב. כתוב את משוואת המשיק.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר $x = 2$.



- (8) גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x+5} - m$, m פרמטר,
חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = -4$.
א. מצא את ערך הפרמטר m .
ב. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות
החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר שמצאת בסעיף הקודם.

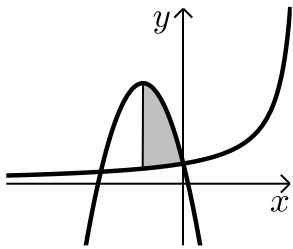


- (9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x} + x + 5$ בתחום: $x > 0$.
א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.
ב. מעבירים ישר המקביל לציר ה- y מנקודת המינימום של הפונקציה.
הישר חותך את משוואת המשיק בנקודה A.
ג. מצא את שיעורי הנקודה A.
ד. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק והישר.



10 באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = 3x^2$ ו- $g(x) = \frac{3}{x}$.

- מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
- חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- x והישר: $x = e^3$.

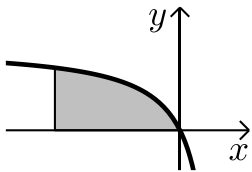


11 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6}{6-x}$ בתחום: $x < 0$.

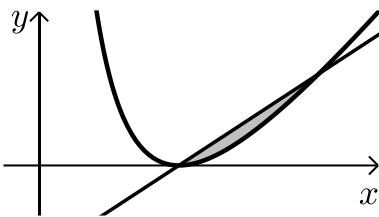
- מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y מעבירים את הפרבולה: $g(x) = -x^2 - 4x + 1$.
- מצא את נקודת הקודקוד של הפרבולה.
- חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים ואנך היוצא מנקודת הקודקוד של הפרבולה.

12 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{8}{x-2} + k$ בתחום: $x < 0$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את הישר: $y = x + 4$ בנקודה שבה: $x = 4$.

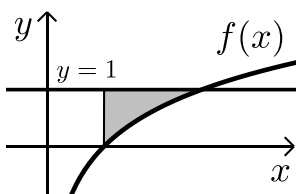


- מצא את k .
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x = -6$.



13 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$.

- מצא את נקודת המינימום של הפונקציה.
- מעבירים ישר דרך נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה שבה $x = 4$.
- מצא את משוואת הישר.
- חשב את השטח המוגבל בין הישר וגרף הפונקציה (העזר באיור).

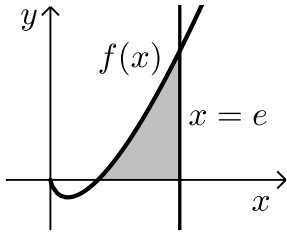


14 ענה על הסעיפים הבאים:

- גזור את הפונקציה הבאה: $y = 2x - x \ln x$.
- באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \ln x$. מעבירים ישר $y = 1$ החותך את גרף הפונקציה

- בנקודה A. מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x מעלים אנך לישר.
- היעזר בסעיף א' וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך והישר.

15) ענה על הסעיפים הבאים:



א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה: $y = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1)$

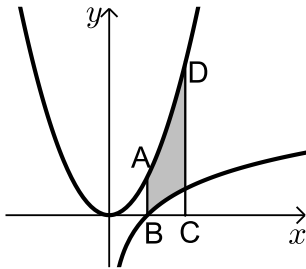
היא: $y' = x \ln x$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x \ln x$.

מעלים את הישר $x = e$ המאונך לציר ה- x החותך את גרף הפונקציה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- x .

16) ענה על הסעיפים הבאים:



א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = \frac{x^3}{3} + x - x \ln x$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים

של הפונקציות: $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = x^2 - 1$.

מעבירים את הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$ המקבילים לציר ה- y .

ישרים אלו חותכים את הגרפים של הפונקציות בנקודות A, B, C, D בהתאמה.

ג. חשב את השטח ABCD.

17) ענה על הסעיפים הבאים:

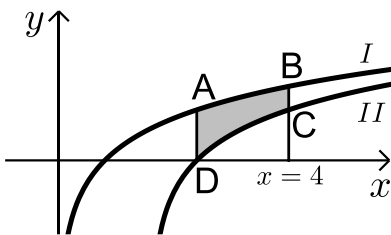
א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה: $y = 2 \ln(x-2) + x \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$ היא: $y' = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים

של הפונקציות: $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = \ln(x-2)$.

ג. קבע איזה מבין הגרפים I, II מתאר את $f(x)$

ואיזה את $g(x)$. נמק.



ד. מצא את נקודת החיתוך של כל גרף עם ציר ה- x .

ה. מנקודת החיתוך הגדולה יותר שמצאת בסעיף הקודם מעלים אנך לציר ה- x מהנקודה

D, החותך את הגרף השני בנקודה A (ראה איור).

מעבירים אנך נוסף $x = 4$ החותך את הגרפים בנקודות B ו- C.

העזר בסעיף א' וחשב את השטח ABCD - הכלוא בין שני הגרפים.

תשובות סופיות:

- (1) א. $k=8$, $f(x)=4x^2-8\ln|x|-3$ ב. $x \neq 0$ ג. עולה: $x > 1$, $-1 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 1$, $x < -1$. ד. לא. הנקודות הנמוכות ביותר בתחום הגדרתה נמצאות מעל לציר ה- x ולכן גם כל גרף הפונקציה.
- (2) א. $a=-6$ ב. $(2,0)$ ג. $S=3e+\ln 64-12$ יח"ש"
- (3) א. $(2,5)$, $(5,2)$ ב. $S=10.5+10(\ln 2-\ln 5)$ יח"ש"
- (4) א. $a=12$ ב. $S=30\frac{2}{3}-12\ln 2$ יח"ש"
- (5) $t=8$
- (6) א. $\left(0, \frac{3}{4e}\right)$, $\left(3e, \frac{3}{e}\right)$ ב. $S=5\frac{5}{8}-\ln 64$ יח"ש"
- (7) א. $a=3$, $f(x)=\frac{1}{3x+5}$ ב. $y=-0.12x+0.2$ ג. $S=0.1$ יח"ש"
- (8) א. $m=2$ ב. $y=-\frac{2}{5}x-1\frac{3}{5}$ ג. $S=4.8-\ln 25 \approx 1.58$ יח"ש"
- (9) א. $y=-3x+13$ ב. $(2,7)$ ג. $S=\ln 16-2 \approx 0.772$ יח"ש"
- (10) א. $(1,3)$ ב. $S=10$ יח"ש"
- (11) א. $(-2,5)$ ב. $S=7\frac{1}{3}-6(\ln 8-\ln 6) \approx 5.6$ יח"ש"
- (12) א. $k=4$ ב. $S=24-16\ln 2$ יח"ש"
- (13) א. $(2,0)$ ב. $y=\frac{1}{2}x-1$ ג. $S=3-\ln 16$ יח"ש"
- (14) א. $y'=1-\ln x$ ב. $S=e-2$ יח"ש"
- (15) ב. $S=\frac{e^2+1}{4}$
- (16) א. $y'=x^2-\ln x$ ב. $S=3\frac{1}{3}-\ln 4 \approx 1.94$ יח"ש"
- (17) א. $f(x)=I$, $g(x)=II$ ב. $(1,0)$, $(3,0)$ ג. $S=3\ln \frac{4}{3} \approx 0.863$ יח"ש"