תוכן עניינים כללי:

פרק 1 – מבוא לאלגברה 1

פרק 2 – משוואות אלגבריות 41

פרק 3 – אי-שוויונים אלגבריים 60

פרק 4 – נקודות וקטעים 69

פרק 5 – הקו הישר 77

פרק 6 – חזרה על משפטים מחטיבת הביניים 107

פרק 7 – קטע האמצעים במשולש 128

פרק 8 – קטע האמצעים בטרפז 134

פרק 9 – דמיון משולשים 140

פרק 10 – קטעים מיוחדים במשולש 149

פרק 11 – טריגונומטריה במשולש ישר זווית 159

פרק 12 – שאלות מסכמות בגאומטריה משולבת (ללא מעגל) 200

פרק 13 – המעגל במערכת הצירים 227

פרק 14 – משפטים במעגל 261

פרק 15 – טריגונומטריה – משפט הסינוסים 267

פרק 16 – שאלות מסכמות בגאומטריה משולבת (כולל מעגל) 270

פרק 17 – מושגים יסודיים בפונקציות 275

פרק 18 – פונקצית החזקה עם מעריך טבעי 287

פרק 19 – זוגיות ואי-זוגיות של פונקציות 294

פרק 20 – טרנספורמציות של פונקציות 301

פרק 21 – אנליזה של פונקצית פולינום 312
פרק 22 – פונקציה מורכבת ופונקצית מכפלה 333
פרק 23 – הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת 336
פרק 24 – קדם אנליזה של פונקצית השורש הריבועי 340
פרק 25 – אנליזה של פונקצית השורש הריבועי 353
פרק 26 – בעיות קיצון בפונקצית פולינום 369
פרק 27 – בעיות קיצון בפונקצית שורש 377
פרק 28 – קדם אנליזה של פונקצית מנה – הפונקציה ההופכית..... 382
פרק 29 – אנליזה של פונקצית מנה 398
פרק 30 – בעיות קיצון בפונקצית מנה 424
פרק 31 – האינטגרל הלא-מסוים 430
פרק 32 – האינטגרל המסוים וחישובי שטחים 435
פרק 33 – מבוא ומושגי יסוד 451
פרק 34 – מדדי מרכז 483
פרק 35 – מדדי פיזור 508
פרק 36 – מבוא להסתברות 518
פרק 37 – הסתברות עם דיאגרמת עץ 542
פרק 38 – הסתברות דו-מימדית 547
פרק 39 – התפלגות נורמלית 552
פרק 40 – רגרסיה ליניארית 586

שאלון 471

מבוא לאלגברה

תוכן העניינים:

מבוא לאלגברה..... 1

מספרים מכוונים:..... 3

סיכום כללי:..... 3

שאלות:..... 4

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים: 6

סיכום כללי:..... 6

שאלות:..... 7

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים: 7

סיכום כללי:..... 7

שאלות:..... 8

שברים פשוטים ועשרוניים: 8

סיכום כללי:..... 8

שאלות:..... 9

אחוזים:..... 12

שאלות:..... 12

כפל וחילוק שברים:..... 12

סיכום כללי:..... 12

שאלות:..... 13

חיבור חיסור שברים: 13

סיכום כללי:..... 13

שאלות:..... 14

בעיות יסודיות באחוזים: 17

סיכום כללי:..... 17

שאלות:..... 17

חזרה על תבניות מספר:..... 18

סיכום כללי:..... 18

שאלות:..... 18

כינוס איברים: 19
סיכום כללי: 19
שאלות: 20
פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים: 21
סיכום כללי: 21
שאלות: 21
פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר: 22
סיכום כללי: 22
שאלות: 23
פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים: 24
סיכום כללי: 24
שאלות: 24
פירוק הטרינום: 26
סיכום כללי: 26
שאלות: 26
שברים אלגבריים: 27
סיכום כללי: 27
שאלות: 28
כפל וחילוק של שברים אלגבריים: 29
סיכום כללי: 29
שאלות: 30
חיבור וחיסור של שברים אלגבריים: 30
סיכום כללי: 30
שאלות: 31
שברים כפולים: 33
סיכום כללי: 33
שאלות: 33
תשובות סופיות: 34

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

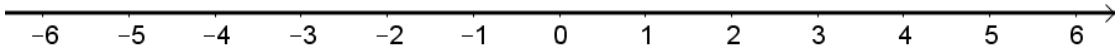
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ -5\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

4) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-2)$

ב. $(-5)\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ג. $(-5)\cdot(-6)\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

ד. $5\cdot 6\cdot(-10)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot(-1)$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-25):(-5)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $18:(-6)$

ו. $(-16):4$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים.
סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה.
סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

9) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2

ב. 3^3

ג. $(-3)^3$

ד. $(-2)^3$

ה. 4^3

ו. 3^4

ז. $(-5)^3$

ח. 10^4

ט. $-(-3)^4$

י. -5^4

יא. -4^3

יב. $-(-2)^6$

10) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$

ב. $\sqrt[4]{625}$

ג. $\sqrt[4]{-16}$

ד. $\sqrt[5]{-32}$

ה. $-\sqrt[4]{81}$

ו. $-\sqrt[3]{1000}$

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

11) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

ב. $(-3)^2:9-2\cdot(-4^2)$

ג. $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

ד. $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

ה. $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

ו. $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

ז. $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

ח. $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

ט. $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

י. $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

יא. $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{(5^2\cdot 3-72)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

שברים פשוטים ועשרוניים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שלמים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים:

הגדרה:

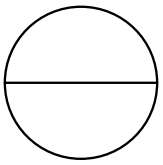
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

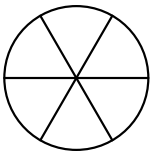
שאלות:

12) צבעו את החלקים המתאימים בכל עיגול:

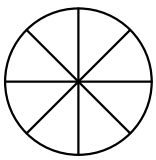
א. צבעו $\frac{1}{2}$ מהעיגול



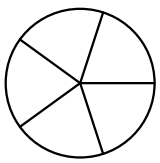
ב. צבעו $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבעו $\frac{3}{8}$ מהעיגול

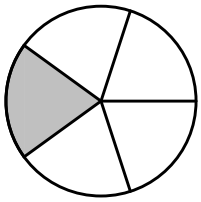


ד. צבעו $\frac{2}{5}$ מהעיגול

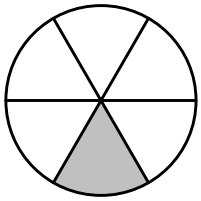


13) כתבו את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

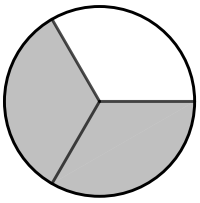
א. שבר:



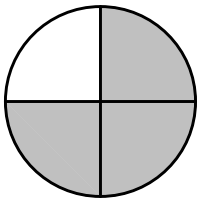
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



14) הרחיבו את השברים הבאים:

א. השבר: $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

15) צמצמו את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

16) המירו את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

17) המירו את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

18) קבעו איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

19) המירו את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

20) המירו את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

21) כתבו את השברים הבאים בצורתם העשרונית

(היעזרו במחשבון וכתבו עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

אחוזים:

שאלות:

22) המירו מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

23) המירו משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

24) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

25) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

חיבור חיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

  דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot6}{30}+\frac{13\cdot5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

26) מצאו את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

27) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$

ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$

ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$

ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$

ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$

י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

28) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

29) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

30) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

- תמורת האחוז = שלם $\cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה:

$120 \cdot \frac{40}{100} = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

31) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.

א. כמה בנות בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

32) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.

א. כמה תלמידים בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

33) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.

א. מהו מחירו בסוף העונה?

ב. מה גודל ההנחה?

34) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.

א. מה מחירו הסופי?

ב. מה גודל ההתייקרות?

35) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

36) מוצר מסוים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

37) ענו על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים. מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

38) חשבו את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

39) חשבו את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$

40) הציבו את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשבו את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית.
כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם.

דוגמה: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

41) כנסו איברים דומים:

א. $5x+7x-4x$

ב. $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

ג. $-10xy+15xy+xy-2yx$

ד. $x^2y-3yx^2+x^2y$

ה. $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

ו. $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

ז. $3xy+y-30y+6yx-7y$

ח. $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

ט. $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

י. $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

יא. $7x^2-3x-4x+2$

יב. $5xy+2x-3yx-x+1$

יג. $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

יד. $x+xy+y-6yx-6y-6x$

טו. $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

טז. $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

יז. $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

יח. $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

יט. $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

כ. $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

כא. $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

כב. $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

כג. $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

כד. $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

כה. $2a^2b+2b+3a^2+5b$

כו. $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

כז. $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

כח. $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

42) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

43) פשטו את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

44) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $7x+\left(-4x-5\right)+3x+\left(-1+7x\right)$

ב. $5x+\left(3x-2\right)+\left(-4-2x\right)$

ג. $8-\left(2x-5\right)-\left(4x+2\right)$

ד. $-6x-\left(-3x-1\right)-\left(-7-4x\right)+1$

ה. $\left(3-2x^2+4\right)2+3\left(x-x^2\right)-6\left(7-5x\right)+4x^2$

ו. $3y^2-\left(y+1-2y^2\right)+6\left(5y-6\right)-\left(-y-4\right)3+5\left(y^2+1\right)-7$

45) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\left(x-1\right)\left(x+2\right)$

ב. $\left(x+3\right)\left(x-7\right)$

ג. $\left(3-x\right)\left(x+4\right)$

ד. $\left(3x+4\right)\left(5x+1\right)$

ה. $3\left(4x+1\right)\left(2x-3\right)$

ו. $-2\left(3x-1\right)\left(5-2x\right)$

46) פשטו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\left(x-1\right)\left(x+3\right)+2\left(3-x\right)$

ב. $\left(a+4\right)\left(a-2\right)-\left(a+5\right)\left(a-3\right)$

ג. $\left(2m-3\right)\left(4m+3\right)+5\left(2m^2-6\right)$

ד. $-x^2y^2\left(x^3y+x^2\right)+2xy\left(2x^3y-x^4y^2\right)$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2$.

שאלות:

47) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

48) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $\left(x^2y^2-7\right)^2$

49) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

50) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

51) פשטו את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

52) פשטו את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

53) פשטו את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$ ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$ ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$ ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

54) פשטו את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$ ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$ ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$ ח. $25x^2+70x+49$

55) פשטו את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25 ב. x^2-81

ג. $25y^2-49$ ד. $121x^2-1$

ה. x^2y^2-4 ו. $9y^4-169x^4$

56) פשטו את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$ ב. x^3-10x^2+25x

ג. m^4-1 ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.
שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.
הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו- $m_1+m_2=b$.
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן הבא:
$m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה:
$ax^2+bx+c=a(x-m_1)(x-m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ אז נכתוב:
$ax^2+bx+c=a(x-m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

57) פרקו את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א.	x^2+5x+4	ב.	$x^2-8x+15$	ג.	$x^2-33x+62$
ד.	$2x^2+7x-15$	ה.	$3x^2-11x+6$	ו.	$6x^2+5x+1$
ז.	$2x^2+x-6$	ח.	$x^2-18x+81$	ט.	x^2+2x+8

58) פרקו את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
הערה: במידה ולא למדתם על נוסחת השורשים התעלמו משאלה זו.

א.	$6x^2+5x+1$	ב.	x^2+5x+4
ג.	$4x^2+20x+25$	ד.	$3x^2-x+20$

שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגבריים:

ניתן לצמצם שברים אלגבריים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

59) מצאו את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

60) צמצמו את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבירו מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

61) צמצמו את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתבו את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

62) צמצמו את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתבו את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

63) צמצמו את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתבו את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

64) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\left(x^2+3x\right)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $\left(a^2-25\right)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

65) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+\left(x+1\right)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2\left(x+2\right)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2\left(x+2\right)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x\left(x+1\right)}+\frac{x+1}{x\left(x+1\right)}=\frac{x+x+1}{x\left(x+1\right)}=\frac{2x+1}{x\left(x+1\right)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{\left(x-3\right)^2}-\frac{2}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)}=\frac{3\left(x+3\right)-2\left(x-3\right)}{\left(x-3\right)^2\left(x+3\right)}=\frac{x+15}{\left(x-3\right)^2\left(x+3\right)}$$

שאלות:

66) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

67) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

68) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

69) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

70) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

71) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

72) פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

ב. $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

ג. $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

ד. $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

ה. $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

ו. $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

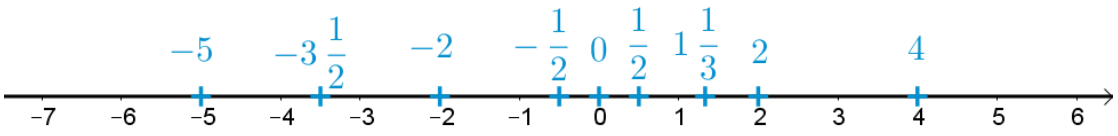
ז. $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

ח. $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

ט. $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5

ו. 17 ז. -1 ח. -4.

3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16

ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18

יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

5) א. + ב. + ג. - ד. -.

6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

9) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81.

ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64.

10) א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10.

11) א. 28 ב. 33 ג. 19 ד. -37 ה. 31 ו. -14

ז. 5 ח. -21 ט. -16 י. -44 יא. 20

12) תשובה מודגמת בסרטון.

13) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$.

14) א. $\frac{4}{8},\frac{18}{36},\frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50},\frac{75}{125},\frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128},\frac{160}{256},\frac{440}{700}$

15) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$

ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

16) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$

ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

17) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$

ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

18) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

19) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$

ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

20) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75

ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875

יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

21) א. $0.\bar{6}$ ב. $0.8\bar{3}$ ג. 0.428 ד. $0.1\bar{8}$

22) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$

ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

23) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

24) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

25) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

26) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12

ז. 30 ח. 24

27) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$

ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

28) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$

ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

29) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$

ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

30) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

31) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

32) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

33) א. 240 ₪ ב. 60 ₪

34) א. 540 ₪ ב. 40 ₪

35) 4.9755 ₪

36) 400 ₪

37) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

38) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5

ז. -10 ח. 45

39) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

40 א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$

ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

41 א. $8x$ ב. $2x^2$ ג. $4xy$ ד. $-x^2y$ ה. $4a^2-a$ ו. x^2

ז. $9xy-36y$ ח. $8mn^2-6nm^2$ ט. $15x^3-19$

טו. $-13n-2m+6mn$ טז. $-5ab^2+22a^2b-3b$ י. 0

יא. $7x^2-7x+2$ יב. $2xy+x+1$ יג. $4x^2+3x-9$

יד. $-5x-5y-5xy$ יז. $4z^2-1$ יח. $14x^2z+5xz^2+6$ יט.

$-3x^2+2x-3$ כ. $-3x^2-x$ כא. $7a^2b+13x^2y$

כב. $-8x^2y^3+15a^2$ כג. $-8y^2-5x^3y^2$ כד. $-6x^3y-x^2$

כה. $2a^2b+3a^2+7b$ כו. $25a^2b-22ab^2$

כז. $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$ כח. $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

42 א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

43 א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

44 א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

45 א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

46 א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

47 א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. x^4+14x^2+49 ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

48 א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

49 א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

50 א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

51 א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

52 א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

53 א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n+3n^2)$

54 א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

55 א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

56 א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$

57 א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

58) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

59) א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 4\ ,\ x\neq 0$ ה. $x\neq -1$

ו. $x\neq 2\ ,\ x\neq -2$ ז. $y\neq 1\ ,\ y\neq -1\ ,\ y\neq 0$

ח. $x\neq 4\ ,\ x\neq 1\ ,\ x\neq 0$

60) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

61) א. $x\neq -4\ ,\ 3$ ב. $m\neq -4\ ,\ \frac{m}{4}$ ג. $a\neq 0,6\ ,\ \frac{2}{a}$

ד. $x\neq 5\ ,\ -\frac{x}{3}$ ה. $y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,\ -3$ ו. $x\neq \frac{1}{2}\ ,\ \frac{2x^2}{3}$

ז. $y\neq 0,3\ ,\ \frac{3}{y(y-3)}$ ח. $z\neq 0,-5\ ,\ \frac{3z^2-12z+4}{z+5}$

62) א. $x\neq -5\ ,\ \frac{x+5}{2}$ ב. $n\neq 8\ ,\ \frac{n}{8-n}$ ג. $z\neq 4\ ,\ \frac{z^2}{2(z-4)}$

ד. $m\neq 0,-\frac{5}{2}\ ,\ \frac{2m+5}{2m}$ ה. $y\neq 0,\frac{2}{3}\ ,\ \frac{2(2-3y)}{y}$ ו. $b\neq 0,\ a\neq -2b\ ,\ \frac{a(a+2b)}{3b}$

63) א. $x\neq 5,-2\ ,\ \frac{1}{x-5}$ ב. $m\neq 4\ ,\ m-8$ ג. $x\neq -3,\frac{5}{2}\ ,\ \frac{2}{y+3}$

ד. $z\neq -\frac{2}{3}\ ,\ z+8$ ה. $x\neq 0,-9\ ,\ \frac{x-4}{x^2}$ ו. $n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}\ ,\ \frac{-3n}{2n+1}$

ז. $x\neq -2,-3\ ,\ \frac{x+2}{x+3}$ ח. $x\neq 7,-8\ ,\ \frac{x-7}{x+8}$

ט. $a\neq 0\ ,\ b\neq 0,\ a\neq 3b\ ,\ 2b\neq 3a\ ,\ \frac{3a-b}{a(2b-3a)}$ י. $mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0\ ,\ \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}$

64) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

65 א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

66 א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

67 א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

68 א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

69 א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

70 א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

71 א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

72 א. $\frac{x^2}{3}$ ב. 2.5 ג. $\frac{1}{6t^3}$ ד. $\frac{t-9}{54t^2}$ ה. $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

ו. $\frac{x(x+1)}{2}$ ז. $\frac{c}{c-4}$ ח. $\frac{t+4}{-8(t+5)}$ ט. $\frac{5}{x}$.

שאלון 471

משוואות אלגבריות

תוכן העניינים:

משוואות אלגבריות 41

משוואה ממעלה ראשונה:..... 43

סיכום כללי:..... 43

שאלות:..... 43

תשובות סופיות: 44

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:..... 45

סיכום כללי:..... 45

שאלות:..... 45

תשובות סופיות: 45

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:..... 46

סיכום כללי:..... 46

שאלות:..... 47

תשובות סופיות: 48

משוואה ממעלה שנייה:..... 49

סיכום כללי:..... 49

שאלות:..... 49

תשובות סופיות: 50

מערכת משוואות ממעלה שנייה:..... 51

סיכום כללי:..... 51

שאלות:..... 51

תשובות סופיות: 52

משוואות דו-ריבועיות: 53

סיכום כללי:..... 53

שאלות:..... 53

תשובות סופיות: 54

משוואות עם פרמטרים: 55
סיכום כללי: 55
שאלות: 55
תשובות סופיות: 56
משוואות עם שורשים: 57
סיכום כללי: 57
שאלות: 57
תשובות סופיות: 58
משוואות עם ערך מוחלט: 59
סיכום כללי: 59
שאלות: 59
תשובות סופיות: 59

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$

ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$

ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$

ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$

ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$

ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$

ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$, $x\neq 3$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $\square+5x=2(x+2)-3$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצאו ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצאו ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ (כאשר k הוא מספר כלשהו חוץ מ-1-).

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1 , b_1 , c_1 ו- a_2 , b_2 , c_2 הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

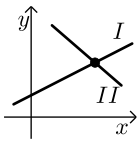
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

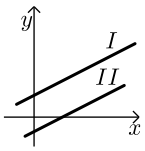
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

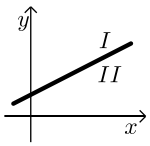
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
  נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
  נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}3x+y=11\\y=5\end{cases}$ ב. $\begin{cases}y=x-3\\y=2x+4\end{cases}$ ג. $\begin{cases}-3x+2y=-16\\x=5y+14\end{cases}$

ד. $\begin{cases}5x-2y=-2\\x+4y=4\end{cases}$ ה. $\begin{cases}-5x+7y=-26\\x+3y=-8\end{cases}$ ו. $\begin{cases}2x+3y=5\\5x+7y=11\end{cases}$

2) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+3y=5\\x-3y=3\end{cases}$ ב. $\begin{cases}5x+2y=14\\5x+3y=23\end{cases}$

ג. $\begin{cases}5y=2x\\4x=5y+8\end{cases}$ ד. $\begin{cases}4x=3y-29\\5y=9-13x\end{cases}$

3) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$.

4) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$

5) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$ ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$ ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$ ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$ ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתרו את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתרו את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$

ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתרו את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1 $(2,4),(4,2)$

2 $(\pm 4,-2)$

3 $(\pm 2,\pm 1)$

4 $(5,-2),(-5,2)$

5 $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6 $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7 $(7,4)$

8 $(5,-3)$

9 $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12 $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13 $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14 $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתרו משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{\left(x+2\right)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$

2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$

3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$

4) $x=\pm 2,\pm 5$

5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$

6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$

7) $x=49$

8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$

9) $x=5,-1$

10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$

11) $x=-1$

12) $x_{1,2}=1,3$

13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$

14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$

15) אין פתרונות.

16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$

17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$

18) $x=-1,2$

19) $x=3,-1$

20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$

ב. $\begin{cases}ax+y=2\\x+ay=4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}\frac{x}{m}+y=m\\x-m^2y=1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}(m-1)x-(2m+3)y=5\\(m+2)x-(2m-1)y=10m\end{cases}$

ה. $\begin{cases}(2a+b)x-(2a-b)y=8ab\\(2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2\end{cases}$

3) פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}$, $b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}$, $a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$

ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1$, $(m+1,-1)$ ב. $a\neq\pm1$, $\left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1$, $\left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2$, $(2m+1,m-2)$

ה. $b\neq\pm2a$, $(2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0$, $x\neq\pm a$, $x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$ ו. $a,b\neq 0$, $x=\frac{a}{b},-ab$

ז. $a\neq\pm b$, $x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2 \quad \rightarrow \quad x=a^2$$

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.

2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.

3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.

4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$

2) $\sqrt{x+2}=x$

3) $\sqrt{3x+1}+x=13$

4) $\sqrt{2x+7}+4=x$

5) $\sqrt{x-1}+3=x$

6) $\sqrt{10x+6}+9=x$

7) $\sqrt{x+6}-2=2x$

8) $\sqrt{24-x}+3=2x$

9) $\sqrt{x+16}+4=2x$

10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$

11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$

12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$

13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$

14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$

15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$

16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$

17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$

18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$

19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$

2) $x=2$

3) $x=8$

4) $x=9$

5) $x=5$

6) $x=25$

7) $x=0.25$

8) $x=3.75$

9) $x=4.25$

10) $x=5$

11) $x=6$

12) $x=4,-3$

13) $x=3$

14) $x=5$

15) $x=12$

16) $x=2,2\frac{8}{9}$

17) $x=6$

18) $x=1$

19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתרו משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|3x-24|=x$

3) $|12-x|=3x$

4) $2x-|8-x|=10$

5) $|4x-5|=|2x+13|$

6) $|14-3x|=2|x+5|$

7) $|x|+7=|2x|$

8) $|x+2|+6=|2x-4|$

9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$

2) $x=6,12$

3) $x=3$

4) $x=6$

5) $x=9,-1\frac{1}{3}$

6) $x=24,\frac{4}{5}$

7) $x=\pm 7$

8) $x=12,-1\frac{1}{3}$

9) $x=0,-12$

10) $x=0$

שאלון 471

אי-שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים:

אי-שוויונים אלגבריים 60

מה מותר? 61

מה אסור? 61

אי-שוויונים ממעלה ראשונה: 61

אי-שוויונים ממעלה שנייה: 62

אי-שוויונים ממעלה שלישית: 62

אי-שוויונים עם מנה: 63

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם: 63

שאלות מסכמות – אי-שוויונים: 64

תשובות סופיות: 65

תחום הגדרה: 67

תשובות סופיות: 68

מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

9) $x^2<144$

10) $x^2-12x>-32$

11) $(x+2)(x+5)<0$

12) $(x+2)(x+4)<35$

13) $-x^2+13x+30<0$

14) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

15) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

16) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

17) $-3x^2+12x>0$

18) $x^2-10x+25>0$

19) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

20) $2x^2+2x+24\geq 0$

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

21) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

22) $x(x^2+x+1)>0$

23) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\leq 0$

24) $x^3-25x\geq 0$

25) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

26) $(x^2+8x+20)(3x-5)\leq 0$

27) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

28) $x^3-6x^2+9x\leq 0$

29) $(x^2+6)(x+3)>0$

30) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

אי-שוויונים עם מנה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

31 $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

32 $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

33 $\frac{1}{x^2-16}>0$

34 $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

35 $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

36 $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

37 $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

38 $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

39 $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

40 $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

41 $3<x+1<5$

42 $0<\frac{1}{x+4}<2$

43 $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

44 $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

45 $6x-38\leq x-3\leq 5x+7$

46 $6<\frac{2x+10}{3}\leq\frac{7x-20}{5}$

47 $-1\leq\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

48 $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

49) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

50) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

51) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

52) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

53) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

54) $x(x+3)(2x-5) < 0$

55) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

56) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

57) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

58) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

59) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

60) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

61) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

62) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

63) $6 < 5x-x^2 \cap x^2 > 3x+10$

64) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

65) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

66) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $x>3$

2) כל x

3) אף x

4) $x>-2$

5) $x<5$

6) אף x

7) $x\geq 12$

8) $x>-13$

9) $-12<x<12$

10) $x<4\ ,\ x>8$

11) $-5<x<-2$

12) $-9<x<3$

13) $x<-2\ ,\ x>15$

14) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

15) $-4<x<8$

16) $-4\leq x\leq 0$

17) $0<x<4$

18) $x>5\ ,\ x<5$

19) $x<3\ ,\ x>5$

20) כל x

21) $1<x<2\ ,\ x>3$

22) $x>0$

23) $-2\leq x\leq -1\ ,\ x\geq \frac{1}{2}$

24) $-5\leq x\leq 0\ ,\ x\geq 5$

25) $x>2$

26) $x\leq 1\frac{2}{3}$

27) $x<-2\ ,\ 1<x<3$

28) $x\leq 0\ ,\ x=3$

29) $x>-3$

30) $x<1\ ,\ 2<x<4$

31) $-3<x<1\ ,\ x>3$

32) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq -\frac{1}{2}$

33) $x<-4\ ,\ x>4$

34) $2<x<3\ ,\ x>3$

35) $\frac{1}{2}\leq x<5$

36) $x>1$

37) $x>-2$

38) $2<x<3$

39) $1\leq x\leq 6$

40) $x<2\ ,\ x>6$

41) $2<x<4$

42) $x>-3\frac{1}{2}$

43) $x>0$

44) $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

45) $-2.5\leq x\leq 7$

46) $x\geq 10$

47) $1\leq x<13$

48) ϕ

49) $-2<x\leq -\frac{3}{4}$

50) $x\leq -4$

51) $-4\leq x<2\ ,\ x\geq 3$

(52 $x<-7\ ,\ -\frac{1}{3}<x<2\ ,\ x>5$

(53 $-1<x\le 1.5\ ,\ 4<x\le 12$

(54 $x<-3\ ,\ 0<x<2.5$

(55 $x<-1\ ,\ 2<x<6\ ,\ x>6$

(56 $2.5\le x<8\ ,\ x>8$

(57 $x>3$

(58 $x<-3\ ,\ 0<x<1\ ,\ x>4$

(59 $-1<x<0\ ,\ 1<x<3\ ,\ x>3$

(60 $x>7$

(61 $x<-2\ ,\ 2<x<4$

(62 $x\le 0\ ,\ 1\le x<2\ ,\ x>4$

(63 אף x

(64 $x\neq 1$

(65 $x\ge 7$

(66 $-3<x<-\frac{3}{5}\ ,\ x>3$

תחום הגדרה:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.

מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2\ ,\ x\le -2$.

מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.

מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 , x \geq 6$ ג. $x \leq -4 , 0 \leq x \leq 3$

ד. $-5 \leq x < -2 , x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2 , x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} , 1 \leq x < \frac{3}{2} , x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} , x \geq 1$

ד. $-2 \leq x \neq 1 , x \leq -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

שאלון 471

נקודות וקטעים

תוכן העניינים:

נקודות וקטעים..... 69

מערכת הצירים: 70

סיכום כללי:..... 70

שאלות:..... 72

תשובות סופיות: 72

אמצע קטע: 73

סיכום כללי:..... 73

שאלות:..... 73

תשובות סופיות: 74

מרחק בין שתי נקודות: 75

סיכום כללי:..... 75

שאלות:..... 75

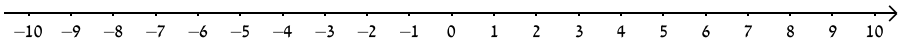
תשובות סופיות: 76

מערכת הצירים:

סיכום כללי:

ציר המספרים:

ציר המספרים הוא ישר עליו מסודרים המספרים החיוביים, המספרים השליליים והאפס.

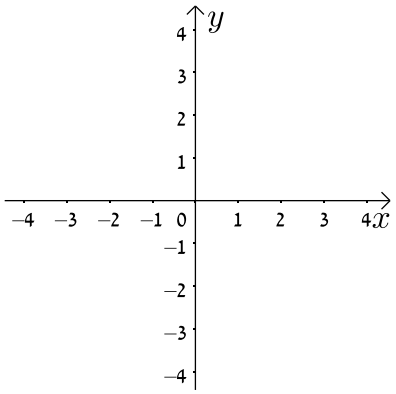


הערות:

- המרווחים בין המספרים לאורך הציר הם קבועים ואורכם הוא יחידת המידה של הציר.
- קווי החלוקה נקראים בשם **שנתות**.

מערכת הצירים:

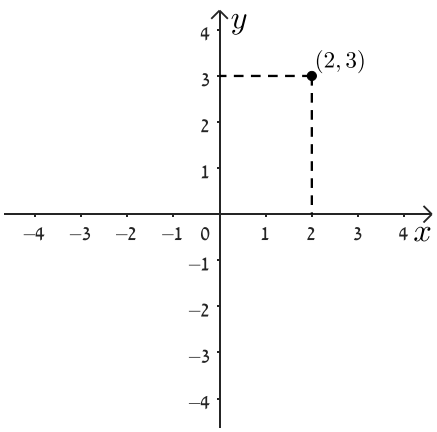
מערכת הצירים במישור מורכבת משני צירי מספרים המאונכים זה לזה.
לציר האופקי קוראים בשם "ציר ה- x " ולציר האנכי קוראים בשם "ציר ה- y ".



הערות:

- נקודת המפגש שבין הצירים נקראת "ראשית הצירים".
- קנה המידה על הצירים לא חייב להיות זהה
  על שני הצירים, אך חייב להישמר לאורך כל הציר.
- כאשר משתמשים במערכת צירים לצורך
  ייצוג צורות הנדסיות שונות חשוב להקפיד
  על קנה מידה זהה בשני הצירים.

נקודה במערכת הצירים:



שיעורי נקודה במערכת הצירים זוג סדור של שני מספרים הנקראים שיעורי הנקודה. מהנקודה מעבירים אנכים לצירים.

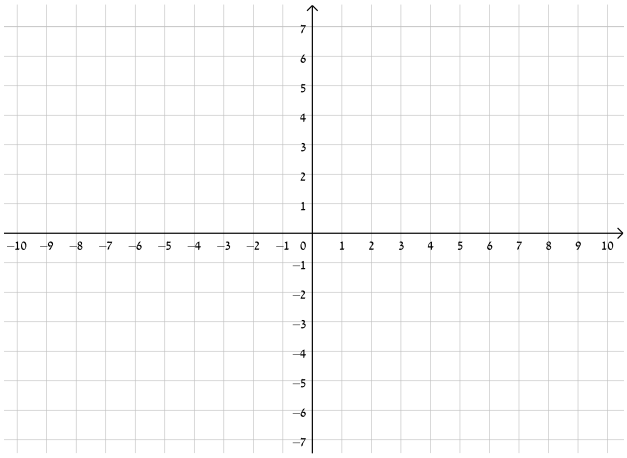
- מפגש האנך עם ציר ה- x יקבע את שיעור ה- x של הנקודה.
- מפגש האנך עם ציר ה- y יקבע את שיעור ה- y של הנקודה.

את הזוג הסדור כותבים באופן הבא: (x,y)

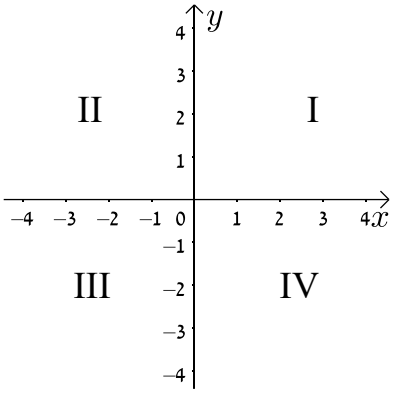
ונהוג לסמן אותה באות גדולה באנגלית, כגון A, B וכו'.

קווי רשת:

קווי הרשת במערכת צירים הם אנכים לצירים המאפשרים לחלק את המישור באופן שווה בין יחידות האורך של כל ציר.



רביעים במערכת הצירים:



הצירים מחלקים את המישור ל-4 אזורים הנקראים "רביעים".

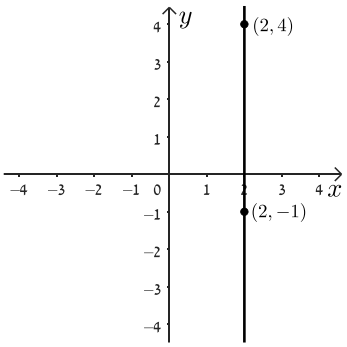
- נקודה שבה: $x>0$, $y>0$ נמצאת ברביע ה-I.
- נקודה שבה: $x<0$, $y>0$ נמצאת ברביע ה-II.
- נקודה שבה: $x<0$, $y<0$ נמצאת ברביע ה-III.
- נקודה שבה: $x>0$, $y<0$ נמצאת ברביע ה-IV.

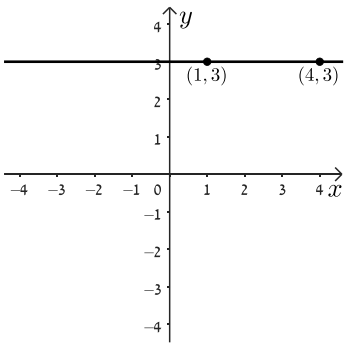
הערה:

- נקודות שעל הצירים אינן שייכות לאף רביע.

קטעים המקבילים לצירים:

- קטע העובר דרך שתי נקודות עם אותו שיעור y הוא מקביל לציר ה-x.
- קטע העובר דרך שתי נקודות עם אותו שיעור x הוא מקביל לציר ה-y.



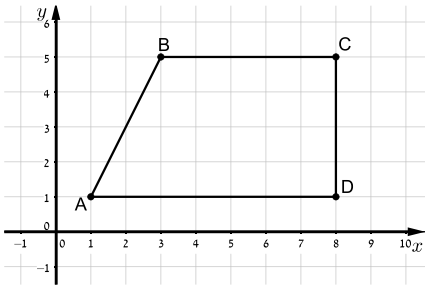


שאלות:

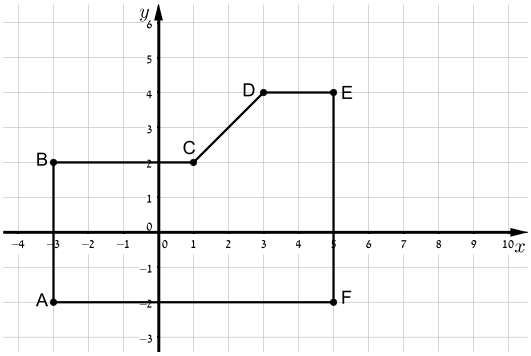
1) קבעו באיזה רביע נמצאות הנקודות.

$A(-1,5)$, $B(-3,8)$, $C(-20,16)$, $D(-13,12)$, $E(-12,13)$, $F(-6,7)$.

2) רשמו את שיעורי הנקודות בצורה הבאה:



3) רשמו את שיעורי הנקודות בצורה הבאה:



4) סרטטו במערכת צירים ריבוע שאורך צלעו היא 5 ואחד מקודקודיו נמצא בנקודה $(-1,4)$.

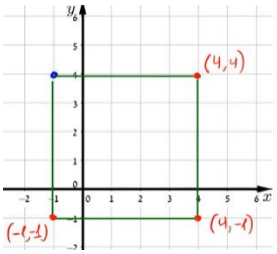
תשובות סופיות:

1) בכל הנקודות מתקבל $x<0$ ו- $y>0$ ולכן הן נמצאות ברביע השני (II).

2) $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(8,5)$, $D(8,1)$

3) $A(-3,-2)$, $B(-3,2)$, $C(1,2)$, $D(3,4)$, $E(5,4)$, $F(5,-2)$

4) להלן איור:



אמצע קטע:

סיכום כללי:

אמצע קטע:

אמצע קטע שקצותיו הם $A(x_1,x_1)$ ו- $B(x_2,x_2)$ יחושב לפי ממוצע של שיעורי נקודות הקצה באופן הבא: $x=\frac{x_1+x_2}{2}; y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

הערות:

- מקובל לסמן באות כלשהי את שיעורי נקודת האמצע, למשל P,
  וכך הנוסחאות תיכתבנה באמצעות האותיות כך: $x_P=\frac{x_A+x_B}{2}$; $y_P=\frac{y_A+y_B}{2}$.
- כל נוסחה מתארת קשר בין 3 נעלמים. לכן בידיעת שניים מהם ניתן לחשב את השלישי.
  כאשר נקבל בשאלות את שיעורי אחת מהקצוות ואת שיעורי נקודת האמצע,
  נוכל לחשב את שיעורי נקודת הקצה השנייה.

שאלות:

1) מצאו את אמצעי הקטעים שקודקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$, $B(5,-8)$

ב. $A(-3,0)$, $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$, $B(-4,-5)$

ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)$, $B(-3,-1)$

ו. $A(4,7)$, $B(4,-12)$

2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.

מצאו את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$, $M(2,1)$

ב. $A(-6,-8)$, $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$, $M(4,-7)$

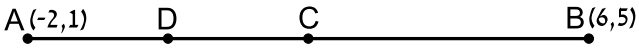
ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.

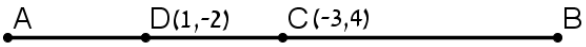
ידוע כי שיעורי הקודקודים B ו-C הם $C(6,1)$, $B(2,-4)$.

מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצאו את שיעורי הנקודה D.

4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $B(6,5)$, $A(-2,1)$. מצאו את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $B(-10,4)$, $A(2,-7)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קודקודים של מקבילית ABCD.
מצאו את שיעורי הקודקוד הרביעי.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$ ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$
ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $B(-11,16)$, $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

מרחק בין שתי נקודות:

סיכום כללי:

נוסחת המרחק:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,x_1)$ ו- $B(x_{2,}x_2)$ יחושב לפי:

$$AB = d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

שאלות:

1) מצאו את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7), B(-3,7)$ ב. $A(6,2), B(1,2)$

ג. $A(-3,10), B(0,6)$ ד. $A(6,-9), B(1,3)$

ה. $A(4,7), B(13,-1)$ ו. $A(6,6), B(-9,-9)$

2) חשבו את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$, $B(4,9)$, $A(3,-2)$.

3) נתונות נקודות $B(6,y)$, $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך. מצאו את y.

4) נתונות נקודות $B(15,-2)$, $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך. מצאו את x.

5) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצאו את שיעורי הנקודה B.

6) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך.
שיעורי הקודקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- y של הקודקודים B ו-C הוא 2-.
מצאו את קודקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

7) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC} = \sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$, $A(-3,-2)$. מצאו את היקף המלבן.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$ ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$

ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $B(-11,16)$, $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$

ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

שאלון 471

הקו הישר

תוכן העניינים:

הקו הישר..... 77

ייצוג גרפי של פונקצית הקו הישר: 79

סיכום כללי:..... 79

שאלות:..... 79

תשובות סופיות: 80

שיפוע ישר:..... 81

סיכום כללי:..... 81

שאלות:..... 82

תשובות סופיות: 85

הקו הישר הכללי: 86

סיכום כללי:..... 86

שאלות:..... 86

תשובות סופיות: 88

שיפוע ישר דרך שתי נקודות:..... 89

סיכום כללי:..... 89

שאלות:..... 89

תשובות סופיות: 89

מציאת משוואת ישר באמצעות שיפוע ונקודה: 90

סיכום כללי:..... 90

שאלות:..... 90

תשובות סופיות: 90

מציאת משוואת ישר המקביל לישר נתון..... 91

סיכום כללי:..... 91

שאלות:..... 91

תשובות סופיות: 92

מציאת משוואת ישר דרך שתי נקודות: 93
סיכום כללי: 93
שאלות: 93
תשובות סופיות: 94
ישרים המקבילים לצירים: 95
סיכום כללי: 95
שאלות: 95
תשובות סופיות: 96
חיתוך של ישר עם הצירים: 97
סיכום כללי: 97
שאלות: 97
תשובות סופיות: 97
חיוביות ושליליות של ישר: 98
סיכום כללי: 98
שאלות: 98
תשובות סופיות: 100
חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית: 101
סיכום כללי: 101
שאלות: 101
תשובות סופיות: 104
מצבים הדדיים בין ישרים: 105
סיכום כללי: 105
שאלות: 106
תשובות סופיות: 106

ייצוג גרפי של פונקצית הקו הישר:

סיכום כללי:

ניתן להציג תהליכים שונים באמצעות יחס ישר בין שני משתנים.

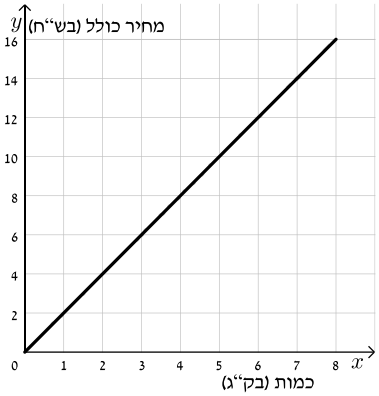
יחס זה מוצג בתור קו ישר מהצורה: $\frac{y}{x}=m$ או $y=mx$.

הפונקציה מהצורה: $y=mx$ מתאר יחס ישר בין x ל- y.

שאלות:

1) המחיר של 1 ק"ג עגבניות הוא 2 ₪.

הקו הישר שבסרטוט מתאר את מחיר העגבניות הכולל כפונקציה של משקל העגבניות.



א. מה המחיר של 3 ק"ג עגבניות?

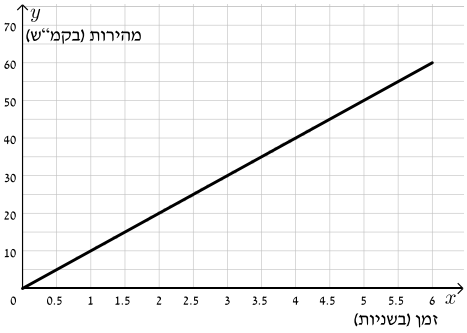
ב. מהי כמות העגבניות שניתן לקנות ב-12 ₪?

ג. מהו היחס בין כמות העגבניות (בק"ג) שניתן לרכוש לבין מחירם?

ד. כתבו ביטוי אלגברי שייצג את המחיר הכולל של העגבניות כתלות במשקלם.

2) משחררים כדור מקצה בניין גבוה.

בגרף שלפניכם מתוארת המהירות של הכדור כתלות בזמן בשניות.



א. מה היא מהירות הכדור לאחר שנייה מרגע הנפילה?

ב. בהנחה שהגרף מתאר את כל הנפילה,
מהי המהירות הסופית אליה הגיע הכדור לפני שהתנגש בקרקע?

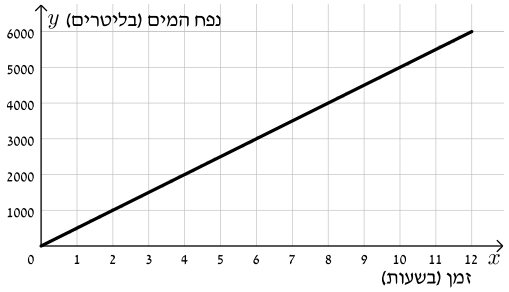
ג. כמה זמן נמשכה נפילת הכדור?

ד. היעזרו בגרף כדי להשלים את הטבלה הבאה:

זמן (בשניות)	1	2.5	4	5.5
מהירות נפילה (ב-קמ"ש)				

ה. כתבו ביטוי שיתאר את הקשר שבין מהירות הנפילה של הכדור לבין הזמן.

3) בועז בנה בריכה בחצר ביתו וחיבר אליה צינור מים מרכזי כדי למלא אותה.
הקו הישר שבסרטוט מתאר את מילוי המים בבריכה כפונקציה של הזמן.



א. כמה ליטרים של מים היו בבריכה לפני המילוי?

ב. בהנחה שהגרף מתאר את זמן המילוי כולו,
לאחר כמה זמן חצי מהבריכה הייתה מלאה ומה הוא נפח המים (בליטרים)?

ג. מה נפח המים שהבריכה יכולה להכיל (בליטרים)?

ד. מה היחס שבין כמות המים (בליטרים) לבין הזמן (בשעות)?
האם מדובר ביחס ישר?

ה. כתבו ביטוי אלגברי שמתאר את כמות המים בבריכה (בליטרים) כתלות בזמן (בשעות).

תשובות סופיות:

1) א. 6 ₪ ב. 6 ק"ג ג. 2:1 ד. $y = 2x$.

2) א. 10 קמ"ש ב. 60 קמ"ש ג. 6 שניות ד. עיינו בסרטון ה. $y = 10x$.

3) א. 0 ליטרים ב. 6 שעות ג. 4000 ליטרים
ד. יחס ישר של 500 ליטרים בשעה. ה. $y = 500x$.

שיפוע ישר:

סיכום כללי:

ישר שמשוואתו היא $y=mx$ הוא בעל שיפוע m כאשר:

- אם $m>0$ הישר עולה.
- אם $m<0$ הישר יורד.
- אם $m=0$ הישר קבוע (אינו עולה ואינו יורד).

חישוב שיפוע בשיטת המדרגות:

בכל התקדמות של יחידה אחת לאורך ציר ה- x נבדוק כמה יחידות עלינו או ירדנו לאורך ציר ה- y. שיפוע הישר יתאים להתקדמות בציר ה- y.

שיפוע בין שתי נקודות:

ניתן לחשב שיפוע בין שתי נקודות כלליות הנמצאות על ישר.

ננית ישר העובר דרך שתי נקודות $A\left(x_1,y_1\right)$ ו- $B\left(x_2,y_2\right)$.

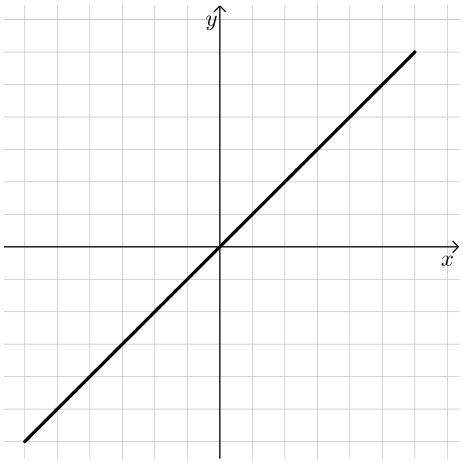
שיפוע הישר יחושב: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (כאשר $\Delta x\neq 0$).

חשוב להקפיד על חיסור של אותן הנקודות במונה ובמכנה.

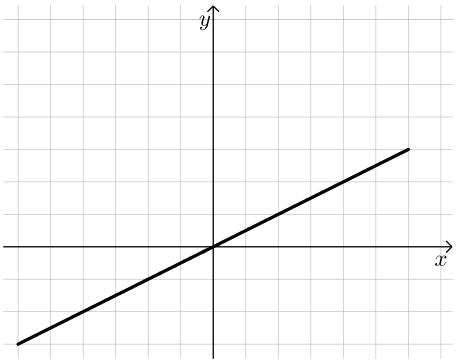
שאלות:

1) לפניכם הגרפים של הישרים הבאים:

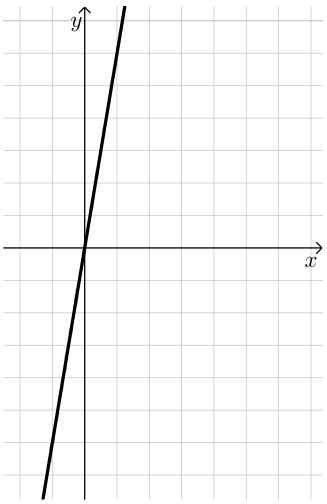
i.



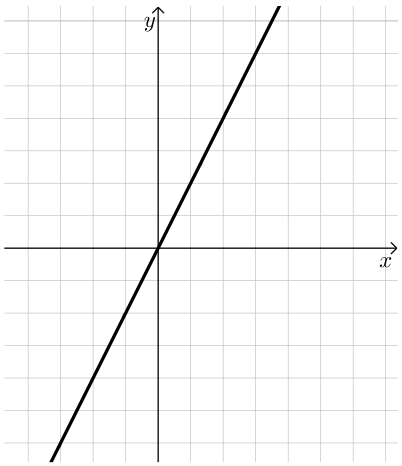
ii.



iii.



iv.

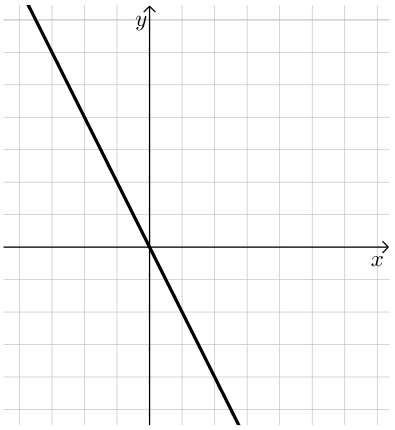


א. מצאו את השיפוע של כל אחד מהם.

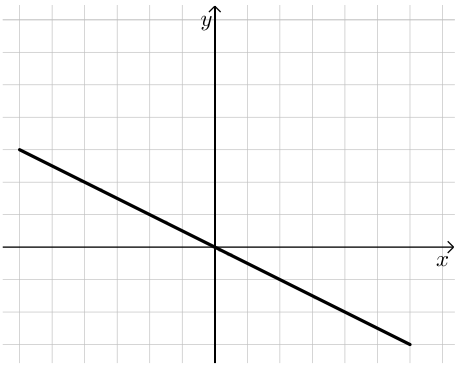
ב. רשמו פונקציה מהצורה: $y = mx$ לכל אחד מהישרים.

2) לפניכם הגרפים של הישרים הבאים:

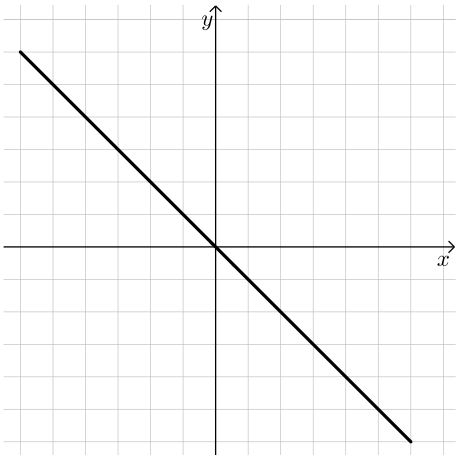
i.



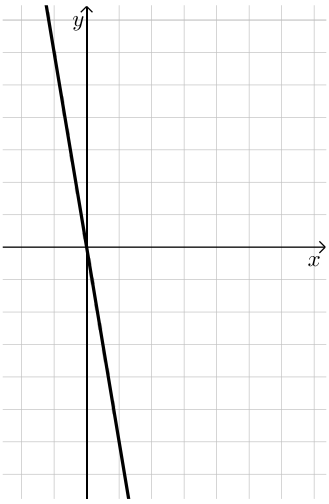
ii.



iii.



iv.



א. מצאו את השיפוע של כל אחד מהם.

ב. רשמו פונקציה מהצורה: $y = mx$ לכל אחד מהישרים.

3) מצאו את השיפוע של כל אחד מהישרים המוצגים בטבלאות הבאות:

א.

x	-4	0	2	6	10
y	-8	0	4	12	20

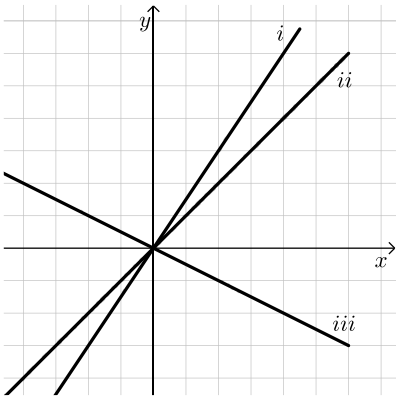
ב.

x	-6	-3	9	15	36
y	-2	-1	3	5	12

ג.

x	-8	-3	2	5	17
y	4	4	4	4	4

4) לפניכם 3 ישרים.



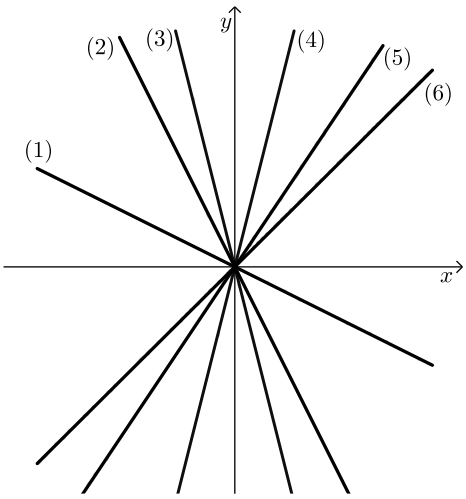
א. קבעו, מבלי לחשב, למי השיפוע הגדול ביותר ולמי השיפוע הקטן ביותר.

ב. חשבו את השיפועים של כל אחד מהישרים.

5) לפניכם 6 ישרים במערכת צירים אחת ו-6 שיפועים:

$$-\frac{2}{3}\ ,\ 2\ ,\ -2\ ,\ 1.2\ ,\ -4\ ,\ 4\ .$$

התאימו כל שיפוע לכל ישר.



6) לפניכם מספר משוואות של קווים ישרים:

$$(1)\ y=-4x \qquad (2)\ y=-\frac{x}{4} \qquad (3)\ y=4x \qquad (4)\ y=\frac{x}{4}$$

א. קבעו אלו מהישרים עולים ואלו יורדים.

ב. איזה ישר יוצר את הזווית הגדולה ביותר בין חלקו החיובי והכיוון החיובי של ציר ה- x ?

ג. כתבו משוואה של ישר היוצר זווית גדולה משל הישר שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

1) i. א. $m=1$ ב. $y=x$ ii. א. $m=2$ ב. $y=2x$.

iii. א. $m=6$ ב. $y=6x$ iv. א. $m=\frac{1}{2}$ ב. $m=\frac{1}{2}x$

2) i. א. $m=-2$ ב. $y=-2x$ ii. א. $m=-\frac{1}{2}$ ב. $y=-\frac{1}{2}x$.

iii. א. $m=-1$ ב. $y=-x$ iv. א. $m=-6$ ב. $m=-6x$

3) א. $m=2$ ב. $m=3$ ג. $m=0$.

4) א. השיפוע הגדול ביותר – i. השיפוע הקטן ביותר – iii.

ב. $m_{iii}=-\frac{1}{2}$, $m_{ii}=1$, $m_i=1\frac{1}{2}$.

5) $m_{(6)}=1.2$, $m_{(5)}=2$, $m_{(4)}=4$, $m_{(3)}=-4$, $m_{(2)}=-2$, $m_{(1)}=-\frac{2}{3}$.

6) א. עולים: (3), (4). יורדים: (1), (2). ב. (2).

ג. $y=-\frac{x}{10}$ (כל ישר עם שיפוע שלילי הקטן מ-$-\frac{1}{4}$, כלומר בתחום: $\left[-\frac{1}{4}:0\right]$).

הקו הישר הכללי:

סיכום כללי:

- משוואת הקו הישר הכללית היא מהצורה: $y=mx+b$
  כאשר m הוא שיפוע הישר ו- b הוא האיבר החופשי כמשוואה.
- האיבר החופשי מייצג את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y
  אשר תמיד תהיה $(0,b)$.
- ישרים המקבילים זה לזה על בעלי אותו השיפוע (אותו m) ואיברים חופשיים שונים (b שונה),
  למשל: $y=4x-5\,,\,y=4x+1$.
- ישרים המקבילים לצירים הם מהצורות הבאות:
  - ישר המקביל לציר ה- x: $y=n$.
  - ישר המקביל לציר ה- y: $x=k$.

שאלות:

1) כתבו מהו m ומהו b במשוואות הישרים הבאות:

א. $y=3x-2$ ב. $y=x+6$

ג. $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{5}$ ד. $y=\frac{x-3}{2}$

ה. $y=3+2(x-1)$ ו. $3y-2x+1=0$

2) כתבו את משוואות הישרים הבאות:

א. ישר בעל שיפוע $m=3$ אשר חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-1$.

ב. ישר בעל שיפוע 5- שפוגש את ציר ה- y כאשר $y=6$.

ג. ישר קבוע שחותך את ציר ה- y ב-4.

3) נתונה הפונקציה: $y = 2x - 1$.

א. בנו טבלת ערכים מתאימה לפונקציה (בחר 4 ערכים שונים).

ב. סמנו את הנקודות שהתקבלו במערכת צירים וחבר אותן בקו רציף.

ג. מצאו את שיפוע הישר בשיטת ה-'מדרגות'.

ד. מצאו את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.

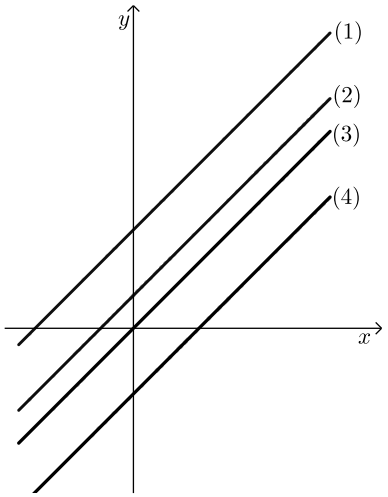
4) התאימו בין הגרפים למשוואות הישרים:

א. $y = x + 3$

ב. $y = x + 1$

ג. $y = x$

ד. $y = x - 2$



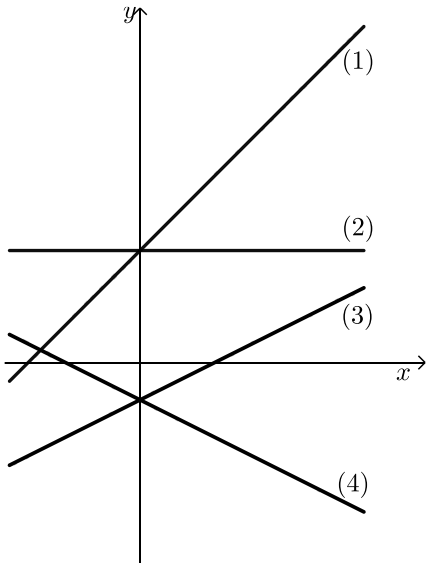
5) התאימו בין הגרפים למשוואות הישרים:

א. $y = -x - 2$

ב. $y = 3x + 3$

ג. $y = \frac{x}{3} - 2$

ד. $y = 3$



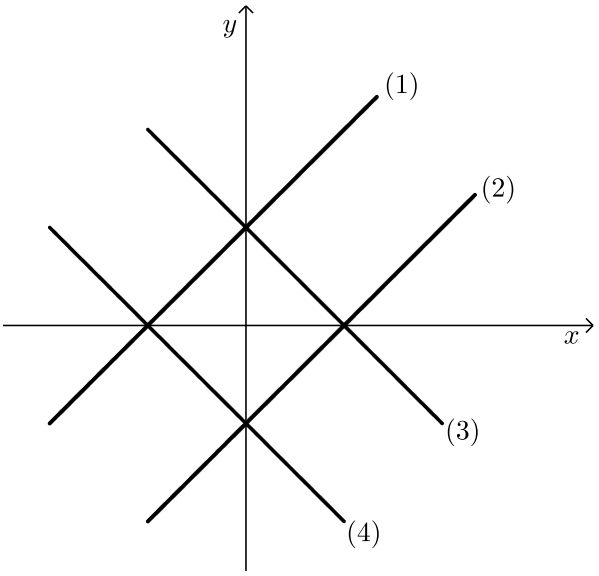
6) התאימו בין הגרפים למשוואות הישרים:

א. $y = x - 4$

ב. $y = -x - 4$

ג. $y = x + 4$

ד. $y = -x + 4$



תשובות סופיות:

1) א. $m = 3 \, , \, b = -2$ ב. $m = 1 \, , \, b = 6$ ג. $m = \frac{1}{3} \, , \, b = \frac{2}{5}$

ד. $m = \frac{1}{2} \, , \, b = -\frac{3}{2}$ ה. $m = 2 \, , \, b = 1$ ו. $m = \frac{2}{3} \, , \, b = -\frac{1}{3}$.

2) א. $y = 3x - 1$ ב. $y = -5x + 6$ ג. $y = 4$.

3) א. עיינו בסרטון. ב. עיינו בסרטון. ג. $m = 2$ ד. $(0,-1)$.

4) א. (1) ב. (2) ג. (3) ד. (4).

5) א. (4) ב. (1) ג. (3) ד. (2).

6) א. (2) ב. (4) ג. (1) ד. (3).

שיפוע ישר דרך שתי נקודות:

סיכום כללי:

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ יחושב: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(כאשר $\Delta x\neq 0$).

שאלות:

1) חשבו את השיפוע של ישר העובר דרך הזוגות הבאים:

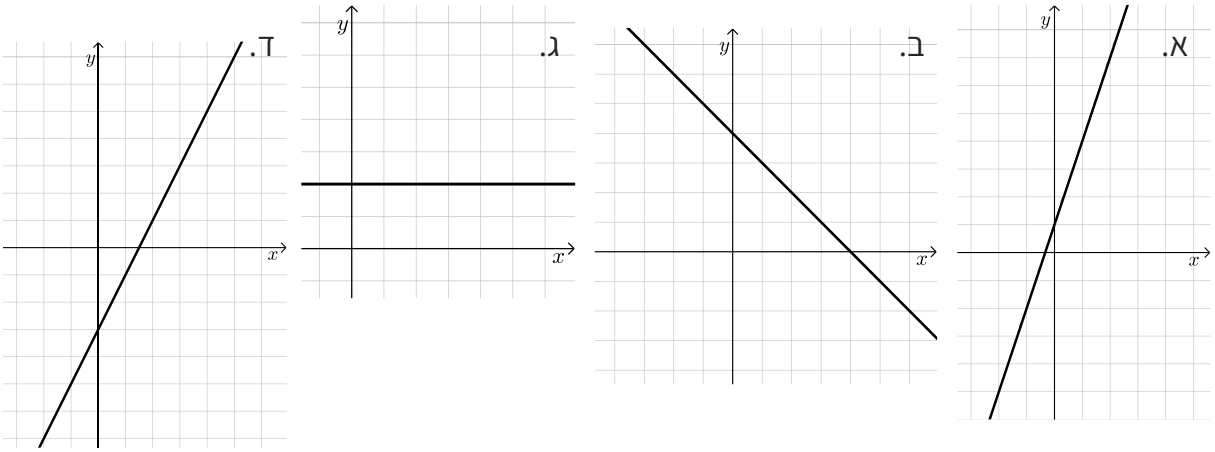
א. $(5,4)\ ,\ (6,-1)$ ב. $(2,3)\ ,\ (3,2)$

ג. $(8,0)\ ,\ (0,4)$ ד. $(3,-4)\ ,\ (0,0)$

ה. $(7,-9)\ ,\ (1,8)$ ו. $\left(1\frac{1}{3},5\right)\ ,\ \left(\frac{2}{3},2\right)$

2) חשבו את שיפוע הישרים הבאים ע"י בחירת שתי נקודות על הישר:

(הניחו כי המרחקים בין שנתות סמוכות בכל ציר הם של יחידה אחת).



תשובות סופיות:

1) א. -5 ב. -1 ג. -0.5 ד. $-\frac{4}{3}$ ה. $-2\frac{5}{6}$ ו. 4.5.

2) א. 3 ב. -1 ג. 0 ד. 2.

מציאת משוואת ישר באמצעות שיפוע ונקודה:

סיכום כללי:

ניתן למצוא משוואת ישר מהצורה $y=mx+b$ כאשר נתונות שתי נקודות הנמצאות עליו, לפי השלבים הבאים:

- מציאת הפרמטר m (שיפוע הישר) לפי: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- מציאת הפרמטר b (האיבר החופשי) ע"י הצבת m ואחת מן הנקודות הנתונות במשוואת הישר.

לחילופין ניתן לבצע את שתי הפעולות יחד לפי הנוסחה: $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.

שאלות:

1) מצאו משוואת ישר אם נתון כי הוא חותך את ציר ה- y בנקודה $\left(0,-5\right)$ ושיפועו הוא 4.

תשובות סופיות:

1) $y=4x-5$.

מציאת משוואת ישר המקביל לישר נתון

סיכום כללי:

כדי למצוא משוואת ישר יש צורך בידיעת נקודה (x_1, y_1) ושיפוע m.
לאחר מכן ניתן להשתמש בנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

לישרים מקבילים **אותו שיפוע**.
לכן בידיעת שיפועו של ישר המקביל לישר המבוקש, נוכל להשתמש בשיפועו בחישוב משוואת הישר.

שאלות:

1) מצאו משוואת ישר המקביל לישר $y = 3x - 1$ וחותך את ציר ה- y בנקודה $(0,4)$.

2) נתון ישר שמשוואתו: $y = 3x - 1$.

א. מצאו משוואת ישר המקביל לישר הנתון ועובר דרך הנקודה $(5,-2)$.

ב. האם הנקודה $(14,2)$ נמצאת על הישר שמצאת בסעיף הקודם?

ג. כתבו נקודה הנמצאת על משוואת הישר שמצאת.

3) רשמו משוואת ישר המקביל לישר $y = 3 - x$ ועובר דרך ראשית הצירים.

4) מצאו משוואת ישר המקביל לישר $y = -4x + 9$ ועובר דרך הנקודה $(-5,7)$.

5) מצאו משוואת ישר המקביל לישר $y = -5x + 5$ ונמצא 3 יחידות מתחתיו.

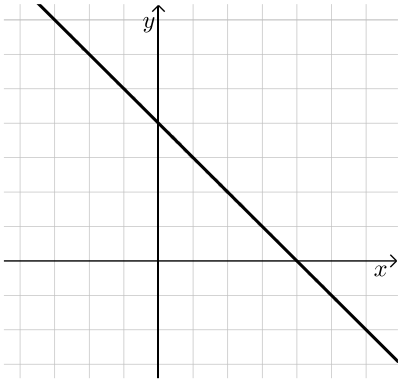
6) מצאו משוואת ישר המקביל לישר $y - 7x + 12 = 0$ ועובר דרך הנקודה $(-2,-3)$.

7) מצאו משוואת ישר המקביל לישר $y = 5$ ועובר דרך הנקודה $(-1,7)$.

8) מצאו משוואת ישר המקביל לישר $5y - 4x + 9 = 0$ ועובר דרך ראשית הצירים.

9) מצאו משוואת ישר המקביל לישר $y=9-2x$
ועובר דרך נקודת החיתוך של הישר $y=x+1$ עם ציר ה- y.

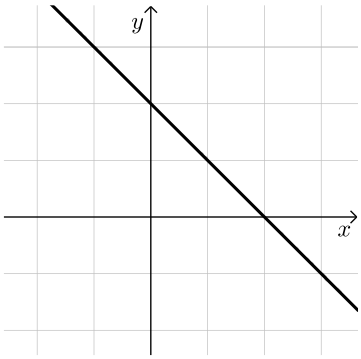
10) איזו משוואה מתאימה לישר שבגרף?



$(1)\ y=-x-4 \quad (2)\ y=-\frac{x}{4}+4$

$(3)\ y=-x+4 \quad (4)\ y=x+4$

11) הישר שבגרף מתאר את הפונקציה: $y=-x+2$.
הוסיפו לגרף ישר שמשוואתו היא $y=-2x+2$.
נמקו את שיקולכם, אין צורך בסרטוט מדויק.



תשובות סופיות:

1) $y=3x+4$.

2) א. $y=3x-17$ ב. לא. ג. כל נקודה המקיימת את משוואת הישר.

3) $y=-x$.

4) $y=-4x-13$.

5) $y=-5x+2$.

6) $y=7x+11$.

7) $y=7$.

8) $y=\frac{4}{5}x$.

9) $y=-2x+1$.

10) (3).

11) עיינו בסרטון הוידאו.

מציאת משוואת ישר דרך שתי נקודות:

סיכום כללי:

כדי למצוא משוואת ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$, נחשב תחילה את שיפוע הישר באמצעות שתי נקודות אלו לפי: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ולאחר מכן נעזר בנוסחת משוואת הישר.
בשלב זה ניתן להשתמש באחת משתי הנקודות הנתונות לכתיבת המשוואה.

שאלות:

1) מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודות: $(7,-2)$, $(4,-2)$.
מה ניתן לומר על ישר זה?

2) הראו כי ישר העובר דרך הנקודות $(4,-2)$ ו- $(1,1)$ מקביל לישר $y=-x+12$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(2,-6)$ ו- $(5,3)$.
ב. מצאו את משוואת הישר המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם ועובר דרך הנקודה $(-1,10)$.

4) לפניכם טבלת ערכים חלקית המתארת פונקציה קווית כלשהי.

x	-5	-4	1	3	7
y	-13	-11	-1	3	11

א. מצאו את שיפוע הגרף. האם הטבלה מייצגת קו עולה או יורד?
ב. כתבו את משוואת הישר.

תשובות סופיות:

1) הישר הוא $y=-2$ אשר מקביל לציר ה- x .

2) שאלת הוכחה.

3) א. $y=3x-12$ ב. $y=3x+13$.

4) א. השיפוע: 2, הישר עולה. ב. $y=2x-3$.

ישרים המקבילים לצירים:

סיכום כללי:

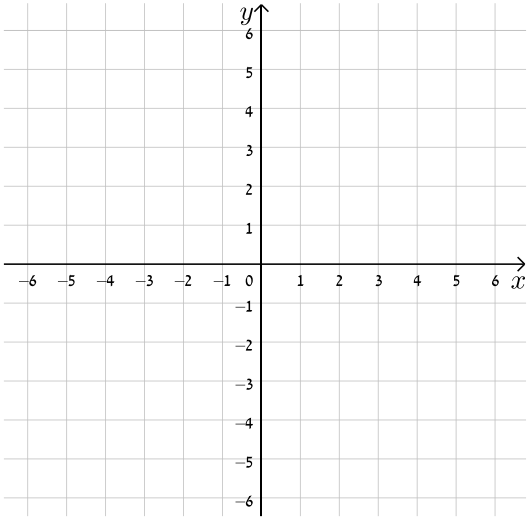
ישרים המקבילים לצירים הם מהצורות הבאות:

- ישר המקביל לציר ה- x: $y=n$.
- ישר המקביל לציר ה- y: $x=k$.

שאלות:

1) סרטטו את הגרפים של הישרים הבאים במערכת צירים אחת:

$(1)\ y=2x+1$ $(2)\ y=x-2$ $(3)\ y=1$ $(4)\ y=4-2x$ $(5)\ x=-3$



2) מצאו את משוואות הישרים הבאות:

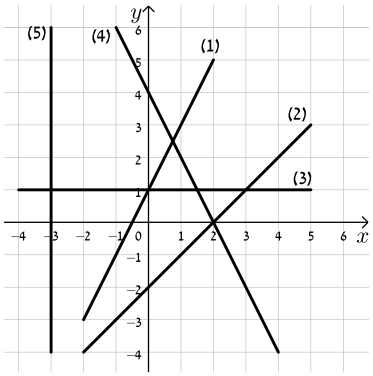
א. ישר המאונך לציר ה- x ועובר בנקודה $(3,6)$.

ב. ישר המאונך לציר ה- y ועובר בנקודה $(-5,2)$.

ג. ישר המאונך לישר $x=4$ ועובר בנקודה $(1,-2)$.

תשובות סופיות:

1) להלן גרף בצד:



2) א. $x=3$ ב. $y=2$

ג. $y=-2$.

חיתוך של ישר עם הצירים:

סיכום כללי:

- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית $y=mx+b$ עם ציר ה- y יש להציב $x=0$ במשוואתה. מתקבל: $y=b$,
כלומר: $(0,b)$ היא נקודת החיתוך של הפונקציה הקווית עם ציר ה- y.
- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית עם ציר ה- x יש להציב $y=0$.
זו היא נקודת האפס של הפונקציה.

שאלות:

1) מצאו את נקודות החיתוך של כל ישר עם הצירים:

א. $y=2x+5$ ב. $y=3x-1$ ג. $y=\frac{1}{2}x+3$

ד. $y=x-\frac{1}{5}$ ה. $y=8$ ו. $x=-1$

תשובות סופיות:

1) א. $(-2.5,0)$, $(0,5)$ ב. $\left(\frac{1}{3},0\right)$, $(0,-1)$ ג. $(-6,0)$, $(0,3)$

ד. $\left(\frac{1}{5},0\right)$, $\left(0,-\frac{1}{5}\right)$ ה. $(0,8)$, אין חיתוך עם ציר ה- x.

ו. $(-1,0)$, אין חיתוך עם ציר ה- y.

חיוביות ושליליות של ישר:

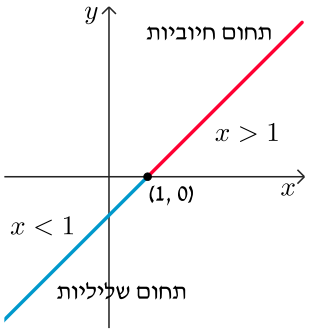
סיכום כללי:

מציאת נקודת החיתוך של ישר עם ציר ה-x:

כדי למצוא את נקודת החיתוך של ישר עם ציר ה-x, נציב: $y=0$.
במידה והישר אינו מקביל לצירים נקבל נקודה $(x_0,0)$ כאשר x_0 הוא שיעור ה-x של נקודת החיתוך עם ציר ה-x.

תחומי חיוביות ושליליות:

תחום חיוביות הוא כזה המקיים: $y>0$.
תחום שליליות הוא כזה המקיים: $y<0$.



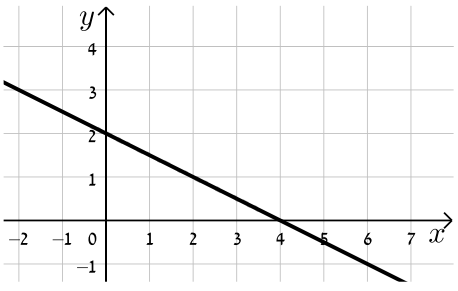
שאלות:

1) מצאו את נקודות החיתוך של כל ישר עם הצירים:

א. $y=2x+5$ ב. $y=3x-1$ ג. $y=\frac{1}{2}x+3$

ד. $y=x-\frac{1}{5}$ ה. $y=8$ ו. $x=-1$

2) לפניכם הגרף של הפונקציה הבאה:



א. הגרף מתאר פונקציה עולה או יורדת? נמק.
ב. מהי נקודת האפס של הפונקציה?
ג. מהי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ?
ד. מהי נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y ?
ה. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x-4$.

א. מצאו את הנקודה שבה: $f(x)=0$.

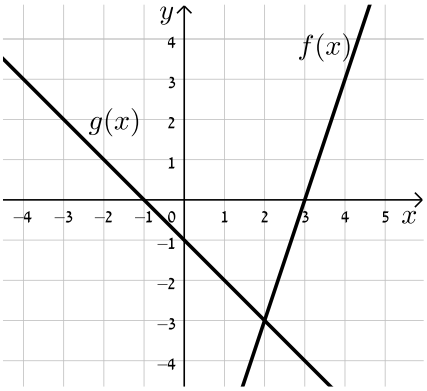
ב. מצאו את התחום שבו $f(x)>0$ ואת התחום שבו $f(x)<0$.

ג. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.

ד. סרטטו את הפונקציה במערכת צירים והראו את התחומים שמצאת.

4) לפניכם שני גרפים של פונקציות קוויות.

(הרווח בין השנתות מתאר יחידה אחת).



א. מהן נקודות האפס של כל פונקציה?

ב. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

ג. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$?

ד. מהי נקודת החיתוך של הפונקציות?

ה. מהו התחום בו $f(x)>g(x)$ ומהו התחום בו $f(x)<g(x)$.

5) נתונות שתי פונקציות קוויות: $f(x)=x+5$ ו- $g(x)=3x-3$.

א. מצאו את נקודות האפס של כל פונקציה.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y.

ג. סרטטו את שתי הפונקציות במערכת צירים אחת.

ד. מהו הערך של x עבורו מתקיים: $f(x)=g(x)$?

ה. מצאו את התחום בו: $f(x)>g(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. $(-2.5,0)$, $(0,5)$ ב. $\left(\frac{1}{3},0\right)$, $(0,-1)$ ג. $(-6,0)$, $(0,3)$

ד. $\left(\frac{1}{5},0\right)$, $\left(0,-\frac{1}{5}\right)$ ה. $(0,8)$, אין חיתוך עם ציר ה- x.

ו. $(-1,0)$, אין חיתוך עם ציר ה- y.

2) א. יורדת. ב. $(4,0)$ ג. $(4,0)$

ד. $(0,2)$ ה. חיובית: $x<4$, שלילית: $x>4$.

3) א. $\left(\frac{4}{3},0\right)$ ב. $f(x)<0:\ x<\frac{4}{3}$, $f(x)>0:\ x>\frac{4}{3}$

ג. $(0,-4)$ ד. לאיור מלא עיין בסרטון.

4) א. $g(x):\ (-1,0)$; $f(x):\ (3,0)$

ב. חיובית: $x>3$, שלילית: $x<3$ ג. חיובית: $x<-1$, שלילית: $x>-1$.

ד. $(2,-3)$

ה. $f(x)>g(x)$ עבור: $x>2$, ו- $f(x)<g(x)$ עבור: $x<2$.

5) א. $g(x):\ (1,0)$; $f(x):\ (-5,0)$

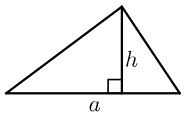
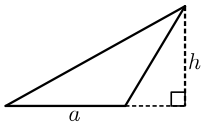
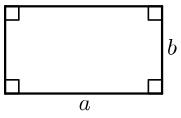
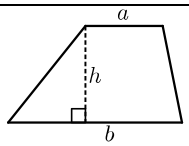
ב. $g(x):\ (0,-3)$; $f(x):\ (0,5)$ ג. לאיור מלא עיין בסרטון.

ד. $(4,9)$. ה. $x<4$.

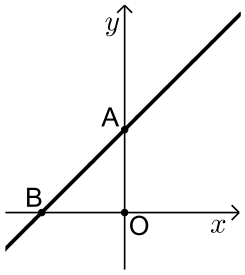
חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

שם הצורה	איור	אופן החישוב
משולש		$S=\frac{a\cdot h}{2}$
משולש קהה זווית		$S=\frac{a\cdot h}{2}$
מלבן		$S=a\cdot b$
טרפז		$S=\frac{(a+b)h}{2}$

שאלות:



1) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $y=x+2$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y (הנקודה A).

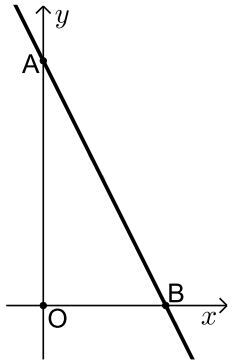
ב. מצאו את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x (הנקודה B).

ג. עבור אילו ערכים של x הפונקציה מקבלת ערכים חיוביים?

ד. חשבו את אורכי הקטעים AO ו-BO (O ראשית הצירים).

ה. חשבו את שטח המשולש AOB.

2) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $y=-2x+6$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y (הנקודה A).

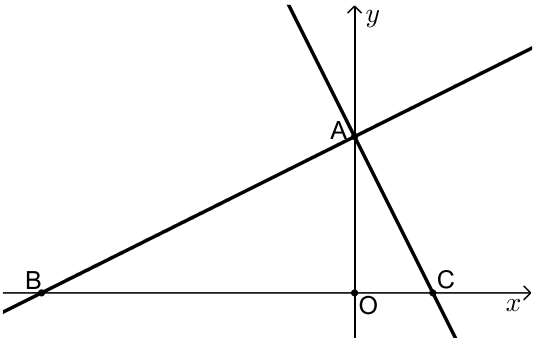
ב. מצאו את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x (הנקודה B).

ג. עבור אילו ערכים של x הפונקציה מקבלת ערכים חיוביים?

ד. חשבו את אורכי הקטעים AO ו-BO (O ראשית הצירים).

ה. חשבו את שטח המשולש ABO.

3) בסרטוט שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ו- $g(x)=-2x+4$.



א. מצאו את שיעורי נקודת המפגש של שתי הפונקציות (הנקודה A).

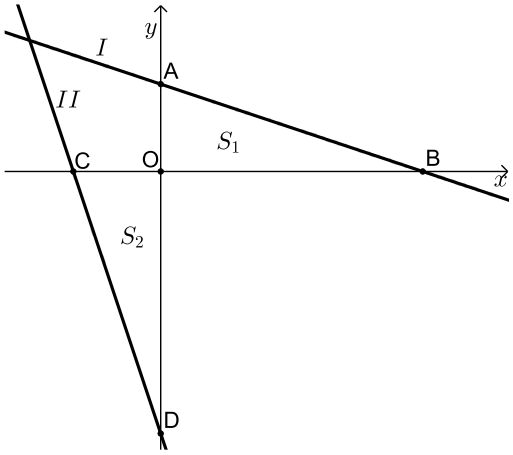
ב. מצאו את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- x (הנקודות B ו-C).

ג. מצאו את אורך הקטע BC ואת אורך הקטע AO.

ד. חשבו את $S_{\Delta ABC}$.

4) באיור שלפניכם נתונות שתי פונקציות:

$f(x)=-\frac{1}{3}x+3$ ו- $g(x)=-3x-9$.



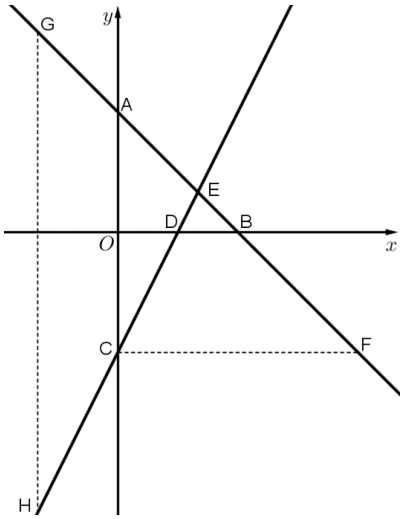
הגרפים של כל פונקציה מסומנים ב-I ו-II.

א. התאימו לכל גרף את הפונקציה שלו.

ב. הראו כי השטחים המסומנים שווים, כלומר: $S_1=S_2$.

5) בסרטוט שלפניכם מתוארים הישרים: $y=2x-6$, $y=-x+6$.

הקטעים המקווקים מקבילים לצירים.



א. חשבו את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. חשבו את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. נתון: 24 יחידות אורך = GH.
חשבו את שיעורי הנקודות G ו-H.

ד. חשבו את שטח הטרפז ACHG.

6) בסרטוט שלפניכם מתוארים הישרים: $y=2x-10$, $y=-x+2$.

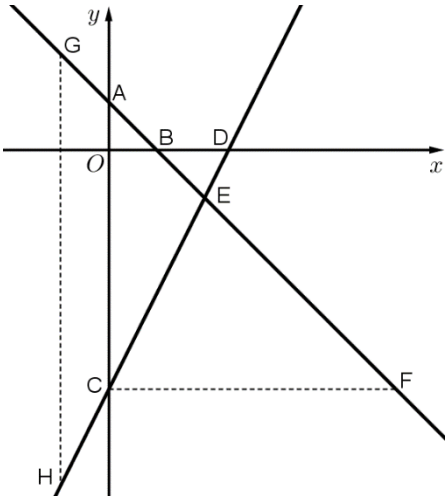
הקטעים המקווקוים מקבילים לצירים.

א. חשבו את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. חשבו את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. נתון: 18 יחידות אורך = GH.

חשבו את שיעורי הנקודות G ו-H.



7) חשבו את שטח הטרפז ACHG.

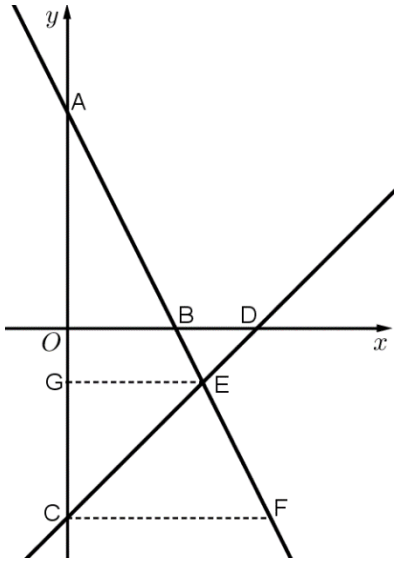
א. בסרטוט שלפניכם מתוארים הישרים: $y=x-7$, $y=-2x+8$.

הקטעים המקווקוים מקבילים לצירים.

ב. חשבו את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ג. חשבו את שיעורי הנקודות E ו-F.

ד. חשבו את שטח הטרפז CGEF.



8) בסרטוט שלפניכם מתוארים הישרים AE ו-DE.

משוואת הישר DE היא $y=-\frac{1}{2}x+2$.

נתון כי: 3 יחידות אורך = EF

(מקביל לציר ה- y) וכן: $A(0,5)$.

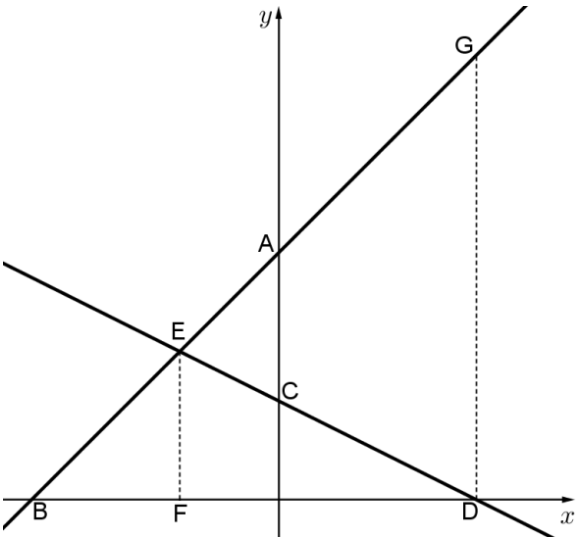
א. חשבו את שיעורי הנקודה E.

ב. מצאו את משוואת הישר AE.

ג. חשבו את שיעורי הנקודות B ו-D.

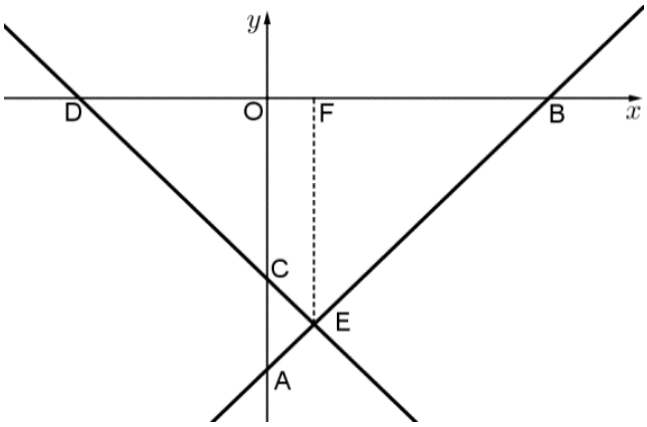
ד. נתון כי DG מקביל לציר ה- y.

חשבו את שטח הטרפז EFDG.



9) בסרטוט שלפניכם מתוארים הישרים AB ו-DE. משוואת הישר DE היא $y=-\frac{1}{2}x-2$.

נתון כי: 2.5 יחידות אורך = EF (מקביל לציר ה- y) וכן: $B(6,0)$.



א. חשבו את שיעורי הנקודה E.

ב. מצאו את משוואת הישר AB.

ג. מצאו את אורך הקטע BD.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה A ו-C.

ה. חשבו את שטח הטרפז OCEF
(O– ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

1) א. $(0,2)$ ב. $(-2,0)$ ג. $x>-2$ ד. $AO=2\ ,\ BO=2$ ה. 2 יח"ש.

2) א. $(0,6)$ ב. $(3,0)$ ג. $x<3$ ד. $AO=6\ ,\ BO=3$ ה. 9 יח"ש.

3) א. $(0,4)$ ב. $B(-8,0)\ ,\ C(2,0)$ ג. $AO=4\ ,\ BC=10$ ה. 20 יח"ש.

4) א. $g(x):II\ ,\ f(x):I$ ב. הוכחה.

5) א. $D(3,0)\ ,\ C(0,-6)\ ,\ B(6,0)\ ,\ A(0,6)$ ב. $F(12,-6)\ ,\ E(4,2)$
ג. $H(-4,-14)\ ,\ G(-4,10)$ ד. 72 יחידות שטח.

6) א. $D(5,0)\ ,\ C(0,-10)\ ,\ B(2,0)\ ,\ A(0,2)$ ב. $F(12,-10)\ ,\ E(4,-2)$
ג. $H(-2,-14)\ ,\ G(-2,4)$ ד. 30 יחידות שטח.

7) א. $D(7,0)\ ,\ C(0,-7)\ ,\ B(4,0)\ ,\ A(0,8)$ ב. $F(7.5,-7)\ ,\ E(5,-2)$
ג. 31.25 יחידות שטח.

8) א. $E(-2,3)$ ב. $y=x+5$ ג. $B(-5,0)\ ,\ D(4,0)$
ד. 36 יחידות שטח.

9) א. $E(1,-2.5)$ ב. $y=\frac{1}{2}x-3$ ג. 10 יחידות אורך = BD.
ד. $A(0,-3)\ ,\ C(0,-2)$ ה. 2.25 יחידות שטח.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

חיתוך בין שני ישרים:

כדי למצוא חיתוך בין שני ישרים, נפתור מערכת המשוואות הכוללת את משוואותיהם.

ישרים מקבילים:

- ישרים בעלי שיפועים זהים הם מקבילים זה לזה.
- אם לישרים יש אותו שיפוע ונקודת חיתוך שונה עם ציר ה- y אז הם מקבילים זה לזה.

מספרים הופכיים:

זוג מספרים (השונים מאפס) שמכפלתם שווה ל-1 נקראים מספרים הופכיים.

כדי למצוא מספר ההופכי למספר נתון, נחליף את המונה והמכנה.

ישרים מאונכים:

השיפועים m_1 ו- m_2 של שני ישרים המאונכים זה לזה מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$
(כאשר $m_1 \neq 0$ וגם $m_2 \neq 0$).
מכך נובע כי השיפועים של ישרים מאונכים הם מספריים הופכיים ונגדיים.

שאלות:

1) קבעו את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=2x+4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=x-7 \\ y=x+6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y=6x-15 \\ y=3x+41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y=x+8 \\ y=x+8 \end{cases}$

2) קבעו אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=3x-1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=2x \\ y=\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y=-4x-5 \\ y=\frac{1}{4}x+5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y=x-6 \\ y=-x+6 \end{cases}$

3) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

4) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $C(-5,5)$, $B(3,7)$, $A(5,-1)$.

הוכיחו שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

1) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

2) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

3) א. $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$, $m_{AB}=m_{CD}=6$.

ב. הכל הפוך: $m_{BC}=m_{AD}=6$, $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$.

4) שאלת הוכחה.

שאלון 471

חזרה על משפטים מחטיבת הביניים

תוכן העניינים:

חזרה על משפטים מחטיבת הביניים..... 107

זוויות בין ישרים מקבילים:.....108

סיכום כללי:.....108

משולשים: 110

סיכום כללי:.....110

מרובעים: 118

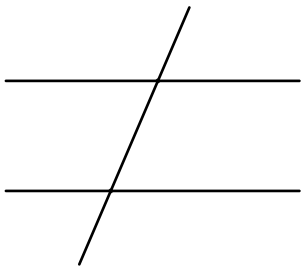
סיכום כללי:.....118

זוויות בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

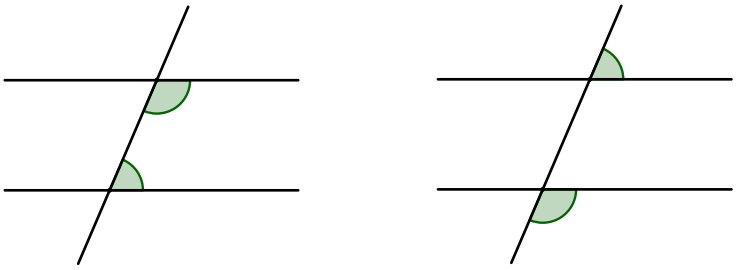
ישרים מקבילים:

שני ישרים, הנמצאים באותו המישור, ואינם נחתכים באף נקודה נקראים ישרים מקבילים.



זוויות חד-צדדיות:

שתי זוויות שנכלאות על ידי הישרים המקבילים וישר החיתוך מאותו צד של ישר החיתוך אך מצדדים שונים של הישרים המקבילים נקראות זוויות חד-צדדיות.



מהאקסיומה החמישית של אוקלידס (אקסיומת המקבילים) מתקיים:

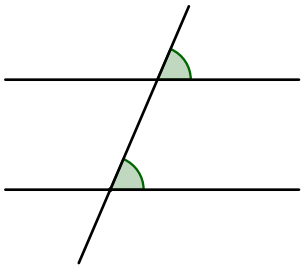
ניסוח 1: אם הזוויות החד-צדדיות הנוצרות בין זוג ישרים מקבילים וישר חיתוך משלימות ל-$180°$ אז הישרים מקבילים.

ניסוח 2: אם זוג ישרים הם מקבילים,
אז הזוויות החד-צדדיות הנוצרות בין הישרים המקבילים וישר חיתוך נוסף ישלימו ל-$180°$.

זוויות מתאימות:

שתי זוויות שנכלאות על ידי הישרים המקבילים וישר החיתוך מאותו צד של ישר החיתוך ואותו הצד של כל אחד מהישרים המקבילים נקראות זוויות מתאימות.

משפט:



זוויות מתאימות בין שני ישרים מקבילים וישר חיתוך שוות זו לזו.

ניסוח מתמטי: אם: $a \parallel b$ אז: $\alpha = \beta$.

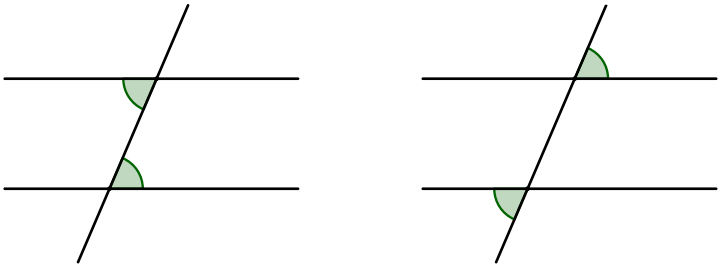
משפט (הפוך):

נתונים שני ישרים וישר חיתוך, אם יש זוג זוויות מתאימות השוות זו לזו אז שני הישרים מקבילים.

ניסוח מתמטי: אם: $\alpha = \beta$ אז: $a \parallel b$.

זוויות מתחלפות:

שתי זוויות שנכלאות על ידי הישרים המקבילים וישר החיתוך מצדדים שונים של ישר החיתוך ומצדדים שונים של כל אחד מהישרים המקבילים נקראות זוויות מתחלפות.



משפט:

זוויות מתחלפות בין שני ישרים מקבילים וישר חיתוך שוות זו לזו.

משפט (הפוך):

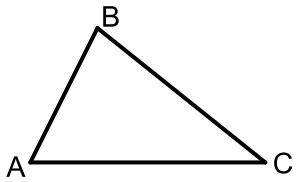
נתונים שני ישרים וישר חיתוך, אם יש זוג זוויות מתחלפות השוות זו לזו אז שני הישרים מקבילים.

ניסוח מתמטי: אם: $\alpha = \beta$ אז: $a \parallel b$.

משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:



משולש הוא מצולע בעל שלוש צלעות ושלושה קודקודים.

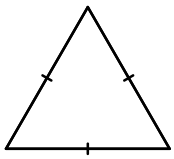
נסמן את קודקודי המשולש באותיות גדולות באנגלית כגון: A, B, C.

נסמן את צלעות המשולש באותיות קטנות באנגלית כגון: a, b, c
או באמצעות קודקודי המשולש כגון: AB, AC, BC.

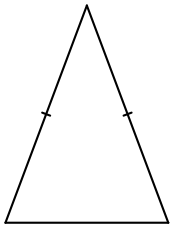
נסמן את זוויות המשולש באותיות יווניות כגון: α , β , γ
או באמצעות סימון זוויות: $\sphericalangle C = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle B = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle A = \sphericalangle BAC$.

סוגי משולשים לפי צלעות:

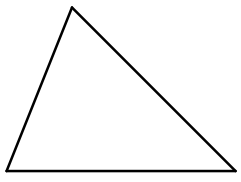
- משולש שכל צלעותיו שוות נקרא משולש שווה צלעות.



- משולש ששתיים מצלעותיו שוות נקרא משולש שווה שוקיים.
  שתי הצלעות השוות נקראות שוקיים.
  הצלע השלישית נקראת בסיס. הזוויות שמול השוקיים
  נקראות זוויות בסיס והזווית שמול הבסיס נקראת זווית הראש.

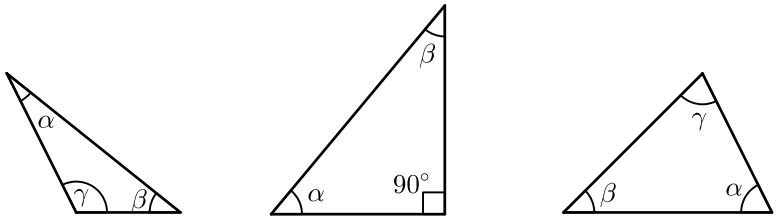


- משולש שכל צלעותיו שונות נקרא משולש שונה צלעות.



סוגי משולשים לפי זוויות:

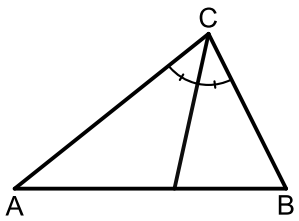
- משולש שכל זוויותיו חדות (קטנות מ- $90°$) נקרא משולש חד זווית.
- משולש שיש לו זווית אחת ישרה (זווית שהיא $90°$) נקרא משולש ישר זווית.
  הצלעות שליד הזווית הישרה נקראות ניצבים והצלע שמול הזווית הישרה נקראת יתר.
- משולש שיש לו זווית אחת קהה (גדולה מ- $90°$) נקרא משולש קהה זווית.



קטעים מיוחדים במשולשים:

חוצה זווית במשולש:

קטע המחבר קודקוד המשולש עם הצלע שמולו וחוצה את הזווית ממנה הוא יוצא נקרא חוצה זווית במשולש.

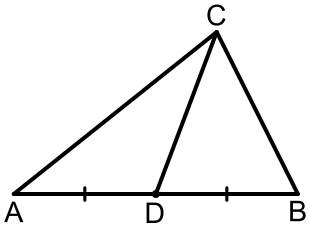


הערה:

שלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת הנקראת: מפגש חוצי הזווית במשולש.

תיכון במשולש:

קטע המחבר קודקוד במשולש עם אמצע הצלע שמולו נקרא תיכון או חוצה צלע.

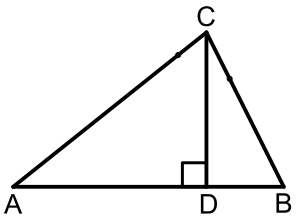


הערה:

שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת הנקראת: מפגש התיכונים במשולש.

גובה במשולש:

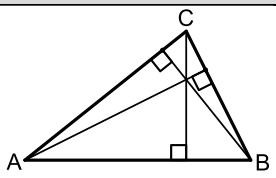
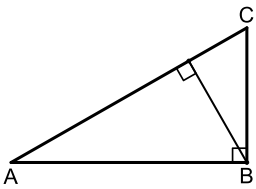
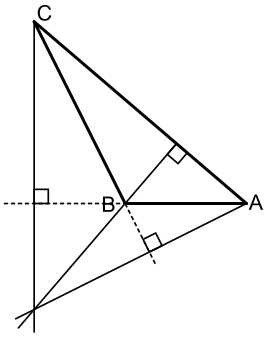
קטע המחבר קודקוד במשולש עם הצלע שמולו או עם המשכה ומאונך לה נקרא גובה.



הערה:

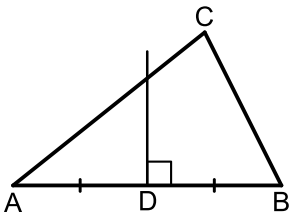
שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת הנקראת: מפגש הגבהים במשולש.

גבהים חיצוניים למשולש ונקודת המפגש שלהם:

סוג המשולש	נקודת המפגש	איור
חד-זווית	בתוך המשולש	
ישר-זווית	בקודקוד הזווית הישרה	
קהה-זווית	מחוץ למשולש	

אנך אמצעי במשולש:

קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה נקרא קטע אמצעים.

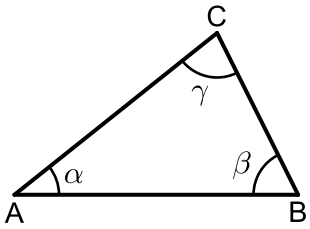


הערה:

שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת הנקראת: מפגש אנכים אמצעיים במשולש.

משפט - סכום זוויות במשולש:

סכום הזוויות במשולש הוא תמיד $180°$, כלומר: $\alpha+\beta+\gamma=180°$.



חפיפת משולשים:

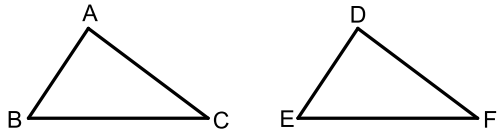
שני משולשים שבהם שוות בהתאמה 3 הצלעות ו-3 הזוויות נקראים משולשים חופפים.

נתונים המשולשים: ΔABC ו- ΔDEF.

סימון: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

מתקיים: $AB=DE\ ,\ BC=EF\ ,\ AC=DF$

וכן: $\sphericalangle A=\sphericalangle D\ ,\ \sphericalangle B=\sphericalangle E\ ,\ \sphericalangle C=\sphericalangle F$.



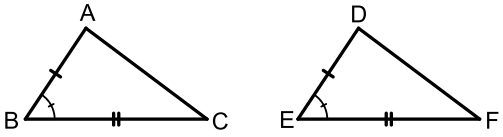
משפט חפיפה ראשון (צלע, זווית, צלע):

אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן אז המשולשים חופפים.

מתמטית:

אם: $AB=DE\ ,\ BC=EF$ ו- $\sphericalangle B=\sphericalangle E$

אז: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



הערה: משפט החפיפה הראשון הוא אקסיומה.

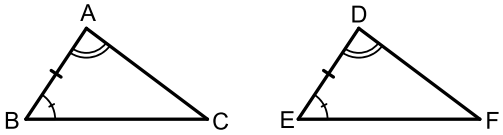
משפט חפיפה שני (זווית, צלע, זווית):

אם בשני משולשים שוות בהתאמה צלע ושתי הזוויות שלידה אז המשולשים חופפים.

מתמטית:

אם: $\sphericalangle A=\sphericalangle D\ ,\ \sphericalangle B=\sphericalangle E$ ו- $AB=DE$

אז: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



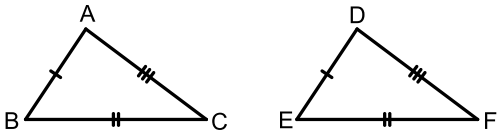
משפט חפיפה שלישי (צלע, צלע, צלע):

אם בשני משולשים שוות בהתאמה שלוש הצלעות אז המשולשים חופפים.

מתמטית:

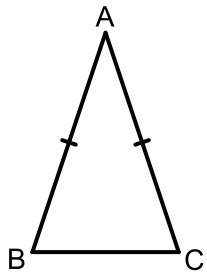
אם: $AB = DE\ ,\ BC = EF$ ו- $AC = DF$

אז: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



משולש שווה שוקיים:

משולש שווה שוקיים הוא משולש ששתיים מצלעותיו שוות.



משפט עזר:

זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות זו לזו.

מתמטית:

אם: $AB = AC$ אז: $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.

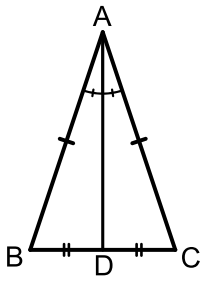
משפט (1):

במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש הוא גם תיכון לבסיס וגם גובה לבסיס.

מתמטית:

אם: ΔABC מש"ש שבו $AB = AC$ וגם $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$

אז: $BD = CD$ וגם $AD \perp BC$.



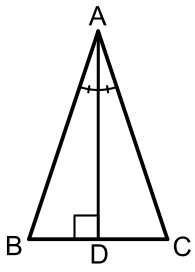
משפט (2):

אם במשולש חוצה זווית מתלכד עם הגובה אז המשולש שווה שוקיים.

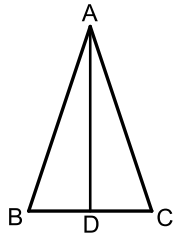
מתמטית:

אם: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$ וגם $AD \perp BC$

אז: ΔABC מש"ש שבו $AB = AC$.



משפט (הכללה):



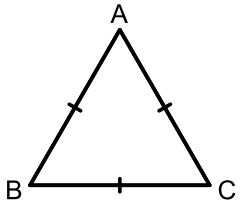
אם קטע במשולש מקיים שניים מתוך שלוש התכונות הבאות:

- חוצה זווית.
- גובה.
- תיכון.

אז הקטע מקיים גם את התכונה השלישית והמשולש הוא שווה שוקיים.

הזווית הנחצית היא זווית הראש במשולש והקטע הוא גובה ותיכון לבסיס.

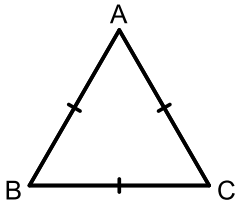
משולש שווה צלעות:



משולש שכל צלעותיו שוות הוא משולש שווה צלעות.

ניתן להתייחס למשולש שווה צלעות כאל משולש שווה שוקיים שבו כל זוג צלעות הן שוקיים והצלע השלישית היא הבסיס.

משפט:



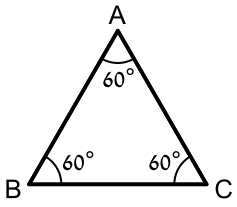
במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות ל- $60°$.

מתמטית:

אם: $AB = BC = AC$

אז: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

משפט (הפוך):



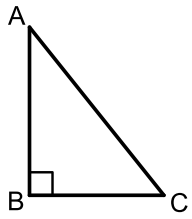
אם במשולש כל הזוויות שוות אז הוא שווה צלעות.

מתמטית:

אם: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$

אז: $AB = BC = AC$.

משולש ישר זווית:



משולש שבו זווית ישרה נקרא משולש ישר זווית.

הצלעות המאונכות נקראות **ניצבים**

והצלע שמול הזווית הישרה נקראת **יתר**.

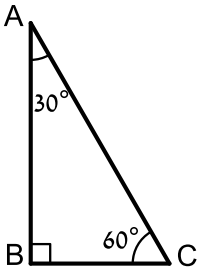
הערה:

במשולש ישר זווית, סכום שתי הזוויות החדות שווה ל- $90°$.

אפשר לסמן את שתי הזוויות בעזרת משתנה יחיד, למשל: α ו- $90°-\alpha$.

משפט (1):

במשולש ישר זווית שזוויותיו החדות הן: $30°$ ו- $60°$, הניצב שמול ה- $30°$ שווה למחצית היתר.

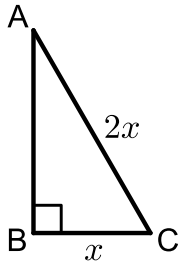


מתמטית:

אם: $\sphericalangle C=60°$, $\sphericalangle B=90°$, $\sphericalangle A=30°$

אז: $BC=\frac{1}{2}AC$.

משפט (2) - הפוך:



אם במשולש ישר זווית היתר גדול פי 2 מאחד הניצבים,

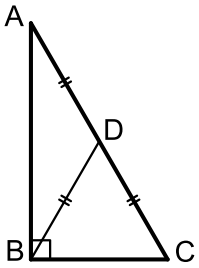
אז הזווית שמול ניצב זה היא $30°$.

מתמטית:

אם: $\sphericalangle B=90°$, $BC=\frac{1}{2}AC$

אז: $\sphericalangle A=30°$.

משפט (3):



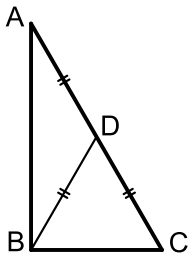
התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר.

מתמטית:

אם: ABC ישר זווית $\left(\sphericalangle B=90°\right)$, BD תיכון ל-AC.

אז: $BD=\frac{1}{2}AC$.

משפט (4) - הפוך:



משולש שבו אחד מהתיכונים שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה,

הוא משולש ישר זווית (הזווית שמול הצלע הנ"ל היא $90°$).

מתמטית:

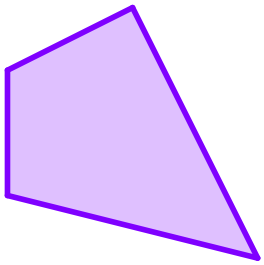
אם: $BD=\frac{1}{2}AC$, BD תיכון ל-AC.

אז: $\sphericalangle B=90°$.

מרובעים:

סיכום כללי:

מרובע כללי:



מרובע הוא מצולע בעל ארבע צלעות.

קודקודים:

- קודקודים סמוכים הם קודקודים החולקים צלע משותפת.
- קודקודים שאינם סמוכים הם קודקודים שאינם חולקים צלע משותפת.

צלעות ואלכסונים:

- צלעות סמוכות הן צלעות בעלות קודקוד משותף.
- צלעות נגדיות הן צלעות שאין להן קודקוד משותף.
- אלכסון במרובע הוא קטע המחבר שני קודקודים שאינם סמוכים.

זוויות:

- זוויות סמוכות הן זוויות הנשענות על צלע משותפת.
- זוויות נגדיות הן זוויות שאינן נשענות על צלע משותפת.

תכונות המרובע:

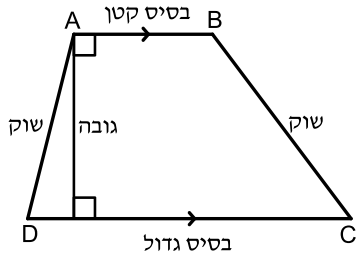
1) סכום כל הזוויות (הפנימיות) של מרובע הוא $360°$.

2) לכל מרובע יש **שני** אלכסונים.

הטרפז:

הגדרות:

מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו נקרא **טרפז**.
כלומר: $AD \not\parallel BC$, $AB \parallel CD$.

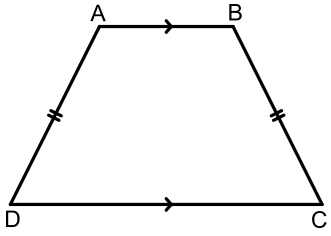


- הצלעות המקבילות נקראות **בסיסי הטרפז**.
- הצלעות שאינן מקבילות נקראות **שוקי הטרפז**.
- הזוויות שליד כל בסיס נקראות **זוויות הבסיס**.
- אנך המחבר את בסיסי הטרפז נקרא **גובה הטרפז**.

תכונות הטרפז:

- סכום שתי הזוויות שליד כל אחד משוקי הטרפז הוא $180°$.
- אלכסוני הטרפז יוצרים שני משולשים דומים עם בסיסי הטרפז.

טרפז שווה שוקיים:



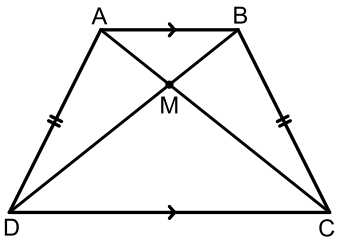
טרפז שווה שוקיים הוא טרפז ששתי שוקיו שוות.

משפטים בטרפז שווה שוקיים:

1) ישר: בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד כל אחד מהבסיסים שוות ביניהן.
הפוך: אם בטרפז, הזוויות שליד אחד הבסיסים שוות זו לזו אז הוא שווה שוקיים.

2) ישר: האלכסונים בטרפז שווה שוקיים שווים זה לזה.
הפוך: אם בטרפז האלכסונים שווים זה לזה אז הוא שווה שוקיים.

תכונות בטרפז שווה שוקיים:

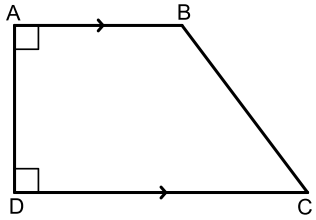


בטרפז שווה שוקיים נקודת פגישת האלכסונים מחלקת אותם באופן כזה שנוצרים 4 משולשים:

- שני משולשים חופפים.
- שני משולשים שווי שוקיים דומים.

טרפז ישר זווית:

טרפז שבו אחת השוקיים מאונכת לבסיסים נקרא טרפז ישר שווית.



היקף ושטח של טרפז:

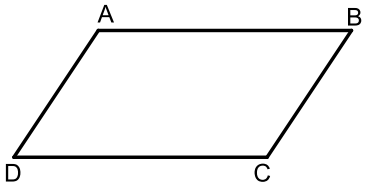
- היקף הטרפז: $P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD$.
- שטח טרפז שאורכי בסיסיו הם a ו-b וגובהו הוא h יחושב לפי: $S=\frac{(a+b)h}{2}$

(מחצית ממכפלת סכום הבסיסים בגובה).

המקבילית:

הגדרות:

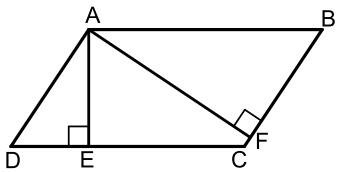
מרובע שבו שתי זוגות של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו נקרא **מקבילית**.
כלומר: $AD\parallel BC$, $AB\parallel CD$.



- במקבילית כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.
- במקבילית כל זוג צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- במקבילית סכום כל זוג זוויות סמוכות הוא $180°$.
- במקבילית כל זוג זוויות נגדיות שוות זו לזו.
- במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

היקף ושטח של מקבילית:

- היקף המקבילית: $P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD=2(AB+BC)$
- שטח מקבילית יחושב ע"י מכפלת צלע בגובה שלה: $S_{ABCD}=a\cdot h_a=b\cdot h_b$



דרכים להוכיח שמרובע הוא מקבילית:

1) אם במרובע יש שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות אז הוא מקבילית.
2) אם במרובע יש שני זוגות של צלעות נגדיות שוות אז הוא מקבילית.
3) אם במרובע יש זוג צלעות נגדיות אשר מקבילות ושוות אז הוא מקבילית.
4) אם במרובע יש שני זוגות של זוויות נגדיות שוות אז הוא מקבילית.
5) אם במרובע כל זוג זוויות סמוכות משלימות ל-$180°$ אז הוא מקבילית.
6) אם במרובע האלכסונים חוצים זה את זה אז הוא מקבילית.

המלבן:

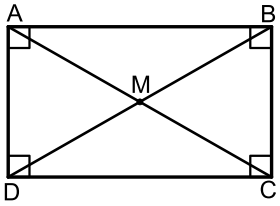
הגדרה:

המלבן הוא מרובע עם 4 זוויות ישרות.

הגדרות באמצעות המקבילית:

- מקבילית ובה זווית אחת ישרה היא מלבן.
- מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

תכונות המלבן:



- כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו: $AD \parallel BC \;,\; AB \parallel DC$.
- כל זוג צלעות נגדיות שוות זו לזו: $AD = BC \;,\; AB = DC$.
- כל אחת מזוויות המלבן היא ישרה: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$.
- האלכסונים חוצים זה את זה: $BM = DM \;,\; AM = CM$.
- האלכסונים שווים זה לזה: $AC = BD$.

היקף ושטח של מלבן:

- היקף מלבן: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2\left(AB + BC\right)$.
- שטח מלבן יחושב ע"י מכפלת שתי צלעות סמוכות: $S_{ABCD} = AB \cdot BC \;\Rightarrow\; S = a \cdot b$.

דרכים להוכיח שמרובע הוא מלבן:

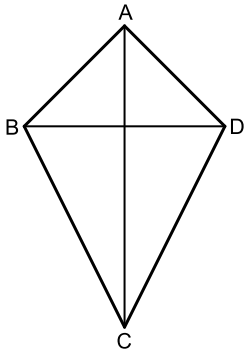
1) אם במרובע יש שלוש זוויות ישרות אז הוא מלבן.

2) אם במקבילית יש זווית ישרה אחת אז היא מלבן.

3) אם במקבילית האלכסונים שווים זה לזה אז היא מלבן.

הדלתון:

הגדרות:

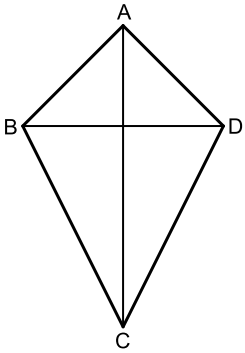


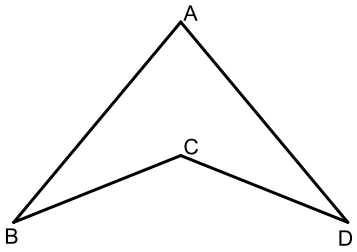
הדלתון הוא מרובע שיש לו שתי צלעות סמוכות שוות ביניהן, ושתי הצלעות האחרות שלו גם הן שוות ביניהן.
כלומר: $AB = AD \ , \ BC = CD$.

- הנקודות A ו-C נקראות הקודקודים הראשיים.
- הזוויות $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle C$ נקראת זוויות הראש.
- הזוויות $\sphericalangle B$ ו-$\sphericalangle D$ נקראת זוויות הצד.
- AC ו-BD נקראים אלכסוני הדלתון, כאשר:
  - AC נקרא האלכסון הראשי (מחבר את הקודקודים הראשיים).
  - BD נקרא האלכסון המשני (מחבר את הקודקודים האחרים).

סוגי דלתונים:

- דלתון קמור - דלתון שבו האלכסונים עוברים בתוך הדלתון.
- דלתון קעור - דלתון שבו האלכסון הראשי עובר בתוכו אך האלכסון המשני עובר מחוצה לו.

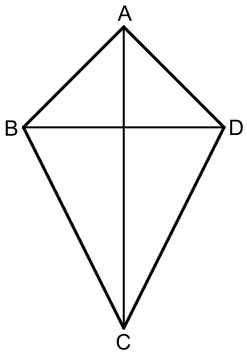




הגדרה (נוספת):

הדלתון הוא מרובע המורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף.

תכונות הדלתון:



- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש:
  $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$, $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$.
- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את האלכסון המשני: $BM = DM$.
- האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה: $AC \perp BD$.
- בדלתון, הזוויות שאינן זוויות הראש שוות זו לזו: $\sphericalangle B = \sphericalangle D$.

היקף ושטח של דלתון:

- היקף דלתון: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2(AB + BC)$.
- שטח הדלתון יחושב ע"י מחצית ממכפלת האלכסונים: $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

דרכים להוכיח שמרובע הוא דלתון:

1) אם במרובע זוג צלעות סמוכות שוות ביניהן, ושתי הצלעות האחרות גם שוות ביניהן אז הוא דלתון.

2) אם במרובע האלכסונים מאונכים זה לזה ואלכסון אחד חוצה את השני אז הוא דלתון.

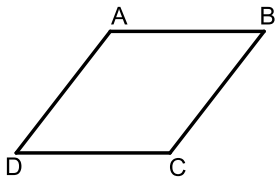
3) אם במרובע אלכסון אחד חוצה את השני והוא גם חוצה זווית אז הוא דלתון.

4) אם במרובע אלכסון אחד חוצה את שתי הזוויות דרכן הוא עובר אז הוא דלתון.

5) אם מרובע מורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף אז הוא דלתון.

המעוין:

הגדרה:

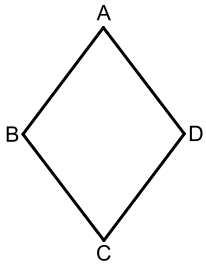


מרובע שכל צלעותיו שוות הוא מעוין.

הגדרות באמצעות מקבילית:

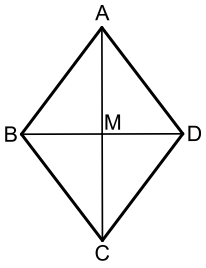
- מקבילית עם שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
- מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
- מקבילית שבה אלכסון הוא גם חוצה זווית היא מעוין.

המעוין והדלתון:



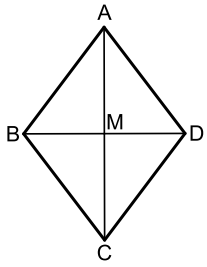
ניתן לראות במעוין כ-'דלתון מיוחד' שבו שני המשולשים שווי השוקיים המרכיבים אותו הם חופפים.

תכונות המעוין:

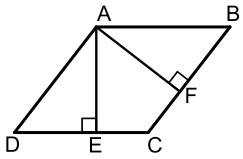


- כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו: $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$.
- כל הצלעות שוות זו לזו: $AB = BC = CD = AD$.
- כל זוג זוויות נגדיות שוות זו לזו: $\sphericalangle B = \sphericalangle D$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.
- כל זוג זוויות סמוכות משלימות ל-$180°$.
- האלכסונים חוצים זה את זה: $BM = DM$, $AM = CM$.
- האלכסונים מאונכים זה לזה: $AC \perp BD$.
- האלכסונים הם חוצי זוויות: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$, $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$, $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$.

היקף ושטח של מעוין:



- היקף מעוין: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 4AB$.
- שטח מעוין - ניתן לחשב שטח מעוין בשתי דרכים:
  - מחצית ממכפלת האלכסונים: $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$.
  - מכפלת צלע בגובה שלה: $S_{ABCD} = DC \cdot AE = BC \cdot AF$.



דרכים להוכיח שמרובע הוא מעוין:

1) אם במרובע כל הצלעות שוות אז הוא מעוין.

2) אם במקבילית שתי צלעות סמוכות שוות אז היא מעוין.

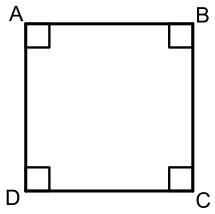
3) אם במקבילית האלכסונים מאונכים זה לזה אז היא מעוין.

4) אם במקבילית אלכסון הוא גם חוצה זווית אז היא מעוין.

5) אם בדלתון המשולשים שווי השוקיים המרכיבים אותו חופפים אז הוא מעוין.

הריבוע:

הגדרה:



מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו ישרות הוא ריבוע.

הריבוע הוא גם 'מעוין מיוחד' וגם 'מלבן מיוחד'
ולכן כל תכונות המלבן והמעוין קיימות בו
(וממילא שגם כל תכונות המקבילית).

הגדרות באמצעות מלבן:

- מלבן עם שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
- מלבן שבו האלכסונים מאונכים זה לזה הוא ריבוע.
- מלבן שבו אלכסון הוא חוצה זווית הוא ריבוע.

הגדרות באמצעות מעוין:

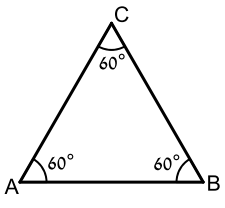
- מעוין עם זווית ישרה הוא ריבוע.
- מעוין שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא ריבוע.

מצולע משוכלל:

מצולע שבו כל הצלעות שוות זו לזו וכל הזוויות שוות זו לזו.

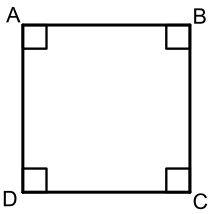
משולש משוכלל:

משולש שווה-צלעות

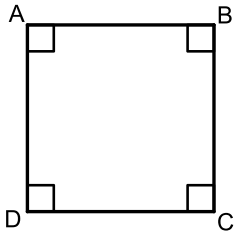


מרובע משוכלל:

הריבוע



תכונות הריבוע:



- כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו: $AB \parallel DC \;,\; AD \parallel BC$.
- כל הצלעות שוות זו לזו: $AB = BC = CD = AD$.
- כל הזוויות ישרות (ושוות): $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$.
- האלכסונים מקיימים:
  - חוצים זה את זה.
  - שווים זה לזה.
  - מאונכים זה לזה.
  - חוצי זוויות.

היקף ושטח של ריבוע:

- היקף ריבוע: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 4AB$.
- שטח ריבוע - ניתן לחשב שטח ריבוע בשתי דרכים:
  - מחצית ממכפלת האלכסונים: $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{AC^2}{2}$.
  - מכפלת שתי צלעות סמוכות: $S_{ABCD} = AB^2$.

דרכים להוכיח שמרובע הוא ריבוע:

1) אם במרובע כל הצלעות שוות ויש לו 3 זוויות ישרות אז הוא ריבוע.
2) אם במלבן שתי צלעות סמוכות שוות אז הוא ריבוע.
3) אם במלבן האלכסונים מאונכים זה לזה אז הוא ריבוע.
4) אם מלבן אלכסון הוא גם חוצה זווית אז הוא ריבוע.
5) אם במעוין יש זווית ישרה אז היא ריבוע.
6) אם במעוין האלכסונים שווים זה לזה אז היא ריבוע.

שאלון 471

קטע אמצעים במשולש

תוכן העניינים:

קטע אמצעים במשולש..... 128

סיכום כללי:.....129

שאלות:.....130

תשובות סופיות: 133

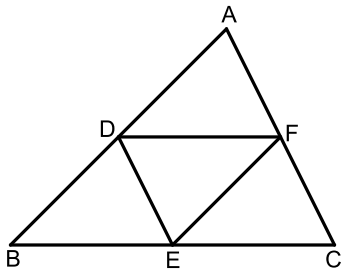
קטע אמצעים במשולש:

סיכום כללי:

הגדרה:

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

תכונות של קטע אמצעים:



- יוצא מאמצע צלע אחת ($AD = BD$).
- מגיע לאמצע צלע שניה ($AF = CF$).
- מקביל לצלע השלישית ($DF \parallel BC$).
- שווה למחצית הצלע המקבילה לו ($DF = \frac{BC}{2}$).

משפטים:

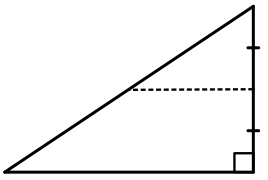
כדי להוכיח כי קטע מסוים במשולש הוא קטע אמצעים יש להראות כי הוא מקיים 2 מתוך 4 התכונות שלו (אך לא כל הצירופים אפשריים).

- קטע היוצא מאמצע צלע אחת ומגיע לאמצע צלע אחרת הוא קטע אמצעים.
- קטע היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע אחרת הוא קטע אמצעים.
- קטע המקביל לצלע במשולש ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

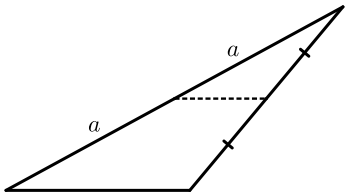
שאלות:

1) קבעו בכל אחד מהסרטוטים הבאים האם הקו המקווקו הוא קטע אמצעים בוודאות או לא.
נמקו את תשובתכם.

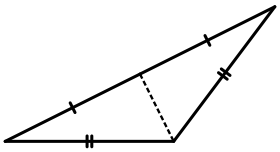
א.



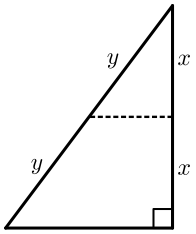
ב.



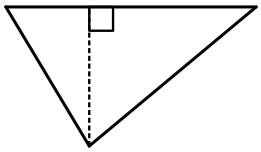
ג.



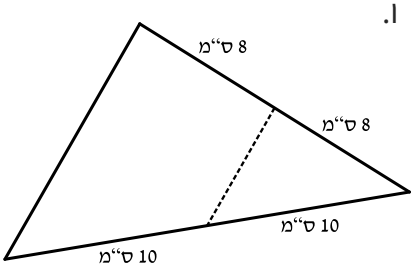
ד.



ה.

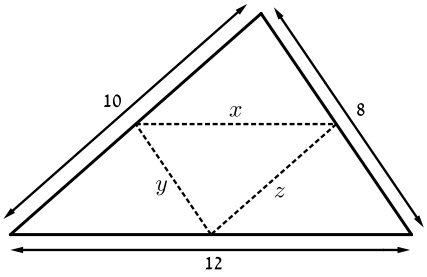


ו.

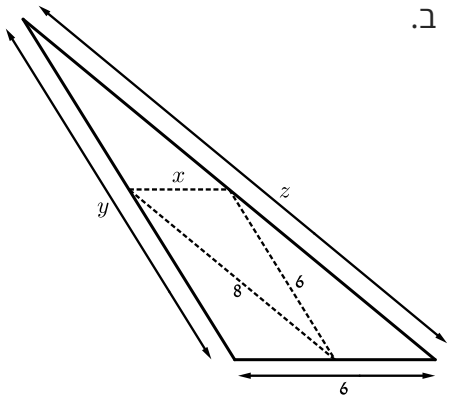


2) בסרטוטים שלפניכם הקטעים המקווקוים הם קטעי אמצעים בכל משולש.
כל המידות נתונות בס"מ. חשבו את ערכם של הגדלים x, y ו- z.

א.

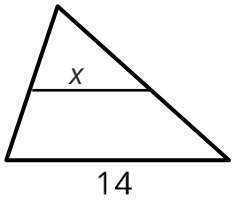


ב.

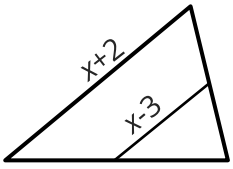


3) לפניכם משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.
מצאו את x בכל אחד מהמקרים:

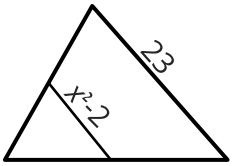
א.



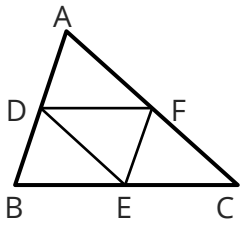
ב.



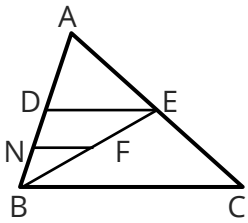
ג.



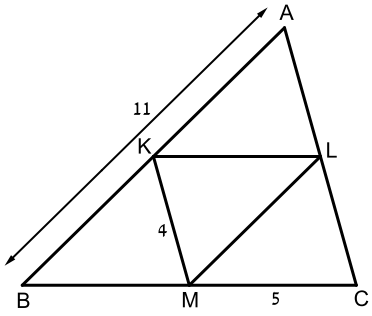
4) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש ΔABC.
נתון: 9 ס"מ =DE, 12 ס"מ= EF, 10 ס"מ = DF.
חשבו את היקף המשולש ΔABC.



5) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC.
הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש ΔBDE.
נתון: 3 ס"מ = NF. מצאו את אורך הצלע BC.



6) נתון משולש ABC ובו הקטעים KL, LM ו-KM הם קטעי אמצעים.
כל המידות נתונות בס"מ.



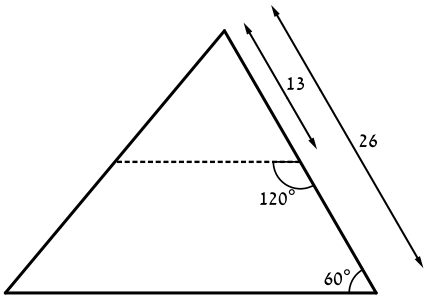
א. מה הם אורכי הגדלים AC, KL ו-ML?
ב. מהו היקף המשולש KLM?
ג. מהו היקף המשולש ABC?
ד. פי כמה גדול היקף המשולש ABC
מהיקף המשולש KLM?
ה. פי כמה גדול שטח המשולש ABC
משטח המשולש KLM?

7) סרטטו משולש ABC כלשהו.
סמנו את נקודות האמצע של צלעות AB, BC ו-AC ב-E ,F ו-G בהתאמה.
הוסיפו לסרטוט שלכם את שלושת קטעי האמצעים EF, GF ו-GE וענו על הסעיפים הבאים:
א. רשמו את כל זוגות המשולשים שדומים אחד לשני והסבירו מדוע הם דומים.
ב. רשמו את כל זוגות המשולשים שחופפים אחד לשני והסבירו מדוע הם חופפים.
ג. קבעו האם קיימות מקביליות בסרטוט. אם כן – רשמו אותן, אם לא – נמקו.

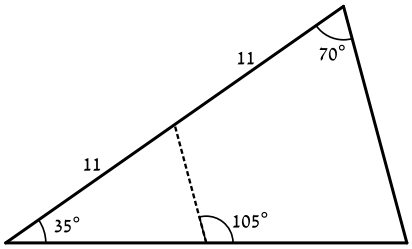
8) נתון משולש ABC ובו הנקודות D, E ו-F הן אמצעי הצלעות AB, BC ו-AC בהתאמה.
סרטטו משולש מתאים והוכיחו את הטענות הבאות:
א. היקף המשולש DEF קטן פי 2 מהיקף המשולש ABC.
ב. שטח המשולש DEF קטן פי 4 משטח המשולש ABC.
ג. אם המשולש ABC הוא שווה שוקיים אז גם המשולש DEF הוא שווה שוקיים.
ד. אם המשולש ABC הוא ישר זווית אז גם המשולש DEF הוא ישר זווית.

9) בכל אחד מהסרטוטים הבאים קבע האם הקטע המקווקו הינו קטע אמצעים במשולש.
כל האורכים נתונים בס"מ. נמקו את תשובותיכם.

א.



ב.

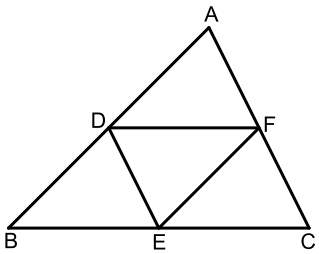


10) במשולש ABC המרובעים DFCE ו-DFEB הן מקביליות.

א. הוכיחו כי DF הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

ב. הוכיחן כי שטחי המקביליות DFCE ו-DFEB שווים.

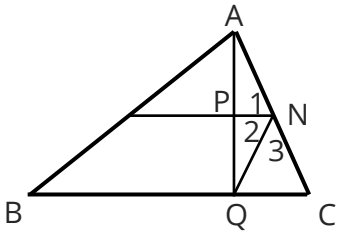
ג. הוכיחו כי סכום שטחי המקביליות DFCE ו-DFEB שווה לשטח המשולש ABC.



11) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC

AQ הוא גובה לצלע BC.

הוכיחו: $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$.

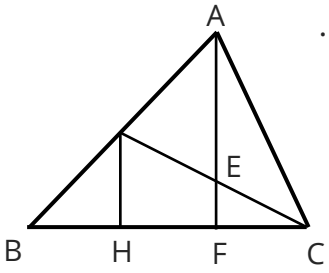


12) AF הוא גובה לצלע BC ו- GC הוא תיכון לצלע AB במשולש ΔABC .

הקטע GH מאונך לצלע BC.

א. הוכיחו: BH= HF.

ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.
חשבו את אורך הקטע EF.



תשובות סופיות:

1) קטע אמצעים: ב', ד', ו'. אינו קטע אמצעים: א', ג', ה.

2) א. $z=5\ ,\ y=4\ ,\ x=6$ ב. $z=16\ ,\ y=12\ ,\ x=3$.

3) א. $x=7$ ב. $x=8$ ג. $x=\sqrt{13.5}$.

4) 62 ס"מ.

5) 12 ס"מ.

6) א. $AC=8$ ס"מ ב. $P_{KLM}=14.5$ ס"מ ג. $P_{ABC}=29$ ס"מ

ד. 2. ה. 4.

7) א. $\Delta GFC\sim\Delta ABC\sim\Delta AEG\sim\Delta EBF\sim\Delta FGE$

ב. $\Delta GFC\cong\Delta FGE\cong\Delta AEG\cong\Delta EBF$ לפי צ.צ.צ.

ג. מקביליות: $GFEA\ ,\ EGFB\ ,\ EGCF$.

8) ראו פתרון מלא בסרטוני הוידאו.

9) א. הקטע הוא קטע אמצעים. ב. הקטע הוא קטע אמצעים.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) א. שאלת הוכחה. ב. 3 ס"מ.

שאלון 471

קטע אמצעים בטרפז

תוכן העניינים:

קטע אמצעים בטרפז 134

קטע אמצעים בטרפז: 135

סיכום כללי: 135

שאלות: 136

תשובות סופיות: 139

קטע אמצעים בטרפז:

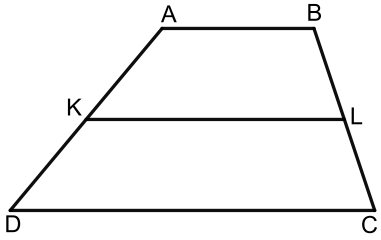
סיכום כללי:

הגדרה:

קטע המחבר את אמצעי שוקי הטרפז נקרא קטע אמצעים בטרפז.

בצורה מתמטית:
אם ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$) ובו הקטע KL מקיים: $AK = KD$, $CL = BL$
אז הוא קטע אמצעים בטרפז.

תכונות של קטע האמצעים בטרפז:



- יוצא מאמצע שוק אחת ($AK = DK$).
- מגיע לאמצע שוק שניה ($BL = CL$).
- מקביל לבסיסים ($KL \parallel CD \parallel AB$).
- שווה לממוצע (חשבוני) של הבסיסים ($KL = \frac{AB + CD}{2}$).

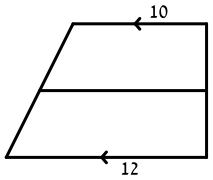
משפטים:

- קטע היוצא מאמצע שוק אחת ומגיע לאמצע השוק השנייה הוא קטע אמצעים בטרפז.
- קטע היוצא מאמצע שוק אחת ומקביל לבסיסים הוא קטע אמצעים בטרפז.
- קטע המקביל לבסיסים ושווה לממוצע שלהם הוא קטע אמצעים בטרפז.

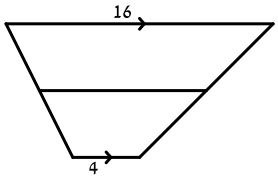
שאלות:

1) בכל אחד מהסרטוטים הבאים נתון טרפז ובו קטע אמצעים.
חשבו את אורכו של קטע האמצעים בהתאם למידות בס"מ הנתונות בסרטוטים.

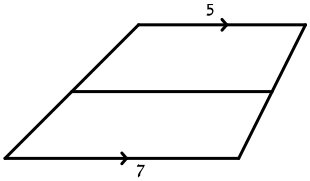
א.



ב.

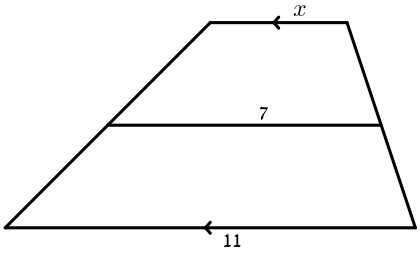


ג.

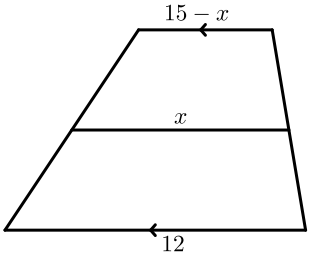


2) בכל אחד מהסרטוטים הבאים נתון טרפז ובו קטע אמצעים.
מצאו את ערכו של x בהתאם למידות הנתונות בס"מ.

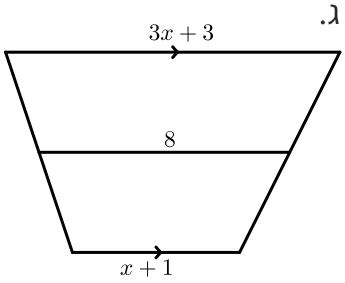
א.



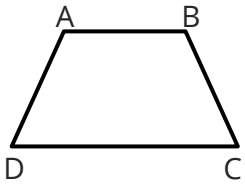
ב



ג.



3) סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ.
אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.
מצאו את אורך שוק הטרפז.



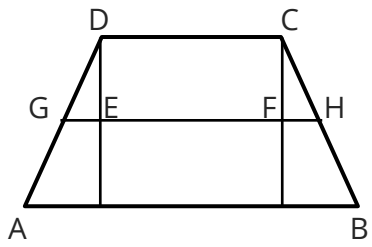
4) אורכי השוקיים של טרפז הם 15 ס"מ ו-22 ס"מ.
אורך הקטע האמצעים בו הוא 18 ס"מ.
מצאו את היקף הטרפז.

5) נתון טרפז שהיקפו הוא 24 ס"מ ובו סכום אורכי השוקיים הוא 14 ס"מ.

א. מה הוא אורך קטע האמצעים בטרפז?

ב. ההפרש בין אורכי בסיסי הטרפז (הבסיס הגדול פחות הבסיס הקטן) הוא 4 ס"מ.
מצאו את אורכי בסיסי הטרפז.

6) בטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ הורדו מקצות הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול.



קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F.

נתון: 3 ס"מ = GE, 12 ס"מ = EF, 2 ס"מ = FH.

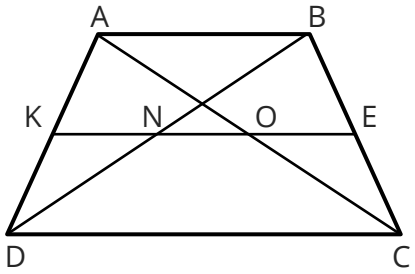
חשבו את בסיסי הטרפז.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את היקפו של טרפז שווה שוקיים שבו אורך הקטע האמצעים שווה לאורך השוק והוא 6 ס"מ.

ב. הראו כי בכל טרפז שווה שוקיים שבו קטע האמצעים שווה לשוק הטרפז, היקף הטרפז גדול פי 4 מאורך קטע האמצעים.

8) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O.

א. הוכיחו כי: $KN = EO$.

ב. בטרפז הנ"ל נתון:

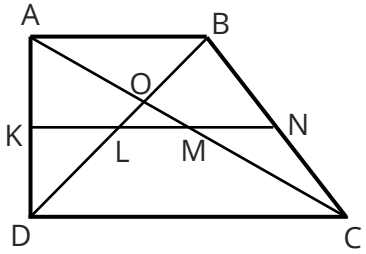
14 ס"מ = AB , 26 ס"מ = DC.

חשבו את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.

ג. בטרפז הנ"ל נתון: 13 ס"מ = KE , 3 ס"מ = NO.

חשבו את בסיסי הטרפז.

9) KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCD שאלכסוניו $(AB \parallel CD \,,\, AD \perp AB)$ נפגשים בנקודה O.



נתון: 12 ס"מ = AD, $DC = 2AB$ וכן: $\sphericalangle ADB = 45°$.

חשבו את אורך הקטע LM

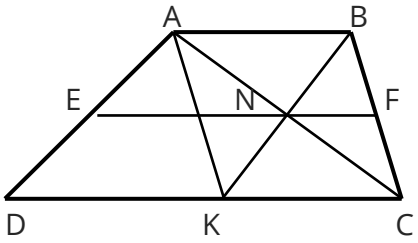
והוכיחו כי: $KL = LM = MN$.

10) מרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

EF הוא קטע אמצעים. AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.

א. הוכיחו כי מרובע ABCK הוא מקבילית.

ב. נתון: 13 ס"מ = EF , 9 ס"מ = EN.
חשבו את בסיסי הטרפז AB ו-DC ואת הקטע DK.



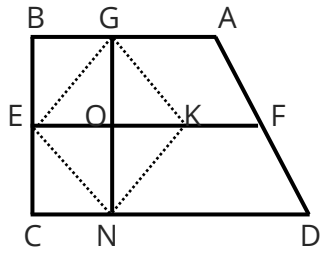
11) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.

EF קטע אמצעים בטרפז.

G ו-N הן נקודות על AB ו-CD בהתאמה המקיימות: $GN \perp DC$.

בנוסף נתון: $KO = EO\ ,\ \sphericalangle D < 90°$.

הוכיחו כי מרובע GENK הוא מעוין.



תשובות סופיות:

1) א. 11 ס"מ ב. 10 ס"מ ג. 6 ס"מ.

2) א. 3 ס"מ $x =$ ב. 9 ס"מ $x =$ ג. 3 ס"מ $x =$.

3) 14 ס"מ.

4) 73 ס"מ.

5) א. 5 ס"מ ב. 3 ס"מ ו-7 ס"מ.

6) 22 ס"מ ו=12 ס"מ.

7) א. 24 ס"מ ב. שאלת הוכחה.

8) א. שאלת הוכחה. ב. 7 ס"מ $= EO = KN$, 6 ס"מ $= NO$

ג. 10 ס"מ $= AB$, 16 ס"מ $= DC$.

9) 6 ס"מ.

10) א. שאלת הוכחה. ב. 8 ס"מ $= AB$, 18 ס"מ $= DC$, 10 ס"מ $= DK$.

11) שאלת הוכחה.

שאלון 471

דמיון משולשים

תוכן העניינים:

דמיון משולשים..... 140

דמיון משולשים:..... 141

סיכום כללי:..... 141

שאלות:..... 142

תשובות סופיות: 144

שטחים של משולשים דומים: 145

סיכום כללי:..... 145

שאלות:..... 145

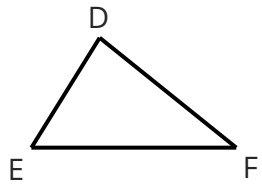
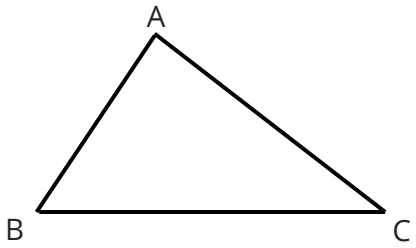
תשובות סופיות: 148

דמיון משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:

משולשים דומים הם משולשים ששווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות בהתאמה על אותו יחס.

יחס הדמיון ושוויונות	משולש ראשון	משולש שני
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ $\Updownarrow$ $\sphericalangle A = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle B = \sphericalangle E \ , \ \sphericalangle C = \sphericalangle F$ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$		

משפטי הדמיון:

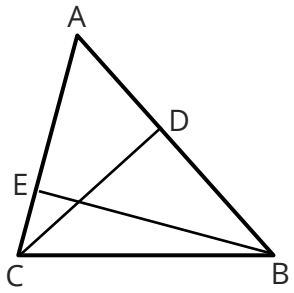
- משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזוויות שבניהן שווה אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שתי לצעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מבניהם שווה אז המשולשים דומים.

שאלות:

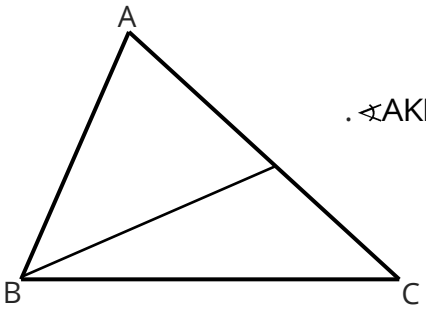
1) CD ו-BE הם גבהים במשולש ABC.

א. הוכיחו כי: $\Delta ABE \sim \Delta ACD$.

ב. נתון כי: 18 ס"מ = AB, 12 ס"מ = BE, 10 ס"מ = CD.
חשבו את אורך הצלע AC.



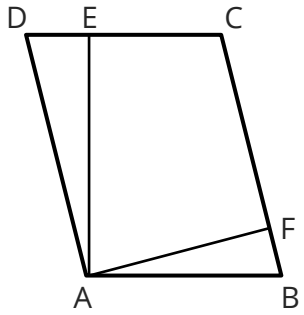
2) במשולש ABC העבירו את הקטע BK כך ש- $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ABC$.
הוכיחו: $\Delta AKB \sim \Delta ABC$.



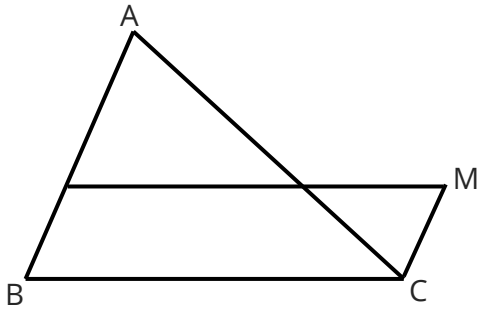
3) המרובע ABCD הוא מקבילית.
מעבירים גבהים AE ו-AF לצלעות DC ו-BC בהתאמה.

א. הוכיחו כי: $\Delta ADE \sim \Delta AFB$.

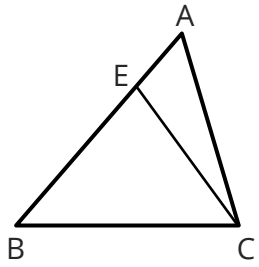
ב. הוכיחו כי: $DC \cdot AE = BC \cdot AF$
והסבירו את המשמעות הגיאומטרית
של התוצאה.



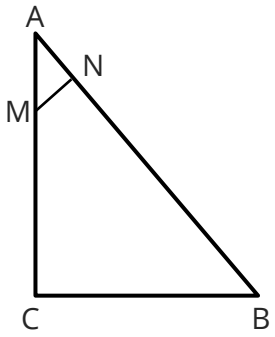
4) נתונה מקבילית BKMC.
המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.
הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.
הוכיחו: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.



5) מעבירים את הקטע CE במשולש ABC.
ידוע כי: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ECB$
וכן: 8 ס"מ = BE, 10 ס"מ = BC.
חשבו את AB.



6) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.
מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
נתון כי: 20 ס"מ = AB, 4 ס"מ = AN, 12 ס"מ = BC.
מצאו את אורך הקטע AM.

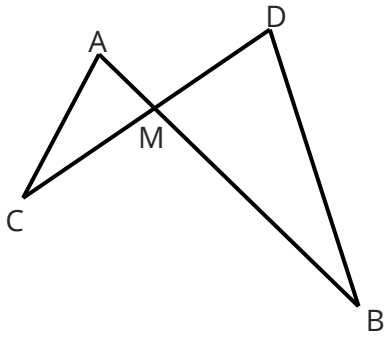


7) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
אורכי הקטעים הם: 3 ס"מ = AM,
10 ס"מ = BM, 6 ס"מ = CM, 5 ס"מ = DM.

א. הוכיחו כי: $\Delta AMC \sim \Delta DMB$.

ב. האם $AC \parallel BD$? נמקו.

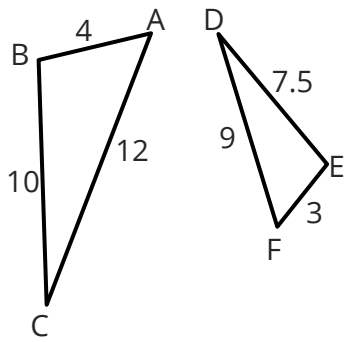
ג. מצאו את אורכו של AC
אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.



8) בסרטוט שלפניכם רשומים שני משולשים.
אורכי צלעותיהם נתונים בתרשים (בס"מ).

א. הוכיחו כי המשולשים דומים ורשמו
את הדמיון עפ"י הקודקודים.

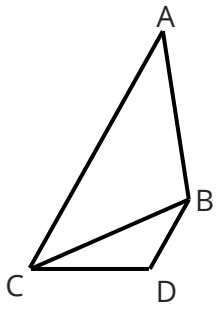
ב. רשמו את הזוויות השוות
בשני המשולשים.



9) נתונים המשולשים ABC ו-BDC.
ידוע כי: 16 ס"מ = AC, 10 ס"מ = AB, 8 ס"מ = BC,
5 ס"מ = DC, 4 ס"מ = BD.

א. הוכיחו כי שני המשולשים דומים ורשמו
אותם לפי סדר התאמת קודקודיהם.

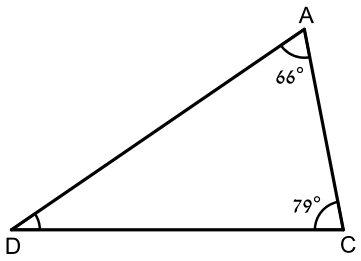
ב. הוכיחו כי: $AC \parallel BD$.

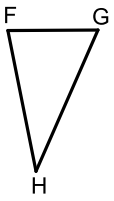


10) בסרטוט שלפניכם נתונים שני משולשים דומים: $\Delta GHF \sim \Delta ADC$.

א. מה הוא גודל הזווית $\sphericalangle G$?
יחס הדמיון בין המשולש ADC
לבין המשולש GHF הוא 3:1.
נתון: 16 ס"מ = AC, 26 ס"מ = DC, 9 ס"מ = GH.

ב. חשבו את היקף המשולש GHF.





תשובות סופיות:

1) 15 ס"מ.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) 12.5 ס"מ.

6) 5 ס"מ.

7) א. הוכחה. ב. לא. ג. 8.4 ס"מ.

8) א. הוכחה. ב. $\sphericalangle C = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, $\sphericalangle A = \sphericalangle F$.

9) הוכחה.

10) א. $\sphericalangle G = 66°$ ב. 23 ס"מ = P_{GHF}.

שטחים של משולשים דומים:

סיכום כללי:

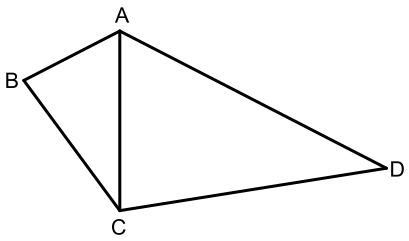
שטחים של משולשים דומים:

אם שני משולשים ABC ו-DEF הם דומים: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$
אז יחס השטחים שלהם שווה **לריבוע יחס הדמיון**:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = p^2$$

שאלות:

1) באיור שלפניכם המשולשים הדומים הם: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$.
נתון: AC = 10 ס"מ, BC = 9 ס"מ, AB = 6 ס"מ.



א. מה הוא יחס הדמיון?
ב. מצאו את אורכי צלעות המשולש ACD.
ג. נתון כי שטח המשולש ABC הוא 18 סמ"ר.
מה הוא שטח המרובע ABCD?

2) במשולשים דומים: $\Delta RST \sim \Delta KLM$ נתון: RT = 8 ס"מ, KM = 4 ס"מ
אלו אפשרויות תיתכנה עבור שטחי המשולשים?

א. S_{KLM} = 20 סמ"ר , S_{RST} = 40 סמ"ר.
ב. S_{KLM} = 40 סמ"ר , S_{RST} = 20 סמ"ר.
ג. S_{KLM} = 20 סמ"ר , S_{RST} = 80 סמ"ר.
ד. S_{KLM} = 80 סמ"ר , S_{RST} = 20 סמ"ר.
ה. S_{KLM} = 9 סמ"ר , S_{RST} = 36 סמ"ר.

3) במשולשים דומים: $\Delta KLM \sim \Delta RST$ נתון: 15 ס"מ = RT, 5 ס"מ = KM, 3 ס"מ = KL.
אלו אפשרויות תיתכנה עבור שטחי המשולשים?

א. 6 סמ"ר = S_{KLM} , 54 סמ"ר = S_{RST}.

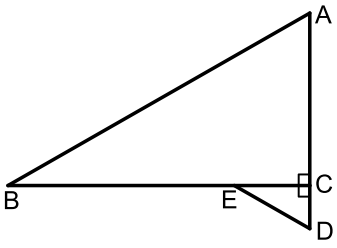
ב. 81 סמ"ר = S_{KLM} , 9 סמ"ר = S_{RST}.

ג. 90 סמ"ר = S_{KLM} , 810 סמ"ר = S_{RST}.

ד. 4 סמ"ר = S_{KLM} , 12 סמ"ר = S_{RST}.

ה. 4 סמ"ר = S_{KLM} , 36 סמ"ר = S_{RST}.

4) בסרטוט הבא שני המשולשים דומים: $\Delta DEC \sim \Delta ABC$.
נתון: 16 ס"מ = AC, 224 סמ"ר = S_{ABC}.



א. חשבו את BC.

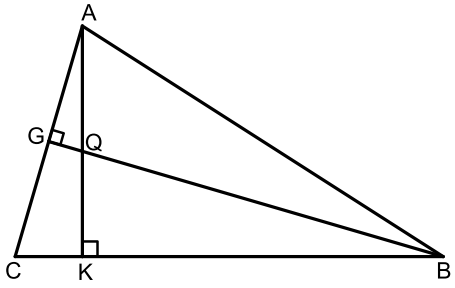
יחס הדמיון הוא 4:1.

ב. מהו שטח המשולש CDE?

ג. העבירו את הקטע BD

וחשבו את שטח המשולש ABD.

5) במשולש ABC מעבירים את הגבהים AK ו-BG לצלעות BC ו-AC בהתאמה כמתואר באיור.
הגבהים נחתכים בנקודה Q.



א. הסבירו מדוע $\Delta BKQ \sim \Delta AGQ$.

ב. נתונים האורכים הבאים:

72 ס"מ = BK, 21 ס"מ = QK, 25 ס"מ = AQ.

מצאו את היחס שבין שטח המשולש BKQ

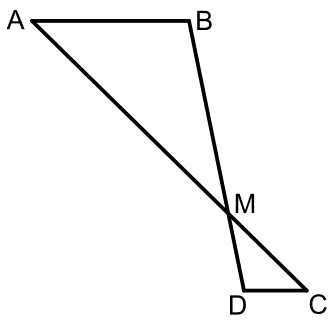
לבין שטח המשולש AGQ.

ג. חשבו את שטחו של המשולש AGQ.

ד. חשבו את שטחו והיקפו של המשולש ABK.

(דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

6) בסרטוט שלפניכם נתון: $AB \parallel CD$. הישרים AC ו-BD נחתכים בנקודה M.



א. הסבירו מדוע: $\Delta ABM \sim \Delta CDM$.

ב. נתון: 5 ס"מ = DM, 12.5 ס"מ= BM.

מצאו את יחס השטחים: $\frac{S_{CDM}}{S_{ABM}}$.

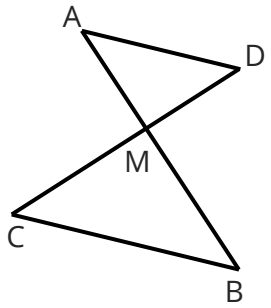
ג. מה הם אורכי הקטעים AM ו-CM

אם ידוע כי: 24.5 ס"מ = AC.

ד. מעבירים את הקטע AD.

האם המשולשים ABD ו-CDM דומים? נמקו.

7) הקטעים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.



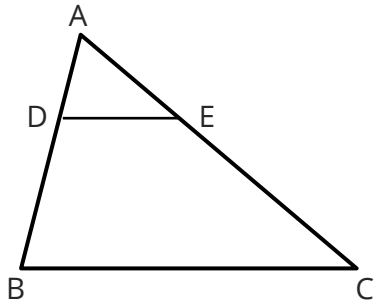
נתון כי: $AD \parallel BC$ וכן נתונים הגדלים הבאים:

4 ס"מ = AD, 6 ס"מ = BC, 36 סמ"ר = S_{ADM} .

א. הוכיחו כי: $\Delta AMD \sim \Delta BMC$.

ב. חשבו את שטח המשולש MBC.

8) במשולש ABC הקטע DE מקביל לצלע BC.

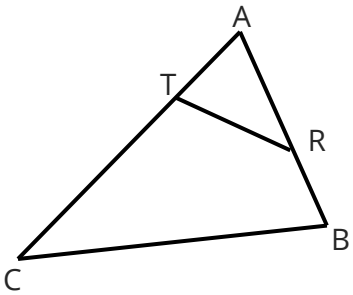


נתון: $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ וכי: 20 סמ"ר = S_{ADE} .

א. חשבו את שטח המשולש ABC.

ב. חשבו את שטח המרובע DECB.

9) בסרטוט שלפניך נתון משולש ABC ובו קטע RT כך שמתקיימים האורכים הבאים:



4 ס"מ = BR, 4 ס"מ = AT, 6 ס"מ = AR,

11 ס"מ = CT, 60 סמ"ר = S_{ABC} .

מצאו את שטח המרובע RTCB.

תשובות סופיות:

1) א. $p = 0.6$ ב. 15 ס"מ = CD, 16.667 ס"מ = AD. ג. 50 סמ"ר = S_{ACD}.

2) רק אפשרויות: ג', ה'.

3) רק אפשרויות: א', ה'.

4) א. 28 ס"מ = BC ב. 14 סמ"ר = S_{DEC} ג. 280 סמ"ר = S_{ABD}.

5) א. הסבר בסרטון הוידאו. ב. 9. ג. 84 סמ"ר = S_{AGQ}

ד. 203.44 ס"מ = P_{ABK}, 1656 סמ"ר = S_{ABK}.

6) א. הסבר בסרטון הוידאו. ב. $\frac{S_{CDM}}{S_{ABM}} = \frac{4}{25} = 0.16$

ג. 17.5 ס"מ = AM, 7 ס"מ = CM. ד. לא.

7) א. הוכחה. ב. 81 סמ"ר.

8) א. 125 ס"מ. ב. 105 סמ"ר.

9) 50.4 סמ"ר.

שאלון 471

קטעים מיוחדים במשולש

תוכן העניינים:

קטעים מיוחדים במשולש 149

קטעים מיוחדים במשולש: 150

סיכום כללי: 150

שאלות: 150

תשובות סופיות: 154

מפגש תיכונים במשולש: 155

סיכום כללי: 155

שאלות: 155

תשובות סופיות: 156

משפט חוצה זווית: 157

סיכום כללי: 157

שאלות: 157

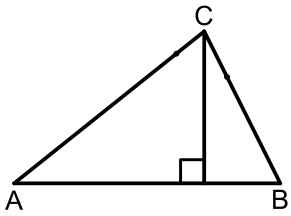
תשובות סופיות: 158

קטעים מיוחדים במשולש:

סיכום כללי:

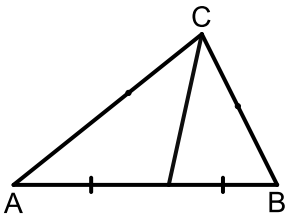
גובה במשולש:

קטע היוצא מקודקוד לצלע שממולו ומאונך לה.



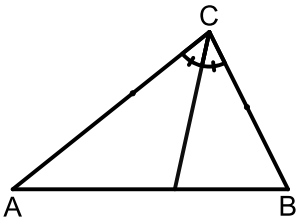
תיכון במשולש:

קטע היוצא מקודקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.



חוצה זווית במשולש:

קטע היוצא מקודקוד לצלע שממולו
וחוצה את הזווית ממנה הוא יוצא.



שאלות:

1) במשולש ישר זווית ABC $\left(\sphericalangle B = 90°\right)$

נתון כי CD הוא חוצה זווית C.

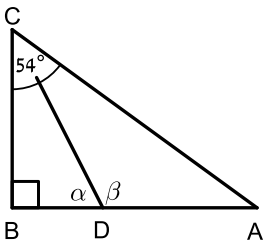
כמו כן: $\sphericalangle ACB = 54°$.

א. חשבו את זווית BAC.

ב. חשבו את זווית ACD.

ג. חשבו את α.

ד. חשבו את β.



2) במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B = 90°)$

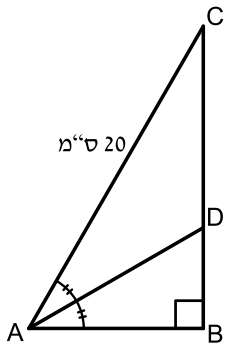
הקטע AD הוא חוצה זווית A.

נתון: $AC = 20$ ס"מ, $\sphericalangle BAC = 60°$.

א. חשבו את אורך הצלע AB.

ב. חשבו את אורך הקטע BD.

ג. חשבו את אורך חוצה הזווית AD.



3) במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B = 90°)$

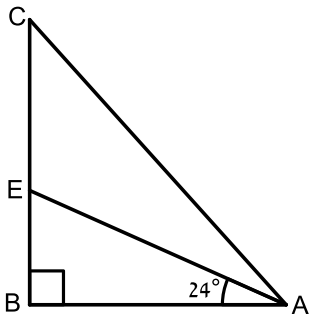
הקטע AE הוא חוצה זווית BAC.

נתון: $AC = 11$ ס"מ, $\sphericalangle BAE = 24°$.

א. חשבו את אורך הניצב AB.

ב. חשבו את אורך חוצה הזווית AE.

ג. חשבו את היקף המשולש ABC.



4) במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B = 90°)$

הקטע AF הוא חוצה זווית BAC.

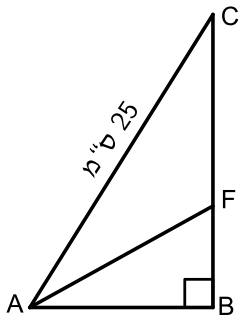
נתון: $\sphericalangle BAC = 62°$, 25 ס"מ = AC.

א. חשבו את אורך הניצב AB.

ב. חשבו את אורך הקטע BF.

ג. חשבו את אורך הקטע FC.

ד. חשבו את אורך חוצה הזווית, AF.



5) במשולש ישר זווית ABC, $(\sphericalangle C = 90°)$

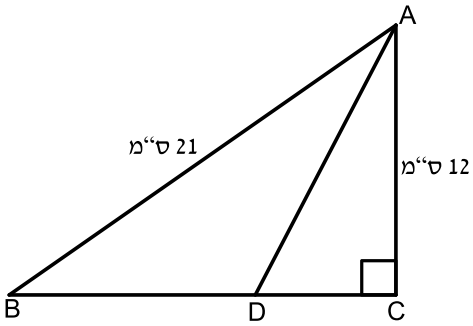
הקטע AD חוצה זווית BAC.

נתון: $AC = 12$ ס"מ, 21 ס"מ = AB.

א. חשבו את גודל הזווית CAD.

ב. חשבו את אורך הקטע AD.

ג. חשבו את היחס שבין אורך הקטע CD לאורך הצלע AC.



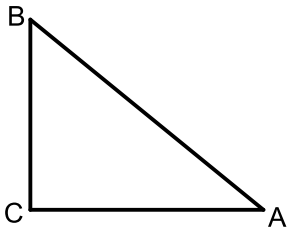
6) במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$

אורכי הניצבים הם:

13.2 ס"מ = AC, 10.8 ס"מ = BC.

D היא נקודה על הניצב BC.

חשבו את אורך AD, אם נתון כי AD הוא חוצה הזווית BAC.



7) במשולש ישר זווית ABC, $(\sphericalangle C = 90°)$

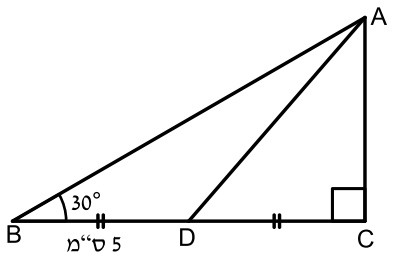
AD הוא תיכון לניצב BC.

נתון: 5 ס"מ = BD, $\sphericalangle ABC = 30°$.

א. חשבו את אורך הניצב BC.

ב. חשבו את אורך הניצב AC.

ג. חשבו את שטח המשולש ABC.



8) במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B = 90°)$

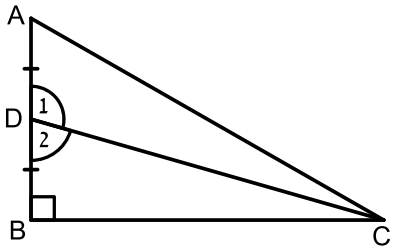
CD הוא תיכון לניצב AB.

נתון: 4 ס"מ = AB, 7 ס"מ = BC.

א. חשבו את גודל הזווית CDB
(המסומנת: $\sphericalangle D_2$).

ב. חשבו את גודל הזווית ADC
(המסומנת: $\sphericalangle D_1$).

ג. חשבו את אורך התיכון CD.



9) במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle B = 90°)$,

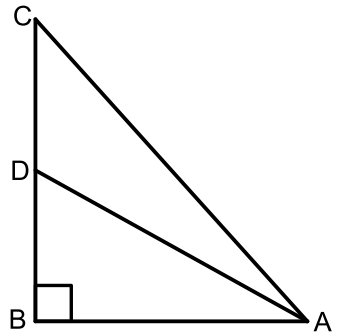
AD הוא תיכון לניצב BC.

נתון: 15.5 ס"מ = BC, 14 ס"מ = AB.

א. מצאו את $\tan\sphericalangle ADB$.

ב. חשבו את גודל הזווית ADB.

ג. חשבו את גודל הזווית ADC.



10) במשולש ישר זווית PQR $(\sphericalangle Q = 90°)$,

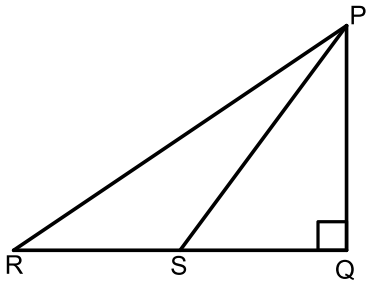
PS הוא תיכון לניצב RQ.

נתון: 12 ס"מ = SQ, $\sphericalangle RPQ = 56°$.

א. חשבו את אורך הניצב PQ.

ב. חשבו את גודל הזווית SPQ.

ג. חשבו את היקף המשולש SPQ.



11) במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle A = 90°)$,

AD הוא הגובה ליתר.

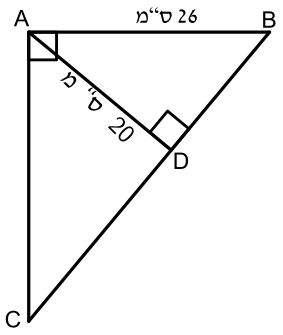
נתון: 26 ס"מ = AB, 20 ס"מ = AD.

א. חשבו את גודל הזווית ABD.

ב. חשבו את אורך הניצב AC.

ג. חשבו את שטח המשולש ABC.

ד. חשבו את אורך היתר BC.



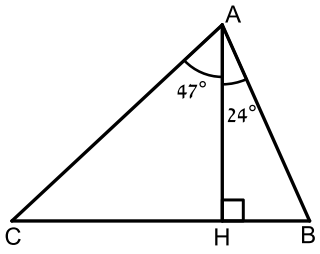
12) במשולש ABC אורך הגובה AH הוא 8 ס"מ.

הזווית בין הצלע AB לגובה AH היא בת $24°$.

הזווית בין הצלע AC לגובה AH היא בת $47°$.

א. חשבו את אורכי הצלעות: AB, AC, BC.

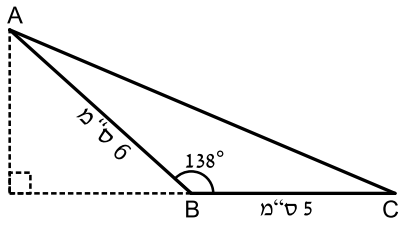
ב. חשבו את שטח המשולש ABC.



13) במשולש ABC נתון: $\sphericalangle ABC = 138°$,

5 ס"מ = BC, 6 ס"מ = AB.

חשבו את שטח המשולש.



14) במשולש ישר זווית EFG $(\sphericalangle F = 90°)$,

D היא נקודה על הצלע EF.

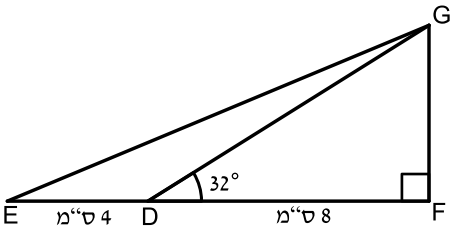
נתון: 4 ס"מ = DE, 8 ס"מ = DF, $\sphericalangle FDG = 32°$.

א. חשבו את שטח המשולש GDF.

ב. פי כמה גדול שטח המשולש GDF משטח המשולש GDE?

ג. מצאו את $\tan\sphericalangle GED$.

ד. חשבו את $\sphericalangle GED$.



תשובות סופיות:

1) א. $36°$ ב. $\sphericalangle ACD = 27°$ ג. $\alpha = 63°$ ד. $\beta = 117°$.

2) א. AB= 10 ס"מ ב. BD = 5.77 ס"מ ג. AD = 11.54 ס"מ.

3) א. AB = 7.36 ס"מ ב. AE = 8.057 ס"מ ג. P_{ABC} = 26.534 ס"מ.

4) א. AB = 11.736 ס"מ ב. BF = 7.05 ס"מ ג. FC = 15.02 ס"מ ד. AF = 13.69 ס"מ.

5) א. $\sphericalangle CAD = 27.57°$ ב. AD = 13.53 ס"מ ג. 0.522.

6) א. AD = 14.01 ס"מ.

7) א. BC = 10 ס"מ ב. AC = 5.77 ס"מ ג. S_{ABC} = 28.86 סמ"ר.

8) א. $\sphericalangle D_2 = 74.05°$ ב. $\sphericalangle D_1 = 105.95°$ ג. CD = 7.28 ס"מ.

9) א. 1.806 ב. $\sphericalangle ADB = 61°$ ג. $\sphericalangle ADC = 119°$.

10) א. PQ = 16.18 ס"מ ב. $\sphericalangle SPQ = 36.56°$ ג. P_{SPQ} = 48.32 ס"מ.

11) א. $\sphericalangle ABD = 50.28°$ ב. AC = 31.29 ס"מ ג. S_{ABC} = 406.833 סמ"ר

ד. BC = 40.6833 ס"מ.

12) א. AB = 8.757 ס"מ, AC = 11.73 ס"מ, BC = 12.138 ס"מ.

ב. S_{ABC} = 48.552 סמ"ר.

13) א. 10.035 סמ"ר.

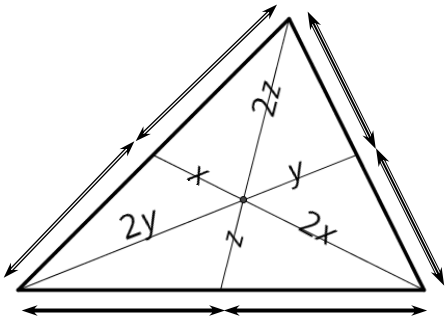
14) א. S_{GDF} = 20 סמ"ר ב. 2 ג. $\frac{5}{12}$ ד. $22.62°$.

מפגש תיכונים במשולש:

סיכום כללי:

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

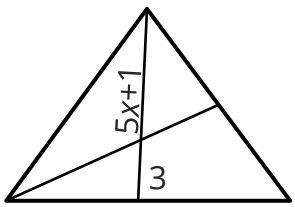
איור – מפגש תיכונים במשולש:



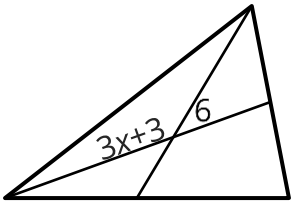
שאלות:

1) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצאו את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

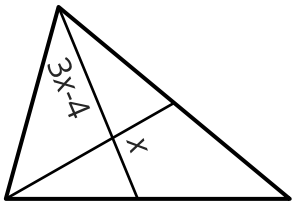
א.



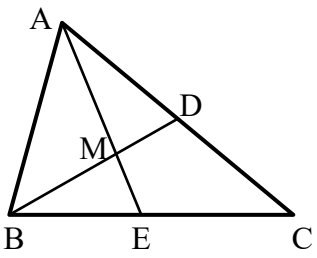
ב.



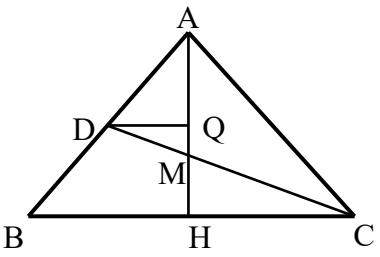
ג.



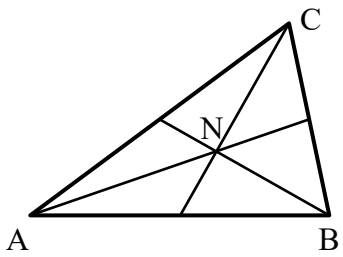
2) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש ΔABC אשר נחתכים בנקודה M.
נתון: $AD = AM$ וכן: AC = 30 ס"מ.
חשבו את AE.



3) המשולש ΔABC שבציור הוא מש"ש ($AB=AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC.
CD, התיכון לשוק AB,
יוצר זווית של $30°$ עם הבסיס BC.
נתון: $BC=12\sqrt{3}$ ס"מ, $DQ \parallel BC$.
חשבו את אורך הקטע MQ.



4) במשולש ΔABC נחתכים התיכונים בנקודה N.
נתון: $\sphericalangle CNB=90°$.
הוכיחו: $BC=AN$.



5) קודקודי המשולש ABC הם: $C(10,0)$, $B(6,2)$, $A(2,-1)$.

א. מצאו את משוואת התיכון לצלע AB.
ב. מצאו את משוואת AF, התיכון לצלע BC.
ג. מצאו את שיעורי נקודת המפגש של התיכונים במשולש ABC.
ד. נסמן את נקודת מפגש התיכונית ב-O.
חשבו את היחס: $\frac{AO}{OF}$ והסבירו את המשמעות הגאומטרית של התוצאה.

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=3$ ג. $x=4$ **2)** 22.5 ס"מ.

3) 3 ס"מ. **4)** שאלת הוכחה

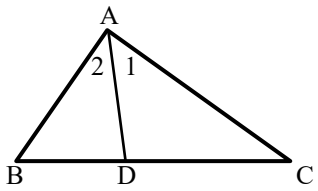
5) א. $y=-\frac{1}{12}x+\frac{5}{6}$ ב. $y=\frac{1}{3}x-1\frac{2}{3}$ ג. $\left(6,\frac{1}{3}\right)$ ד. $\frac{AO}{OF}=2$

משפט חוצה זווית:

סיכום כללי:

חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהיפך.

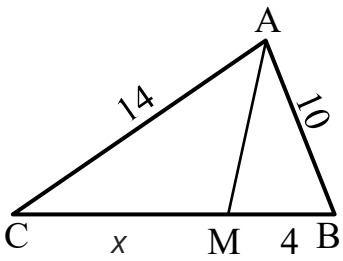
אם: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ אז: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ולהיפך.



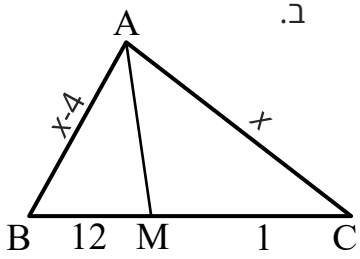
שאלות:

1) מצאו את גודלו של x בסרטוטים הבאים אם נתון כי AM חוצה זווית A בכל המשולשים, כל הגדלים הם בס"מ:

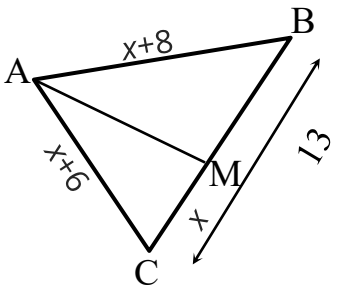
א.



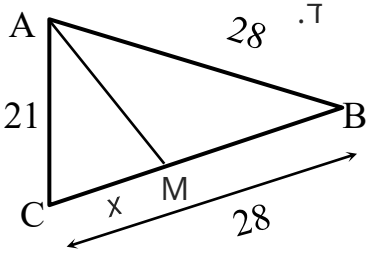
ב.



ג.



ד.



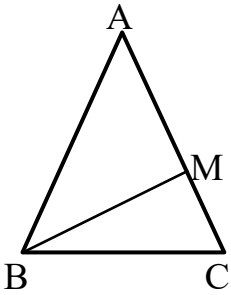
2) נתון משולש שווה שוקיים ABC, $(AB = AC)$.

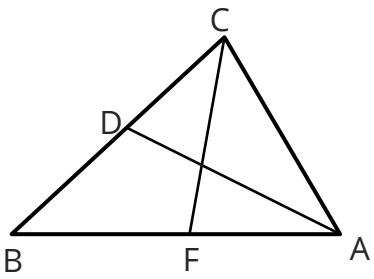
ידוע כי היקפו הוא 28 ס"מ.

הקטע BM הוא חוצה זווית B.

נתון כי הקטע AM גדול פי 3 מהקטע MC.

חשבו את אורך הקטע MC.





3) הקטעים AD ו-CF הם חוצי הזוויות A ו-C בהתאמה במשולש ABC.
נתון: $AB = 18$ ס"מ , $AC = 12$ ס"מ , $CD = 6$ ס"מ.
חשבו את אורך הקטע AF.

תשובות סופיות:

1) א. $x = 5.6$ ב. $x = 20$ ג. $x = 6$ ד. $x = 12$.

2) 3 ס"מ.

3) 8 ס"מ.

שאלון 471

טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים:

טריגונומטריה במשולש ישר זווית 159

פונקצית הטנגנס: 161

סיכום כללי: 161

שאלות: 161

תשובות סופיות: 164

פונקצית הסינוס: 165

סיכום כללי: 165

שאלות: 165

תשובות סופיות: 167

פונקצית הקוסינוס: 168

סיכום כללי: 168

שאלות: 168

תשובות סופיות: 170

שימוש בפונקציות טריגונומטריות סינוס, קוסינוס וטנגנס יחדיו: 171

סיכום כללי: 171

שאלות: 172

תשובות סופיות: 173

קטעים מיוחדים במשולש ישר זווית: 174

סיכום כללי: 174

שאלות: 174

תשובות סופיות: 177

שאלות עם שני משולשים: 178

סיכום כללי: 178

שאלות: 178

תשובות סופיות: 179

מציאת צלעות וגבהים על פי שטח נתון: 180
סיכום כללי: 180
שאלות: 180
תשובות סופיות: 181
שאלות עם משולש שווה שוקיים: 182
סיכום כללי: 182
שאלות: 183
תשובות סופיות: 185
שאלות עם מלבן: 186
סיכום כללי: 186
שאלות: 187
תשובות סופיות: 188
שאלות עם מעוין: 189
סיכום כללי: 189
שאלות: 190
תשובות סופיות: 192
שאלות עם טרפז: 193
סיכום כללי: 193
שאלות: 194
תשובות סופיות: 196
משולשים במערכת צירים: 197
סיכום כללי: 197
שאלות: 197
תשובות סופיות: 198
נוסחת שטח משולש: 199
סיכום כללי: 199
שאלות: 199
תשובות סופיות: 199

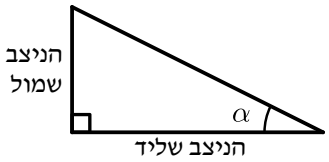
פונקצית הטנגנס:

סיכום כללי:

הגדרת פונקצית הטנגנס:

טנגנס של זווית מוגדר בתור היחס שבין הניצב שמול הזווית לניצב שליד הזווית:

$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}}$$



שאלות:

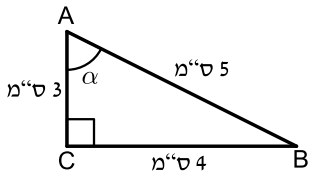
1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\frac{x}{2} = 6$ ב. $\frac{2}{x} = 6$ ג. $\frac{x}{3.5} = 14$

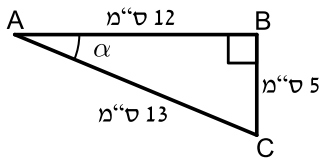
ד. $\frac{6.3}{x} = 5$ ה. $\frac{x}{12} = 0.45$ ו. $\frac{7}{x} = 0.788$

2) השלימו: $\tan\alpha =$ ——— בכל אחד מהסעיפים הבאים:

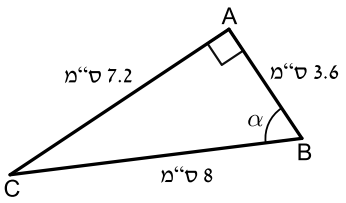
א. $\tan\alpha =$ ———



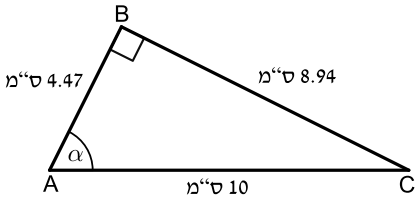
ב. $\tan\alpha =$ ———



ג. $\tan\alpha =$ ———



ד. $\tan\alpha =$ ———



3) מצאו בעזרת המחשבון את הטנגנס של הזוויות הבאות
(דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\tan 60°$ ב. $\tan 23°$ ג. $\tan 81°$

ד. $\tan 45°$ ה. $\tan 11.5°$ ו. $\tan 32.25°$

ז. $6\cdot\tan 40°$ ח. $\frac{\tan 78°}{31}$ ט. $\frac{4}{\tan 12°}$

4) פתרו את המשוואות הבאות (מצאו את x):

א. $\tan 40° = \frac{x}{5}$ ב. $\tan 80° = \frac{x}{12}$

ג. $\tan 35° = \frac{x}{3}$ ד. $\tan 15° = \frac{x}{20}$

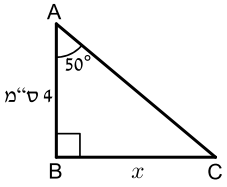
5) פתרו את המשוואות הבאות (מצאו את x):

א. $\tan 40° = \frac{5}{x}$ ב. $\tan 35° = \frac{12}{x}$

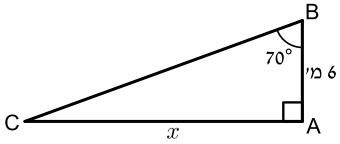
ג. $\tan 75° = \frac{22}{x}$ ד. $\tan 45° = \frac{7}{x}$

6) מצאו את אורך הצלע x בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בטנגנס.

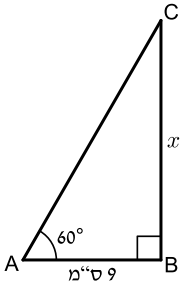
א.



ב.

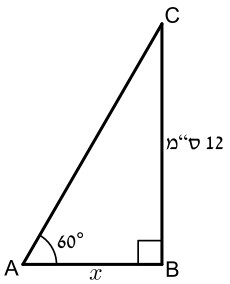


ג.

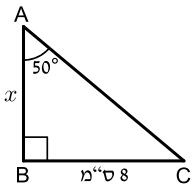


7) מצאו את אורך הצלע x בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בטנגנס.

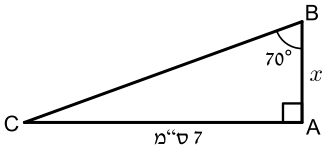
א.



ב.

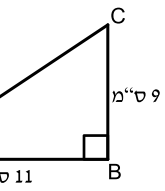


ג.

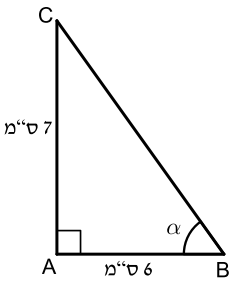


8) מצאו את הזווית α בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בטנגנס.

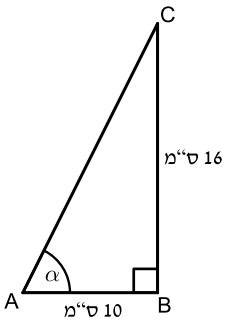
א.



ב.



ג.



9) במשולש ישר זווית ABC נתון: $\sphericalangle C = 90°$, 20 ס"מ = AC, 17 ס"מ = BC.
חשבו את גודלן של הזוויות החדות במשולש.

10) במשולש ישר זווית ABC נתון: $\sphericalangle B = 90°$, 35 ס"מ = AB , $\sphericalangle BAC = 31.15°$.
חשבו את אורך הניצב BC.

11) אחת הזוויות החדות במשולש ישר זווית היא בת $42°$.
אורך הניצב שמול זווית זו הוא 15.5 ס"מ.
חשבו את אורך הניצב השני.

12) אחת הזוויות החדות במשולש ישר זווית היא בת $57.2°$.
אורך הניצב שליד זווית זו הוא 23 ס"מ.
חשבו את אורך הניצב שני.

13) במשולש ישר זווית ABC, אורכי הניצבים הם 13 ס"מ ו-22 ס"מ.
חשבו את הזוויות החדות של המשולש.

תשובות סופיות:

1) א. $x=12$ ב. $x=\frac{1}{3}$ ג. $x=49$ ד. $x=1.26$

ה. $x=5.4$ ו. $x=8.88$.

2) א. $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ ב. $\tan\alpha=\frac{5}{12}$ ג. $\tan\alpha=\frac{7.2}{3.6}=2$ ד. $\tan\alpha=\frac{8.94}{4.47}$.

3) א. 1.73 ב. 0.42 ג. 6.31 ד. 1 ה. 0.2

ו. 0.63 ז. 5.03 ח. 0.15 ט. 18.81.

4) א. $x=4.195$ ב. $x=68.05$ ג. $x=2.1$ ד. $x=5.35$.

5) א. $x=5.958$ ב. $x=17.13$ ג. $x=5.894$ ד. $x=7$.

6) א. 4.76 ס"מ ב. 16.48 מ' ג. 15.58 ס"מ.

7) א. 6.928 ס"מ ב. 6.74 ס"מ ג. 2.54 ס"מ.

8) א. $\alpha=39.3°$ ב. $\alpha=49.4°$ ג. $\alpha=58°$.

9) $\sphericalangle C=90°$, $\sphericalangle B=49.64°$, $\sphericalangle A=40.36°$.

10) 21.15 ס"מ.

11) 17.21 ס"מ.

12) 35.69 ס"מ.

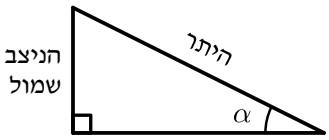
13) $59.42°$, $30.58°$.

פונקצית הסינוס:

סיכום כללי:

הגדרת פונקצית הסינוס:

סינוס של זווית מוגדר בתור היחס שבין הניצב שמול הזווית ליתר:



$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}}$$

שאלות:

1) מצאו בעזרת המחשבון את הסינוס של הזוויות הבאות (דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

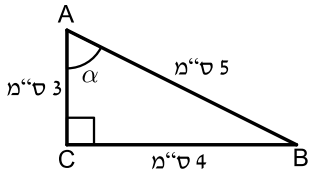
א. $\sin45°$ ב. $\sin34°$ ג. $\sin56°$

ד. $\sin87°$ ה. $\sin22.5°$ ו. $\sin11.82°$

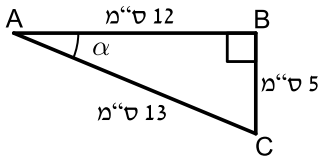
ז. $17\cdot\sin26°$ ח. $\frac{\sin64°}{7}$ ט. $\frac{5.5}{\sin35°}$

2) השלימו: $\sin\alpha =$ ——— בכל אחד מהסעיפים הבאים:

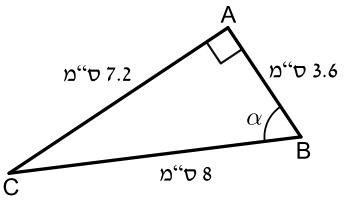
א. $\sin\alpha =$ ———



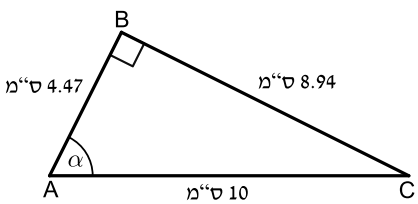
ב. $\sin\alpha =$ ———



ג. $\sin\alpha =$ ———

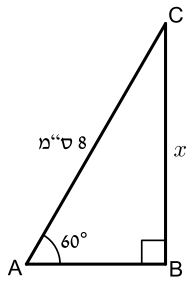


ד. $\sin\alpha =$ ———

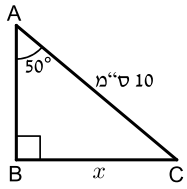


3) מצאו את אורך הצלע x בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בסינוס.

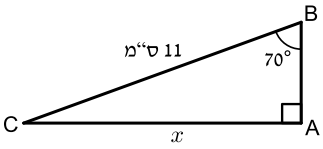
א.



ב.

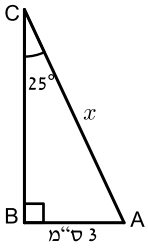


ג.

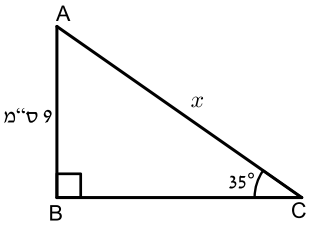


4) מצאו את אורך הצלע x בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בסינוס.

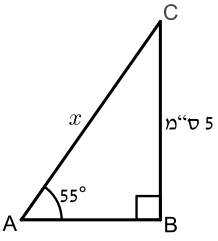
א.



ב.

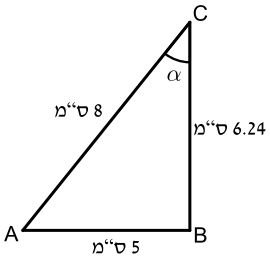


ג.

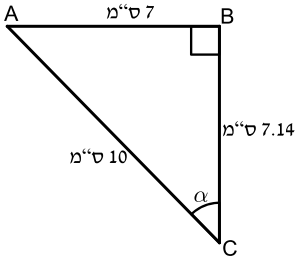


5) מצאו את הזווית α בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בסינוס.

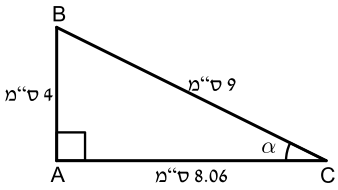
א.



ב.



ג.



6) במשולש ישר זווית ABC נתון: $\sphericalangle C = 90°$, 25 ס"מ = AB, 15 ס"מ = AC.
חשבו את גודלן של הזוויות החדות במשולש.

7) במשולש ישר זווית ABC נתון: $\sphericalangle B = 90°$, 7.5 ס"מ = AB , $\sphericalangle ACB = 47°$.
חשבו את אורך היתר AC.

8) אורך היתר במשולש ישר זווית הוא 11 ס"מ ואחת הזוויות החדות היא בת $28°$.
חשבו את אורך הניצב שמול זווית זו.

9) אחת הזוויות החדות במשולש ישר זווית היא בת $66°$.
אורך הניצב שמול זווית זו הוא 15.5 ס"מ. חשבו את אורך היתר.

תשובות סופיות:

1) א. 0.71 ב. 0.56 ג. 0.83 ד. 0.99 ה. 0.38

ו. 0.2 ז. 7.45 ח. 0.13 ט. 9.58.

2) א. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ב. $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ג. $\sin\alpha=\frac{7.2}{8}$ ד. $\sin\alpha=\frac{8.94}{10}$.

3) א. 6.928 ס"מ ב. 7.66 ס"מ ג. 10.336 ס"מ.

4) א. 7.1 ס"מ ב. 15.69 ס"מ ג. 6.1 ס"מ.

5) א. $\alpha=38.68°$ ב. $\alpha=44.42°$ ג. $\alpha=26.38°$.

6) $53.13°$, $36.86°$.

7) 10.255 ס"מ = AC.

8) 5.16 ס"מ.

9) 19.96 ס"מ.

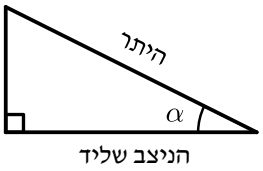
פונקצית הקוסינוס:

סיכום כללי:

הגדרת פונקצית הקוסינוס:

קוסינוס של זווית מוגדר בתור היחס שבין הניצב שליד הזווית ליתר:

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}}$$



שאלות:

1) מצאו בעזרת המחשבון את הקוסינוס של הזוויות הבאות (דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

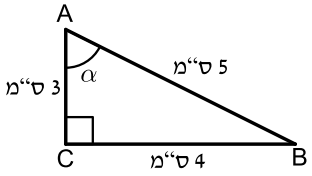
א. $\cos 53°$ ב. $\cos 80°$ ג. $\cos 45°$

ד. $\cos 30°$ ה. $\cos 22.5°$ ו. $\cos 5.35°$

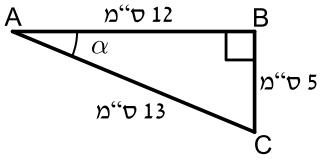
ז. $14\cdot\cos 60°$ ח. $\frac{\cos 46°}{9}$ ט. $\frac{4.85}{\cos 38°}$

2) השלימו: $\cos\alpha =$ ——— בכל אחד מהסעיפים הבאים:

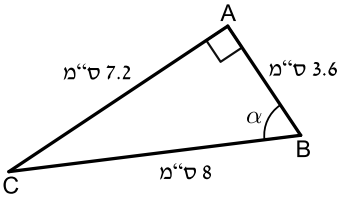
א. $\cos\alpha =$ ———



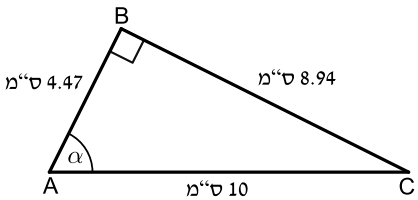
ב. $\cos\alpha =$ ———



ג. $\cos\alpha =$ ———

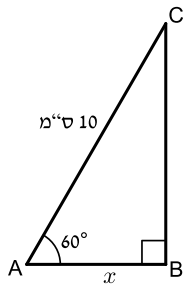


ד. $\cos\alpha =$ ———

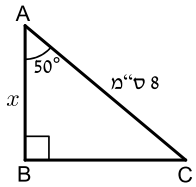


3) מצאו את אורך הצלע x בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בקוסינוס:

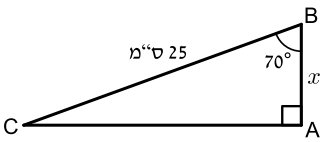
א.



ב.

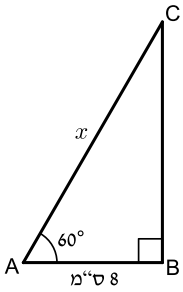


ג.

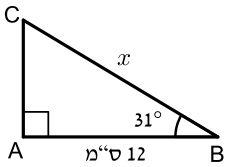


4) מצאו את אורך הצלע x בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בקוסינוס:

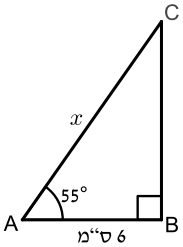
א.



ב.

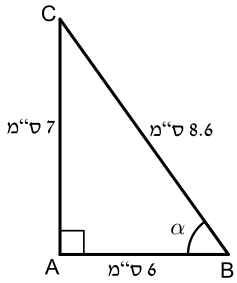


ג.

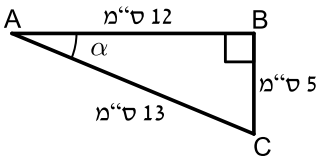


5) מצאו את הזווית α בכל אחד מהמשולשים הבאים ע"י שימוש בקוסינוס:

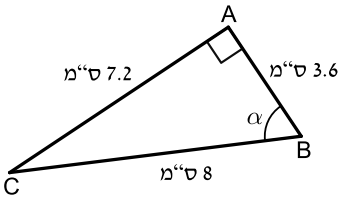
א.



ב.



ג.



6) במשולש ישר זווית ABC נתון: $\sphericalangle C = 90°$, 14 ס"מ = AC, 19 ס"מ = AB.
חשבו את גודלן של הזוויות החדות במשולש.

7) אורך היתר במשולש ישר זווית הוא 11 ס"מ ואחת הזוויות החדות היא בת $26°$.
חשבו את אורך הניצב שליד זווית זו.

8) במשולש ישר זווית ABC נתון: $\sphericalangle B = 90°$, 8.5 ס"מ = AB, $\sphericalangle CAB = 42°$.
חשבו את אורך היתר AC.

9) אחת הזוויות החדות במשולש ישר זווית היא בת $66°$.
אורך הניצב שליד זווית זו הוא 13.3 ס"מ.
חשבו את אורך היתר.

תשובות סופיות:

1) א. 0.6 ב. 0.17 ג. 0.71 ד. 0.86 ה. 0.92
ו. 0.99 ז. 7 ח. 0.07 ט. 6.15.

2) א. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ב. $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ ג. $\sin\alpha=\frac{3.6}{8}$ ד. $\sin\alpha=\frac{4.47}{10}$.

3) א. 5 ס"מ ב. 5.14 ס"מ ג. 8.55 ס"מ.

4) א. 16 ס"מ ב. 14 ס"מ ג. 10.46 ס"מ.

5) א. $\alpha=45.76°$ ב. $\alpha=22.62°$ ג. $\alpha=63.25°$.

6) $\sphericalangle B=47.46°$, $\sphericalangle A=42.53°$.

7) 9.88 ס"מ.

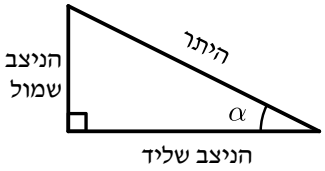
8) 11.43 ס"מ = AC.

9) 32.7 ס"מ.

שימוש בפונקציות טריגונומטריות סינוס, קוסינוס וטנגנס יחדיו:

סיכום כללי:

סיכום – הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}}$$

איך נדע מתי להשתמש במה?

נשאל את עצמנו שתי שאלות:

1) האם היתר משתתף בחישוב?

- לא? ← טנגנס.
- כן? ← נמשיך לשאלה השנייה.

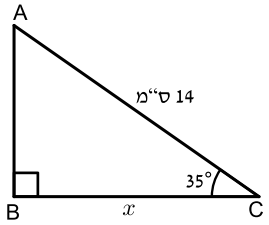
2) האם הניצב שמול / שליד משתתף בחישוב?

- ניצב שמול ← סינוס.
- ניצב שליד ← קוסינוס.

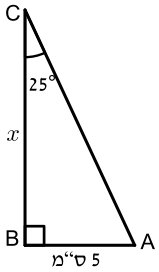
שאלות:

1) מצאו את הנעלם בכל אחד מהמקרים הבאים.
שימו לב – בחר תחילה באיזו פונקציה עליך להשתמש ואז בצעו את החישוב.

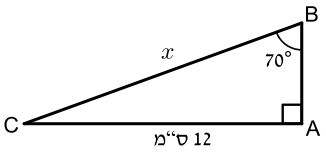
א.



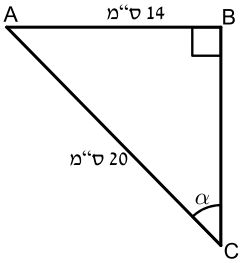
ב.



ג.

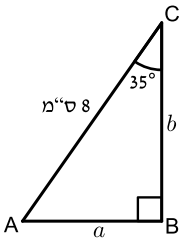


ד.

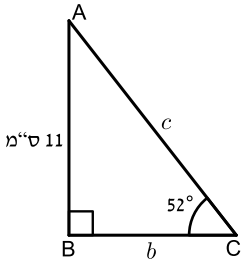


2) חשבו את אורכי הצלעות החסרות בכל אחד מהמשולשים שלפניך.

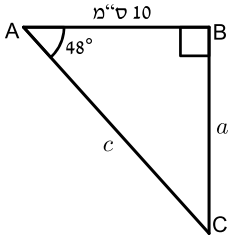
א.



ב.



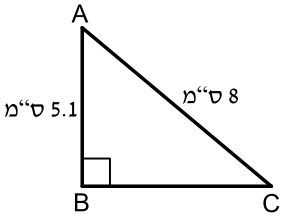
ג.



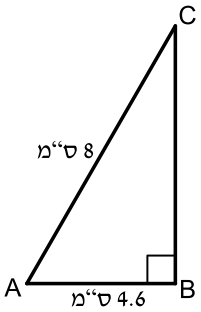
3) נתון משולש ישר זווית ABC $\left(\sphericalangle B = 90°\right)$.

א. מצאו את הזווית C.

ב. מצאו את הניצב BC.



4) נתון משולש ישר זווית ABC $\left(\sphericalangle B = 90°\right)$.



א. מצאו את הזווית A.

ב. מצאו את הניצב BC.

תשובות סופיות:

1) א. 11.468 ס"מ ב. 10.722 ס"מ ג. 12.77 ס"מ ד. $\alpha = 44.42°$.

2) א. a = 4.588 ס"מ, b = 6.55 ס"מ ב. b = 8.594 ס"מ, c = 13.96 ס"מ

ג. a = 11.1 ס"מ, c = 14.94 ס"מ.

3) א. $\sphericalangle C = 39.6°$ ב. BC = 6.39 ס"מ.

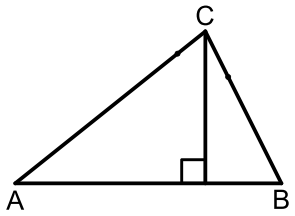
4) א. $\sphericalangle A = 54.9°$ ב. BC = 6.54 ס"מ.

קטעים מיוחדים במשולש ישר זווית:

סיכום כללי:

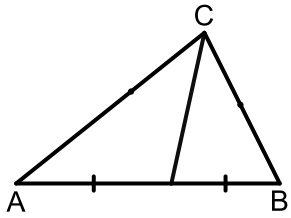
גובה במשולש:

קטע היוצא מקודקוד לצלע שממולו ומאונך לה.



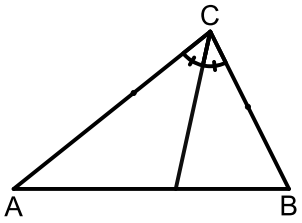
תיכון במשולש:

קטע היוצא מקודקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.



חוצה זווית במשולש:

קטע היוצא מקודקוד לצלע שממולו
וחוצה את הזווית ממנה הוא יוצא.

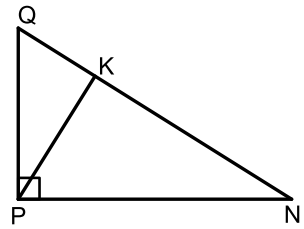


שאלות:

1) במשולש ישר זווית QPN (P קודקוד הזווית הישרה)
נתון: 5 ס"מ = QP, 8 ס"מ = PN.
PK הוא הגובה לצלע QN.

א. חשבו את $\sphericalangle PQN$.

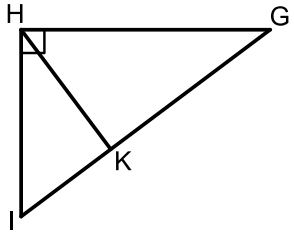
ב. חשבו את $\sphericalangle QPK$.



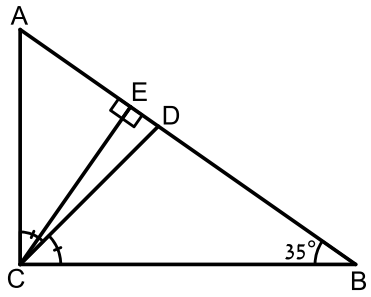
2) במשולש ישר זווית IHG (H קודקוד הזווית הישרה)
נתון: 9 ס"מ = HI, 12 ס"מ = HG.
HK הוא הגובה ליתר IG.

א. חשבו את $\sphericalangle IHK$.

ב. חשבו את שטח המשולש HIK.



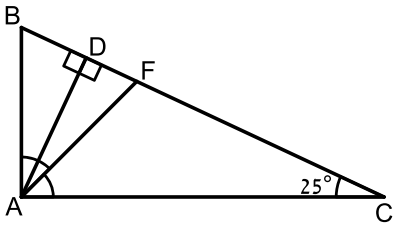
3) במשולש ישר זווית ACB ($\sphericalangle C = 90°$)
נתון: $\sphericalangle B = 35°$, CD הוא חוצה הזווית הישרה
ו-CE הוא הגובה ליתר.
חשבו את הזווית שבין הגובה ליתר
לבין חוצה הזווית הישרה.



4) במשולש ישר זווית ABC (A קודקוד הזווית הישרה),
אחת הזוויות החדות היא בת $25°$ (ראה ציור).
אורך הגובה ליתר הוא 14 ס"מ.

א. מצאו את זווית DAF.

ב. מצאו את שטח המשולש ADF,
שנוצר על ידי הגובה ליתר
ועל ידי חוצה הזווית הישרה במשולש.



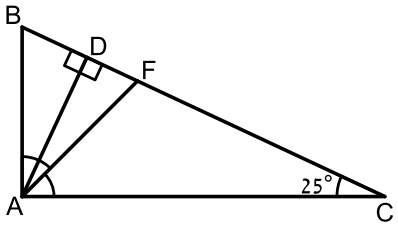
5) במשולש ישר זווית ABC (A קודקוד הזווית הישרה),
אחת הזוויות החדות היא בת $25°$.
אורך הניצב מול זווית זו הוא 15 ס"מ (ראה ציור).

א. מצאו את אורך הגובה ליתר AD.

ב. מצאו את אורך הקטע BD.

ג. AF הוא חוצה הזווית הישרה.
מצאו את אורך הקטע DF.

ד. מצאו את שטח המשולש ADF,
שנוצר על ידי הגובה ועל ידי חוצה הזווית הישרה.



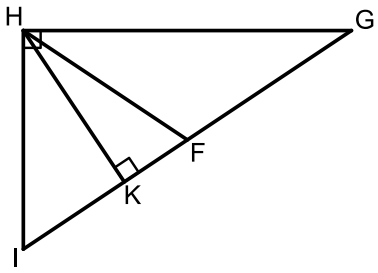
6) במשולש IHG ($\sphericalangle H = 90°$) נתון: HI = 8 ס"מ, HG = 12 ס"מ.
HK הוא הגובה לצלע IG.

א. מצאו את הזווית $\sphericalangle HGI$.

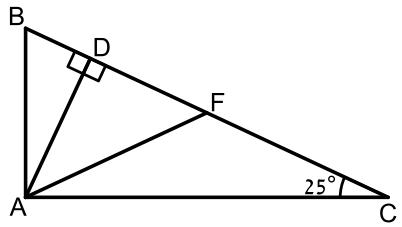
ב. מצאו את אורך הקטע IK.

ג. מצאו את אורך הקטע KG.

ד. העבירו תיכון HF לצלע IG.
מצאו את אורך הקטע KF.



7) במשולש ישר זווית ABC (A קודקוד הזווית הישרה),
אחת הזוויות החדות היא בת $25°$ (ראה ציור).
אורך הניצב מול זווית זו הוא 14 ס"מ.



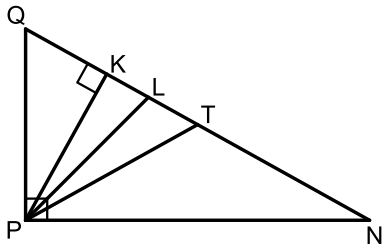
א. מצאו את אורך הגובה ליתר AD.

ב. מצאו את אורך הקטע BD.

ג. AF הוא תיכון ליתר.
מצאו את אורך הקטע DF.

ד. מצאו את שטח המשולש ADF,
שנוצר על ידי הגובה ועל ידי התיכון ליתר.

8) במשולש PQN (P קודקוד הזווית הישרה)
אורכי הניצבים הם: 5 ס"מ = PQ ו-9 ס"מ = PN.



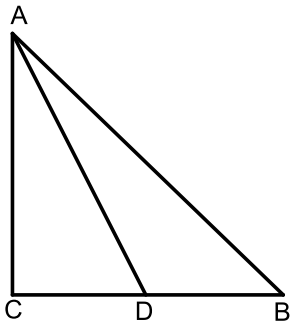
א. PK הוא הגובה לצלע NG.
מצאו את אורך הגובה PK.

ב. מצאו את אורך הקטע QK.

ג. PL הוא חוצה זווית NPQ.
מצאו את אורך הקטע KL.

ד. PT הוא תיכון לצלע NQ.
מצאו את אורך הקטע LT.

9) במשולש ישר זווית ABC אורך היתר AB הוא 30 ס"מ
והזווית CAB היא בת $46°$.
נקודה D נמצאות על הניצב BC כך ש- $\sphericalangle ADC = 63°$.

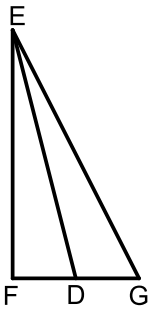


א. חשבו את ניצבי המשולש ABC.

ב. חשבו את הקטע DC.

ג. חשבו את אורך הקטע BD.

10) במשולש ישר זווית EFG, $FG \perp EF$, אורך היתר
הוא 2 ס"מ והזווית FEG היא בת $27°$.
חשבו את הזווית החדה שבין התיכון היוצא מ-E
לבין הניצב אותו היא חוצה.



תשובות סופיות:

1) א. $\sphericalangle PQN = 58°$ ב. $\sphericalangle QPK = 32°$.

2) א. $\sphericalangle IHK = 36.86°$ ב. S_{IHK} = 19.44 סמ"ר.

3) $\sphericalangle DCE = 10°$.

4) א. $\sphericalangle DAF = 20°$ ב. S_{ADF} = 35.66 סמ"ר.

5) א. AD = N"ס 13.59 ב. BD = 6.34 ס"מ ג. DF = 4.94 ס"מ
ד. S_{ADF} = 33.67 סמ"ר.

6) א. $\sphericalangle HGI = 33.69°$ ב. IK = 4.43 ס"מ ג. GK = 9.98 ס"מ
ד. KF = 2.77 ס"מ.

7) א. AD = 12.68 ס"מ ב. BD = 5.91 ס"מ ג. DF = 10.65 ס"מ
ד. S_{ADF} = 67.54 סמ"ר.

8) א. PK = 4.37 ס"מ ב. QK = 2.42 ס"מ ג. KL = 1.24 ס"מ
ד. LT = 1.48 ס"מ.

9) א. BC = 21.58 ס"מ, AC = 20.83 ס"מ ב. DC = 10.61 ס"מ
ג. BD = 10.96 ס"מ.

10) $\sphericalangle EDF = 75.7°$.

שאלות עם שני משולשים:

סיכום כללי:

בשאלות עם שני משולשים נבצע את החישובים בתוך משולש ישר זווית מתאים לפי נתוני השאלה.

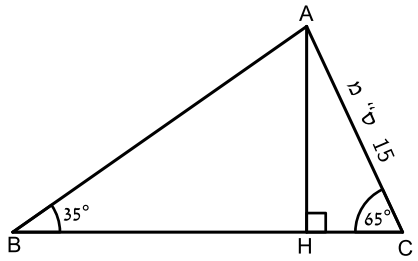
הבחירה של הפונקציות הטריגונומטרית תהיה גם היא לפי נתוני השאלה.

שאלות:

1) נתון משולש ABC. אורך הצלע AC הוא 15 ס"מ.
נתון בנוסף כי: $\sphericalangle B = 35°$, $\sphericalangle C = 65°$.

א. מצאו את הגובה AH.

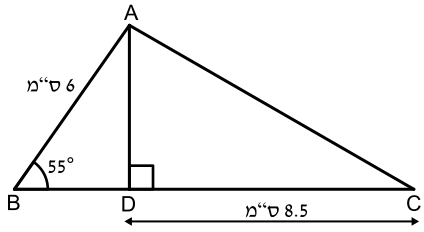
ב. מצאו את הצלע AB.



2) נתון משולש ABC. אורך הצלע AB הוא 6 ס"מ
ואורך הקטע DC הוא 8.5 ס"מ.
הזווית B היא בת $55°$.

א. מצאו את אורך הגובה AD.

ב. מצאו את גודל הזווית C.

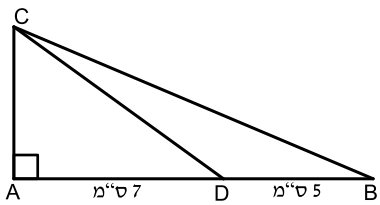


3) במשולש ישר זווית ABC, $\left(\sphericalangle A = 90°\right)$
נתון כי: 5 ס"מ = BD, 7 ס"מ = AD.
הזווית $\sphericalangle CDB$ היא בת $144°$.

א. מצאו את זווית $\sphericalangle ADC$.

ב. חשבו את אורך הניצב AC.

ג. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ABC$.



4) במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle A = 90°)$,

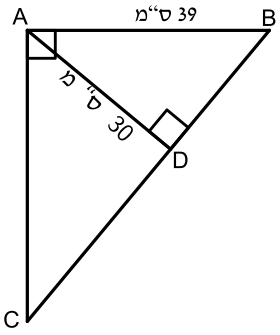
AD הוא הגובה ליתר.

נתון: 39 ס"מ = AB, 30 ס"מ = AD.

א. חשבו את גודל הזווית ABD.

ב. חשבו את אורך הניצב AC.

ג. חשבו את אורך היתר BC.



תשובות סופיות:

1) א. AH = 13.594 ס"מ ב. AB = 23.7 ס"מ

2) א. AD = 4.914 ס"מ ב. $\sphericalangle C = 30°$.

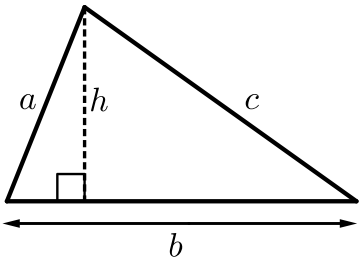
3) א. $36°$ ב. AC = 5.08 ס"מ ג. $\sphericalangle ABC = 22.94°$

4) א. $\sphericalangle ABD = 50.28°$ ב. AC = 46.94 ס"מ ג. BC = 61.03 ס"מ

מציאת צלעות וגבהים על פי שטח נתון:

סיכום כללי:

שטח של משולש:



נחשב שטח של משולש ע"י מחצית ממכפלת צלע בגובה שלה.

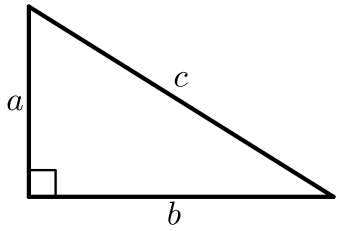
באופן הבא: $S=\frac{b\cdot h}{2}$.

הערה:

1) כאשר נתון משולש לפי הקודקודים שלו, נכתוב את השטח כך: $S_{ABC}=\frac{AB\cdot h}{2}$.

2) היחידות של שטח הן סמ"ר, מ"ר, וכו'.

שטח של משולש ישר זווית:



נוכל לחשב שטח של משולש ישר זווית ע"י מחצית ממכפלת הניצבים

באופן הבא: $S=\frac{a\cdot b}{2}$.

שאלות:

1) שטח משולש ישר זווית ABC $\left(\sphericalangle B=90^\circ\right)$

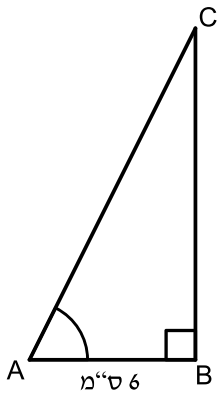
הוא 36 סמ"ר. נתון: 6 ס"מ = AB.

א. מצאו את אורך הניצב BC.

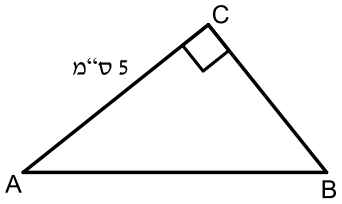
ב. מצאו את $\tan\sphericalangle BAC$.

ג. חשבו את גודל הזווית BAC.

ד. חשבו את היקף המשולש.



2) במשולש ישר זווית ABC $\left(\sphericalangle ACB = 90°\right)$,



אורך הניצב AC הוא 5 ס"מ.

שטח המשולש הוא 10 סמ"ר.

א. מצאו את $\tan\sphericalangle CAB$.

ב. חשבו את גודל הזווית CAB.

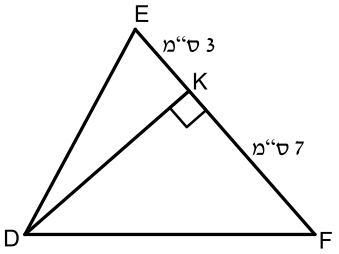
ג. חשבו את היקף המשולש.

3) במשולש DEF, הגובה לצלע EF הוא DK.

נתון: 3 ס"מ = EK, 7 ס"מ = KF.

שטח המשולש DEF הוא 40 סמ"ר.

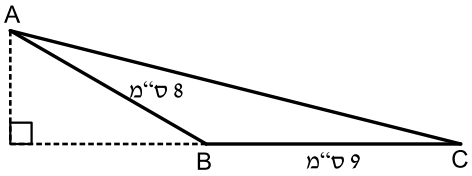
חשבו את זוויות המשולש.



4) שטח משולש קהה זווית ABC ($\sphericalangle ABC$ קהה) הוא 18 סמ"ר.

נתון: 9 ס"מ = BC, 8 ס"מ = AB.

חשבו את גודל הזווית ABC.



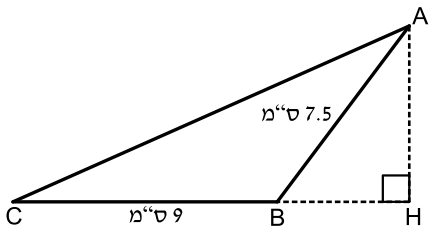
5) שטח משולש קהה זווית ABC ($\sphericalangle ABC$ קהה) הוא 27 סמ"ר.

AH הוא גובה לצלע BC.

נתון: 9 ס"מ = BC, 7.5 ס"מ = AB.

א. חשבו את גודל הזווית ABC.

ב. פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח המשולש ABH?



תשובות סופיות:

1) א. BC = 12 ס"מ ב. 2 ג. $\sphericalangle BAC = 63.43°$

ד. P_{ABC} = 31.414 ס"מ.

2) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\sphericalangle CAB = 38.66°$ ג. P_{ABC} = 15.4 ס"מ.

3) $\sphericalangle F = 48.814°$, $\sphericalangle E = 69.44°$, $\sphericalangle D = 61.746°$.

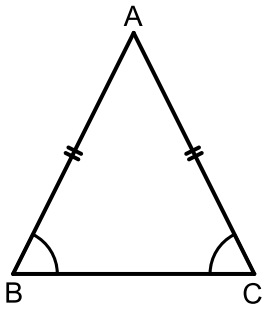
4) $\sphericalangle ABC = 150°$.

5) א. 126.87° ב. 2.

שאלות עם משולש שווה שוקיים:

סיכום כללי:

משולש שווה שוקיים:

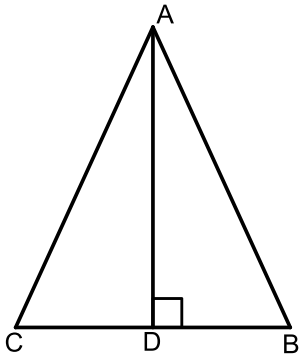


משולש שבו שתי צלעות שוות.

- הצלעות השוות נקראות **שוקיים**.
- הצלע הנוספת נקראת **בסיס**.
- הזוויות שבין הבסיס לשוקיים נקראות **זוויות הבסיס**.
- הזווית שבין השוקיים נקראת **זווית הראש**.

במשולש שווה שוקיים, השוקיים שוות זו לזו וזוויות הבסיס שוות זו לזו.

תיכון, גובה וחוצה זווית הראש:



במשולש שווה שוקיים, התיכון לבסיס, הגובה לבסיס וחוצה זווית הראש מתלכדים לקטע אחד.

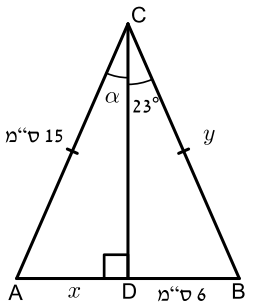
במילים אחרות:

- תיכון לבסיס הוא גם גובה וגם חוצה זווית הראש.
- גובה לבסיס הוא גם תיכון וגם חוצה זווית הראש.
- חוצה זווית הראש הוא גם תיכון וגם גובה.

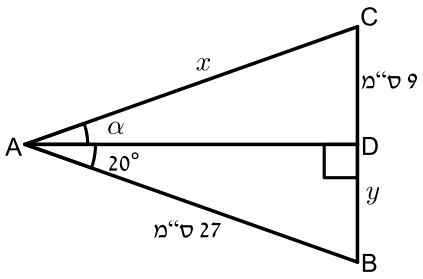
שאלות:

1) מצאו את החסר בכל אחד מהמשולשים שווי השוקיים הבאים:

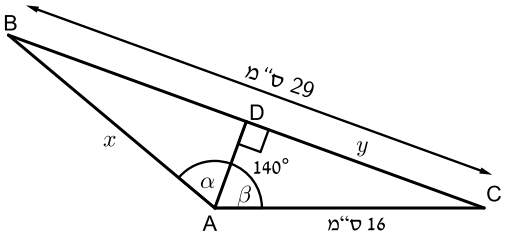
א.



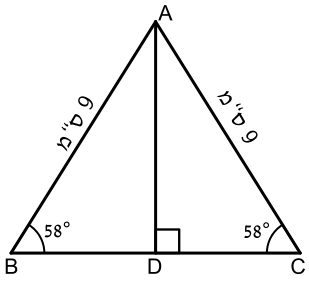
ב.



ג.



2) במשולש שווה שוקיים אורך השוק הוא 9 ס"מ וזווית הבסיס היא $58°$.



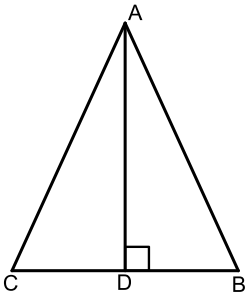
א. מצאו את בסיס המשולש.

ב. מצאו את היקף המשולש.

ג. חשבו את שטח המשולש.

3) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$

נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ.

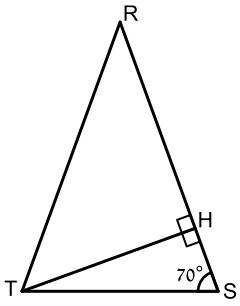


א. חשבו את זווית הבסיס $\sphericalangle ABC$.

ב. חשבו את הגובה AD.

ג. חשבו את שטח המשולש ABD.

4) במשולש שווה שוקיים RST $(RS = RT)$,



TH הוא הגובה לשוק RS.

אורך הבסיס הוא 14 ס"מ = ST.

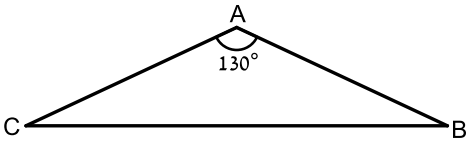
גודל זווית הבסיס הוא $70°$.

א. חשבו את אורך הגובה לשוק, TH.

ב. חשבו את האורך של שוק המשולש.

ג. חשבו את שטח המשולש RST.

5) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$,

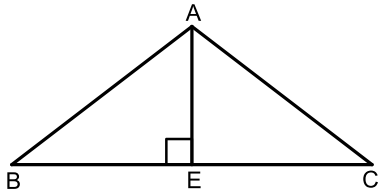


זווית הראש BAC היא בת $130°$

ואורך השוק הוא 14 ס"מ.

חשבו את האורך של בסיס המשולש.

6) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$,



נתון: 17 ס"מ = AB, 27 ס"מ = BC.

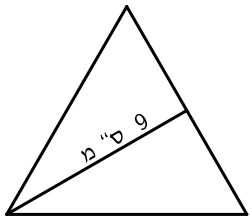
א. מצאו את $\cos\sphericalangle ABC$.

ב. חשבו את גודל זווית הבסיס $\sphericalangle ABC$.

ג. חשבו את הגובה לבסיס, AE.

ד. חשבו את שטח המשולש AEC.

7) במשולש שווה צלעות ABC אורך התיכון הוא 9 ס"מ.

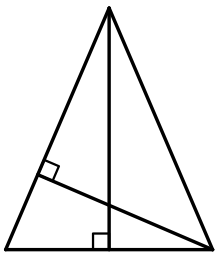


א. חשבו את אורך הצלע.

ב. חשבו את היקף המשולש.

ג. מהו אורך חוצה הזווית במשולש? נמקו.

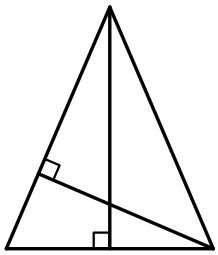
8) במשולש שווה שוקיים זווית הראש היא $26°$



ואורך הגובה לבסיס הוא 15 ס"מ.

חשבו את אורך הגובה לשוק.

9) במשולש שווה שוקיים זווית הבסיס היא $63°$
ואורך הגובה לבסיס הוא 12 ס"מ.
חשבו את אורך הגובה לשוק.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 23°$, $y =$ 15 ס"מ, $x =$ 6 ס"מ.
ב. $\alpha = 20°$, $y =$ 9 ס"מ, $x =$ 27 ס"מ.
ג. $\alpha = \beta = 70°$, $y =$ 14.5 ס"מ, $x =$ 16 ס"מ.

2) א. $BC =$ 9.358 ס"מ ב. $P_{ABC} =$ 27.538 ס"מ ג. $S_{ABC} =$ 36.39 סמ"ר.

3) א. $65.37°$ ב. $AD =$ 10.9 ס"מ ג. $S_{ABC} =$ 27.25 סמ"ר.

4) א. $TH =$ 13.15 ס"מ ב. 20.45 ס"מ ג. $S_{RST} =$ 134.958 סמ"ר.

5) 25.376 ס"מ.

6) א. $\frac{13.5}{17}$ ב. $37.42°$ ג. $AE =$ 10.33 ס"מ
ד. $S_{AEC} =$ 69.7275 סמ"ר.

7) א. 10.39 ס"מ. ב. $P =$ 31.176 ס"מ ג. 9 ס"מ.

8) 6.74 ס"מ.

9) 10.89 ס"מ.

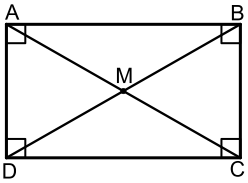
שאלות עם מלבן:

סיכום כללי:

הגדרה:

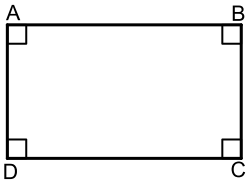
המלבן הוא מרובע עם 4 זוויות ישרות.

תכונות המלבן:



- כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו: $AB \parallel DC \ , \ AD \parallel BC$.
- כל זוג צלעות נגדיות שוות זו לזו: $AB = DC \ , \ AD = BC$.
- כל אחת מזוויות המלבן היא ישרה:
  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$.
- האלכסונים חוצים זה את זה: $AM = CM \ , \ BM = DM$
  ושווים זה לזה: $AC = BD$.

היקף מלבן:



$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2\left(AB + BC\right)$$

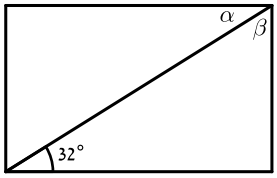
שטח מלבן:

שטח מלבן יחושב ע"י מכפלת שתי צלעות סמוכות: $S_{ABCD} = AB \cdot BC \ \Rightarrow \ S = a \cdot b$.

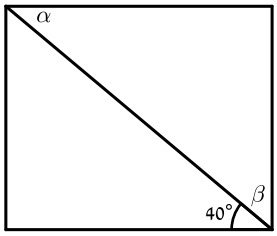
שאלות:

1) חשבו את הזוויות α ו-β במלבנים הבאים:

א.



ב.

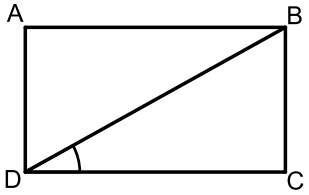


2) אורכי צלעות מלבן ABCD

הם: 18 ס"מ = DC, 10 ס"מ = BC.

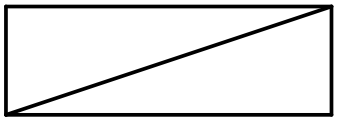
א. חשבו את גודל הזווית שבין האלכסון לבין הצלע הארוכה של המלבן.

ב. חשבו את אורך האלכסון של המלבן.



3) במלבן אורך צלע אחת הוא 12 ס"מ.

אורך הצלע הארוכה גדול פי 3 ממנה.



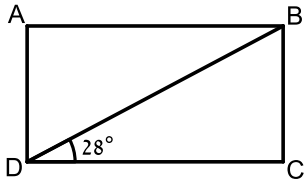
א. מהי הזווית שבין אלכסון המלבן לצלע הארוכה של המלבן?

ב. מהי הזווית שבין אלכסון המלבן לצלע הקצרה של המלבן?

ג. מצאו את היחס בין הצלע הקצרה במלבן לאלכסון המלבן.

ד. מהו היחס בין הצלע הקצרה של המלבן להיקפו?

4) במלבן ABCD אורך האלכסון הוא 16 ס"מ, והזווית BDC היא בת $28°$.



א. חשבו את צלעות המלבן BC ו-DC.

ב. חשבו את היקף המלבן.

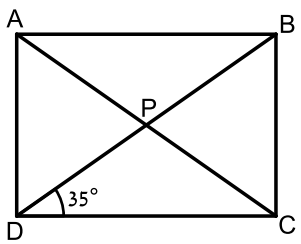
ג. חשבו את שטח המלבן.

ד. חשבו את הזווית החדה שבין אלכסוני המלבן.

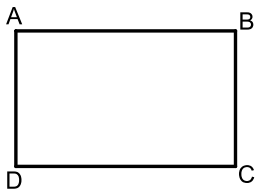
5) במלבן ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה P.

נתון: $\sphericalangle PDC = 35°$, 9 ס"מ = AP.

חשבו את היקף המלבן.



6) היקף מלבן ABCD הוא 42 ס"מ.

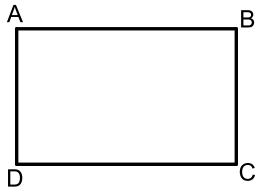


אורך הצלע הארוכה של המלבן הוא: 13 ס"מ = AB.

א. חשבו את גודל הזווית BDC שבין האלכסון לבין הצלע הארוכה של המלבן.

ב. חשבו את אורך האלכסון של המלבן.

7) שטח מלבן ABCD הוא 66 סמ"ר.



אורך הצלע AD הוא 6 ס"מ.

א. חשבו את גודל הזווית DBC.

ב. חשבו את אורך האלכסון DB.

תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 32°$, $\beta = 58°$ ב. $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$.

2) א. $\alpha = 29.05°$ ב. 20.59 ס"מ.

3) א. $\alpha = 18.43°$ ב. $\beta = 71.57°$ ג. 0.316 ד. $\frac{1}{8}$.

4) א. 7.51 ס"מ = BC , 14.12 ס"מ = DC ב. P_{ABCD} = 43.26 ס"מ

ג. S_{ABCD} = 106.04 סמ"ר ד. $56°$.

5) P_{ABCD} = 50.12 ס"מ.

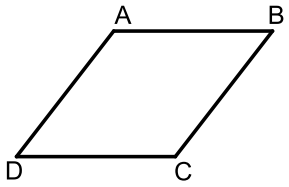
6) א. $\alpha = 31.6°$ ב. 15.26 ס"מ.

7) א. $\alpha = 61.39°$ ב. 12.53 ס"מ.

שאלות עם מעוין:

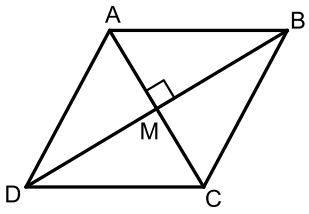
סיכום כללי:

הגדרה:



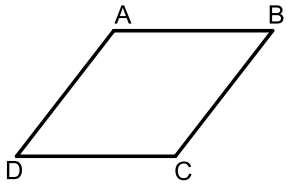
מרובע שכל צלעותיו שוות הוא מעוין.

תכונות המעוין:



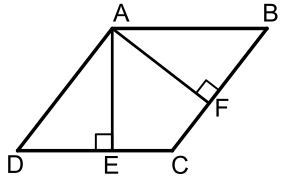
- כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו: $AB \parallel DC \ , \ AD \parallel BC$.
- כל הצלעות שוות זו לזו: $AB = BC = CD = AD$.
- כל זוג זוויות נגדיות שוות זו לזו: $\sphericalangle B = \sphericalangle D \ , \ \sphericalangle A = \sphericalangle C$.
- כל זוג זוויות סמוכות משלימות ל-$180°$.
- האלכסונים מקיימים:
  - חוצים זה את זה: $AM = CM \ , \ BM = DM$.
  - מאונכים זה לזה: $AC \perp BD$.
  - חוצי זוויות: $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2 \ , \ \sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2 \ , \ \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2 \ , \ \sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$.

היקף מעוין:



$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 4AB$$

שטח מעוין:



ניתן לחשב שטח מעוין בשתי דרכים:

- מחצית ממכפלת האלכסונים:

$$S = \frac{m_1 \cdot m_2}{2} \quad \Rightarrow \quad S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

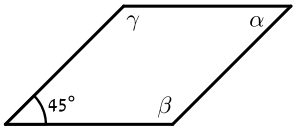
- מכפלת צלע בגובה שלה:

$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b \quad \Rightarrow \quad S_{ABCD} = DC \cdot AE = BC \cdot AF$$

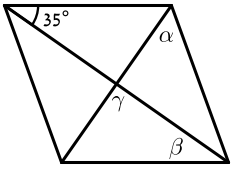
שאלות:

1) חשבו את הזוויות α , β ו- γ במעוינים הבאים:

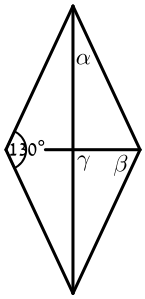
א.



ב.



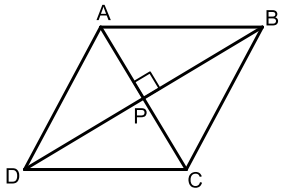
ג.



2) במעוין ABCD אורכי האלכסונים הם: 9 ס"מ ו-15 ס"מ.

א. חשבו את זוויות המעוין.

ב. חשבו את היקף המעוין.

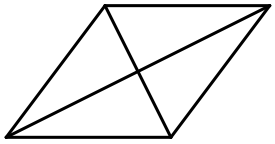


3) במעוין, אורך אלכסון אחד הוא 6 ס"מ, והאלכסון השני ארוך ממנו פי 2.

א. מצאו את הגודל של זוויות המעוין.

ב. מצאו את היחס בין היקף המעוין לבין צלע המעוין.

ג. מצאו את היחס בין אורך האלכסון הארוך של המעוין לבין היקף המעוין.

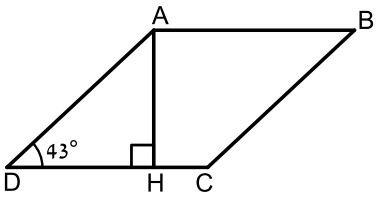


4) במעוין ABCD, אורך הגובה AH לצלע DC הוא 15 ס"מ.

הזווית החדה של המעוין היא בת $43°$.

א. חשבו את היקף המעוין.

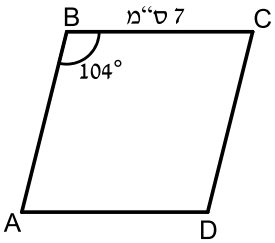
ב. חשבו את אורך הקטע CH.



5) במעוין ABCD אורך הצלע הוא 7 ס"מ והזווית הקהה היא בת $104°$.

א. חשבו את אורך האלכסון AC ואת אורך האלכסון DB.

ב. חשבו את שטח המעוין ABCD.

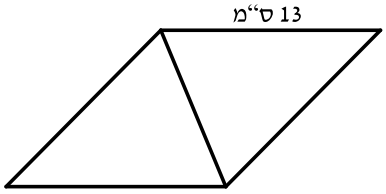


6) אורך הצלע של מעוין הוא 13 ס"מ.
אורך אחד האלכסונים של המעוין קטן
ב-3 ס"מ מצלע המעוין.

א. חשבו את אורך האלכסון האחר של המעוין.

ב. חשבו את גודל הזווית הקהה של המעוין.

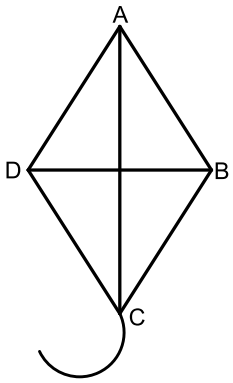
ג. חשבו את שטח המעוין.



7) כדי לבנות עפיפון גזרו מנייר מעוין ABCD.
אורך צלע המעוין הוא 52 ס"מ,
והזווית החדה שלו היא בת $65°$.

א. חשבו את אורכי המקלות AC ו-BD,
שצריך להשתמש בהם לבניית העפיפון.

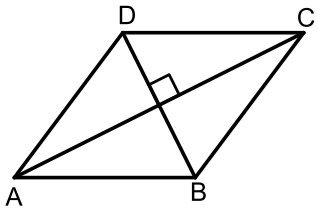
ב. מהו שטח הנייר שממנו עשוי העפיפון?



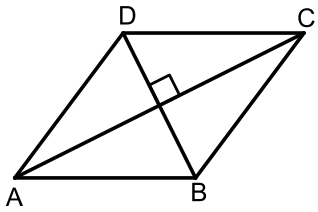
8) במעוין, האלכסון הקצר הוא 8 ס"מ.
האלכסון הארוך גדול פי 2 מהאלכסון הקצר.

א. חשבו את הזווית החדה של המעוין.

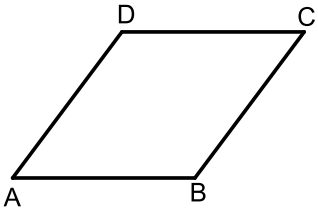
ב. חשבו את הזווית הקהה של המעוין.



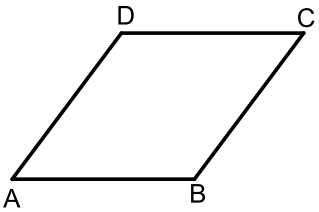
9) במעוין, האלכסון הארוך הוא 20 ס"מ.
האלכסון הקצר קטן פי 5 מהאלכסון הארוך.
חשבו את זוויות המעוין.



10) שטח מעוין הוא 80 סמ"ר והזווית הקהה
של המעוין היא בת $135°$.
מצאו את צלע המעוין.



11) זוויות המעוין הן $125°$ ו- $55°$ ושטחו הוא 45 סמ"ר.
מצאו את צלע המעוין.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$ ב. $\alpha = 55°$, $\beta = 35°$, $\gamma = 90°$

ג. $\alpha = 25°$, $\beta = 65°$, $\gamma = 90°$.

2) א. $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 118.07°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 61.92°$ ב. $P_{ABCD} =$ 34.989 ס"מ.

3) א. $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 53.13°$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 126.86°$ ב. 4 ג. 0.447.

4) א. $P_{ABCD} =$ 88 ס"מ ב. $CH =$ 5.92 ס"מ.

5) א. $BD =$ 8.019 ס"מ, $AC =$ 11.03 ס"מ ב. $S_{ABCD} =$ 47.53 סמ"ר.

6) א. 24 ס"מ. ב. 134.76° ג. $S =$ 120 סמ"ר.

7) א. $BD =$ 55.88 ס"מ, $AC =$ 87.712 ס"מ ב. $S =$ 2450.67 סמ"ר.

8) א. 53.13° ב. 126.87°.

9) $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 157.38°$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 22.62°$.

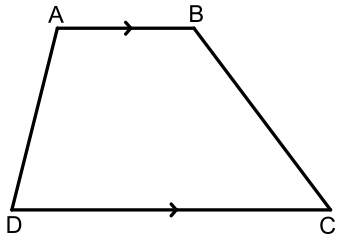
10) 10.63 ס"מ.

11) 7.411 ס"מ.

שאלות עם טרפז:

סיכום כללי:

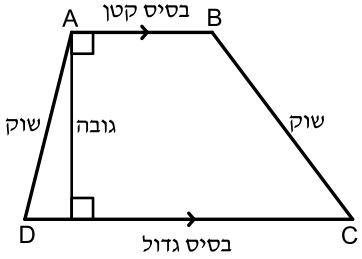
הגדרה יסודית:



הטרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות המקבילות זו לזו.

הגדרות של קטעים וזוויות בטרפז:

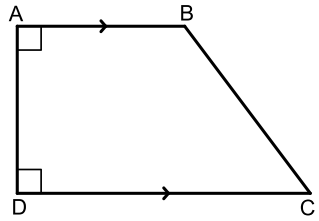
מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו נקרא **טרפז**.
כלומר: $AD \not\parallel BC$, $AB \parallel CD$.



1) הצלעות המקבילות נקראות **בסיסי הטרפז**.
2) הצלעות שאינן מקבילות נקראות **שוקי הטרפז**.
3) הזוויות שליד כל בסיס נקראות **זוויות הבסיס**.
4) המרחק בין בסיסי הטרפז נקרא **גובה הטרפז**.

תכונות הטרפז:

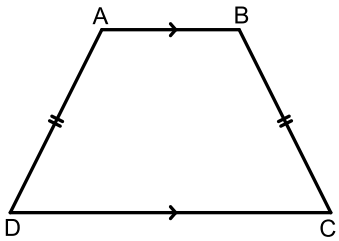
1) סכום שתי הזוויות שליד כל אחד משוקי הטרפז הוא $180°$.
2) נוכל לחלק את הטרפז למלבן ושני משולשים ישרי זווית.



טרפז ישר זווית:

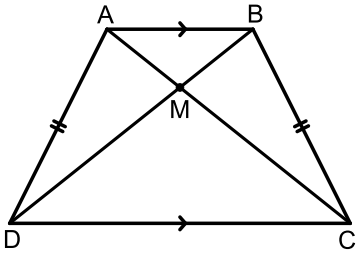
טרפז שבו אחת השוקיים מאונכת לבסיסים נקרא טרפז ישר שווית.

טרפז שווה שוקיים:



טרפז שווה שוקיים הוא טרפז ששתי שוקיו שוות.

תכונות בטרפז שווה שוקיים:



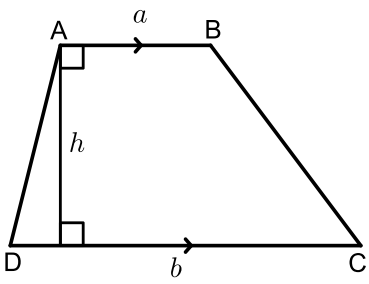
1) השוקיים שוות זו לזו.

2) הזוויות של כל בסיס שוות זו לזו.

3) האלכסונים שווים זה לזה.

4) האלכסונים מחלקים זה את זה כך ש-$AM = BM$, $CM = DM$.

היקף טרפז:

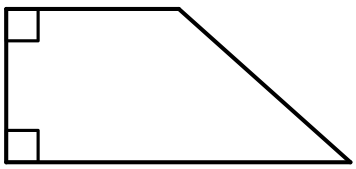


סכום כל אורכי הצלעות: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$.

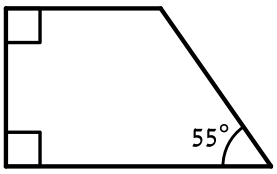
שטח טרפז:

שטח טרפז שאורכי בסיסיו הם a ו-b וגובהו הוא h יחושב לפי: $S = \frac{(a+b)h}{2}$ (מחצית ממכפלת סכום הבסיסים בגובה).

שאלות:



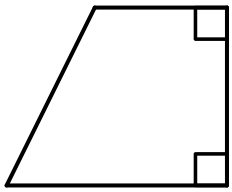
1) בטרפז ישר זווית הגובה הוא 8 ס"מ והשוק הארוכה היא 12 ס"מ. חשבו את הזווית החדה של הטרפז.



2) בטרפז ישר זווית נתונים הבסיסים: 7 ס"מ ו-12 ס"מ.
הזווית החדה היא בת $55°$.

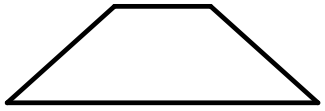
א. חשבו את שטח הטרפז.

ב. חשבו את היקף הטרפז.



3) בטרפז ישר זווית אורכי הבסיסים הם 6 ס"מ ו-10 ס"מ.
אורך השוק הארוכה הוא 9 ס"מ.
חשבו את זוויות הטרפז.

4) בטרפז שווה שוקיים אורך הבסיס הקטן הוא 4 ס"מ, אורך השוק הוא 6 ס"מ והזווית החדה היא $42°$.



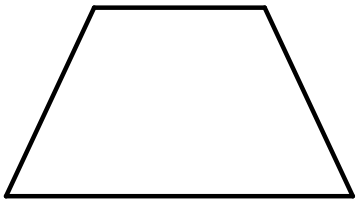
א. מצאו את אורך הבסיס הגדול של הטרפז.

ב. חשבו את היקף הטרפז.

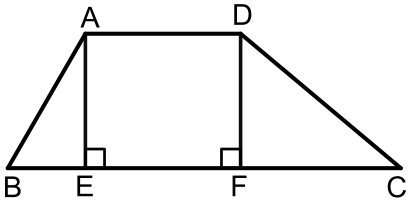
ג. מצאו את גובה הטרפז.

ד. חשבו את שטח הטרפז.

5) השוק של טרפז שווה שוקיים היא 11 ס"מ,
אורך הבסיס הקטן הוא 9 ס"מ
והזווית החדה של הטרפז היא $65°$.
חשבו את שטח הטרפז.



6) בטרפז ABCD נתון: $AB = 6$ ס"מ, $\sphericalangle ABC = 70°$, $\sphericalangle BCD = 46°$.



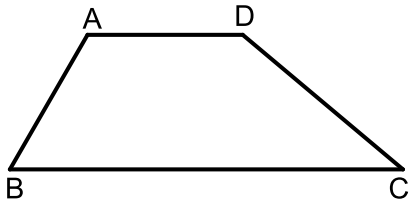
א. חשבו את אורך הקטע BE.

ב. חשבו את גובה הטרפז.

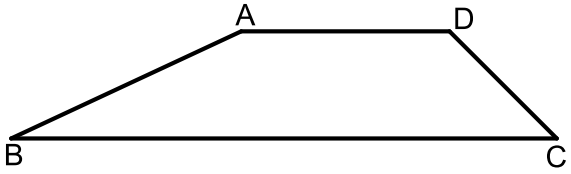
ג. חשבו את אורך הקטע FC.

ד. חשבו את אורך השוק DC.

7) בטרפז ABCD נתון: $AB = 18$ ס"מ, $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle BCD = 40°$.
חשבו את אורך השוק DC.

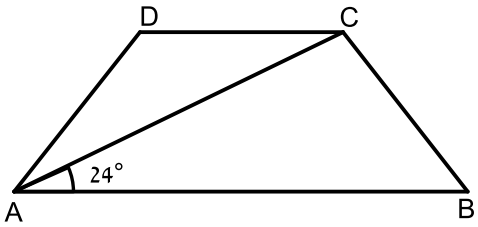


8) בטרפז ABCD נתון: $AB = 7$ ס"מ, $\sphericalangle ABC = 25°$, $\sphericalangle BCD = 45°$.



א. חשבו את אורך השוק DC.

ב. חשבו את ההפרש בין אורכי הבסיסים.



9) בטרפז נתון כי השוק AD שווה לבסיס הקטן DC.

נתון: $\sphericalangle A_1 = 24°$, 6 ס"מ = DC, $\sphericalangle B = 52°$.

א. חשבו את גובה הטרפז.

ב. חשבו את השוק BC של הטרפז.

תשובות סופיות:

1) 41.81°.

2) א. 67.83 סמ"ר = S ב. 34.857 ס"מ = P.

3) 90° , 90° , 63.61° , 116.38°.

4) א. 12.91 ס"מ = DC ב. 28.91 ס"מ = P_{ABCD} ג. 4.01 ס"מ

ד. 33.94 סמ"ר = S_{ABCD}.

5) 136.03 סמ"ר = S_{ABCD}.

6) א. 2.05 ס"מ = BE ב. 5.638 ס"מ ג. 5.44 ס"מ = FC

ד. 7.837 ס"מ = DC.

7) 24.25 ס"מ = DC.

8) א. 4.18 ס"מ = DC ב. 9.29 ס"מ = DC – AB.

9) א. 4.45 ס"מ ב. 5.65 ס"מ = BC.

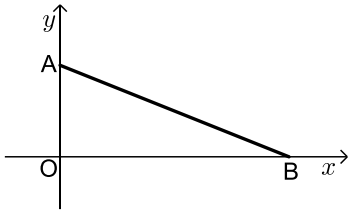
משולשים במערכת צירים:

סיכום כללי:

בשאלות במערכת צירים נעזר בידע בהנדסת אנליטית על מנת לחשב את אורכי הצלעות הנדרשות.
לאחר מכן נעשה שימוש בטריגונומטריה לפי דרישות שאלה.

שאלות:

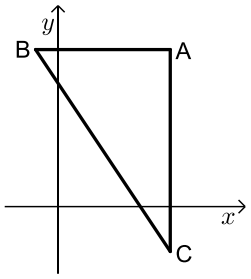
1) AOB הוא משולש ישר-זווית שקודקודיו בנקודות $A(0,4)$, $O(0,0)$ ו- $B(10,0)$.



א. רשמו את אורכי הקטעים AO ו-BO.

ב. חשבו את גודל הזוויות $\sphericalangle OAB$ ו- $\sphericalangle OBA$.

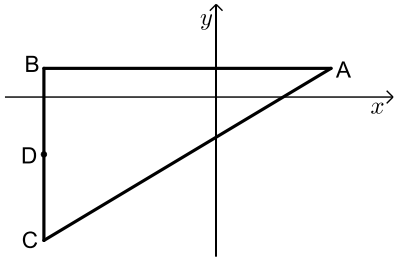
2) הנקודות $A(5,7)$, $B(-1,7)$, $C(5,-2)$ הן שלושת הקודקודים של משולש ABC.



א. מצאו את אורכי שני הניצבים במשולש.

ב. מצאו את הזוויות החדות של המשולש (זווית $\sphericalangle B$ וזווית $\sphericalangle C$).

3) הנקודות $A(4,1)$, $B(-6,1)$, $C(-6,-5)$ הן שלושת הקודקודים של משולש.
הנקודה D היא אמצע הצלע BC.



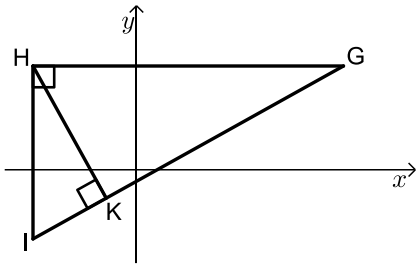
א. מצאו את אורכי שני הניצבים במשולש.

ב. מצאו את אורך הקטע BD.

ג. מצאו את הזווית $\sphericalangle BAD$.

ד. מצאו את הזווית $\sphericalangle DAC$.

ה. AE הוא חוצה הזווית BAC.
חשבו את אורכו.



4) הנקודות $I(-6,-4)$, $H(-6,6)$, $G(12,6)$

הן שלושת הקודקודים של משולש.

HK הוא הגובה לצלע GI.

א. מצאו את גדול הזווית $\sphericalangle HGI$.

ב. מצאו את אורך הגבה HK.

ג. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle IHK$.

תשובות סופיות:

1) א. 10 יח"א = BO, 4 יח"א = AO ב. $\sphericalangle OAB = 68.2°$, $\sphericalangle OBA = 21.8°$.

2) א. 9 יח"א = AC, 6 יח"א = AB ב. $\sphericalangle C = 33.69°$, $\sphericalangle B = 56.31°$.

3) א. 10 יח"א = AB, 6 יח"א = BC ב. $D(-6,-2)$

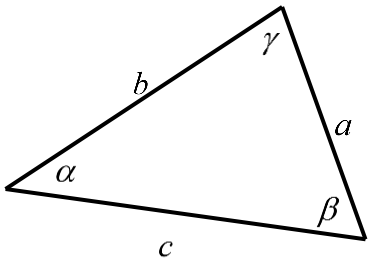
ג. $\sphericalangle BAD = 16.7°$ ד. $\sphericalangle DAC = 14.26°$ ה. 10.37 יח"א = AE.

4) א. $\sphericalangle HGI = 29.05°$ ב. 8.74 יח"א = HK ג. $\sphericalangle IHK = 29.05°$.

נוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

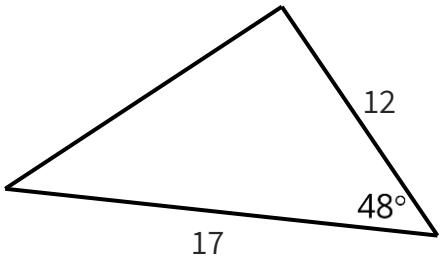
שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}$.



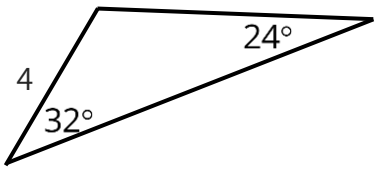
שאלות:

1) חשבו את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.



תשובות סופיות:

1) א. $S=$ 75.801 סמ"ר ב. $S=$ 8.641 סמ"ר.

שאלון 471

שאלות מסכמות בגאומטריה משולבת (ללא מעגל)

תוכן עניינים:

שאלות מסכמות בגאומטריה משולבת (ללא מעגל)..... 200

גאומטריה של המישור, טריגונומטריה ואנליטית: 201

שאלות:..... 201

תשובות סופיות: 213

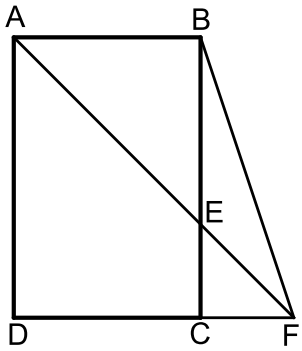
גאומטריה של המישור וגאומטריה אנליטית:..... 216

שאלות:..... 216

תשובות סופיות: 225

גאומטריה של המישור, טריגונומטריה ואנליטית:

שאלות:



1) באיור שלפניכם נתון מלבן ABCD שבו: 18 ס"מ = AD, 12 ס"מ = AB.
הנקודה E מחלקת את הצלע BC ביחס: BE:CE=2:1.
מעבירים קטע AE החותך את המשך הצלע DC בנקודה F.
מחברים את הנקודה F עם הקודקוד B.

א. (1) הוכיחו כי: $\Delta ABE \sim \Delta FCE$.

(2) מהו יחס הדמיון?

ב. (1) איזה סוג משולש הוא המשולש FCE?

(2) חשבו את אורך הצלע EF במשולש FCE.

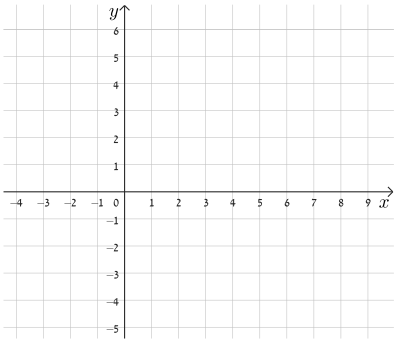
ג. מצאו את זווית $\sphericalangle BFE$.

ד. (1) חשבו את שטח המשולש BFE.

(2) חשבו את היחס שבין שטח המשולש BFE לבין שטח המרובע ADCE.

2) קודקודי המרובע ABCD הם: $A(8,2)\ ,\ B(2,6)\ ,\ C(0,1)\ ,\ D(6,-3)$.

א. סרטטו את המרובע ABCD במערכת הצירים שלפניכם:



ב. מה הוא סוג המרובע ABCD? הסבירו.

ג. מעבירים את האלכסון AC. מה הוא אורכו?

ד. מסמנים בנקודה E את אמצע הצלע CD ובנקודה H את אמצע האלכסון AC.
הוכיחו כי $\Delta CEH \sim \Delta ABC$.

ה. (1) חשבו את זווית $\sphericalangle ACD$.

(2) חשבו את אורכי צלעות המרובע ABCD.

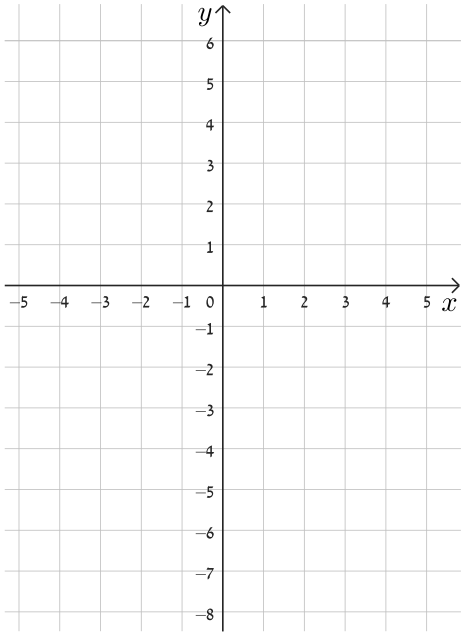
(3) חשבו את שטח המשולש ACD.

(4) חשבו את שטח המרובע ABCD.

ו. חשבו את היחס שבין שטח המשולש CEH לשטח המרובע ABCD.

3) נתון מלבן ABCD ששיעורי קודקודיו הם: $A(-4,4)$, $B(0,5)$, $C(3,-7)$, $D(-1,-8)$.

א. סרטטו את המלבן ABCD במערכת צירים.



ב. חשבו את היקף המלבן ואת שטחו.

ג. חשבו את אורכי האלכסונים של המלבן.

ד. מצאו את משוואות האלכסונים.

ה. מצאו את שיעורי נקודת מפגש האלכסונים במלבן.

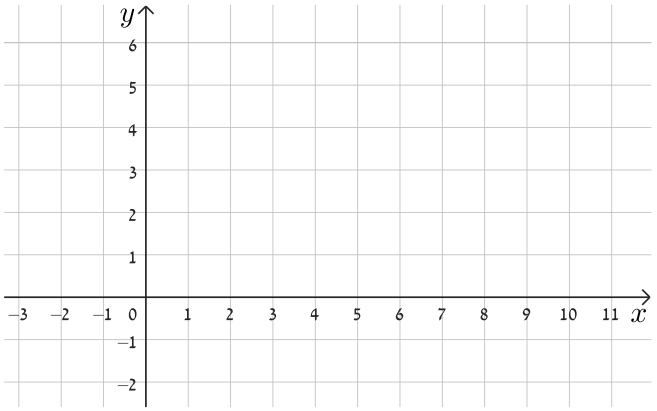
ו. מצאו את הזוויות הנוצרות בין אלכסוני המלבן לצלעות המלבן.

ז. מצאו את הזווית החדה שבין אלכסוני המלבן.

4) נתון מרובע ABCD ששיעורי קודקודיו הם: $A(10,3)$, $B(2,-1)$, $C(3,4)$, $D(7,6)$.

א. (1) סרטטו את המרובע במערכת צירים.

(2) איזה מרובע הוא המרובע ABCD ? נמקו.



ב. מעבירים את האלכסון BD.

(1) מצאו את משוואתו.

(2) מצאו את אורך האלכסון.

(3) מצאו את שיעורי הנקודה F, נקודת האמצע של האלכסון.

ג. הוכיחו כי משוואת הישר העובר דרך הנקודות F ו-C מקביל למשוואת הישר של הצלע AD.

ד. חשבו את הזווית AFB.

ה. חשבו את שטח המשולש AFB.

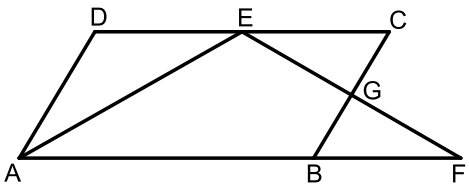
5) המרובע ABCD הוא מקבילית שבו $AB = 2BC$.

הנקודה E היא אמצע הצלע DC.

ממשיכים את AB מהכיוון של B עד לנקודה F כך שמתקיים: $AD = BF$.

מחברים את E עם F כך שהקטע EF חותך את הצלע BC בנקודה G.

ידוע גם כי: $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AEF$.



א. הוכיחו כי המשולש ADE הוא שווה שוקיים.

ב. הוכיחו כי: $\Delta EGC \cong \Delta FGB$.

ג. הוכיחו כי: $\Delta ADE \sim \Delta AEF$.

ד. ידוע כי: 6 ס"מ = BG, $\sphericalangle DAE = 30°$.

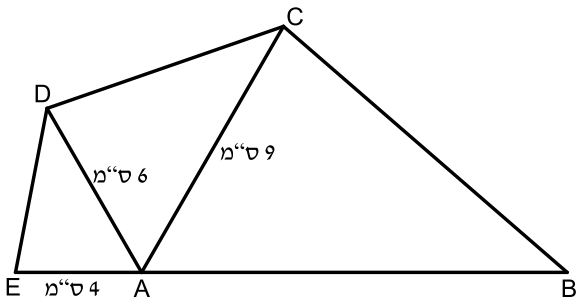
(1) חשבו את שטח המשולש FGB.

(2) חשבו את היקף המשולש ADE.

6) הנקודה A נמצאת על הישר BE.

הקטעים AB, AC, AD ו-AE מחלקים הזווית השטוחה $\sphericalangle EAB$ ל-3 זוויות שוות.

נתון: 4 ס"מ = AE, 6 ס"מ = AD, 9 ס"מ = AC.



א. הוכיחו כי: $\Delta EAD \sim \Delta DAC$ וכתבו את יחס הדמיון.

ב. ידוע כי: $\Delta EAD \sim \Delta CAB$.

(1) מצאו את אורך הצלע AB במשולש ΔCAB.

(2) הסבירו מדוע מתקיים: $\Delta EAD \sim \Delta DAC \sim \Delta CAB$.

ג. חשבו את שטח המשולש EAD.

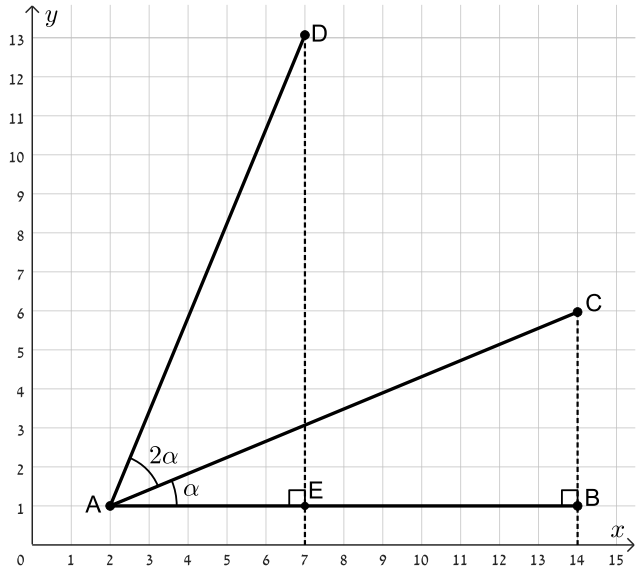
ד. (1) היעזרו בתוצאתכם מסעיף ג' וחשבו את שטח המשולש BAC.

(2) ללא שימוש בתוצאתכם מסעיף ג', חשבו באופן ישיר את שטח המשולש BAC.

ה. (1) מהו המרובע EDCB? נמקו.

(2) חשבו את שטח המרובע EDCB.

7) במערכת הצירים שלפניכם נתון ישר אופקי AB כאשר: $B(14,1)$, $A(2,1)$ כמתואר באיור:



הקטע AC מחלק את הזווית $\sphericalangle BAD$ לשתי זוויות המקיימות: $\sphericalangle DAC = 2\sphericalangle BAC$.
מסמנים נקודה E על AB ששיעוריה הם $E(7,1)$.

בשאלה זו נבחן האם שיפוע הישר העובר דרך AD גדול פי 3 משיפוע הישר העובר דרך AC.
מסמנים: $\sphericalangle BAC = \alpha$. הניחו כי: $\alpha = 22.5°$ וענו על הסעיפים הבאים:

א. (1) כתבו את אורך הקטע AB.
(2) חשבו את אורך הקטע AC.
(3) כתבו את שיעורי הנקודה C.
(4) כתבו את שיפוע הישר העובר דרך AC.

ב. (1) כתבו את אורך הקטע AE.
(2) חשבו את אורך הקטע AD.
(3) כתבו את שיעורי הנקודה D.
(4) חשבו את שיפוע הישר העובר דרך AD.

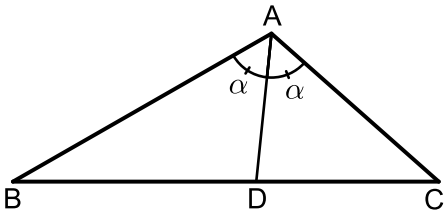
כזכור, הקשר שבין שיפוע ישר m והזווית של הישר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x הוא: $m = \tan\alpha$.

ג. (1) הראו כי הקשר הנ"ל מתקיים עבור השיפועים שמצאתם בסעיפים הקודמים והזווית α הנתונה בשאלה.
(2) האם ניתן להסיק כי: $m_{AD} = 3 \cdot m_{AC}$? נמקו.
(3) על סמך הסעיף הקודם, הסבירו מדוע: $\tan(3\alpha) \neq 3\tan\alpha$.
(4) האם לדעתכם קיימת זווית $0° < \alpha < 90°$ שעשויה לקיים: $\tan(3\alpha) = 3\tan\alpha$? נמקו.

8) נתון משולש ABC ובו הקטע AD הוא חוצה זווית $\sphericalangle BAC$.

ידוע כי: 8 ס"מ = AB, 6 ס"מ = AC ו-4 ס"מ = AD.

בשאלה זו נבחן האם מתקיים הקשר: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$ ונסיק מסקנות בהתאם.



א. (1) הביעו באמצעות $\sin\alpha$ את שטח המשולש ABD.

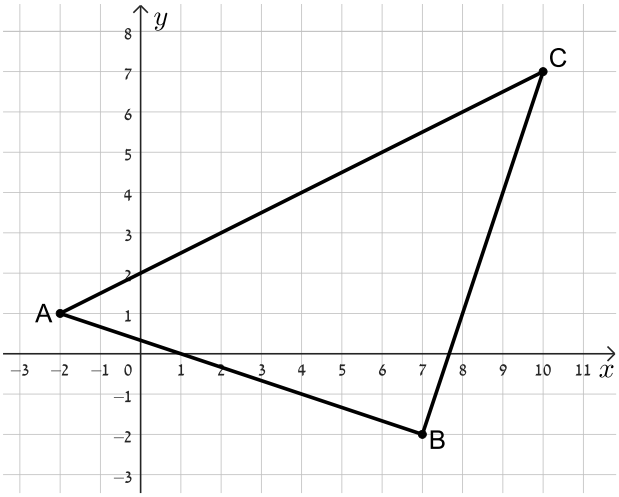
(2) הביעו באמצעות $\sin\alpha$ את שטח המשולש ADC.

(3) הביעו באמצעות $\sin 2\alpha$ את שטח המשולש ABC.

ב. חברו משוואה מתאימה לפי שוויון השטחים שכתבתם ובטאו את $\sin 2\alpha$ באמצעות $\sin\alpha$.

ג. האם קיבלתם: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$? מה מסקנתכם מהחישוב שביצעתם?

9) בשאלה שלפניכם נתון משולש ABC כמתואר באיור:



א. מצאו את שיפוע הישר העובר דרך AB.

ב. מצאו את שיפוע הישר העובר דרך AC.

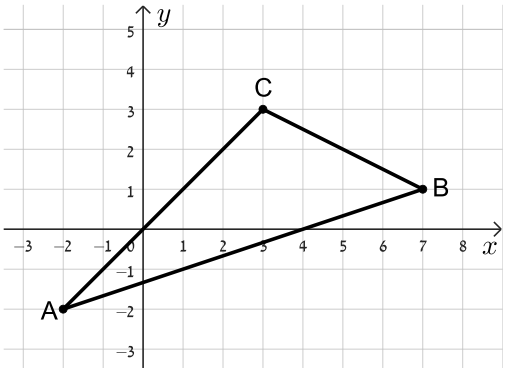
ג. חשבו את $\sphericalangle BAC$.

ד. האם אפשר לטעון כי $\tan\sphericalangle BAC$ שווה להפרש בין שיפועי הישרים העוברים דרך AC ו-AB? הסבירו.

ה. על סמך הסעיף הקודם, הסיקו האם הקשר הבא מתקיים: $\tan(\alpha-\beta) = \tan\alpha - \tan\beta$.

הסבירו את טענתכם.

10) באיור שלפניכם נתון משולש ABC:



א. מצאו את משוואות הישרים המכילים את צלעות המשולש.

ב. מצאו את משוואת הישר המכיל את הגובה לצלע AB.

ג. חשבו את זוויות המשולש.

ד. חשבו את היקף המשולש.

ה. חשבו את שטח המשולש שתי דרכים:

(1) חישוב ע"י מכפלת צלע בגובה שלה.

(2) חישוב בעזרת נוסחת שטח משולש מטריגונומטריה.

הראו כי מתקבל אותו שטח.

11) נתון קטע ששיעורי נקודות הקצה שלו הם: $A(1,3)$, $B(5,4)$.

א. (1) מצאו את השיפוע AB.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה C, אמצע הקטע AB.

(3) מצאו את משוואת האנך האמצעי לקטע AB.

ב. בחרו שתי נקודות D ו-E על האנך שאת משוואתו מצאתם בסעיף א (3) וחשבו את אורכי הקטעים AD, BD, ו-AE, BE.

ג. מה תוכלו לומר על המשולשים ABD ו-ABE?

ד. איזו מסקנה תוכלו להסיק לגבי נקודות הנמצאות על אנך אמצעי לקטע?

האנך האמצעי מחלק את מערכת הצירים לשני מישורים:

- מישור עליון (בו הנקודות נמצאות **מעל** לאנך).
- מישור תחתון (בו הנקודות נמצאות **מתחת** לאנך).

נזכור כי בהינתן ישר $y = mx + b$ אזי נקודה (x_1, y_1)

- היא מעל לישר אם: $y_1 > mx_1 + b$.
- היא מתחת לישר אם: $y_1 < mx_1 + b$.

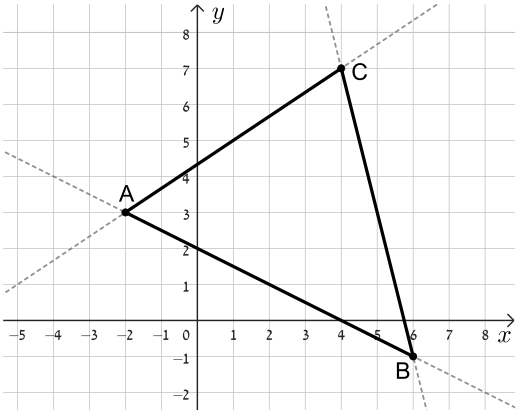
ה. בחרו נקודה R הנמצאת מעל לאנך ונקודה T הנמצאת מתחת לאנך.

(1) חשבו את מרחקי כל אחת מן הנקודות מקצות הקטע AB.

(2) מה תוכלו להסיק לגבי נקודות שאינן נמצאות על האנך?

12) בשאלה זו נחקור את תכונת האנכים האמצעיים במשולש.

נתון משולש ABC כמתואר באיור הבא:



א. מצאו את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות AB ו-BC.

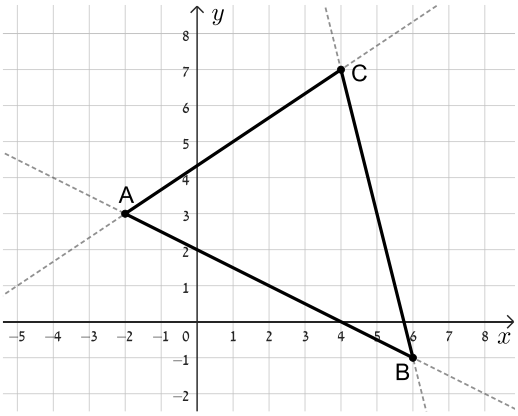
ב. מצאו את נקודת החיתוך M של שני האנכים האמצעיים.

ג. חשבו את אורכי הקטעים AM, BM, ו-CM. מה היא מסקנתכם?

ד. הראו כי האנך האמצעי השלישי, שיוצא מאמצע AC, עובר דרך הנקודה M.

13) בשאלה זו נחקור את תכונת מפגש התיכונים במשולש.

נתון משולש ABC כמתואר באיור הבא:



א. מצאו את משוואות התיכונים לצלעות AB ו-BC.

ב. מצאו את נקודת החיתוך K של שני התיכונים.

ג. הראו כי התיכון השלישי, לצלע AC, גם עובר דרך הנקודה K.

ד. חשבו את המרחקים של הנקודה K מכל אחד מקודקודי המשולש.

ה. חשבו את המרחקים של הנקודה K מאמצעי הצלעות.

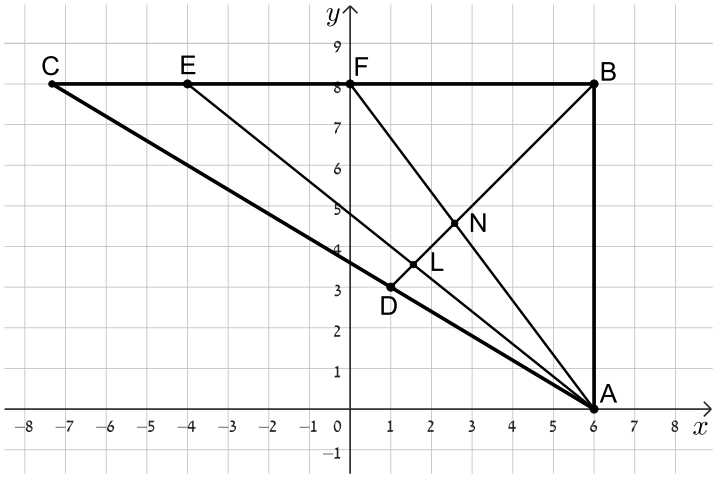
ו. באיזה יחס מחלקת הנקודה K את אורכי התיכונים? נמקו.

14) נתון משולש ישר זווית ABC כמופיע במערכת הצירים הבאה:

הקטע BD הוא חוצה זווית $\sphericalangle ABC$ ושיעורי הנקודה C הם $C\left(-7\frac{1}{3},8\right)$.

מעבירים את הקטעים AE ו-AF.

חוצה הזווית BD חותך את הקטעים AE ו-AF בנקודות L ו-N בהתאמה.



א. (1) חשבו את היחס $\frac{AB}{BC}$.

(2) כתבו את משוואת הישר של הקטע BD ומצאו את שיעורי הנקודה D.

(3) חשבו את היחס $\frac{AD}{CD}$.

(4) מה תוכלו לומר על הקשר שבין היחסים אלו?

ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה L.

(2) חשבו את היחסים $\frac{AB}{BE}$ ו- $\frac{AL}{LE}$.

(3) מה תוכלו לומר על הקשר שבין יחסים אלו?

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודה N.

(2) חשבו את היחסים $\frac{AB}{BF}$ ו- $\frac{AN}{NF}$.

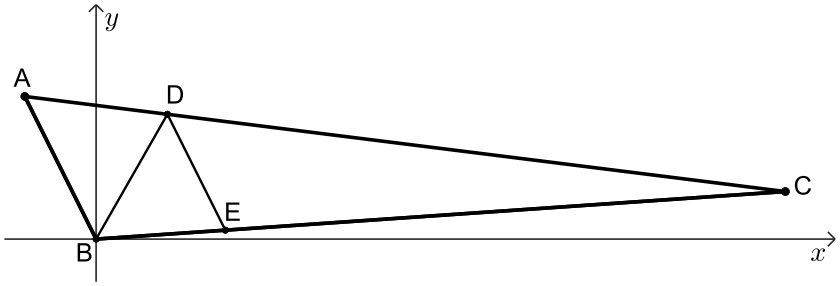
(3) מה תוכלו לומר על הקשר שבין יחסים אלו?

ד. נסחו השערה לגבי תכונה של חוצה זווית במשולש.

15) בסרטוט שלפניכם נתון משולש ABC שבו: $A(-3,6)$, $B(0,0)$, $C(29,2)$.

דרך הנקודה B מעבירים את הקטע BD ששיפועו הוא 1.75.

הקטע DE מקביל לצלע AB של המשולש ABC.



א. מצאו את שיעורי הנקודה D.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה E.

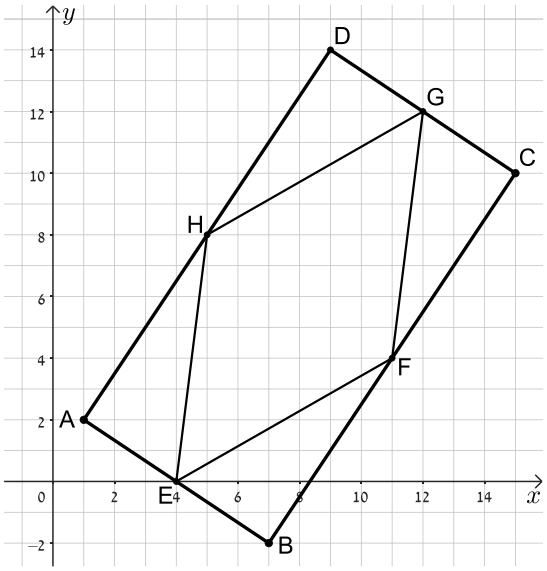
ג. הראו כי מתקיים: $\frac{BC}{AB}=\frac{CE}{BE}$.

הוכיחו זו באמצעות משפטי גאומטריה.

ד. הוכיחו כי BD חוצה זווית ABC.

ה. חשבו את $\sphericalangle ABD$ ואת $\sphericalangle ABC$.

16) נתון מלבן ABCD הממוקם במערכת צירים כמתואר בסרטוט:
מחברים את אמצעי צלעותיו לפי הסדר כך שמתקבל מרובע EFGH.



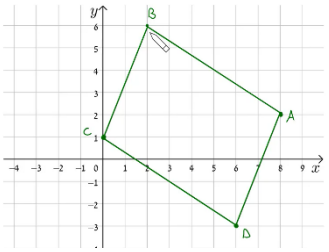
א. מה הם שיעורי נקודות האמצע E, F, G ו-H?
ב. חשבו את אורכי צלעות המרובע EFGH.
ג. חשבו את זוויות המרובע EFGH.
ד. מה הוא סוג המרובע EFGH שהתקבל? נמקו.
ה. מה הוא היחס שבין היקף המלבן ABCD לבין היקף המרובע EFGH?
ו. מה הוא היחס שבין שטח המלבן ABCD לבין שטח המרובע EFGH?
ז. נסחו השערות מתאימות לגבי:
(1) סוג המרובע המתקבל כאשר מחברים את אמצעי צלעות מלבן.
(2) היחס שבין היקף המלבן והיקף המרובע שהתקבל.
רמז: התייחסו ליחס שבין צלעות המלבן הנתון בשאלה.
(3) היחס שבין שטח המלבן ושטח המרובע שהתקבל.
השתמשו באמצעים גאומטריים כדי להוכיח את השערותיכם.

תשובות סופיות:

1) א. (2) שאלה הוכחה א. (2) 2 ב. (1) משולש ישר זווית ושווה שוקיים.

ב. (2) 8.48 ס"מ ג. $26.56°$ ד. (1) 36 סמ"ר ד. (2) $\frac{1}{4}$.

2) א. להלן סרטוט: ב. מקבילית ג. 8.062 יח"א.

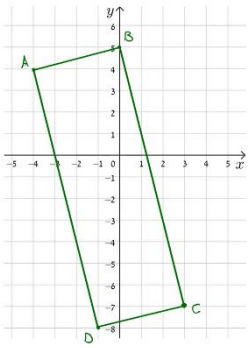


ד. שאלת הוכחה ה. (1) $40.81°$.

ה. (2) $AD=BC=\sqrt{29}$ יח"א, $AB=CD=\sqrt{52}$ יח"א.

ה. (3) 19 יח"ש ה. (4) 38 יח"ש ו. $\frac{1}{8}$.

3) א. להלן סרטוט: ב. $P_{ABCD}=32.98$ יח"א, $S_{ABCD}=51$ יח"ש.



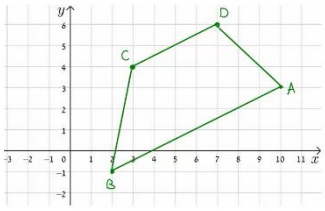
ג. 13.038 יח"א.

ד. $AC: y=-\frac{11}{7}x-2\frac{2}{7}$, $BD: y=13x+5$.

ה. $\left(-\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}\right)$.

ו. $18.43°$, $71.56°$ ז. $36.87°$.

4) א. (1) להלן סרטוט: א. (2) טרפז



ב. (1) $y=1.4x-3.8$.

ב. (2) 8.6 יח"א ב. (3) $(4.5,2.5)$.

5) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה

ג. שאלה הוכחה.

ד. (1) 31.17 סמ"ר ד. (2) 44.784 ס"מ.

6) א. שאלת הוכחה ב. (1) $AB=13.5$ ס"מ ב. (2) שאלת הוכחה.

ג. 10.39 סמ"ר ד. (1) 52.611 סמ"ר, ראו סרטון וידאו.

ה. (1) מרובע כללי ה. (2) 86.386 סמ"ר.

7) א. (1) 12 יח"א א. (2) $AC=12.98$ יח"א א. (3) $C(14,5.97)$.

א. (4) $m_{AC}=0.414$ ב. (1) $AE=5$ יח"א ב. (2) $AD=13.065$ יח"א.

ב. (3) $D(5,13.071)$ ב. (4) $m_{AD}=2.414$ ג. (1) ראו סרטון.

ג. (2) לא ניתן ג. (3) ראו סרטון ג. (4) לא קיימת זווית.

8) א. (1) $S_{ABD}=16\cdot\sin\alpha$ א. (2) $S_{ADC}=12\cdot\sin\alpha$ א. (3) $S_{ABC}=24\cdot\sin(2\alpha)$.

ב. $\sin(2\alpha)=1\frac{1}{6}\sin\alpha$ ג. לא.

9) א. $m_{AB}=-\frac{1}{3}$ ב. $m_{AC}=\frac{1}{2}$ ג. $\sphericalangle BAC=45°$.

ד. לא ה. השוויון לא מתקיים.

10) א. $AB:\ y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, $AC:\ y=x$, $BC:\ y=-\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}$ ב. $y=-3x+12$

ג. $\sphericalangle ACB=108.435°$, $\sphericalangle ABC=45°$, $\sphericalangle BAC=26.56°$ ד. $P_{ABC}=21.03$ יח"א.

ה. $S_{ABC}=15$ יח"ש, ראו סרטון וידאו.

11) א. (1) $m_{AB}=\frac{1}{4}$ א. (2) $C(3,3.5)$ א. (3) $y=-4x+15.5$.

ב. $AE=BE=\sqrt{21.25}$, $AD=BD=\sqrt{8.5}$ ג. המשולשים שווי שוקיים.

ד. נקודות הנמצאות על אנך אמצעי לקטע, הן במרחקים שווים מקצות הקטע.

ה. (1) $RA=5$ יח"א, $RB=3.16$ יח"א, $TA=5.38$ יח"א, $TB=6.32$ יח"א.

ה. (2) כאשר נקודה נמצאת באחד מחצאי המישור שהאנך מחלק, היא לעולם תהיה קרובה יותר לקצה הקטע שבמחצית המישור בו היא נמצאת.

12) א. האנך ל-AB: $y=2x-3$, האנך ל-BC: $y=\frac{1}{4}x+1\frac{3}{4}$ ב. $M\left(2\frac{5}{7},2\frac{3}{7}\right)$

ג. $AM=BM=CM=4.748$ יח"א, נקודת מפגש האנכיים האמצעיים נמצאת במרחק שווה מכל קודקודי המשולש. ד. ראו בסרטון.

13) א. התיכון ל-AB: $y=3x-5$, התיכון ל-BC: $y=3$ ב. $K\left(2\frac{2}{3},3\right)$.

ג. ראו בסרטון ד. $KA=4.66$ יח"א, $KB=5.2$ יח"א, $KC=4.216$ יח"א.

ה. מרחק K מאמצע AB: 2.108 יח"א, מרחק K מאמצע BC: 2.33 יח"א, מרחק K מאמצע AC 2.603 יח"א ו. 2:1

14) א. (1) $\frac{3}{5}$ א. (2) $D(1,3)$, $BD:\ y=x+2$ א. (3) $\frac{3}{5}$.

א. (4) קיום משפט חוצה זווית ב. (1) $L\left(1\frac{5}{9},3\frac{5}{9}\right)$ ב. (2) $\frac{AB}{BE}=\frac{8}{10}$, $\frac{AL}{LE}=\frac{8}{10}$.

ב. (3) היחסים שווים ג. (1) $N\left(2\frac{4}{7},4\frac{4}{7}\right)$ ג. (2) $\frac{AB}{BF}=\frac{4}{3}$, $\frac{AN}{NF}=\frac{4}{3}$.

ג. (3) היחסים שווים ד. ראו בסרטון.

15) א. $D(3,5.25)$ ב. $E\left(5\frac{7}{16},\frac{3}{8}\right)$ ג. שאלת הוכחה.

ד. שאלת הוכחה ה. $\sphericalangle ABD=56.31°$, $\sphericalangle ABC=112.62°$.

16) א. $H(5,8)$, $G(12,12)$, $F(11,4)$, $E(4,0)$.

ב. $EF=8.06$ יח"א, $FG=8.06$ יח"א, $GH=8.06$ יח"א, $EH=8.06$ יח"א.

ג. $\sphericalangle EFG = \sphericalangle EHG = 126.87^\circ$, $\sphericalangle HGF = \sphericalangle HEF = 53.13^\circ$ ד. מעוין.

ה. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ ו. 2 ז. (1) מעוין ז. (2) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ ז. (3) 2

גאומטריה של המישור וגאומטריה אנליטית:

שאלות:

1) נתון מרובע ABCD ששיעורי קודקודיו הם: $A(-2,4)$, $B(8,1)$, $C(7,-3)$, $D(-3,0)$.

א. סרטטו את המרובע ABCD במערכת צירים.

ב. הוכיחו בשלוש דרכים שונות כי מדובר במקבילית.

ג. חשבו את היקף המקבילית.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה K - נקודת מפגש אלכסוני המקבילית.

2) נתון מרובע ABCD ששיעורי קודקודיו הם: $A(5,-3)$, $B(7,5)$, $C(-9,9)$, $D(-11,1)$.

א. סרטטו את המרובע ABCD במערכת צירים.

ב. הוכיחו בשלוש דרכים שונות כי מדובר במלבן.

ג. חשבו את היקפו ואת שטחו של המלבן.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה K – נקודת מפגש אלכסוני המלבן.

3) נתונה מקבילית ABCD ששיעורי שלושה מקודקודיה הם: $A(-9,-2)$, $B(-1,-5)$, $C(5,11)$.

א. חשבו את שיעורי הקודקוד הרביעי (קודקוד D).

ב. האם המקבילית היא מעוין?

ג. האם המקבילית היא מלבן?

ד. (1) חשבו את אורכי צלעות המקבילית ואת אורכי אלכסוניה.

(2) חשבו את היקף המקבילית.

(3) חשבו את שטח המקבילית.

4) נתונה מקבילית ABCD ששיעורי שלושה מקודקודיה הם: $A(-6,3)$, $C(2,-5)$, $D(1,2)$.

א. חשבו את שיעורי הקודקוד B.

ב. האם המקבילית היא מעוין?

ג. האם המקבילית היא מלבן?

ד. חשבו את אורכי צלעות המקבילית ואת אורכי אלכסוניה.

ה. (1) מצאו את שיעורי הנקודה M – נקודת מפגש אלכסוני המקבילית.

(2) חשבו את שטח המקבילית.

5) נתונה מקבילית ABCD ששיעורי שלושה מקודקודיה הם: $A(6,4)$, $B(-5,-2)$, $C(-11,9)$.

א. חשבו את שיעורי הקודקוד הרביעי (קודקוד D).

ב. האם המקבילית היא מעוין?

ג. האם המקבילית היא מלבן?

ד. האם המקבילית היא ריבוע?

ה. (1) חשבו את אורכי צלעות המקבילית ואת אורכי אלכסוניה.

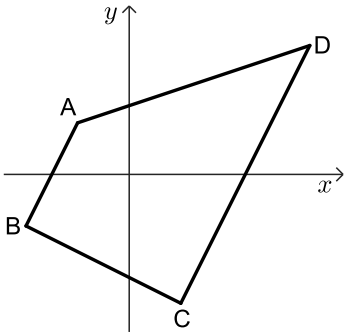
(2) חשבו את היקף המקבילית.

(3) חשבו את שטח המקבילית בשתי דרכים:

i. בעזרת שימוש באורכי הצלעות בלבד.

ii. בעזרת שימוש באלכסונים בלבד.

6) במערכת הצירים שלפניכם נתון מרובע ABCD ששיעורי קודקודיו הם: $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$, $C(2,-5)$, $D(7,5)$.



א. מה הוא סוג המרובע?

במרובע זה מעבירים קטע אמצעים EF

(E היא אמצע הצלע AD ו-F היא אמצע הצלע BC).

ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה F.

(2) מצאו את משוואת הישר EF.

ג. האלכסון AC חותך את EF בנקודה K.

(1) מצאו את שיעורי הנקודה K.

(2) קבעו האם: AK = CK. נמקו.

ד. הנקודה R היא נקודת החיתוך של CD עם ציר ה- x.

(1) מצאו את שיעורי הנקודה R.

(2) הישר AR חותך את EF בנקודה M. מצאו את שיעורי הנקודה M.

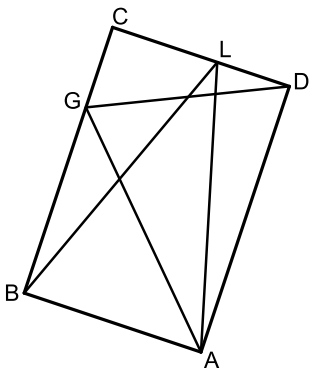
(3) קבעו האם: AM = RM. נמקו.

ה. הנקודה P היא נקודה כלשהי הנמצאת על הצלע CD.

הישר AP חותך את EF בנקודה N.

הוכיחו כי: AN = PN (ללא שימוש בשיעורי הנקודות במערכת הצירים).

7) המרובע ABCD הוא מלבן שבו שלושה מקודקודיו הם:
$A(1,-4)$, $B(-5,-2)$, $C(-2,7)$.



א. חשבו את שטח המלבן ABCD.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד D.

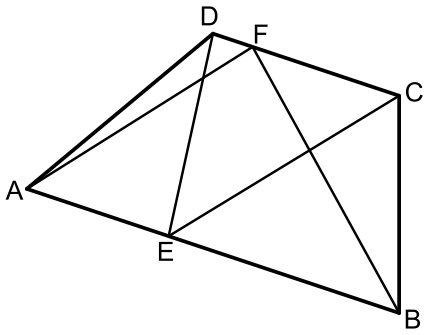
ג. בחרו נקודה G כלשהי על הצלע BC
ונקודה L כלשהי על הצלע CD.
חשבו את השטחים: S_{AGD} ו- S_{ABL}. מה קיבלתם?

ד. בחרו זוג נקודות אחרות (במקום G ו-L) על אותן הצלעות
וחזרו על סעיף ג'. מה קיבלתם הפעם?

ה. בעקבות התוצאות של סעיפים ג' ו-ד', נסחו השערה כללית לכל מלבן ABCD.

ו. הוכיחו את השערתכם.

8) המרובע ABCD הוא טרפז שבו שיעורי קודקודיו הם: $D(1,7)$, $C(7,5)$, $B(7,-2)$, $A(-5,2)$.



א. הראו כי בסיסי הטרפז הם AB ו-CD.

ב. מסמנים נקודה E על AB ונקודה F על DC.
בחרו נקודות המתאימות לדרישה כרצונכם
וענו על הסעיפים הבאים:
(1) חשבו את השטח: S_{AFB}.
(2) חשבו את סכום השטחים: $S_{ADE}+S_{ECB}$.
(3) מה קיבלתם? הסבירו.

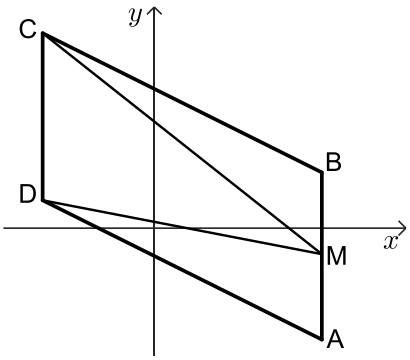
ג. בחרו זוג נקודות אחרות (במקום E ו-F) על אותן הצלעות וחזרו על סעיף ב'.
מה קיבלתם הפעם?

ד. בעקבות התוצאות של סעיפים ב' ו-ג', נסחו השערה כללית לכל טרפז ABCD.

ה. הוכיחו את השערתכם בעזרת כללים של גאומטריה של המישור.

9) המרובע ABCD הוא מקבילית שבה שלושה משיעורי קודקודיה הם:

$A(6,-4)$, $B(6,2)$, $D(-4,1)$.



א. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

ב. חשבו את שטח המקבילית ABCD.

(שימו לב: הצלע AB מקבילה לציר ה- y).

ג. בחרו נקודה כלשהי M על הצלע AB

וענו על הסעיפים הבאים:

(1) חשבו את השטח: S_{DMC}.

(2) מצאו קשר בין השטח S_{DMC} לבין שטח המקבילית.

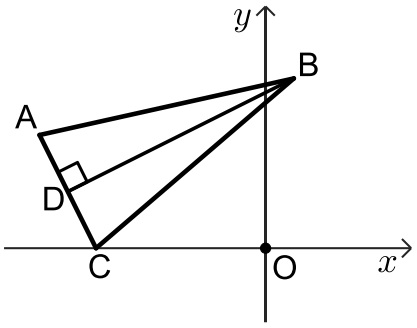
ד. חזרו על הסעיף הקודם, ובחרו נקודה אחרת P על AB במקום הנקודה M.

ה. בעקבות סעיפים ג' ו-ד' נסחו השערה כללית לכל מקבילית ABCD.

ו. הוכיחו את השערתכם תוך שימוש בכללי הגאומטריה של המישור.

10) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=BC)$.

נתון $A(-8,4)$, $B(1,6)$ הקודקוד C נמצא על ציר ה- x.



א. מצאו את אורך שוק המשולש.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה C אם ידוע ש- $x_C < x_B$.

BD הוא גובה לצלע AC.

ג. הסבירו ללא חישוב מדוע $AD=CD$.

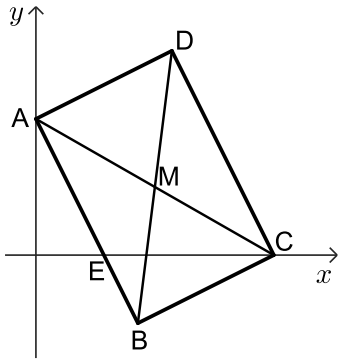
ד. חשבו את אורך BD.

ה. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ACB$.

ו. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle BCO$, (O ראשית הצירים).

11) המרובע ABCD הוא מקבילית. אורך הצלע $BC = AD = \sqrt{20}$.

נתון: $B(3,-2)$, $D(4,6)$.



הנקודה A נמצאת על ציר ה-y . O ראשית הצירים.

א. מצאו שיעורי הנקודה A ($y_A < 6$)

ב. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא מלבן.

ג. אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה M.

מצאו את שיעורי הקודקוד C.

הצלע AB חותכת את ציר ה-x בנקודה E.

ד. מצאו את שיעורי הקודקוד E.

ה. (1) הוכיחו כי המשולשים CBE ו-AOE דומים, ומצאו את יחס הדמיון.

(2) מצאו פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש AOE.

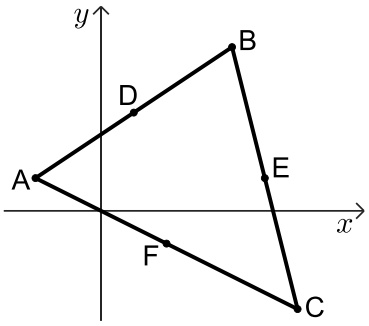
ו. חשבו את שטח המרובע ACBO.

ז. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ACB$.

12) במשולש ABC הנקודות F,E,D הן אמצעי הצלעות AB, BC, AB בהתאמה.

א. הוכיחו כי המרובע ADEF הוא מקבילית.

נתון: $D(1,3)$, $E(5,1)$, $F(2,-1)$, $A(-2,1)$.



ב. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ג. חשבו את שיעורי הנקודה C.

ד. הסבירו מדוע $\Delta CAB \sim \Delta DEF$.

ה. מהו היחס בין היקף המשולש DEF

לבין היקף המשולש CAB?

ו. מהו היחס בין שטח המשולש DEF

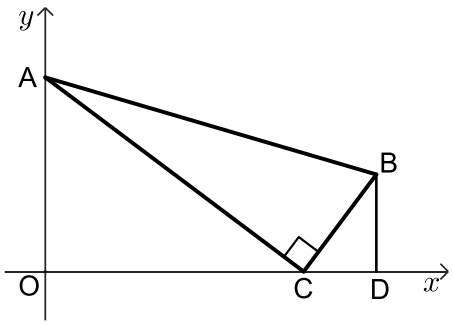
לבין שטח המשולש CAB?

ז. הוכיחו: $S_{\Delta ABF} = 2 \cdot S_{\Delta DEF}$.

13) במשולש ישר זווית ABC $\left(\sphericalangle ACB = 90°\right)$ הקודקוד C מונח על ציר ה-x.

מהקודקוד B הורידו אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה D.

הנקודה O היא ראשית הצירים.



א. הוכיחו: $\Delta AOC \sim \Delta CDB$.

ב. משוואת הצלע AC היא: $4y + 3x = 48$,

מצאו את אורך הצלע AO.

ג. נתון כי יחסי השטחים $\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta CDB}} = \frac{64}{9}$.

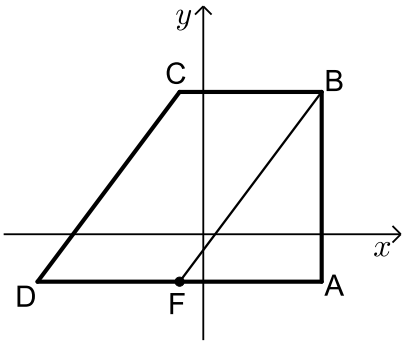
(1) מצאו את אורך הצלע CD.

(2) מצאו את אורכי הצלעות CO ו-BD.

ד. (1) חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle CBA$.

(2) האם המשולשים AOC ו-ACB דומים זה לזה? נמקו.

14) נתונות הנקודות: $D(-7,-2)$, $C(-1,6)$, $B(5,6)$, $A(5,-2)$.



א. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא טרפז.

ב. איזה סוג טרפז הוא המרובע ABCD?

ג. חשבו את שטח הטרפז ABCD.

מהנקודה B העבירו ישר, המקביל לצלע CD

וחותך את הצלע AD בנקודה F.

ד. מה סוג המרובע BCDF? נמקו.

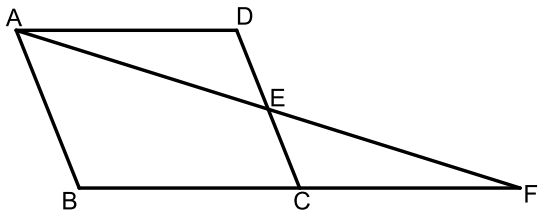
ה. מצאו את שיעורי הנקודה F.

ו. מצאו את היחס בין שטח המרובע BCDF לשטח המשולש ABF

ז. נתונה הנקודה: $K(-12,6)$.

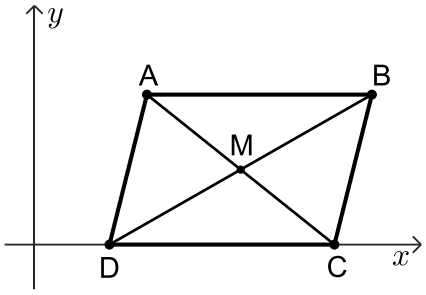
האם שטח המשולש DFK שווה לשטח המשולש ABF? נמקו.

15) בסרטוט שלפניכם, נתון מרובע ABCD.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע DC.
המשך הקטע AE פוגש את המשך הצלע BC בנקודה F.
נתון: $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DCF$.



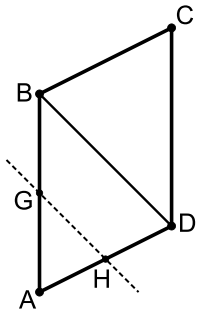
א. הוכח כי: $AD = CF$.
ב. נתון גם כי C היא אמצע BF.
(1) הוכיחו: $AD \parallel BC$.
(2) הוכיחו: ABCD מקבילית.

16) נתונה מקבילית ABCD. הקודקודים C ו-D מונחים על ציר ה-x.
נתון: $D(2,0)$, $B(9,4)$.



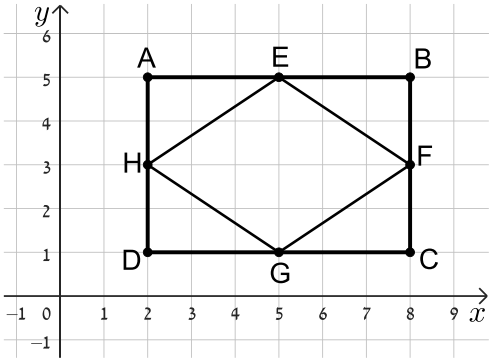
שטח המקבילית ABCD הוא 24 יח"ר.
א. מצאו את אורך הצלע DC.
ב. מצאו את שיעורי הקודקודים A ו-C.
ג. מצאו את משוואות הישרים AC ו-BD .
ד. מצאו את שיעורי נקודת מפגש האלכסונים, M.
ה. האם המשולשים CDM ו-BCM הם שווי שטח? נמקו.

17) במקבילית ABCD נתונים הקודקודים: $D(4,4)$, $C(4,10)$.



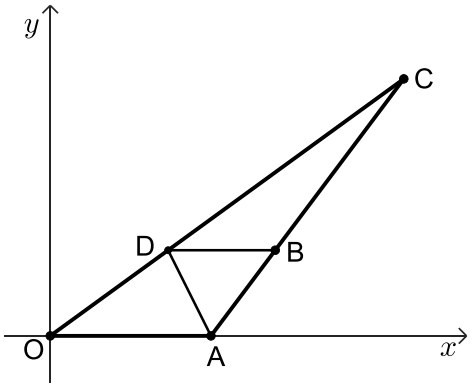
הצלע BC מונחת על הישר $y = \frac{1}{2}x + 8$
והאלכסון BD מונח על הישר: $y = 8 - x$.
א. מצאו את שיעורי הקודקוד A.
ב. מצאו את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות CD, AB ו-AD.
ג. מהו אורך הגובה מהקודקוד B לצלע CD?
ד. בסרטוט מופיע הישר $y = 5 - x$, החותך את המקבילית ABCD בנקודות G ו-H.
הוכיחו שהמשולשים ABD ו-AGH דומים.

18) נתון מלבן ABCD הממוקם במערכת צירים כמתואר בסרטוט:
מחברים את אמצעי צלעותיו לפי הסדר, כך שמתקבל מרובע EFGH.



א. מהו סוג המרובע שהתקבל?
ב. חשבו את היקף המרובע EFGH.
ג. חשבו את היחס בין שטח המשולש AEH לשטחו של המלבן ABCD.
ד. על סמך סעיף ג', מצאו איזה חלק מהווים שטחים ארבעת המשולשים מתו שטח המלבן.
ה. חשבו את שטח המרובע EFGH בשתי דרכים שונות.

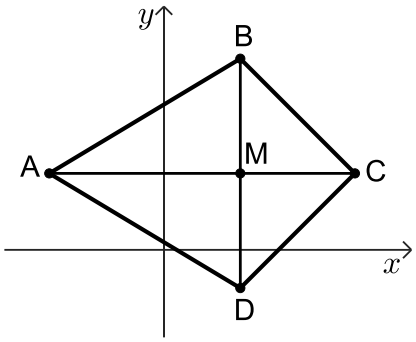
19) בסרטוט שלפניכם נתון משולש OAC ונתון כי: $C(33,24)$, $B(21,8)$, $A(15,0)$.



דרך הנקודה B מעבירים ישר המקביל לציר ה-x.
הישר חותך את הצלע OC בנקודה D כך ש-$AB = BD$.
א. מצאו את שיעורי הנקודה D.
ב. חשבו את אורך הקטע AB.
ג. מהו סוג המרובע ABDO? נמקו.
ד. חשבו את שטח המרובע ABDO.
ה. נסמן נקודה: $E(5,0)$.
הוכיחו כי המרובע ABDE הוא מעוין.
ו. מצאו נקודה נוספת K על ציר ה-x כך שהמרובע ADBK יהיה מקבילית.
ז. נקודה M נמצאת על ציר ה-x כך ששטח המשולש ADM גדול פי 2 משטח המשולש ODM. מצאו את שיעורי הנקודה M.
ח. הוכיחו כי: $\Delta BCD \sim \Delta ACO$.

20) הנקודות $A(-3,2)$ ו-$C(5,2)$ הן שני קודקודים נגדיים של דלתון ABCD.

נקודת מפגש אלכסוני הדלתון ABCD היא $M(2,2)$ ונתון ששטח הדלתון הוא 24 יח"ר.



א. (1) האם AC הוא האלכסון הראשי בדלתון? נמקו.

(2) הסבירו מדוע האלכסון BD מקביל לציר ה-y.

ב. מצאו את אורך האלכסון BD.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות B ו-D.

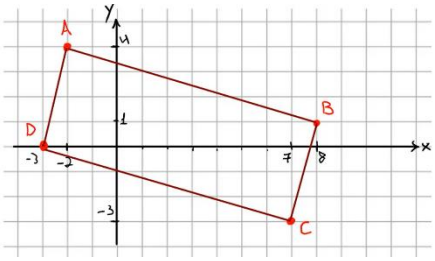
ד. הנקודה E נמצאת על הקטע AM,
כך שהמרובע EBCD הוא מעוין.
מצאו את שיעורי הנקודה E.

ה. חשבו את גודל הזווית BEM.

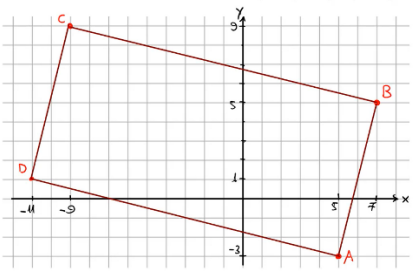
ו. האם המרובע EBCD הוא ריבוע? נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. להלן סרטוט: ב. שאלת הוכחה.
ג. 29.13 יח"א ד. $K(2.5,0.5)$.



2) א. להלן סרטוט: ב. שאלה הוכחה.
ג. $P_{ABCD}=49.478$ יח"א, $S_{ABCD}=136$ יח"ש.
ד. $K(-2,3)$.



3) א. $D(-3,14)$ ב. לא ג. כן
ד. (1) $AB=8.54$ יח"א, $AD=17.09$ יח"א,
$AC=19.1$ יח"א
ד. (2) 51.26 יח"א ד. (3) 146 יח"ש.

4) א. $B(-5,-4)$ ב. כן ג. לא ד. $AD=CD=BC=AB=7.07$ יח"א,
$AC=11.31$ יח"א, $BD=8.48$ יח"א
ה. (1) $M(-2,-1)$ ה. (2) 48 יח"ש.

5) א. $D(0,15)$ ב. כן ג. כן ד. כן.
ה. (1) $AD=CD=BC=AB=12.53$ יח"א, $AC=BD=17.72$ יח"א ה. (2) 50.12 יח"א.
ה. (3) 157 יח"ש.

6) א. טרפז ב. (1) $F(-1,-3.5)$ ב. (2) $y=2x-1.5$ ג. (1) $K(0,-1.5)$.
ג. (2) כן ד. (1) $R(4.5,0)$ ד. (2) $M(1.25,1)$ ד. (3) שווים.
ה. שאלת הוכחה.

7) א. 60 יח"ש ב. $D(4,5)$ ג. $S_{AGD}=S_{ABL}=30$ יח"ש ד. אותם השטחים.
ה. ראו סרטון ו. ראו סרטון.

8) א. ראו סרטון ב. (1) 42 יח"ש ב. (2) 42 יח"ש ב. (3) $S_{AFB}=S_{ADE}+S_{ECB}$.
ג. 45 יח"ש ד. ראו סרטון ה. ראו סרטון.

9) א. $C(-4,7)$ ב. 60 יח"ש ג. (1) 30 יח"ש ג. (2) $S_{DMC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.
ד. ראו סרטון ה. ראו סרטון ו. ראו סרטון.

10) א. $\sqrt{85}$ ב. $C(-6,0)$ ג. במש"ש, הגובה לבסיס הוא גם תיכון.
ד. $4\sqrt{5}$ ה. $75.963°$ ו. $40.6°$.

11) א. $A(0,4)$ ב. שאלת הוכחה ג. $C(7,0)$ ד. $E(2,0)$.
ה. (1) שאלת הוכחה, $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ה. (2) $\frac{5}{4}$ ו. 21 יח"ר ז. $56.31°$.

12) א. שאלת הוכחה ב. $B(4,5)$ ג. $C(6,-3)$ ד. שאלת הוכחה.

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{4}$ ז. שאלת הוכחה.

13) א. שאלת הוכחה ב. 12 ג. (1) 4.5 ג. (2) $CO = 16$, $BD = 6$.

ד. (1) $69.44°$ ד. (2) המושלשים אינם דומים.

14) א. שאלת הוכחה ב. טרפז ישר זווית ג. 72 יח"ש ד. מקבילית.

ה. $F(-1,-2)$ ו. 2 ז. כן.

15) א. שאלת הוכחה ב. (1) שאלת הוכחה ב. (2) שאלת הוכחה.

16) א. 6 ב. $A(3,4)$, $C(8,0)$ ג. $BD: y=\frac{4}{7}x-\frac{8}{7}$, $AC: y=-\frac{4}{5}x+\frac{32}{5}$.

ד. $M\left(5\frac{1}{2},2\right)$ ה. המשולשים שווי שטח.

17) א. $A(0,2)$ ב. $CD: x=4$, $AB: x=0$, $AD: y=\frac{1}{2}x+2$

ג. 4 ד. שאלת הוכחה.

18) א. מעוין ב. $4\sqrt{13}$ ג. $S_{AEH}=\frac{1}{8}S_{ABCD}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. 12 יח"ש.

19) א. $D(11,8)$ ב. 10 ג. טרפז ד. 100 יח"ש. ה. שאלת הוכחה.

ו. $K(25,0)$ ז. $M(5,0)$ או $M(-15,0)$ ח. שאלת הוכחה.

20) א. (1) כן א. (2) ראו סרטון ב. 6 ג. $B(2,5)$, $D(2,-1)$.

ד. $E(-1,2)$ ה. $45°$ ו. כן.

שאלון 471

המעגל במערכת הצירים

תוכן העניינים:

המעגל במערכת הצירים 227

חזרה על מושגי יסוד: 229

סיכום כללי: 229

הגדרות ומושגים במעגל: 231

סיכום כללי: 231

שאלות: 232

תשובות סופיות: 233

המעגל במערכת הצירים: 234

סיכום כללי: 234

שאלות: 235

תשובות סופיות: 237

המעגל הקנוני: 238

סיכום כללי: 238

שאלות: 238

תשובות סופיות: 239

משוואת מעגל באמצעות מרכז ונקודה שעליו: 240

סיכום כללי: 240

שאלות: 240

תשובות סופיות: 241

מצב הדדי בין נקודה ומעגל: 242

סיכום כללי: 242

שאלות: 242

תשובות סופיות: 243

שאלות עם מעגל במערכת צירים (ללא משיק): 244

שאלות: 244

תשובות סופיות: 247

מצבים הדדיים בין מעגל וישר: 248
סיכום כללי: 248
שאלות: 248
תשובות סופיות: 251
מעגל המשיק לישר: 252
סיכום כללי: 252
שאלות: 252
תשובות סופיות: 255
מעגל המשיק לצירים: 256
סיכום כללי: 256
שאלות: 256
תשובות סופיות: 258
שאלות עם מעגל במערכת צירים (כולל משיק): 259
שאלות: 259
תשובות סופיות: 260

חזרה על מושגי יסוד:

סיכום כללי:

אמצע קטע:

אמצע קטע שקצוותיו $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ הוא: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

מרחק בין שתי נקודות:

המרחק d בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ הוא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

משוואת ישר:

משוואתו של ישר עם שיפוע m החותך את ציר ה-y בנקודה $(0,b)$ היא: $y=mx+b$.

משוואת ישר כללית היא מהצורה: $Ax+By+C=0$.

הערה:
לצורה $y=mx+b$ קוראים **משוואת הישר המפורשת** בעוד שלצורה $Ax+By+C=0$ קוראים **משוואת הישר הכללית**.

ישרים המקבילים לצירים:

ישר מהצורה: $x=k$ הוא מקביל לציר ה-y.
ישר מהצורה: $y=n$ הוא מקביל לציר ה-x.

שיפוע של ישר:

שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

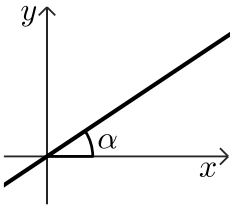
ישרים מאונכים:

שני ישרים $y=m_1x+b_1$ ו- $y=m_2x+b_2$ הם מאונכים זה לזה אם: $m_1\cdot m_2=-1$.

במילים אחרות:

השיפועים של שני ישרים מאונכים הם מספרים הופכיים ונגדיים.

הקשר שבין שיפוע לזווית החדה עם ציר ה-x:



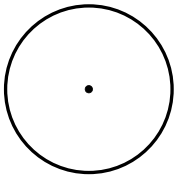
שיפועו של ישר שמשוואתו $y=mx+b$ מקיים: $\tan\alpha=|m|$

כאשר α היא הזווית החדה הנוצרת בין ציר ה- x והישר.

הגדרות ומושגים במעגל:

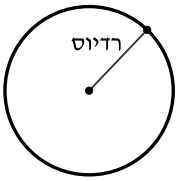
סיכום כללי:

מעגל:



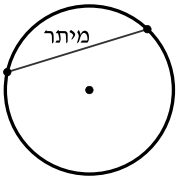
המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות באותו המרחק מנקודה קבועה.
לנקודה הקבועה קוראים **מרכז המעגל.**

רדיוס במעגל (מחוג):



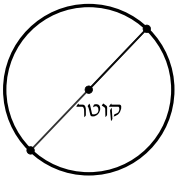
קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
נסמן את רדיוס המעגל ב-R.

מיתר במעגל:



קטע המחבר שתי נקודות על המעגל.

קוטר במעגל:

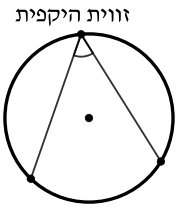


מיתר העובר דרך מרכז המעגל נקרא קוטר במעגל.
קוטר במעגל שווה באורכו לפעמיים רדיוס המעגל.

זווית מרכזית במעגל:

זווית שקודקודה הוא נקודת מרכז המעגל ושוקיה
הם רדיוסים במעגל נקראת זווית מרכזית במעגל.

זווית היקפית:

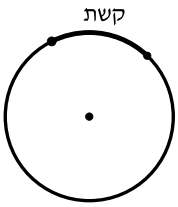


זווית שקודקודה נמצא על המעגל ושוקיה הם מיתרים נקראת זווית היקפית במעגל.

היקף המעגל:

אוסף כל הנקודות היוצרות את המעגל נקרא **היקף המעגל**.
אורכו של היקף המעגל מחושב לפי: $P = 2\pi R$ כאשר R הוא רדיוס המעגל.

קשת במעגל:

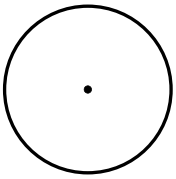


שתי נקודות על היקף המעגל אשר תוחמות חלק מהיקפו הנקרא קשת.

מסמנים קשת בין נקודות A ו-B אשר על היקף המעגל: $\overset{\frown}{AB}$.

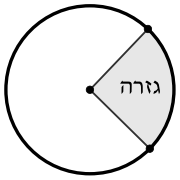
מאחר וניתן לתחום את היקף המעגל בשני אופנים, יש לציין את הקשת אליה מתכוונים. אם לא מצוין אחרת הכוונה היא לקשת הקטנה.

עיגול ושטח מעגל:



לשטח הכלוא בתוך היקף המעגל קוראים **עיגול** ושטחו הוא: $S = \pi \cdot R^2$.
כאשר R הוא רדיוס המעגל.

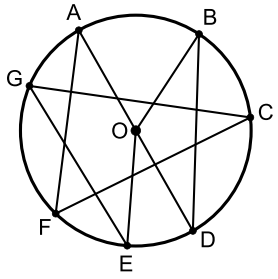
גזרה:



חלק משטח המעגל הכלוא בין שני רדיוסים לבין הקשת המחברת את קצותיהם.

שאלות:

1) התבוננו בסרטוט שלפניכם והשלימו את המשפטים הבאים:



א. תנו דוגמה ל-3 מיתרים במעגל: _____,_____,_____.

ב. תנו דוגמה ל-3 רדיוסים במעגל: _____,_____,_____.

ג. הדגישו את הקשת הקטנה בין הקודקודים A ו-F.

ד. סמנו בצבע אדום את הגזרה BOD.

ה. תנו דוגמה ל-3 זוויות מרכזיות: _____,_____,_____.

ו. תנו דוגמה ל-3 זוויות היקפיות: _____,_____,_____.

ז. נזיז את נקודה F על היקף המעגל כך שהקטע CF יעבור דרך הנקודה O.
במקרה זה CF הוא: _____.

ח. נתון: 5 יח' = OE אז היקף המעגל הוא: _____ ושטח המעגל הוא: _____.

ט. כשהשטח של המעגל הוא 254.469 יח"ר אז רדיוסו הוא: _____ והיקפו הוא: _____.

תשובות סופיות:

1) א. AF,AD,BD,CG,CF,EG. ב. OA,OB,OD,OF

ג. ראו איור. ד. ראו איור.

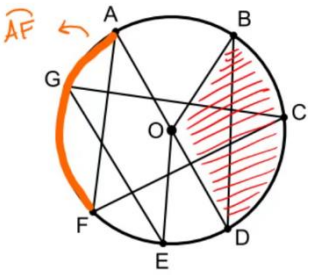
ה. ∢DOE , ∢AOD , ∢AOE , ∢AOB , ∢BOE , ∢BOD

ו. ∢CGE , ∢AFC , ∢ADB , ∢CGF , ∢FAD

ז. קוטר במעגל.

ח. היקף המעגל: 31.4 יח"א, שטח המעגל: 78.54 יח"ש

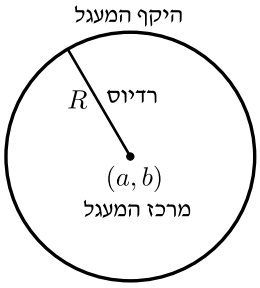
ט. רדיוס: 9 יח"א, היקף: 56.54 יח"א.



המעגל במערכת הצירים:

סיכום כללי:

המעגל:

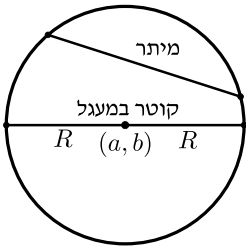


המעגל הוא המקום הגאומטרי (אוסף כל הנקודות) במישור שמרחקן מנקודה קבועה הוא גודל קבועה.

- לנקודה הקבועה קוראים **מרכז המעגל**.
- למרחק הקבוע קוראים **רדיוס המעגל**.

בהנדסת אנליטית נסמן את שיעורי נקודת מרכז המעגל ב-(a,b).
לרוב, מקובל לסמן את נקודת המרכז באות M, כלומר: $M(a,b)$.
את רדיוס המעגל נסמן ב- R.

מושגים נוספים במעגל:



- מיתר - קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר - מיתר העובר דרך מרכז המעגל.

משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוסו R היא: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

שאלות:

1) מצאו את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא R.

א. $M(4,-2)\ ,\ R=5$

ב. $M(0,6)\ ,\ R=3$

ג. $M(4,4)\ ,\ R=12$

ד. $M(-1,-7)\ ,\ R=15$

ה. $M(0,0)\ ,\ R=\sqrt{20}$

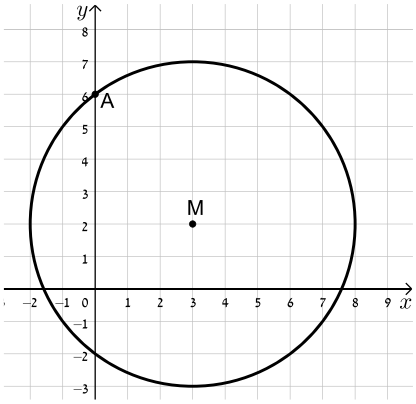
ו. $M(-6,3)\ ,\ R=\sqrt{45}$

ז. $M(3,1)\ ,\ R=4.5$

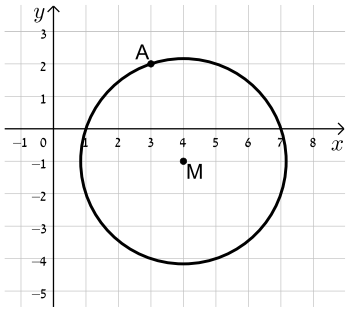
ח. $M\left(\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right)\ ,\ R=9.5$

2) כתבו את משוואות המעגלים הבאות:

א.



ב.



3) מצאו את רדיוס המעגל ואת מרכזו בכל מקרה:

א. $(x-2)^2+(y+3)^2=36$

ב. $(x+10)^2+(y-10)^2=81$

ג. $(x-8)^2+(y-2)^2=1$

ד. $x^2+(y+5)^2=169$

ה. $(x-4)^2+(y-5)^2=50$

ו. $(x-0.5)^2+(y+3.5)^2=117$

ז. $\left(x-2\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+3\frac{1}{2}\right)^2=12\frac{1}{4}$

ח. $(x+4)^2+y^2=\frac{9}{16}$

4) לפניכם משוואות של מעגלים כלליים.

קבעו האם כל מעגל חותך את הצירים והשלימו את הטבלה.

המעגל	האם המעגל חותך את ציר ה-x	האם המעגל חותך את ציר ה-y
$(x-4)^2+(y-3)^2=25$		
$(x-2)^2+(y+5)^2=16$		
$(x+6)^2+(y-8)^2=20$		
$(x+4)^2+(y+1)^2=13$		
$x^2+(y-12)^2=121$		

תשובות סופיות:

1) א. $(x-4)^2+(y+2)^2=25$ ב. $x^2+(y-6)^2=9$

ג. $(x-4)^2+(y-4)^2=144$ ד. $(x+1)^2+(y+7)^2=225$

ה. $x^2+y^2=20$ ו. $(x+6)^2+(y-3)^2=45$

ז. $(x-3)^2+(y-1)^2=20\frac{1}{4}$ ח. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=90\frac{1}{4}$

2) א. $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ ב. $(x-4)^2+(y+1)^2=10$

3) א. $R=6$, $M(2,-3)$ ב. $R=9$, $M(-10,10)$

ג. $R=1$, $M(8,2)$ ד. $R=13$, $M(0,-5)$

ה. $R=7.07$, $M(4,5)$ ו. $R=\sqrt{117}\approx 10.81$, $M(0.5,-3.5)$

ז. $R=3\frac{1}{2}$, $M\left(2\frac{1}{2},-3\frac{1}{2}\right)$ ח. $R=\frac{3}{4}$, $M(-4,0)$

4) להלן הטבלה:

המעגל	האם המעגל חותך את ציר ה-x	האם המעגל חותך את ציר ה-y
$(x-4)^2+(y-3)^2=25$	כן, בשתי נקודות	כן, בשתי נקודות
$(x-2)^2+(y+5)^2=16$	לא	כן, בשתי נקודות
$(x+6)^2+(y-8)^2=20$	לא	לא
$(x+4)^2+(y+1)^2=13$	כן, בשתי נקודות	לא
$x^2+(y-12)^2=121$	לא	כן, בשתי נקודות

המעגל הקנוני:

סיכום כללי:

המעגל הקנוני:

מעגל שמרכזו נמצא בראשית הצירים, כלומר: $M(0,0)$ ורדיוסו R נקרא **מעגל קנוני**.
במקרה זה משוואת המעגל תהיה: $x^2+y^2=R^2$.

מסקנה:

אם מעגל הוא קנוני, אז יש לדעת רק את רדיוסו על מנת שניתן יהיה לכתוב את משוואתו.

שאלות:

1) מצאו את משוואתו של מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו הוא:

$R=4$ $\quad$ ב. $R=6$ $\quad$ ג. $R=\sqrt{37}$ $\quad$ ד. $R=\frac{5}{6}$

2) מצאו את משוואתו של מעגל שמרכזו בראשית הצירים והוא עובר בנקודה $(3,-4)$.

3) נתון מעגל קנוני שמשוואתו היא: $x^2+y^2=12$.
כתבו את משוואתו של מעגל חדש הנוצר ע"י הזזה של המעגל הקנוני הנתון לפי כל אחד מהסעיפים הבאים:

א. 5 יחידות מעלה ו-2 יחידות ימינה.
ב. 3 יחידות מטה ו-4 יחידות ימינה.
ג. 10 יחידות שמאלה ו-10 יחידות למטה.

4) לפניכם משוואות של מעגלים כלליים:

(1) $(x-1)^2+(y+2)^2=34$ $\quad$ (2) $x^2+(y-18)^2=110$

(3) $(x-7)^2+(y-7)^2=49$ $\quad$ (4) $(x+40)^2+(y+40)^2=80$

א. כתבו את מרכזי המעגלים והרדיוסים שלהם.
ב. קבעו בכמה יחידות יש להזיז כל מעגל ובאיזה כיוון על מנת שהמעגל המתקבל יהיה קנוני.
הסבירו האם רדיוס המעגל הקנוני שקיבלתם בכל מקרה יהיה שונה מרדיוס המעגל הנתון.
נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+y^2=16$ ב. $x^2+y^2=36$

ג. $x^2+y^2=37$ ד. $x^2+y^2=\frac{25}{36}$

2) $x^2+y^2=25$

3) א. $(x-2)^2+(y-5)^2=12$ ב. $(x-4)^2+(y+3)^2=12$

ג. $x^2+y^2=12$

4) (1) $R=5.83$, $(1,-2)$, הזזה יחידה 1 שמאלה, 2 יחידות כלפי מעלה, אין שינוי ברדיוס.

(2) $R=10.49$, $(0,18)$, הזזה 18 יחידות כלפי מטה, אין שינוי ברדיוס.

(3) $R=7$, $(7,7)$, הזזה 7 יחידות שמאלה ו-7 יחידות כלפי מטה, אין שינוי ברדיוס.

(4) $R=8.94$, $(-40,-40)$, הזזה 40 יחידות ימינה ו-40 יחידות כלפי מעלה, אין שינוי ברדיוס.

משוואת מעגל באמצעות מרכז ונקודה שעליו:

סיכום כללי:

כדי למצוא משוואת מעגל נצטרך לדעת שני דברים:

- מרכז המעגל: $M(a,b)$.
- רדיוס המעגל: R.

שאלות:

1) מצאו את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(-3,2)$ והוא עובר בנקודה $(1,-2)$.

2) מצאו את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(-1,-5)$ והוא חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=3$.

3) מצאו את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(6,2)$ והוא חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=20$.

4) מצאו את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על ציר ה- x בנקודה שבה $x=-4$ והוא חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=2\frac{1}{2}$.

5) מצאו את משוואת המעגל שקצות הקוטר שלו הן זוגות הנקודות הבאות:

א. $(3,-4)$ ו- $(5,2)$.

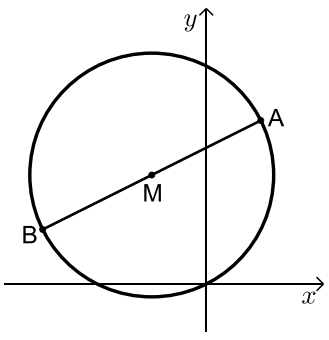
ב. $(0,2)$ ו- $(-7,-1)$.

6) הנקודה M היא מרכז המעגל $(x+2)^2+(y-4)^2=20$.

הנקודה $A(2,6)$ נמצאת על המעגל.

א. רשמו את שיעורי הנקודה M.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה B כך שהקטע AB יהיה קוטר במעגל.



תשובות סופיות:

1 $(x+3)^2+(y-2)^2=32$

2 $(x+1)^2+(y+5)^2=41$

3 $(x-6)^2+(y-2)^2=360$

4 $(x+4)^2+y^2=22\frac{1}{4}$

5 א. $(x-4)^2+(y+1)^2=10$ ב. $(x+3.5)^2+(y+0.5)^2=14.5$.

6 א. $M(-2,4)$ ב. $B(-6,2)$.

מצב הדדי בין נקודה ומעגל:

סיכום כללי:

נתון מעגל שמשוואתו: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ונתונה נקודה $A(x_1,y_1)$.
נציב את הנקודה במשוואת המעגל ונקבע:

- אם מתקיים: $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2<R^2$ אז הנקודה A נמצאת בתוך המעגל.
- אם מתקיים: $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=R^2$ אז הנקודה A נמצאת על המעגל.
- אם מתקיים: $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2>R^2$ אז הנקודה A נמצאת מחוץ למעגל.

שאלות:

1) נתונה משוואת המעגל הבאה: $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. האם הנקודה $(2,-7)$ על המעגל?

ב. האם הנקודה $(0,-9)$ על המעגל?

ג. האם המעגל עובר בראשית הצירים?

2) נתונה משוואת המעגל: $x^2+y^2=10$.

קבעו אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות על המעגל, בתוך המעגל, מחוץ למעגל:

א. $(1,3)$ ב. $(0,5)$ ג. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ ד. $\left(-2,\sqrt{6}\right)$.

3) נתונה משוואת המעגל: $(x-7)^2+(y+4)^2=80$.

קבעו אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות על המעגל, בתוך המעגל, מחוץ למעגל:

א. $(6,-3)$ ב. $(-2,1)$ ג. $(-1,0)$

ד. $(11,4)$ ה. $(10,-2)$ ו. $(-7,6)$

תשובות סופיות:

1) א. לא ב. לא. ג. כן.

2) א. על המעגל. ב. מחוץ למעגל. ג. בתוך המעגל. ד. על המעגל.

3) א. בתוך המעגל. ב. מחוץ למעגל. ג. על המעגל.
ד. על המעגל. ה. בתוך המעגל. ו. מחוץ למעגל.

שאלות עם מעגל במערכת צירים (ללא משיק):

שאלות:

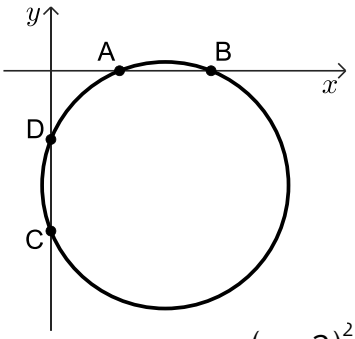
1) המעגל שמשוואתו היא: $(x-a)^2+(y+3)^2=45$ עובר דרך הנקודה $(4,3)$.

מצאו את ערכו של הפרמטר a (הבחינו בין שני פתרונות אפשריים)

2) המעגל שמשוואתו היא: $(x-12)^2+(y-b)^2=74$ עובר דרך הנקודה $(5,-6)$.

מצאו את ערכו של הפרמטר b (הבחינו בין שני פתרונות אפשריים)

3) המעגל שמשוואתו: $(x-5)^2+(y+5)^2=29$ חותך את ציר ה-x בנקודות A ו-B



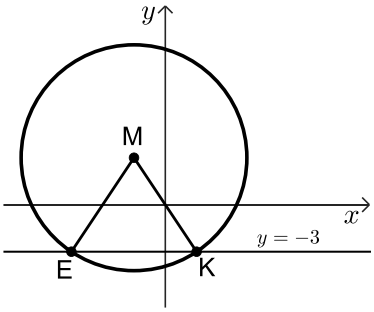
(A מימין ל-B) ואת ציר ה-y בנקודות C ו-D (D מעל ל-C).

א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

ג. חשבו את שטח הטרפז ABCD.

4) נתון מעגל שמרכזו בנקודה M ומשוואתו היא: $(x+2)^2+(y-3)^2=52$



הישר $y=-3$ חותך את המעגל בנקודות E ו-K.

א. (1) מצאו את שיעורי נקודת מרכז המעגל, M.

(2) מצאו את שיעורי הנקודות E ו-K.

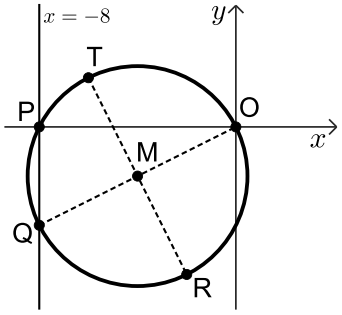
ב. (1) מצאו את שיפועי הישרים EM ו-KM.

(2) קבעו מתקיים: $EM \perp KM$.

ג. (1) איזה משולש הוא המשולש EMK? נמקו.

(2) מצאו את זוויות המשולש EMK.

5) משוואת מעגל שמרכזו M היא: $(x+4)^2+(y+2)^2=20$



הישר $x=-8$ חותך את המעגל בנקודות P ו-Q כמתואר באיור.

O – ראשית הצירים.

א. מצאו את שיעורי הנקודות P ו-Q.

ב. הוכיחו כי QO הוא קוטר במעגל.

ג. מצאו את משוואת הקוטר QO.

מעבירים אנך לקוטר QO דרך מרכז המעגל M.

ד. מצאו את משוואת אנך זה לקוטר QO.

האנך חותך את המעגל בשתי נקודות R ו-T כמתואר באיור ($x_R > x_T$).

ה. מצאו את שיעורי הנקודות R ו-T.

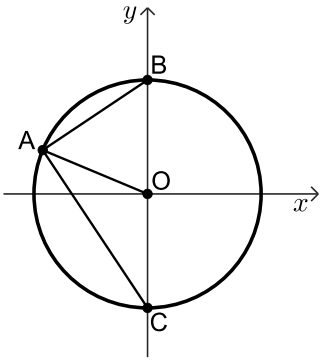
ו. הראו כי המרובע TORQ הוא ריבוע.

ז. (1) מהו אורכו של קוטר במעגל?

(2) היעזרו באורכו של קוטר המעגל וחשבו את שטחו של הריבוע TORQ.

6) מעגל קנוני שמשוואתו היא: $x^2+y^2=169$ מופיע באיור שלפניכם.

על המעגל מקצים נקודות A, B ו-C כאשר הנקודות B ו-C נמצאות על ציר ה-y.



א. (1) מצאו את שיעורי הנקודות B ו-C.

(2) הסבירו מדוע BC הוא קוטר במעגל ומצאו את אורכו.

הנקודה A נמצאת על המעגל ברביע השני.

ידוע כי שיעור ה-x של הנקודה A הוא 12-.

ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה A.

(2) הראו כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

ג. (1) הסבירו מדוע הקטע AO במשולש ABC הוא תיכון.

(2) הסבירו מדוע מתקיים: $AO=BO=CO$ בשתי דרכים שונות.

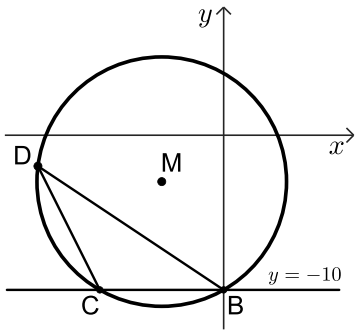
ד. נסחו משפט גאומטרי מתאים לממצאיכם בסעיף ג'.

7) באיור שלפניכם נתון מעגל החותך את ציר ה-y בחלקו השלילי בנקודה B.

מנקודה זו מעבירים ישר שמשוואתו: $y=-10$.

הישר חותך את המעגל בנקודה נוספת C,

וידוע כי הנקודה D שעל המעגל נמצאת על הישר $x=-12$.



א. כתבו את שיעורי הנקודה B.

ב. ידוע כי נקודת מרכז המעגל היא $M(-4,-3)$.

מצאו את משוואת המעגל.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודה C.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה D (הבחינו בין שתי תוצאות אפשריות).

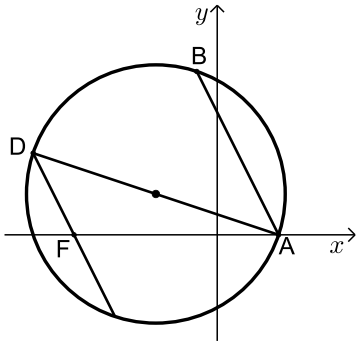
ד. חשבו את שטח המשולש BCD עבור נקודה D המקיימת: $y_D > y_M$.

8) נתון מעגל שמשוואתו היא $(x+3)^2+(y-2)^2=40$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של המעגל עם חלקו החיובי של ציר ה- x.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

נתונה הנקודה $B(-1,8)$.



ב. הראה כי הנקודה B נמצאת על המעגל.

הנקודה D נמצאת על המעגל כך ש-AD קוטר.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה D.

דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לישר AB.

ד. מצאו את משוואת הישר שהעבירו.

הישר שאת משוואתו מצאת בסעיף הקודם, חותך את ציר ה- x בנקודה F.

ה. חשבו את שטח המשולש ADF.

תשובות סופיות:

1) $a=1\ ,\ 7$.

2) $b=-11\ ,\ -1$.

3) א. $A(3,0)\ ,\ B(7,0)\ ,\ C(0,-7)\ ,\ D(0,-3)$ ב. ראו סרטון. ג. 20 יח"ש.

4) א. (1) $M(-2,3)$ א. (2) $K(2,-3)\ ,\ E(-6,-3)$ ב. (1) $m_{KM}=-\frac{3}{2}, m_{EM}=\frac{3}{2}$.

ב. (2) לא מתקיים. ג. (1) משולש שווה שוקיים.

ג. (2) $\sphericalangle EMK=67.38°\ ,\ \sphericalangle E=\sphericalangle K=56.3°$.

5) א. $Q(-8,-4)\ ,\ P(-8,0)$ ב. ראו סרטון ג. $y=\frac{1}{2}x$.

ד. $y=-2x-10$ ה. $R(-2,-6), T(-6,2)$ ו. ראו סרטון.

ז. (1) $4\sqrt{5}$ ז. (2) 40 יח"ש.

6) א. (1) $C(0,-13)\ ,\ B(0,13)$ א. (2) ראו בסרטון. ב. (1) $A(-12,5)$.

ב. (2) ראו בסרטון. ג. (1) ראו בסרטון. ג. (2) ראו בסרטון.

ד. במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

7) א. $B(0,-10)$ ב. $(x+4)^2+(y+3)^2=65$ ג. (1) $C(-8,-10)$

ג. (2) $D(-12,-4)\ ,\ D(-12,-2)$ ד. 32 יח"ש.

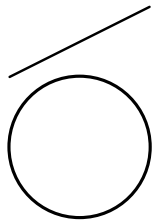
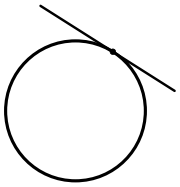
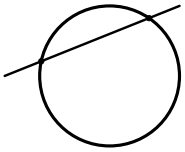
8) א. $A(3,0)$ ב. הוכחה. ג. $D(-9,4)$ ד. $y=-2x-14$

ה. 20 יח"ש $=S_{ADF}$.

מצבים הדדיים בין מעגל וישר:

סיכום כללי:

ישנם שלושה מצבים הדדיים בין ישר ומעגל:

הישר והמעגל לא נחתכים כלל	הישר והמעגל נחתכים בנקודה אחת בלבד (השקה)	הישר והמעגל נחתכים בשתי נקודות שונות
		

כדי למצוא את נקודות החיתוך יש לחבר מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים.
המשוואות תהיינה: (1) משוואת המעגל. (2) משוואת הישר.

הערה:

במקרה של ישר המקביל לצירים, כל ההתייחסות זהה לחלוטין.
יש להציב את ערך הישר במשוואת המעגל ולפתור משוואה ריבועית עבור המשתנה השני.

שאלות:

1) מצאו את נקודות החיתוך (במידה וישנן) של כל אחד מן המעגלים הבאים עם הישר המופיע לידו.

א. המעגל: $x^2+y^2=80$ והישר: $y=2x$.

ב. המעגל: $(x-1)^2+(y-3)^2=40$ והישר: $y=3x$.

ג. המעגל: $(x-1)^2+(y+13)^2=153$ והישר: $y=-\frac{1}{4}x$.

2) מצאו את נקודות החיתוך (במידה וישנן) של כל אחד מן המעגלים הבאים עם הישר המופיע לידו.

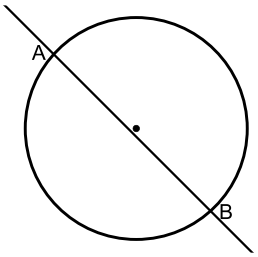
א. המעגל: $x^2+y^2=85$ והישר: $y=2x-5$.

ב. המעגל: $(x-6)^2+(y-3)^2=10$ והישר: $y=2x-4$.

ג. המעגל: $x^2+y^2=40$ והישר: $y=-3x+20$.

ד. המעגל: $x^2+y^2=1$ והישר: $y=2x+4$.

3) המעגל $(x-4)^2+(y-5)^2=181$ חותך את הישר $y=-x+8$ בנקודות A ו-B.



א. מצאו את נקודות החיתוך של המעגל עם הישר.

ב. מצאו את אורך המיתר AB.

4) מצאו את נקודות החיתוך של המעגלים הבאים עם הישרים שלידם:

א. המעגל: $(x-2)^2+(y+1)^2=26$ והישר: $x=3$.

ב. המעגל: $(x+12)^2+y^2=53$ והישר: $x=-5$.

ג. המעגל: $(x-6)^2+(y-5)^2=73$ והישר: $y=8$.

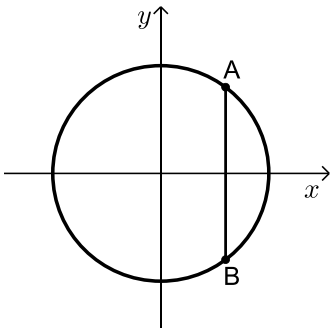
ד. המעגל: $(x+1)^2+(y-4)^2=49$ והישר: $y=-3$.

ה. המעגל: $(x+3)^2+(y-21)^2=36$ והישר: $x=5$.

5) נתון המעגל: $x^2+y^2=625$.

הנקודות A ו-B מונחות על היקף המעגל כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

שיעור ה- x של הנקודה A הוא 15 והיא נמצאת ברביע הראשון.



א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. חשבו את אורך הקטע AB.

6) נתון מעגל שמשוואתו: $(x-3)^2+(y+6)^2=144$

קבעו עבור אלו ערכים של k, הישר: $y=k$:

א. ישיק למעגל.

ב. יחתוך את המעגל בשתי נקודות שונות.

ג. יעבור כולו מחוץ למעגל.

7) נתון מעגל שמשוואתו: $(x+2)^2+(y-14)^2=81$.

קבעו עבור אלו ערכים של k, הישר: $y=k$:

א. ישיק למעגל.

ב. יחתוך את המעגל בשתי נקודות שונות.

ג. יעבור כולו מחוץ למעגל.

8) לפניכם זוגות של ישר ומעגל.

מצאו את המצב ההדדי שבין כל זוג ואת הנקודות המשותפות להם במידה וישנן.

א. $\begin{cases}(x+3)^2+(y+8)^2=112\\y=10\end{cases}$

ב. $\begin{cases}(x-2)^2+(y-4)^2=52\\y=x+4\end{cases}$

ג. $\begin{cases}(x+4)^2+(y-2)^2=25\\y=-2x-1\end{cases}$

ד. $\begin{cases}x^2+(y-3)^2=40\\y=3x+23\end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(4,8)$, $(-4,-8)$ ב. $(3,9)$, $(-1,-3)$ ג. $(4,-1)$.

2) א. $(6,7)$, $(-2,-9)$ ב. $(5,6)$, $(3,2)$ ג. $(6,2)$ ד. אין.

3) א. $(13,-5)$, $(-6,14)$ ב. 26.87 יח"א $AB=\sqrt{722}\approx$.

4) א. $(3,-6)$, $(3,4)$ ב. $(-5,2)$ ג. $(14,8)$, $(-2,8)$.

ד. $(-1,-3)$ ה. אין.

5) א. $A(15,20)$, $B(15,-20)$ ב. 40 יח"א $AB=$.

6) א. $k=-18$, $k=6$ ב. $-18<k<6$ ג. $k<-18$, $k>6$.

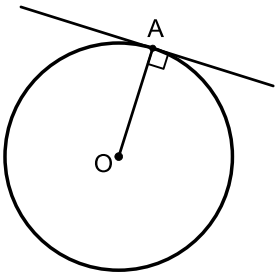
7) א. $k=5$, $k=23$ ב. $5<k<23$ ג. $k<5$, $k>23$.

8) א. אין חיתוך ב. 2 נקודות חיתוך $(6,10)$,$(-4,0)$.

ג. 2 נקודות חיתוך $(-4,7)$,$(0,-1)$ ד. משיקים $(-6,5)$.

מעגל המשיק לישר:

סיכום כללי:



משיק ורדיוס בנקודת ההשקה:

משפט:

המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

משפט הפוך:

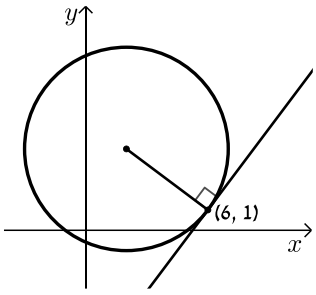
ישר המאונך לרדיוס בקצהו, הוא משיק למעגל.

משיק ורדיוס בנקודה ההשקה מאונכים זה לזה:

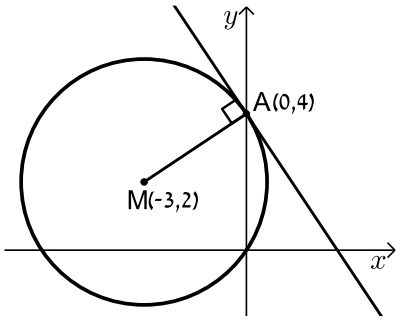
משפט:

משיק ורדיוס בנקודת ההשקה מאונכים זה לזה.

שאלות:



1) נתון המעגל שמשוואתו: $(x-2)^2+(y-4)^2=25$.
מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה $(6,1)$.



2) הנקודה $A(0,4)$ נמצאת על היקף מעגל שמרכזו $M(-3,2)$.

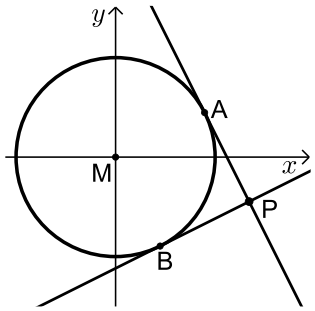
א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. מצאו את שיפוע הרדיוס MA.

ג. מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

3) נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו $(x-7)^2+(y+2)^2=45$

משוואת המשיק למעגל בנקודה A היא $y=-\frac{1}{2}x+9$.



א. מצאו את משוואת הרדיוס MA.

ב. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה A.

4) מרכזו של מעגל $x^2+y^2=80$ נמצא בראשית הצירים בנקודה M.

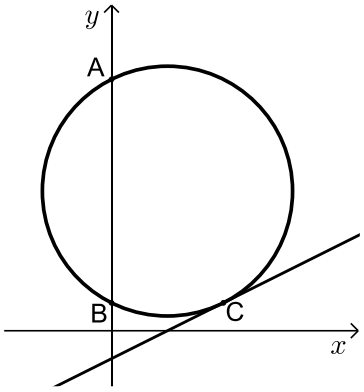
בנקודות $A(8,4)$ ו-$B(4,-8)$ מעבירים משיקים למעגל.

א. מצאו את משוואות המשיקים.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיקים P.

5) נתון המעגל: $(x-2)^2+(y-5)^2=20$.

המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו-B.



א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

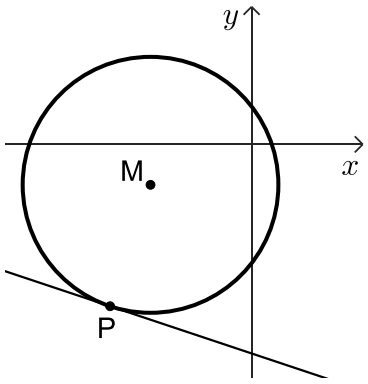
ב. הישר $y=\frac{1}{2}x-1$ משיק למעגל הנתון בנקודה C.

מצאו את השיעורים של נקודת ההשקה C.

ג. הראו כי AC הוא קוטר במעגל.

6) נתון מעגל שמשוואתו: $(x+5)^2+(y+2)^2=40$ ומרכזו בנקודה M.

מעבירים ישר ששיפועו הוא $-\frac{1}{3}$, המשיק למעגל בנקודה P.



ידוע כי הנקודה P נמצא ברביע השלישי.

א. כתבו את משוואתו של הרדיוס PM.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה P.

ג. (1) מצאו נקודה נוספת על המעגל, שהישר העובר דרכה מקביל לישר הנתון.

(2) כתבו את משוואתו של ישר זה.

7) מעגל שמשוואתו: $x^2+y^2=90$ וישר שמשוואתו: $-x+2y=15$ נתונים בשאלה.

א. (1) קבעו את המצב ההדדי בין המעגל והישר.

(2) סרטטו את הישר והמעגל.

ב. במידה ויש לישר ולמעגל נקודות משותפות, מצאו אותן והוסיפו אותן לסרטוט שלכם.

ג. לפניכם רשימה של נקודות: $(5,10)$, $(-3,6)$, $(-7,4)$, $(-9,3)$

(1) הראו כי כל הנקודות נמצאות על הישר.

(2) מיינו את הנקודות לפי היחס שלהן למעגל:

- מחוץ למעגל.
- על המעגל.
- בתוך המעגל.

ד. מבין כל הנקודות הנתונות בסעיף הקודם, מה היא הנקודה הקרובה ביותר למרכז המעגל? ומה מרחקה ממרכז המעגל?

8) בכל אחד מהסעיפים שלפניכם נתונה משוואת מעגל ונקודה שעליה.
מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה זו.

א. $x^2+y^2=20$, $P(4,-2)$.

ב. $x^2+y^2=52$, $P(-6,-4)$.

ג. $(x-1)^2+(y+10)^2=89$, $P(6,-2)$.

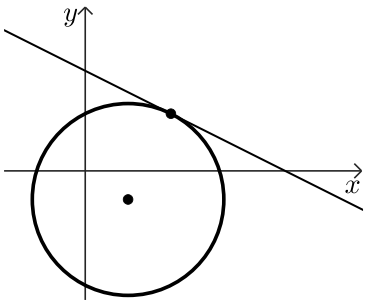
ד. $(x-3)^2+(y+12.5)^2=45$, $P(0,-6.5)$.

9) נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(3,-2)$. הישר $y=-\frac{1}{2}x+7$ משיק למעגל.

א. מצאו את משוואתו של ישר העובר דרך מרכז המעגל ומאונך למשיק.

ב. מצאו את נקודת ההשקה.

ג. כתבו את משוואת המעגל.



תשובות סופיות:

1) $y=\frac{4}{3}x-7$

2) א. $(x+3)^2+(y-2)^2=13$ ב. $m=\frac{2}{3}$ ג. $y=-\frac{3}{2}x+4$.

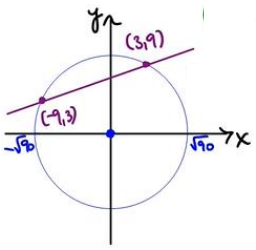
3) א. $y=2x-16$ ב. $A(10,4)$.

4) א. $y=-2x+20$; $y=\frac{1}{2}x-10$ ב. $P(12,-4)$.

5) א. $A(0,9)$, $B(0,1)$ ב. $C(4,1)$ ג. הוכחה.

6) א. $y=3x+13$ ב. $P(-7,-8)$ ג. (1) $(-3,4)$ (2) $y=-\frac{1}{3}x+3$.

7) א. (1) נחתכים א. (2) ראו סרטוט בצד. ב. $(3,9)$, $(-9,3)$



ג. (1) ראו בסרטון.

ג. (2) מחוץ למעגל: $(5,10)$, בתוך המעגל: $(-7,4)$, $(-3,6)$,

על המעגל: $(-9,3)$.

ד. $(-3,6)$, $d=\sqrt{45}$ ה. (1) $y=-2x$ ה. (2) כן

ה. (3) מרחק הישר ממרכז המעגל.

8) א. $y=2x-10$ ב. $y=-\frac{3}{2}x-13$ ג. $y=-\frac{5}{8}x+1.75$ ד. $y=\frac{1}{2}x-6.5$

9) א. $y=2x-8$ ב. $(6,4)$ ג. $(x-3)^2+(y+2)^2=45$

מעגל המשיק לצירים:

סיכום כללי:

מעגל המשיק לציר ה-x:

במעגל שמרכזו בנקודה (a,b) המשיק לציר ה- x, נקודה ההשקה היא $(a,0)$ ורדיוסו $R=|b|$.

מעגל המשיק לציר ה-y:

במעגל שמרכזו בנקודה (a,b) המשיק לציר ה- y, נקודת ההשקה היא $(0,b)$ ורדיוסו $R=|a|$.

מעגל המשיק לשני הצירים:

במעגל המשיק לשני הצירים לעולם יתקיים: $R=|a|=|b|$.
נקודות ההשקה של מעגל כזה תהיינה: $(a,0)$ ו-$(0,b)$.

שאלות:

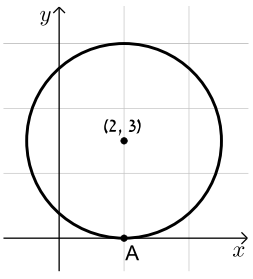
1) לפניכם מעגלים המשיקים לציר ה- x בנקודה A, מרכזי המעגלים נתונים בסרטוט.
בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה A.

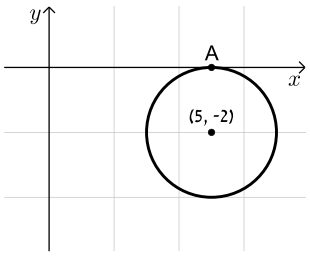
ב. מצאו את רדיוס המעגל.

ג. כתבו את משוואת המעגל.

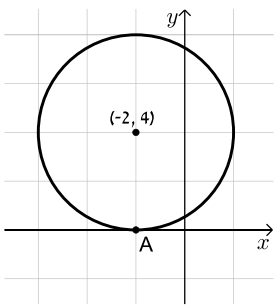
(1)



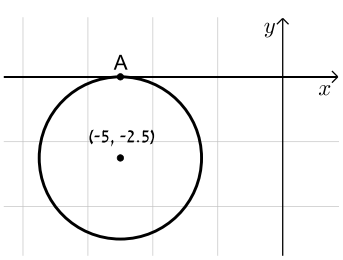
(2)



(3)



(4)



2) מעגל שמרכזו בנקודה $(5,4)$ משיק לציר ה- x.

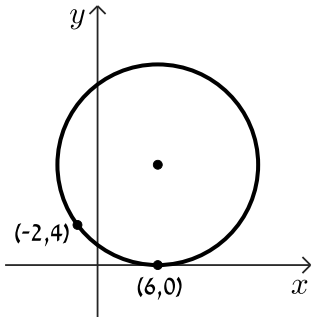
א. מצאו את נקודת ההשקה.

ב. מצאו את רדיוס המעגל.

ג. כתבו את משוואת המעגל.

3) באיור שלפניכם מופיע מעגל המשיק לציר ה-x בנקודה $(6,0)$.

ידוע כי המעגל עובר בנקודה $(-2,4)$.



א. מצאו את משוואת המעגל.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-y.

4) לפניכם מעגלים המשיקים לציר ה- y בנקודה A, מרכזי המעגלים נתונים בסרטוט.

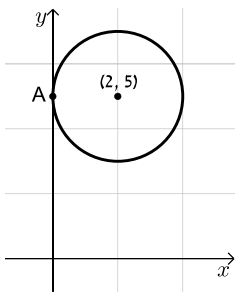
בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה A.

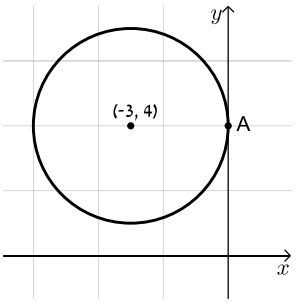
ב. מצאו את רדיוס המעגל.

ג. כתבו את משוואת המעגל.

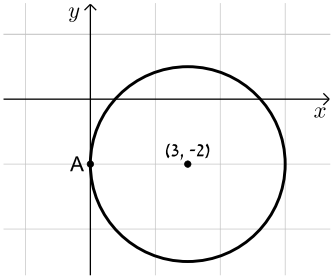
(1)



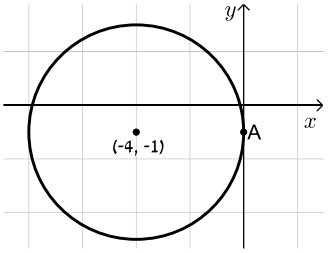
(2)



(3)



(4)



5) מעגל שמרכזו בנקודה $(-4,6)$ משיק לציר ה- y.

א. מצאו את נקודת ההשקה.

ב. מצאו את רדיוס המעגל.

ג. כתבו את משוואת המעגל.

6) מצאו את משוואת המעגלים המשיקים לשני הצירים ומרכזם הוא:

א. $M(2,2)$ ב. $M(-6,-6)$ ג. $M(5,-5)$ ד. $M(-3,3)$.

תשובות סופיות:

1) (1) א. $A(2,0)$ ב. $R=3$ ג. $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

(2) א. $A(5,0)$ ב. $R=2$ ג. $(x-5)^2+(y+2)^2=4$

(3) א. $A(-2,0)$ ב. $R=4$ ג. $(x+2)^2+(y-4)^2=16$

(4) א. $A(-5,0)$ ב. $R=2.5$ ג. $(x+5)^2+(y+2.5)^2=6.25$

2) א. $(5,0)$ ב. $R=4$ ג. $(x-5)^2+(y-4)^2=16$.

3) א. $(x-6)^2+(y-10)^2=100$ ב. $(0,2)$, $(0,18)$

4) (1) א. $A(0,5)$ ב. $R=2$ ג. $(x-2)^2+(y-5)^2=4$

(2) א. $A(0,4)$ ב. $R=3$ ג. $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

(3) א. $A(0,-2)$ ב. $R=3$ ג. $(x-3)^2+(y+2)^2=9$

(4) א. $A(0,-1)$ ב. $R=4$ ג. $(x+4)^2+(y+1)^2=16$

5) א. $(0,6)$ ב. $R=4$ ג. $(x+4)^2+(y-6)^2=16$.

6) א. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ ב. $(x+6)^2+(y+6)^2=36$

ג. $(x-5)^2+(y+5)^2=25$ ד. $(x+3)^2+(y-3)^2=9$.

שאלות עם מעגל במערכת צירים (כולל משיק):

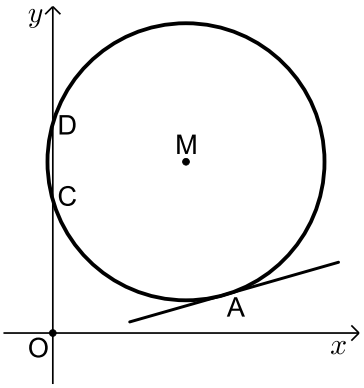
שאלות:

1) בציור שלפניכם נתון המעגל $(x-7)^2+(y-9)^2=R^2$ שמרכזו בנקודה M.

הנקודה $A(9,2)$ נמצאת על המעגל. O היא ראשית הצירים.

א. (1) חשבו את רדיוס המעגל. תוכלו להשאיר סימן שורש בתשובתכם.

(2) כתבו את משוואת המעגל.



המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות C ו-D מתואר באיור.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות C ו-D.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל.

ג. (1) מצאו את שיפוע המשיק.

(2) מצאו את משוואת המשיק.

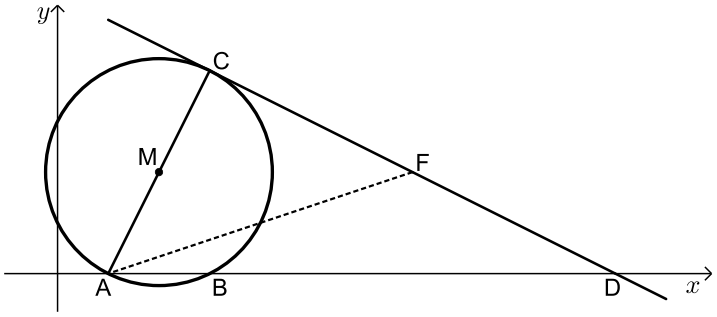
(3) האם המשיק עובר בראשית הצירים? נמקו.

ד. חשבו את היקף המרובע AMCO.

בתשובתכם השאירו שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

2) נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו היא: $(x-4)^2+(y-4)^2=20$.

הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x כמתואר בציור.



א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש-AC הוא קוטר במעגל.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה C.

ג. מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה C.

המשיק, שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג, חותך את ציר ה- x בנקודה D.

הנקודה F היא אמצע הקטע CD. מחברים את הנקודה F עם A.

ד. (1) מצאו את שיעורי הנקודה F.

(2) חשבו את שטח המשולש AFD.

3) הקטע AO הוא קוטר במעגל שמרכזו M (ראה ציור).
O – ראשית הצירים ו- $A(10,4)$.

א. (1) מצאו את שיעורי הנקודה M

(2) מצאו את משוואת המעגל.

ב. מצאו את שיפוע הקוטר AO.

בנקודה A העבירו משיק למעגל.

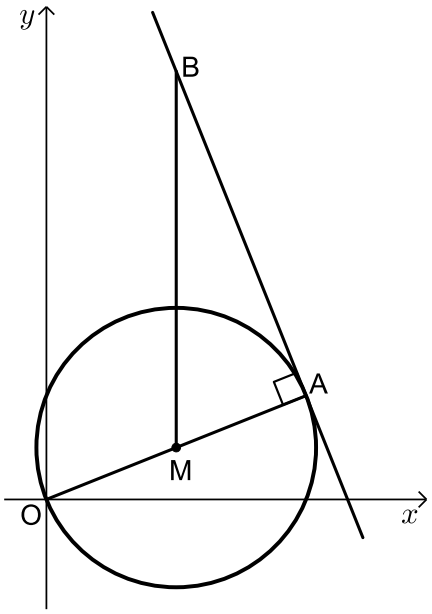
ג. מצאו את משוואת המשיק.

הנקודה B נמצאת על המשיק כך שהקטע BM מקביל לציר ה- y.

ד. (1) מצאו את שיעורי הנקודה B.

(2) חשבו את היקף המשולש AMB.

תוכלו להשאיר שורשים בתשובתכם.



תשובות סופיות:

1) א. (1) $R=\sqrt{53}\approx 7.28$ יח"א א. (2) $(x-7)^2+(y-9)^2=53$

ב. $C(0,7)$, $D(0,11)$ ג. (1) $m=\frac{2}{7}$ ג. (2) $y=\frac{2}{7}x-\frac{4}{7}$

ג. (3) לא. ד. $P_{AMCO}=30.78$ יח"א.

2) א. $A(2,0)$, $B(6,0)$ ב. $C(6,8)$ ג. $y=-\frac{1}{2}x+11$

ד. (1) $F(14,4)$ ד. (2) $S_{AFD}=40$ יח"ש.

3) א. (1) $M(5,2)$ א. (2) $(x-5)^2+(y-2)^2=29$

ב. $m=\frac{2}{5}$ ג. $y=-2.5x+29$

ד. (1) $B(5,16.5)$ ד. (2) $P_{AMB}=33.34$ יח"א.

www.bagrut.co.il

שאלון 471

משפטים במעגל

תוכן עניינים

משפטים במעגל 261

תוכן עניינים 261

משפטים עם זוויות מרכזיות, מיתרים וקשתות: 262

סיכום כללי: 262

משפטים עם זוויות היקפיות במעגל: 263

משפטים עם משיקים למעגל: 264

סיכום כללי: 264

מעגל חוסם וחסום במשולש: 265

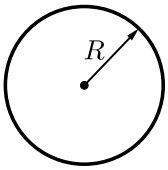
מרובע החסום במעגל: 266

משפטים עם זוויות מרכזיות, מיתרים וקשתות:

סיכום כללי:

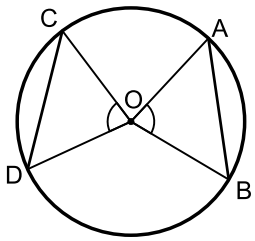
הגדרת המעגל:

אוסף כל הנקודות שמרחקן מנקודה מסוימת (מרכז המעגל) הוא גודל קבוע R.
(הנקודות יוצרות למעשה את היקף המעגל והמרחק ביניהן למרכז המעגל נקרא רדיוס או מחוג).



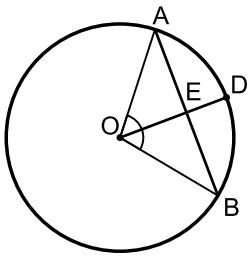
זוויות מרכזיות ומיתרים שווים:

משפט:
במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו **אם ורק אם** שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.



אנך למיתר במעגל:

משפט:
האנך למיתר, העובר דרך מרכז המעגל, חוצה את המיתר, חוצה את הזוויות המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.

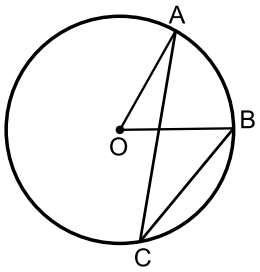


משפט הפוך:

ישר העובר דרך מרכז המעגל וחוצה מיתר – מאונך לו.

משפטים עם זוויות היקפיות במעגל:

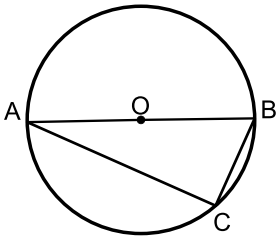
זווית היקפית וזווית מרכזית:



משפט:
במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הקשת עליה היא נשענת.

משפט:
במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.

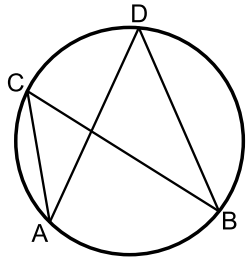
זווית היקפית על קוטר:



משפט:
זווית היקפית בת $90°$ נשענת על קוטר.

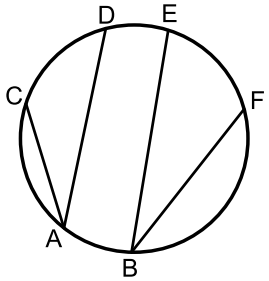
משפט הפוך:
זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

זוויות היקפיות על אותה הקשת:



משפט:
במעגל, זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות זו לזו.

זוויות היקפיות על קשתות שוות:

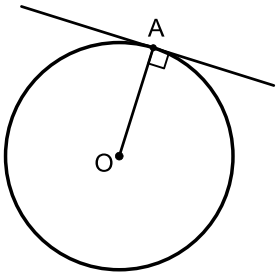


משפט:
במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.

משפט הפוך:
במעגל, לזוויות היקפיות שוות (מתאימות) קשתות שוות ומיתרים שווים.

משפטים עם משיקים למעגל:

סיכום כללי:



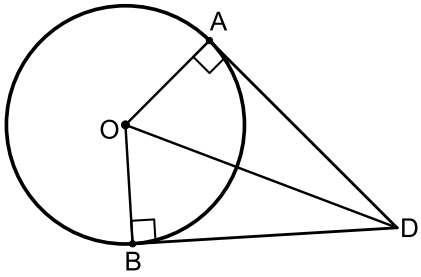
משיק ורדיוס בנקודת ההשקה:

משפט:

המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

משפט הפוך:

ישר המאונך לרדיוס בקצהו, הוא משיק למעגל.



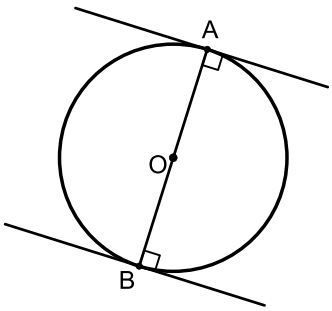
שני משיקים היוצאים מנקודה מחוץ למעגל:

משפט:

אם מנקודה מחוץ למעגל עוברים שני משיקים למעגל,
אז קטעי המשיקים המחברים את הנקודה עם
נקודת ההשקה שווים באורכם.

משפט:

קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל
חוצה את הזווית שבין שני המשיקים.



שני משיקים מקבילים וקוטר במעגל:

משפט:

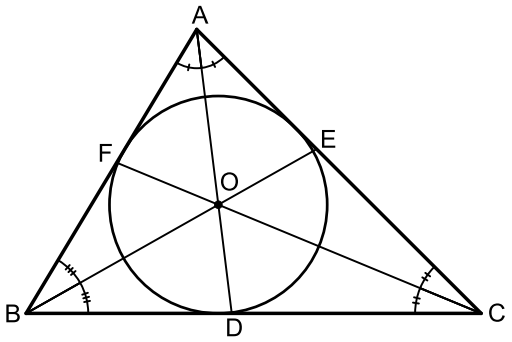
אם שני משיקים מקבילים זה לזה, אז הקטע המחבר
את נקודות ההשקה הוא קוטר במעגל.

מעגל חוסם וחסום במשולש:

מפגש חוצי זוויות במשולש ומעגל חסום:

משפט:

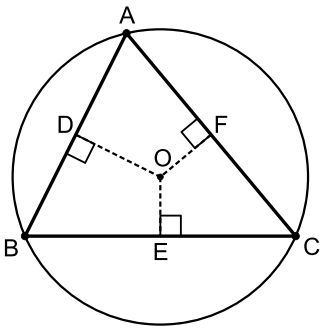
שלושת חוצי הזוויות של משולש נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.



מפגש אנכים אמצעיים במשולש:

משפט:

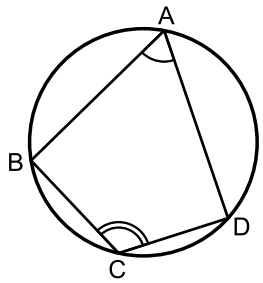
במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש. מיקום מרכז המעגל שונה בהתאם לסוג המשולש:



- **חד זווית** - בתוך המשולש
- **ישר זווית** - אמצע היתר
- **קהה זווית** - מחוץ למשולש

מרובע החסום במעגל:

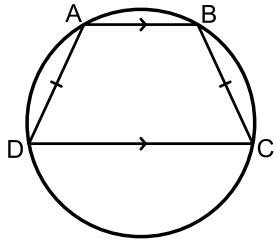
מרובע החסום במעגל:



משפט:

ניתן לחסום מרובע במעגל **אם ורק אם** סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-$180°$.

טרפז חסום במעגל:



משפט:

אם טרפז חסום במעגל אז הוא טרפז שווה שוקיים.

שאלון 471

טריגונומטריה - משפט הסינוסים

תוכן העניינים:

משפט הסינוסים במשולש: 268

סיכום כללי: 268

שאלות: 268

תשובות סופיות: 269

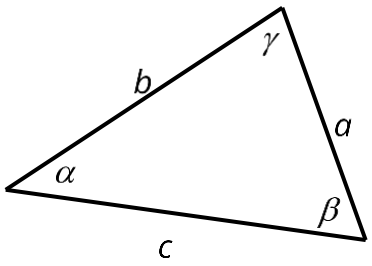
משפט הסינוסים במשולש:

סיכום כללי:

משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.



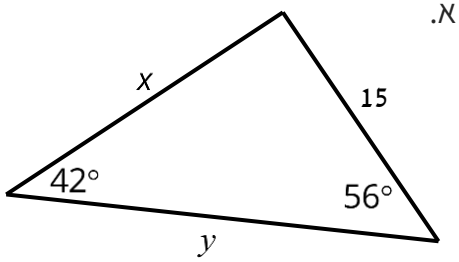
נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:

- נתונות שתי זוויות וצלע.
- נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
- נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

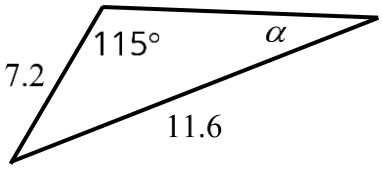
שאלות:

1) מצאו את ערכו של a / x / y במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

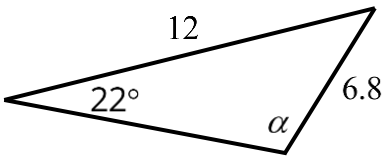
א.



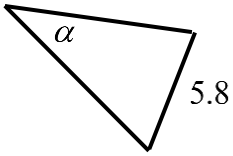
ב.



ג.



ד. רדיוס המעגל: $R=7$.



2) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ.
חשבו את זוויות המרובע.

3) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של $30°$ עם צלע אחת
של המקבילית וזווית של $61.05°$ עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.
חשבו את היקף המקבילית.

תשובות סופיות:

1) א. $y=$ 22.2 ס"מ , $x=$ 18.58 ס"מ ב. $\alpha=34.231°$

ג. $\alpha=41.382°$ או $\alpha=138.618°$ ד. $\alpha=155.526°$ או $\alpha=24.474°$

2) $138.190°$, $41.810°$, $113.556°$, $66.444°$.

3) $P=$ 22 ס"מ.

שאלון 471

שאלות מסכמות בגאומטריה משולבת (כולל מעגל)

תוכן העניינים:

שאלות מסכמות בגאומטריה משולבת (כולל מעגל)..... 270

שאלות מסכמות בגאומטריה משולבת (כולל מעגל): 271

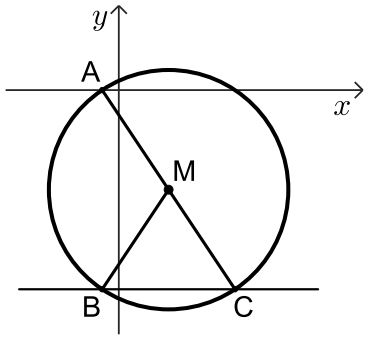
שאלות:..... 271

תשובות סופיות: 274

שאלות מסכמות בגאומטריה משולבת (כולל מעגל):

שאלות:

1) נתון המעגל: $(x-3)^2+(y+6)^2=52$ שמרכזו בנקודה M.



הישר $y=-12$ חותך את המעגל בנקודות B ו-C.

א. מצאו את שיעורי הנקודות B ו-C.

ב. חשבו את שטחו של המשולש BMC.

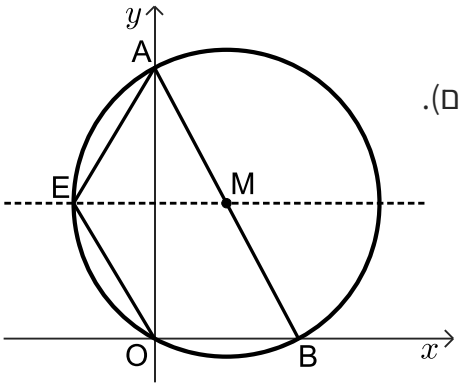
ג. חשבו את גודל הזווית BMC.

הנקודה A היא חיתוך של הישר MC עם ציר ה- x.

ד. מה הם שיעורי הנקודה A?

ה. הוכיחו כי שטחו של המשולש AMB שווה לשטחו של המשולש BMC.

2) נתון המעגל: $(x-8)^2+(y-15)^2=289$ שמרכזו M.



המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O (ראשית הצירים).

א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- x דרך מרכז המעגל M.

הישר חותך את המעגל בנקודה E.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה E.

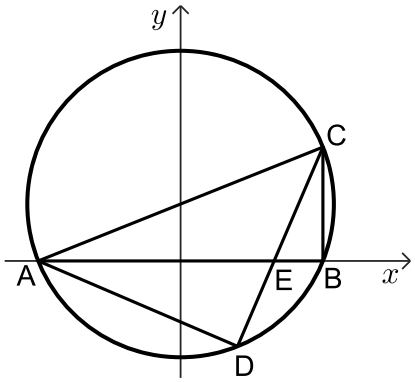
ג. (1) האם המרובע AEOB הוא טרפז?

(2) מהו היקף המרובע AEOB?

ד. מצאו את זווית AEO וקבעו איזה משולש הוא המשולש AEO.

ה. מצאו פי כמה גדול שטח המרובע AEOB משטח המשולש AEO.

3) מעגל שמשוואתו: $x^2+(y-2)^2=29$ חותך את ציר ה- x בנקודות A ו-B.



א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

מעבירים אנך לציר ה- x מהנקודה B החותך את המעגל בנקודה נוספת C.

ב. (1) מצאו את שיעורי הנקודה C.

(2) הוכיחו כי AC הוא קוטר במעגל.

הנקודה D נמצאת על היקף המעגל כך ש-AD ו-CD הם מיתרים במעגל.

ג. הוכיחו כי: $\Delta ADE \sim \Delta CBE$.

ידוע כי זווית DAC היא בת $45°$.

ד. (1) מצאו את שטחו של המשולש ADC.

(2) מצאו את שטחו של המשולש ABC.

ה. **בונוס:**

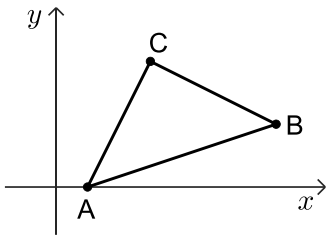
(1) כתבו את יחס הדמיון בין המשולשים: $\Delta ADE \sim \Delta CBE$.

(2) חשבו את היחס: $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta CBE}}$.

(3) חשבו את שטחו של המשולש AEC.

4) באיור שלפניכם נתון משולש ישר זווית ACB $(\sphericalangle C=90°)$.

הקודקוד A נמצא על ציר ה- x ונתון: $C(3,4)$, $B(7,2)$.



א. מצאו את משוואת הצלע AC.

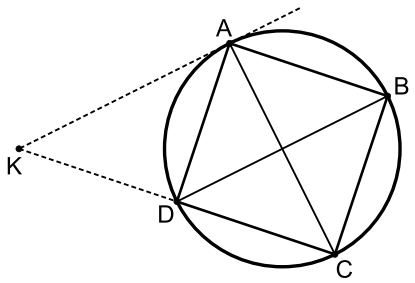
ב. מצאו את משוואת המעגל החוסם את המשולש ABC.

ג. מעבירים משיק למעגל מנקודה C.

(1) חשבו את הזווית החדה בין המשיק והצלע BC.

(2) חשבו את הזווית החדה בין המשיק וציר ה- y.

5) נתון ריבוע ABCD שבו הקודקוד C הוא $(3,-6)$.



משוואת האלכסון BD היא $y=\frac{1}{2}x$.

א. מצאו את משוואת האלכסון AC.

ב. (1) מצאו את שיעורי מרכז המעגל החוסם את הריבוע ABCD.

(2) מצאו את משוואת המעגל החוסם את הריבוע ABCD.

הנקודה K נמצאת על המשך הישר המחבר את הקודקודים C ו-D.

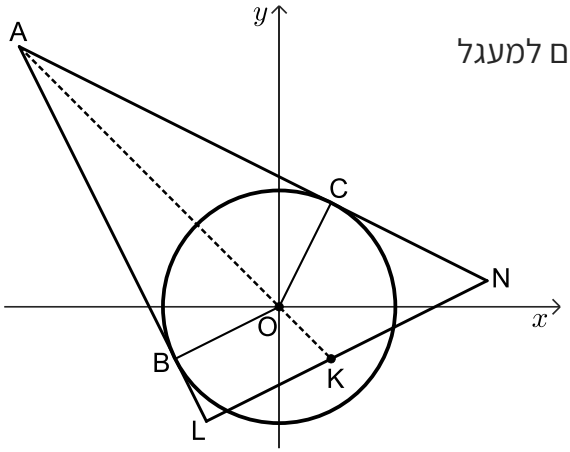
ידוע כי KA משיק למעגל בנקודה A.

ג. (1) הוכיחו כי $KA \parallel BD$.

(2) חשבו את הזווית הנוצרת בין המשיק KA לבין המשך DC עד לנקודה K.

(3) הוכיחו כי שטח המשולש ADK שווה למחצית משטחו של הריבוע ABCD.

6) נתון מעגל קנוני בעל רדיוס באורך $\sqrt{20}$.



מן הנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים שני משיקים למעגל המשיקים לו בנקודות B ו-C.

מחברים את הנקודה A עם מרכז המעגל O.

א. כתבו את משוואת המעגל.

ב. הוכיחו כי המרובע ABOC הוא דלתון.

נתון כי: $C(2,4)$, $B(-4,-2)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודה A.

(2) חשבו את הזווית BAC.

הנקודה K נמצאת על המשך הישר AO ובתוך המעגל.

ממשיכים את המשיקים למעגל עד לנקודות L ו-N בהתאמה כך שהישר LN עובר דרך הנקודה K ומקביל לרדיוס BO.

ד. האם AK הוא תיכון במשולש ALN?

נתון: $N(8,1)$.

ה. (1) מהם שיעורי הנקודה K?

(2) חשבו את אורכי צלעות המשולש AKN.

(3) חשבו את שטח המשולש AKN.

תשובות סופיות:

1) א. $B(-1,-12)$, $C(7,-12)$ ב. 24 יח"ש ג. $67.38°$ ד. $A(-1,0)$.
ה. שאלת הוכחה.

2) א. $A(0,30)$, $B(16,0)$ ב. $E(-9,15)$ ג. (1) המרובע AEOB אינו טרפז.
ג. (2) $P_{AEOB} = 84.98$ יח"א ד. $118.07°$ ה. $2\frac{7}{9}$.

3) א. $A(-5,0)$, $B(5,0)$ ב. (1) $C(5,4)$ ב. (2) שאלת הוכחה.
ג. שאלת הוכחה ד. (1) 29 יח"ש ד. (2) 20 יח"ש.
ה. (1) $\frac{\sqrt{58}}{4}$ ה. (2) $\frac{58}{16}$ ה. (3) 16.57 יח"ש.

4) א. $AC: y = 2x - 2$ ב. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$ ג. (1) $45°$ ג. (2) $71.56°$.

5) א. $AC: y = 2x$ ב. (1) $(0,0)$ ב. (2) $x^2 + y^2 = 45$.
ג. (1) שאלת הוכחה ג. (2) $45°$ ג. (3) שאלת הוכחה.

6) א. $x^2 + y^2 = 20$ ב. שאלת הוכחה ג. (1) $A(-10,10)$ ג. (2) $36.87°$.
ד. לא ה. (1) $K(2,-2)$ ה. (2) $AK = 16.97$, $KN = 6.7$, $AN = 20.12$.
ה. (3) 54 יח"ש.

שאלון 471

מושגים יסודיים בפונקציות

תוכן העניינים:

מושגים יסודיים בפונקציות 275

מבוא כללי: 276

סיכום כללי: 276

שאלות: 277

תשובות סופיות: 278

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה: 279

סיכום כללי: 279

שאלות: 279

תשובות סופיות: 279

נקודות אפס ותחומי חיוביות ושליליות של פונקציה: 280

שאלות: 280

תשובות סופיות: 281

נקודות משותפות לשני גרפים: 282

שאלות: 282

תשובות סופיות: 283

סרטוט גרף על פי נתונים: 284

שאלות: 284

תשובות סופיות: 286

מבוא כללי:

סיכום כללי:

הגדרה:

פונקציה היא התאמה של מספר יחיד לכל מספר שנבחר.
המספר הנבחר נקרא בשם "משתנה חופשי" ומסומן ב- x.
המספר המתקבל נקרא בשם "משתנה תלוי" ומסומן ב- y או ב- $f(x)$.

ניתן לייצג פונקציה במספר דרכים:

- ייצוג מילולי.
- ייצוג על ידי טבלת ערכים.
- ייצוג גרפי של פונקציה.
- ייצוג אלגברי של פונקציה.

תחום ההגדרה של פונקציה:

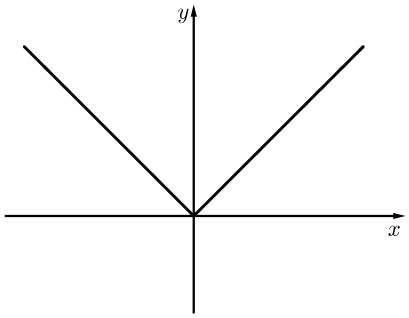
אוסף כל המספרים עבורם המוגדרת מוגדרת.

אם פונקציה איננה מתאימה אף מספר לערך מסוים של המשתנה x, אומרים שהפונקציה איננה מוגדרת עבור ערך זה של x, או כי ערך זה של x איננו שייך לתחום ההגדרה של הפונקציה.

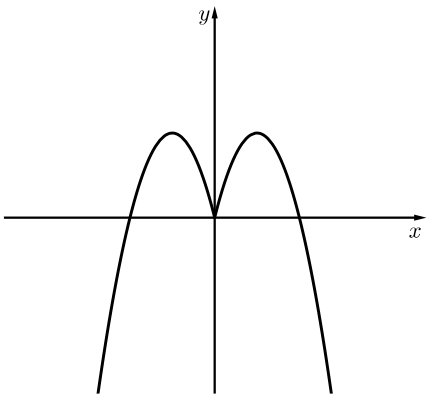
שאלות:

1) קבעו בכל אחד מהמקרים הבאים האם הגרף מייצג פונקציה. נמק.

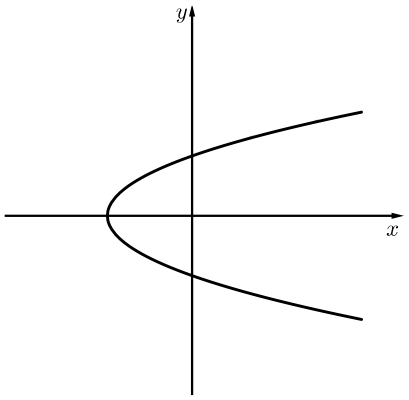
א.



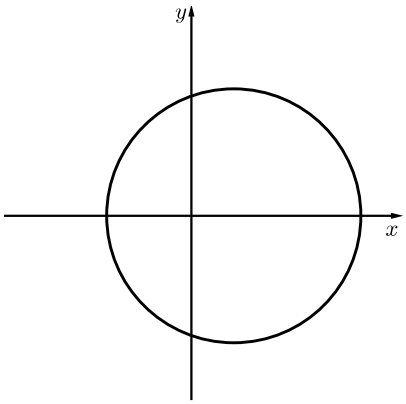
ב.



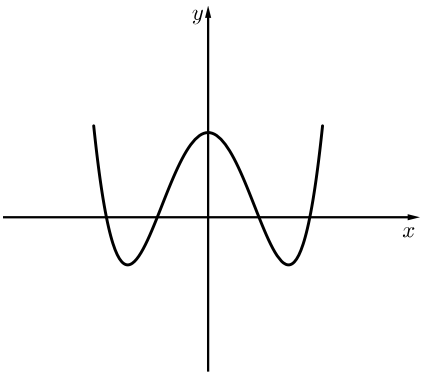
ג.



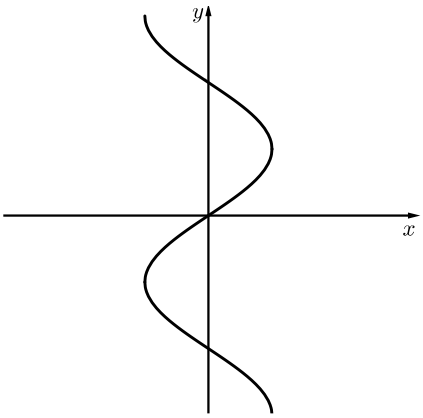
ד.



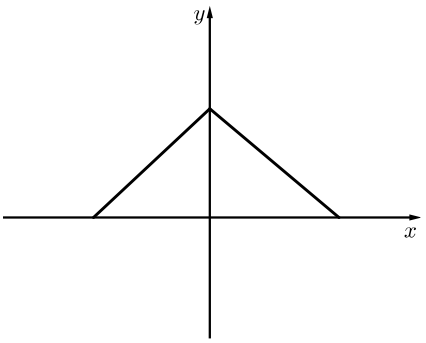
ה.



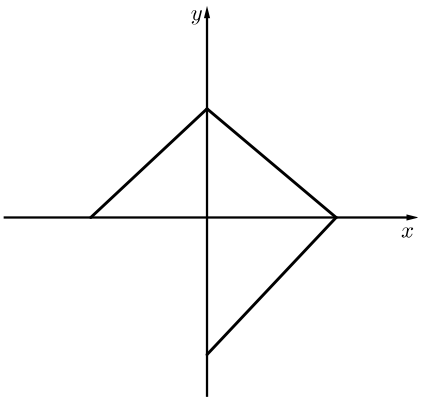
ו.



ז.



ח.



תשובות סופיות:

1) פונקציות: א', ב', ה', ז'. אינן פונקציות: ג', ד', ו', ח'.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה:

סיכום כללי:

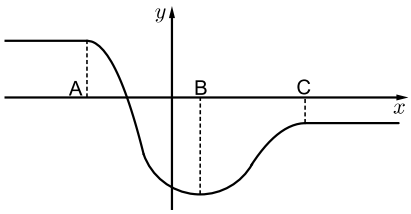
עלייה וירידה של פונקציה:

השתנות של פונקציה היא השינוי בערך ה- y (או $f(x)$) כתוצאה מהשינוי בערך ה- x.

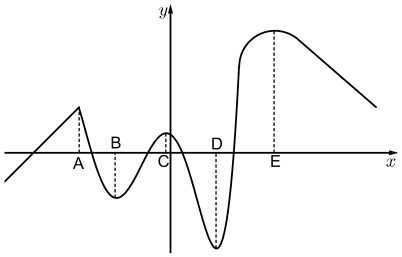
- פונקציה עולה בתחום מסוים כאשר ערך ה- y גדלים ככל שערכי ה- x גדלים.
- פונקציה יורדת בתחום מסוים כאשר ערך ה- y קטנים ככל שערכי ה- x גדלים.
- פונקציה נקראת קבועה אם ערכי ה- y נשארים קבועים ככל שערכי ה- x גדלים.

שאלות:

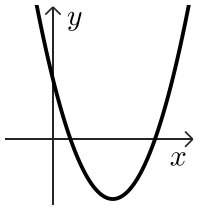
1) בסרטוט שלפניך נתון גרף של פונקציה.
כתוב את תחומי העלייה והירידה שלה.
היעזר בנקודות A, B ו-C.



2) בסרטוט שלפניך נתון גרף של פונקציה.
תאר את השתנות הפונקציה.
היעזר בנקודות A, B, C, D ו-E,
ובמילים: עולה, יורדת, קבועה, תחום.



3) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציית הפרבולה: $f(x)=(x-2)^2-2$.
רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.



תשובות סופיות:

1) כאשר $x<x_A$: הפונקציה קבועה, כאשר: $x_A<x<x_B$ הפונקציה יורדת,
כאשר $x_B<x<x_C$: הפונקציה עולה, כאשר $x>x_C$: הפונקציה קבועה.

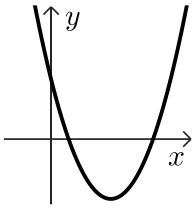
2) עולה בתחומים: לפני A, BC, DE. יורדת בתחומים: AB, CD ואחרי E.

3) עליה: $x>2$, ירידה: $x<2$.

נקודות אפס ותחומי חיוביות ושליליות של פונקציה:

שאלות:

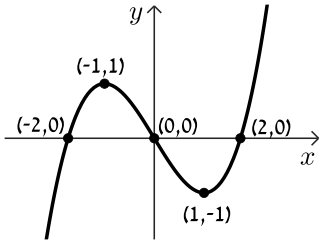
1) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציית הפרבולה: $f(x)=(x-2)^2-2$.



א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

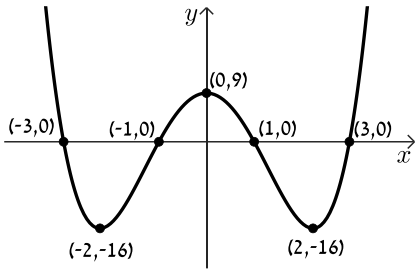
2) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.



א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

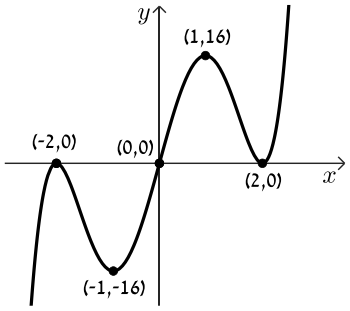
3) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.



א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

4) בסרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.



א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

תשובות סופיות:

1) א. $(3.414,0)$, $(0.585,0)$

ב. חיוביות: $x>3.414$, $x<0.585$, שליליות: $0.585<x<3.414$

2) א. עליה: $x>1$, $x<-1$, ירידה: $-1<x<1$

ב. חיוביות: $x>2$, $-2<x<0$, שליליות: $0<x<2$, $x<-2$

3) א. עליה: $x>2$, $-2<x<0$, ירידה: $0<x<2$, $x<-2$

ב. חיוביות: $x>3$, $-1<x<1$, שליליות: $1<x<3$, $x<-3$, $-3<x<-1$

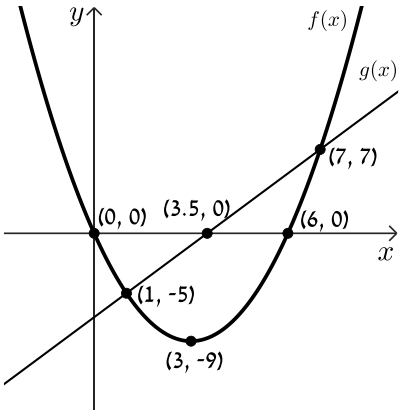
4) א. עליה: $x>2$, $-1<x<1$, $x<-2$, ירידה: $1<x<2$, $-2<x<-1$

ב. חיוביות: $x>2$, $0<x<2$, שליליות: $-2<x<0$, $x<-2$

נקודות משותפות לשני גרפים:

שאלות:

1) בסרטוט נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.



א. מהם ערכי x עבורם $f(x)$ מעל $g(x)$?

ב. מהם ערכי x עבורם $f(x)$ מתחת $g(x)$?

ג. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ עולה?

ד. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ יורדת?

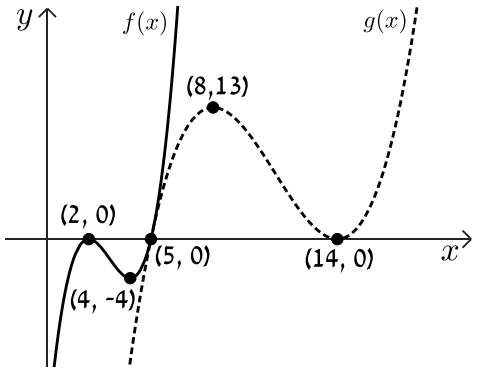
ה. מהו התחום בו שתי הפונקציות חיוביות?

ו. מהו התחום בו שתי הפונקציות שליליות?

ז. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ שלילית?

ח. מהו התחום בו $f(x)$ עולה וגם $g(x)$ חיובית?

2) בסרטוט נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.



ידוע כי לשתי הפונקציות יש נקודת חיתוך אחת בלבד.

א. מהם ערכי x עבורם $f(x)$ מעל $g(x)$?

ב. מהם ערכי x עבורם $f(x)$ מתחת $g(x)$?

ג. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ עולה?

ד. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ יורדת?

ה. מהו התחום בו שתי הפונקציות חיוביות?

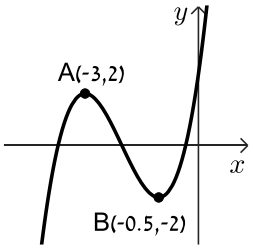
ו. מהו התחום בו שתי הפונקציות שליליות?

ז. מהו התחום בו $f(x)$ יורדת וגם $g(x)$ שלילית?

ח. מהו התחום בו $f(x)$ עולה וגם $g(x)$ חיובית?

3) בציור מתואר גרף של פונקציה.

לפונקציה מינימום מקומי בנקודה $A(-3,2)$ ומקסימום מקומי בנקודה $B\left(-\frac{1}{2},-2\right)$.



היעזרו בגרף וענו על השאלות הבאות:

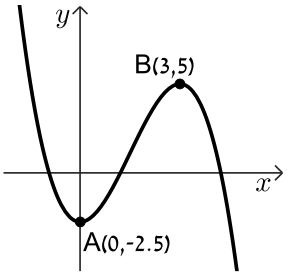
א. בכמה נקודות חותך הישר $y=3$ את גרף הפונקציה?

ב. בכמה נקודות חותך הישר $y=2$ את גרף הפונקציה?

ג. בכמה נקודות חותך הישר $y=-1$ את גרף הפונקציה?

4) בציור מתואר גרף של פונקציה.

לפונקציה מינימום מקומי בנקודה $A(0,-2.5)$ ומקסימום מקומי בנקודה $B(3,5)$.



היעזרו בגרף וענו על השאלות הבאות:

א. בכמה נקודות חותך הישר $y=6$ את גרף הפונקציה?

ב. בכמה נקודות חותך הישר $y=0$ את גרף הפונקציה?

ג. בכמה נקודות חותך הישר $y=-2.5$ את גרף הפונקציה?

תשובות סופיות:

1) א. $x<1\ ,\ x>7$ ב. $1<x<7$ ג. $x<3$ ד. אף x.

ה. $x>6$ ו. $0<x<3.5$ ז. $x<3$ ח. $x>3.5$.

2) א. $x\neq 5$ ב. אף x ג. $2<x<4$ ד. אף x.

ה. $x>14\ ,\ 5<x<14$ ו. $x<2\ ,\ 2<x<5$.

ז. $2<x<4$ ח. $5<x<14\ ,\ x>14$.

3) א. בנקודה אחת ב. ב-2 נקודות ג. ב-3 נקודות.

4) א. בנקודה אחת ב. ב-3 נקודות ג. ב-2 נקודות.

סרטוט גרף על פי נתונים:

שאלות:

1) נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 5$.

לפונקציה יש קיצון בנקודות $(2,4)$ ו-$(4,0)$.

הפונקציה יורדת בתחום: $2 < x < 4$ ועולה בתחומים: $0 < x < 2$, $x > 4$.

א. קבעו את סוג הקיצון בנקודות $(2,4)$ ו-$(4,0)$.

ב. נתון גם כי $f(0) = 0$. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נרחיב את תחום ההגדרה כך ש-$x \ge 0$ ונשאיר את אותם התנאים על הפונקציה.
סרטטו כעת סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $1 \le x \le 5$.

לפונקציה יש קיצון בנקודות $(2,-1)$ ו-$(4,1)$.

הפונקציה יורדת בתחומים: $1 < x < 2$, $4 < x < 5$ ועולה בתחום: $2 < x < 4$.

א. קבעו את סוג הקיצון בנקודות $(2,-1)$ ו-$(4,1)$.

ב. נתון גם כי $f(1) = 0$. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נרחיב את תחום ההגדרה לכל x ונשאיר את אותם התנאים על הפונקציה.
סרטטו כעת סקיצה של גרף הפונקציה.

3) הפונקציה $f(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

- $f(x)$ מוגדרת לכל x.
- הנקודות $(-2,0)$ ו-$(2,0)$ הן נקודות מינימום של הפונקציה.
- הנקודה $(0,2)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה.
- תחומי העלייה של הפונקציה הם: $-2 < x < 0$, $x > 2$.
- תחומי הירידה של הפונקציה הם: $0 < x < 2$, $x < -2$.
- נקודות המינימום הן נקודות האפס היחידות של הפונקציה.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$ על סמך הנתונים.

ב. עברו כל אחד מסעיפים (1)-(3), ענו אם הוא נכון/לא נכון/אי אפשר לדעת. נמקו את קביעותיכם.

(1) הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

(2) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(3) הפונקציה $f(x)$ היא לא זוגית ולא אי-זוגית.

4) נתונה פונקציה $f(x)$ ולה נקודת קיצון אחת $A(3,4)$.

הנקודה $B(-1,8)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

בנוסף ידוע כי הפונקציה מוגדרת בכל ציר המספרים וניתן לסרטט אותה במשיכת עט אחת.

השלימו 'נכון'/'לא נכון'/'לא ניתן לדעת' בכל אחת מן הטענות הבאות:

א. הנקודה $A(3,4)$ היא נקודת המקסימום של הפונקציה.

ב. הנקודה $C(2,3)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ג. הנקודה $D(2,5)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ד. הנקודה $E(0,8)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ה. הנקודה $F(-2,4)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

ו. הפונקציה $f(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.

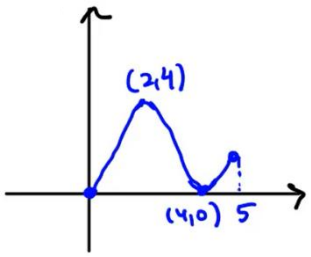
ז. הפונקציה $f(x)$ יורדת כאשר $x < 3$ ועולה כאשר $x > 3$.

ח. לפונקציה $f(x)$ יש 2 נקודות חיתוך עם הצירים.

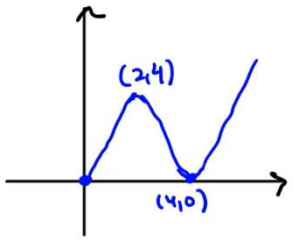
תשובות סופיות:

1) א. $\max(2,4)\ ,\ \min(4,0)$

ב.

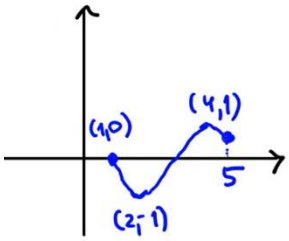


ג.

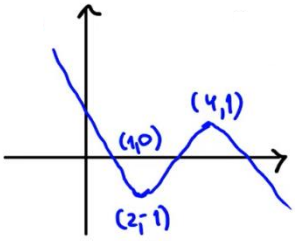


2) א. $\max(4,1)\ ,\ \min(2,-1)$

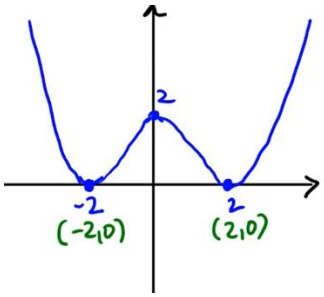
ב.



ג.



3) א.



ב. (1) אי אפשר לדעת ב. (2) לא נכון ב. (3) אי אפשר לדעת, יתכן שהיא זוגית.

4) א. לא נכון ב. לא נכון ג. לא ניתן לדעת ד. לא נכון ה. לא נכון
ו. לא נכון ז. נכון ח. לא נכון

שאלון 471

פונקציית החזקה עם מעריך טבעי

תוכן העניינים:

פונקציית החזקה עם מעריך טבעי 287

סיכום כללי: 288

שאלות: 289

תשובות סופיות: 293

פונקציית החזקה עם מעריך טבעי:

סיכום כללי:

צורה כללית של פונקציית החזקה: $f(x)=x^n$ כאשר נעסוק ב-n טבעי בלבד.

כללים עבור כל n טבעי:

- הפונקציה עוברת בראשית הצירים $(0,0)$.
- בתחום $x>1$ או $x<-1$ ככל ש-n יותר גדול, קצב השינוי של הפונקציה יותר גדול.
- בתחום $-1<x<1$ ככל ש-n יותר גדול, הפונקציה יותר קרובה לציר ה-x.

עבור n טבעי זוגי:

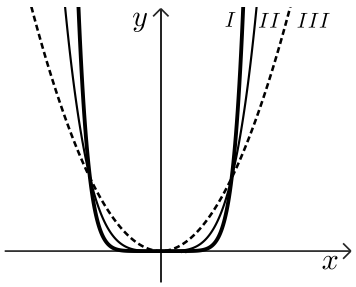
- קיימת סימטריה סביב ציר ה-y.
- הפונקציה מתחילה מלמעלה (באינסוף) ומסתיימת למעלה (באינסוף).
- לפונקציה יש נקודות מינימום בראשית הצירים $(0,0)$.

עבור n טבעי אי-זוגי:

- קיימת סימטריה סביב ראשית הצירים $(0,0)$.
- הפונקציה מתחילה מלמטה (במינוס אינסוף) ומסתיימת למעלה (באינסוף).
- לפונקציה יש נקודת פיתול בראשית הצירים $(0,0)$ - למעט כאשר $n=1$.

שאלות:

1) נתונות הפונקציות: $h(x)=x^2$, $g(x)=x^4$, $f(x)=x^8$.



לפניכם גרפים של שלוש פונקציות I-III.

א. התאימו לכל גרף מבין הגרפים I-III את הפונקציה המתאימה.

ב. עבור הטענות הבאות השלימו: < (גדול מ-), > (קטן מ-), = (שווה):

(1) $h(-1)$ ___ $f(1)$

(2) $h(-0.1)$ ___ $f(-0.1)$ ___ $g(-0.1)$

(3) $h(1)$ ___ $f(1)$ ___ $g(1)$

(4) $h(2)$ ___ $f(2)$ ___ $g(2)$

(5) $h(0)$ ___ $f(0)$ ___ $g(0)$

2) לפניכם גרפים של הפונקציות: $h(x)=x^n$, $f(x)=x^4$ כאשר $n\neq 4$ מספר טבעי וזוגי.

א. קבעו ביחס לכל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או לא. נמקו תשובתכם.

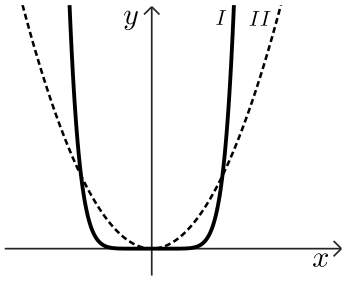
(1) אם: $f(0.5)>h(0.5)$ אז $n>4$.

(2) אם: $f(5)>h(5)$ אז $n>4$.

(3) $h(5)=f(-5)$.

(4) אם: $h(-2)=64$ אז $n=6$.

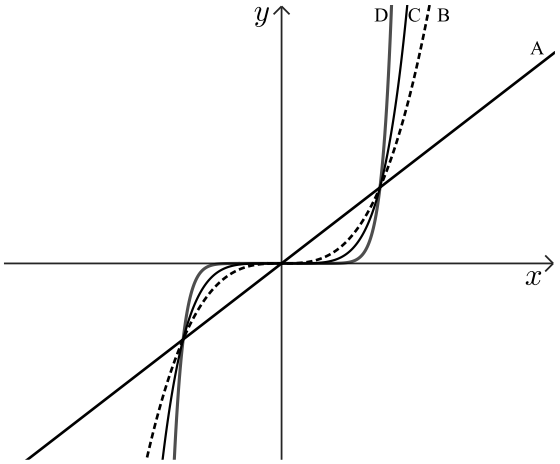
ב. נתון: $n>4$. התאימו לכל גרף מבין הגרפים I-II את הפונקציה המתאימה.



3) נתונות הפונקציות: $f(x)=x$, $k(x)=x^{11}$, $g(x)=x^5$, $h(x)=x^3$.

לפניכם גרפים של ארבע פונקציות A-D.

א. התאימו לכל גרף מבין הגרפים A-D את הפונקציה המתאימה.



ב. עבור הטענות הבאות השלימו: < (גדול מ-), > (קטן מ-), = (שווה):

(1) $k(-0.1)____h(-0.1)____f(-0.1)____g(-0.1)$

(2) $k(0.1)____h(0.1)____f(0.1)____g(0.1)$

(3) $k(2)____h(2)____f(2)____g(2)$

(4) $k(0)____h(0)____f(0)____g(0)$

(5) $|h(5)|____|h(-5)|$

4) נתונות הפונקציות: $h(x)=x^n$, $f(x)=x^5$ כאשר $n>1$ מספר טבעי ואי-זוגי.

א. קבעו ביחס לכל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או לא. נמקו את תשובתכם.

(1) אם: $f(5)>h(5)$ אז: $n>5$.

(2) אם: $f(0.5)>h(0.5)$ אז: $n>5$.

(3) אם: $f(-0.5)>h(-0.5)$ אז: $n>5$.

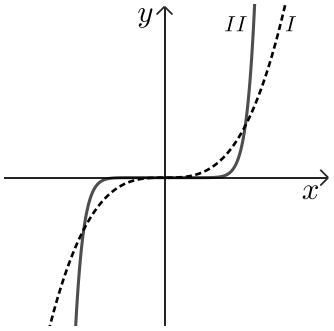
(4) תמיד מתקיים: $h(5)=f(-5)$.

(5) אם: $h(3)=-27$ אז: $n=3$.

ב. נתון: $n>5$.

התאימו לכל גרף מבין גרפים I-II

את הפונקציה המתאימה.



5) לפניכם רשימת היגדים המתאימים לפונקציית החזקה: $f(x)=x^n$.

עבור כל היגד, רשמו האם הוא מתאים לפונקציית חזקה עם מעריך זוגי (n זוגי) או לפונקציית חזקה עם מעריך אי-זוגי (n אי-זוגי).

א. הפונקציה עולה לכל x.

ב. לגרף הפונקציה יש נקודת פיתול.

ג. גרף הפונקציה עובר בנקודה $(-1,1)$.

ד. גרף הפונקציה עובר בנקודה $(0,0)$.

ה. גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה-y.

ו. תחום החיוביות של הפונקציה $x>0$.

ז. גרף הפונקציה סימטרי ביחס לראשית הצירים.

ח. הפונקציה יורדת כאשר $x<0$.

ט. לגרף הפונקציה יש נקודת מינימום.

6) נתונים היגדים המתייחסים לפונקציה מהמשפחה: $f(x)=a\cdot x^n$.

עבור כל אחד מההיגדים הציעו דוגמה לפונקציה מתאימה במידת האפשר.

א. הפונקציה עולה לכל x.

ב. כאשר $x\to\infty$ וגם כאשר $x\to-\infty$ מתקיים: $f(x)\to-\infty$.

ג. הפונקציה עוברת ברביעים השני והרביעי בלבד.

ד. הפונקציה היא אי-שלילית לכל x.

ה. כאשר $x\to\infty$ מתקיים: $f(x)\to-\infty$ וכאשר $x\to-\infty$ מתקיים: $f(x)\to\infty$.

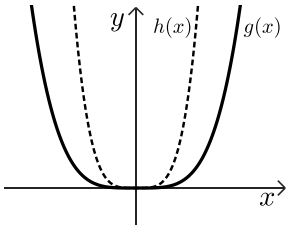
ו. הפונקציה עוברת ברביעים השלישי והרביעי בלבד.

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים מופיעים הגרפים של שתי פונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$.

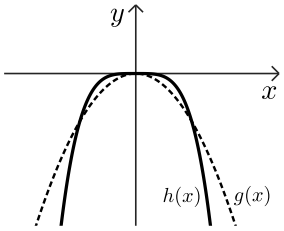
שתי הפונקציות הן ממשפחת הפונקציות: $f(x)=a\cdot x^n$.

הציעו ביטוי אלגברי מתאים לכל אחת מן הפונקציות בכל מקרה.

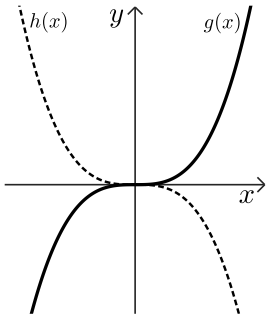
א.



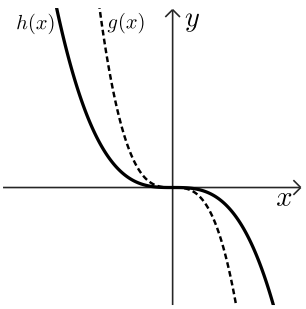
ב.



ג.



ד.



תשובות סופיות:

1) א. גרף 1 - $f(x)$, גרף 2 - $g(x)$, גרף 3 - $h(x)$.

ב. (1) $h(-1)=f(1)$

(2) $h(-0.1)>f(-0.1)<g(-0.1)$

(3) $h(1)=f(1)=g(1)$

(4) $h(2)<f(2)>g(2)$

(5) $h(0)=f(0)=g(0)$

2) א. (1) נכונה א. (2) לא נכונה א. (3) לא נכון א. (4) נכונה.

ב. גרף 1 - $h(x)$, גרף 2 - $f(x)$.

3) א. גרף A - $f(x)$, גרף B - $h(x)$, גרף C - $g(x)$, גרף D - $k(x)$.

ב. (1) $k(-0.1)>h(-0.1)>f(-0.1)<g(-0.1)$

(2) $k(0.1)<h(0.1)<f(0.1)>g(0.1)$

(3) $k(2)>h(2)>f(2)<g(2)$

(4) $k(0)=h(0)=f(0)=g(0)$

(5) $|h(5)|=|h(-5)|$

4) א. (1) לא נכונה א. (2) נכונה א. (3) לא נכונה א. (4) לא נכונה.

א. (5) לא נכונה ב. גרף 1 - $f(x)$, גרף 2 - $h(x)$.

5) א. אי זוגי ב. אי זוגי ג. זוגי ד. זוגי וגם אי זוגי ה. זוגי.

ו. אי זוגי ז. אי זוגי ח. זוגי ט. זוגי.

6) א. $f(x)=x^3, f(x)=2x^3, f(x)=10x^5$ ב. $f(x)=-x^2, f(x)=-8x^4$

ג. $f(x)=-x^3, f(x)=-\frac{1}{2}x^7$ ד. $f(x)=x^2, f(x)=3x^{30}$

ה. אותן פונקציות כמו בסעיף ג' ו. אותן פונקציות כמו בסעיף ב'.

7) א. $g(x)=4x^4, h(x)=8x^4$ ב. $g(x)=-7x^2, h(x)=-7x^4$

ג. $g(x)=2x^3, h(x)=-2x^3$ ד. $g(x)=-10x^3, h(x)=-6x^3$

שאלון 471

זוגיות ואי-זוגיות של פונקציות

תוכן העניינים:

פונקציה זוגית ואי-זוגית:.....295

סיכום כללי:.....295

שאלות:.....295

תשובות סופיות: 300

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

שאלות:

1) קבעו אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

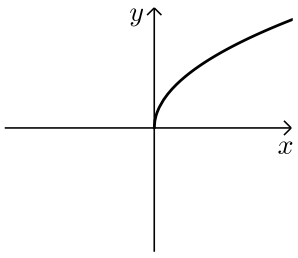
א. $f(x)=3x-5$ ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$ ד. $f(x)=x^3-2x^2$

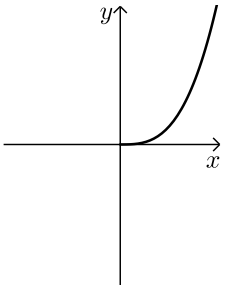
ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$ ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלימו את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

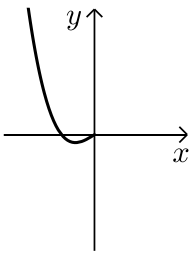
א.



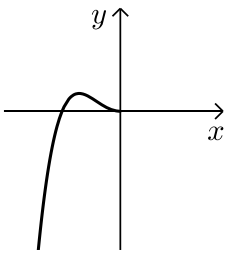
ב.



ג.

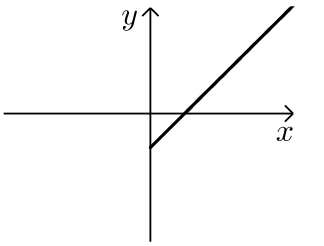


ד.

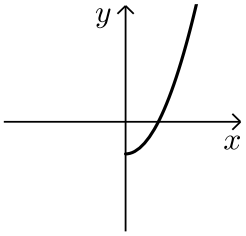


3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלימו את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

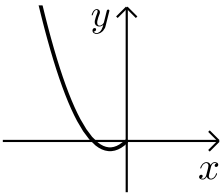
א.



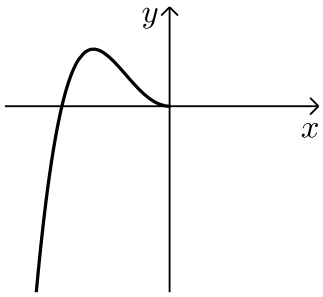
ב.



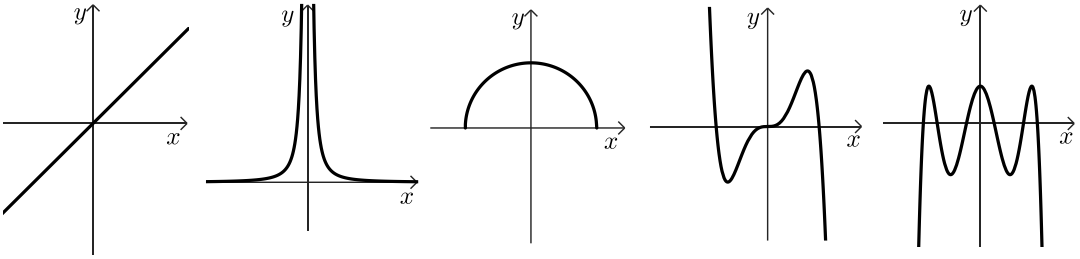
ג.



ד.



4) לפניכם סרטוטים של פונקציות זוגיות ופונקציות אי-זוגיות.
על סמך הסרטוטים קבעו אילו מהפונקציות הבאות הן זוגיות ואילו הן אי-זוגיות.



(1) (2) (3) (4) (5)

5) השלימו את הטבלה שלפניכם אם ידוע כי $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	14			-5	

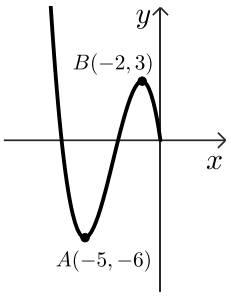
6) נתונה פונקציה זוגית $f(x)$ המקיימת:

- $f(6)=6$.
- $f(-3)=-4$.
- הפונקציה עוברת בראשית הצירים.

היעזרו בנתונים והשלימו את כל הערכים בטבלה הבאה:

x	-9	-6		0		6	9
$f(x)$	52		-4		-4		

7) לפניכם סרטוט גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x\le 0$.



$f(x)$ מוגדרת לכל x והיא פונקציה אי-זוגית.

הנקודות A ו-B המופיעות בסרטוט הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

השלימו את החסר בסעיפים הבאים:

א. שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$ הן: _____ ו-_____.

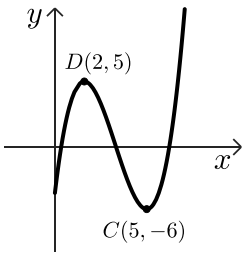
ב. שיעורי נקודות המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הן: _____ ו-_____.

ג. הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום: _____.

ד. הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום: _____.

ה. הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה-x ב: ____ נקודות.

8) לפניכם סרטוט גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x\ge 0$.



$f(x)$ מוגדרת לכל x והיא פונקציה זוגית.

נקודות C ו-D המופיעות בסרטוט הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

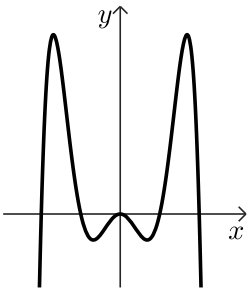
קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה, נמקו קביעתכם.

א. לפונקציה $f(x)$ שלוש נקודות מינימום.

ב. הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה-x ב-4 נקודות.

ג. הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום: $-5\le x\le 2$.

9) לפניכם גרף הפונקציה $g(x)$.

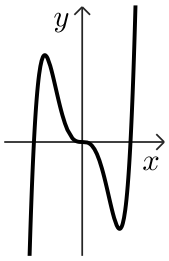


א. בהסתמך על האיור, קבעו האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית.

ב. הנקודות $(2,0)$, $(0.5,-1)$, $(-1.5,6)$ נמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$.

רשמו שיעורי 3 נקודות נוספות הנמצאות על גרף הפונקציה.

10) לפניכם גרף הפונקציה $h(x)$.

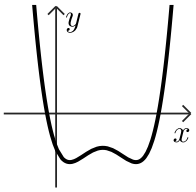


א. האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית?

ב. הנקודות $(-2,0)$, $(1,-1)$, $(1.5,-2.5)$ נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

רשמו שיעורי 3 נקודות נוספות הנמצאות על גרף הפונקציה.

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=5(x-1)^4-5(x-1)^2-3$.



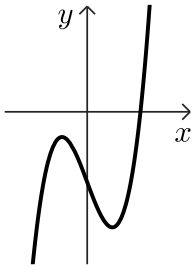
א. האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=f(x+a)$.

האם קיים ערך של a עבורו הפונקציה $g(x)$ תהיה זוגית?

אם כן מהו? נמקו תשובתכם.

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=5x^3-5x-3$.



א. האם הפונקציה זוגית, אי זוגית או לא זוגית ולא אי זוגית?

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=f(x)+a$.

האם קיים ערך של a עבורו הפונקציה $g(x)$ תהיה זוגית או אי-זוגית?

אם כן מהו? נמקו תשובתכם.

13) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הסכום של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ב. המכפלה של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. המכפלה של שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. המכפלה של פונקציה אי-זוגיות ופונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

14) קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

ה. פונקציה קבועה היא תמיד פונקציה זוגית.

ו. אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל x, אז בהכרח $f(0)=0$.

ז. פונקציה העולה בכל תחום הגדרתה יכולה להיות פונקציה זוגית.

ח. אם $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית המוגדרת לכל x, אז יתכן כי $f(0)=1$.

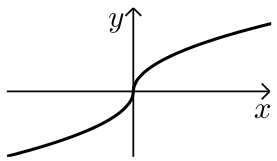
ט. אם לפונקציה אי-זוגית יש נקודת מינימום ב-$x=3$, אז יש לה נקודת מקסימום ב-$x=-3$.

תשובות סופיות:

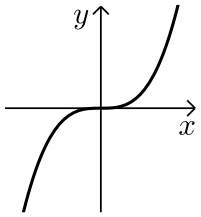
1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

2) להלן הגרפים:

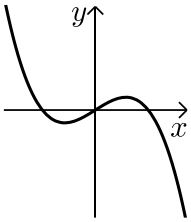
א.



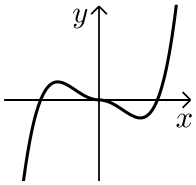
ב.



ג.

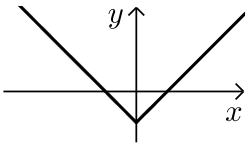


ד.

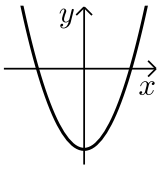


3) להלן הגרפים:

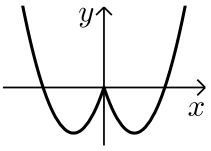
ב.



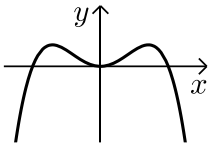
ב.



ג.



ד.



4) גרף 1 - פונקציה זוגית, גרף 2- פונקציה אי זוגית, גרף 3 - פונקציה זוגית, גרף 4 - פונקציה זוגית, גרף 5 - פונקציה אי זוגית.

5)

x	-9	-6	**-3**	0	**3**	6	9
$f(x)$	52	**6**	-4	**0**	-4	**6**	**52**

6)

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	14	**5**	**0**	-5	**-14**

7) א. $A(-5,-6)$ ו-$(2,-3)$ ב. $B(-2,3)$ ו-$(5,6)$ ג. $-5 < x < -2\ ,\ 2 < x < 5$.

ד. $x < -5\ ,\ -2 < x < 2\ ,\ x > 5$ ה. 5.

8) א. נכונה ב. לא נכונה ג. לא נכונה.

9) א. זוגית ב. $(1.5,6)\ ,\ (-0.5,-1)\ ,\ (-2,0)$.

10) א. אי זוגית ב. $(-1.5,2.5)\ ,\ (-1,1)\ ,\ (2,0)$.

11) א. לא זוגית ולא אי זוגית ב. כן, $a=1$.

12) א. לא זוגית ולא אי זוגית ב. כן, $a=3$.

13) ראו פתרון בסרטון הוידאו.

14) א. נכונה ב. לא נכונה ג. לא נכונה ד. לא נכונה ה. נכונה.

שאלון 471

טרנספורמציות של פונקציות

תוכן העניינים:

טרנספורמציות של פונקציות..... 301

סיכום כללים: 302

הוספת קבוע לפונקציה: 304

שאלות:..... 304

הכפלת פונקציה בקבוע: 305

שאלות:..... 305

הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:..... 306

שאלות:..... 306

שיקוף פונקציה ביחס לצירים:..... 307

שאלות:..... 307

תשובות סופיות: 308

פונקצית הערך המוחלט:..... 311

שאלות:..... 311

תשובות סופיות: 311

סיכום כללים:

- הוספת קבוע לפונקציה:

בהינתן פונקציה $y=f(x)$, כל הנקודות שעל גרף הפונקציה: $g(x)=f(x)+k$ מתקבלת ע"י הוספת קבוע k לערך ה- y. במילים אחרות, אם נקודה (x_0,y_0) נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ אז הנקודה (x_0,y_0+k) תִּמָּצֵא על גרף הפונקציה $g(x)$.

הוספת קבוע מעלה ומורידה את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- k יחידות.

- הכפלת פונקציה בקבוע:

בהינתן פונקציה $y=f(x)$ ועליה נקודה כללית (x_0,y_0), הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$ מתקבלת ע"י הכפלת $f(x)$ בקבוע k $(k\neq 0)$. נקודה על $g(x)$ תהיה מהצורה: $(x_0,k\cdot y_0)$. הכפלת פונקציה בקבוע חיובי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית. הכפלת פונקציה בקבוע שלילי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית והופכת אותו ביחס לציר ה- x.

- הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:

כדי להזיז פונקציה $y=f(x)$, k יחידות ימינה נציב: $g(x)=f(x-k)$

וכדי להזיז אותה שמאלה ב- k יחידות נציב: $g(x)=f(x+k)$.

- מתיחה וכיווץ אופקיים של פונקציה:

כדי לכווץ פונקציה כלשהי $y=f(x)$ פי k (מניחים $k>1$) נציב: $g(x)=f(k\cdot x)$.

כדי להרחיב פונקציה כלשהי $y=f(x)$ פי k (מניחים $k>1$) נציב: $g(x)=f(x/k)$.

- שיקוף גרף פונקציה ביחס לציר y:

כדי לשקף את גרף הפונקציה $y=f(x)$ סביב ציר ה- y נכפיל את ערך ה- x פי 1-.

הגרפים של הפונקציות $y_1=f(x)$ ו- $y_2=f(-x)$ מהווים שיקוף זה לזה ביחס לציר ה- y.

- ערך מוחלט של פונקציה:

הערך המוחלט של: $y=f(x)$, מתקבל ע"י לקיחת ערכי ה- y בגודלם בלבד.

במילים אחרות, הערך המוחלט של $f(x)$ הוא: $y=|f(x)|$. הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $|f(x)|$ זהים לחלוטין בערכם החיובי (ז"א בחלקם שמעל לציר ה- x) וסימטריים לחלוטין בערכם השלילי ביחס לציר ה- x כאשר הגרף של $f(x)$ נמצא מתחת לציר ה- x והגרף של $|f(x)|$ נמצא מעל לציר ה- x.

הוספת קבוע לפונקציה:

שאלות:

1) סרטטו במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ואת הגרף $y=f(x)+k$ עבור $k=1$ ו- $k=-4$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=-2x^2$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+b$

א. מהו ערך הפרמטר b עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יעבור בנקודה $(2,10)$?

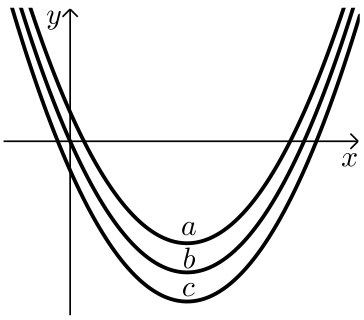
ב. מצאו את ערך הפרמטר b עבורו $g(x)$ תקבל ערך מקסימלי של 4.

ג. מצאו את ערך הפרמטר b עבורו $g(x)$ תקבל ערך מקסימלי של 3-.

3) לפניכם שלוש גרפים של פונקציות:

$h(x)=x^2-6x+2$, $g(x)=x^2-6x-2$, $f(x)=x^2-6x$.

התאימו כל גרף מבין הגרפים a, b ו- c לכל פונקציה:



4) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x$.

מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+A$

כאשר A הוא פרמטר השונה מאפס.

א. הביעו באמצעות A את הפונקציה $g(x)$.

ב. מהו A עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יהיה נמוך משל $f(x)$ ב-5 יחידות?

ג. מהו A עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יחתוך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=3$?

הכפלת פונקציה בקבוע:

שאלות:

5) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$, $h(x)=4x^2$.

6) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$, $h(x)=\frac{1}{4}x^2$.

7) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=x^2$, $g(x)=-2x^2$, $h(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x^3-x$ ומגדירים גם את הפונקציה: $g(x)=-f(x)$.

א. מצאו את נקודות הקיצון ונקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. התייחסו לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ וענה על השאלות הבאות:

i. הוכיחו כי לשתי הפונקציות אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

ii. מה הקשר בין נקודת החיתוך עם ציר ה- y של כל פונקציה?

iii. מה הקשר בין נקודות הקיצון של כל פונקציה?

iv. האם, ואם כן – כיצד, משתנים תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ ביחס ל-$f(x)$? נמקו.

הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:

שאלות:

9) לפניכם הפונקציה: $f(x)=x^2$.

סרטטו במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)$ ואת הגרפים של הפונקציות: $g(x)=f(x-2)$ ו- $h(x)=f(x+3)$.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2$.

א. כתבו ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ 3 יחידות ימינה ו-4 יחידות למעלה.

ב. כתבו ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ 4 יחידות שמאלה ו-2 יחידות למטה.

ג. כתבו ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ $\frac{1}{2}$ יחידה שמאלה ולמעלה.

11) נתונה פונקציה $f(x)=x^2$. מזיזים את הפונקציה ומקבלים: $g(x)=f(x+a)+b$ כאשר a ו- b הם פרמטרים השונים מאפס.

א. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי: $g(x)=x^2+2x$.

ב. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי: $g(x)=x^2-4x+7$.

שיקוף פונקציה ביחס לצירים:

שאלות:

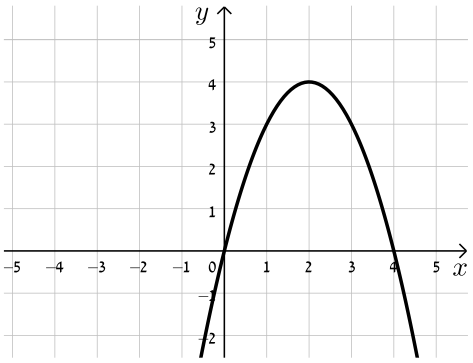
12) סרטטו במערכת צירים אחת את הפונקציות: $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=f(-x)$

והראו כי ציר ה- y מהווה את ציר הסימטריה בין הגרפים.

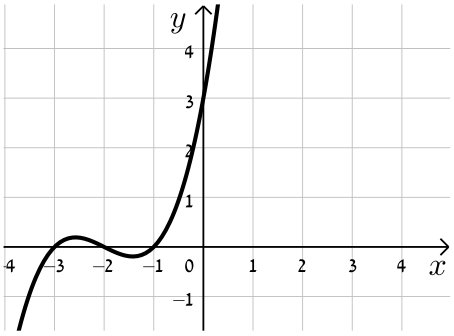
13) לפניכם סרטוטים של פונקציות שונות.

הוסיפו לכל מערכת צירים גרף משוקף ביחס לציר ה- y.

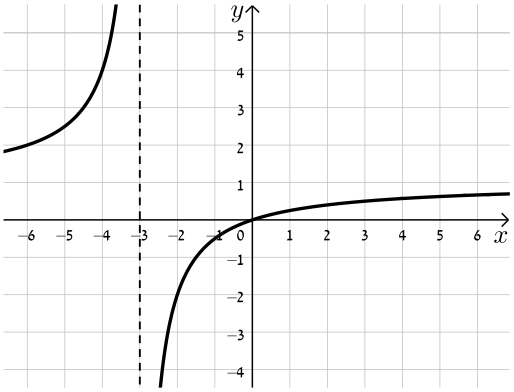
א.



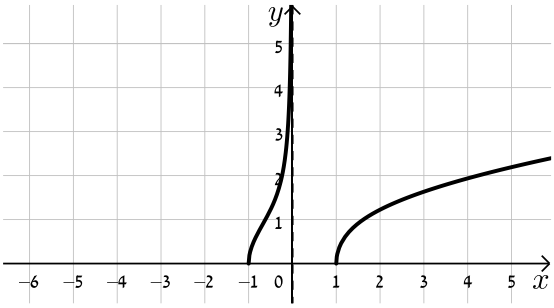
ב.



ג.



ד.



תשובות סופיות:

הערה: כל הסרטוטים לשאלות המתאימות מופיעים במרוכז בסוף התשובות.

1) סרטוט בסוף.

2) א. $b=18$ ב. $b=4$ ג. $b=-3$.

3) ההתאמה: $h(x)\to a$, $g(x)\to c$, $f(x)\to b$.

4) א. $g(x)=x^3-4x+A$ ב. $A=-5$ ג. $A=3$.

5) סרטוט בסוף.

6) סרטוט בסוף.

7) סרטוט בסוף.

8) א. נקודות קיצון: $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},0.192\right)$, $\min\left(\frac{1}{\sqrt{12}},-0.192\right)$, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ב. סרטוט בסוף ג. i. הוכחה ii. זו אותה נקודה iii. שיעורי ה- x של נקודות הקיצון זהים, אך שיעורי ה- y הפוכים בסימנם וסוג הקיצון הפוך. iv. כל תחומי העלייה והירידה מתהפכים.

9) סרטוט בסוף.

10) א. $g(x)=x^2-6x+13$ ב. $g(x)=x^2+8x+14$

ג. $g(x)=x^2+x+\frac{3}{4}$.

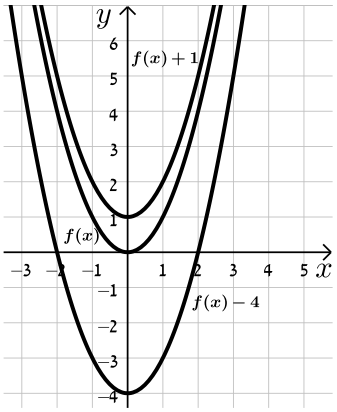
11) א. $a=1$, $b=-1$ ב. $a=-2$, $b=3$.

12) סרטוט בסוף.

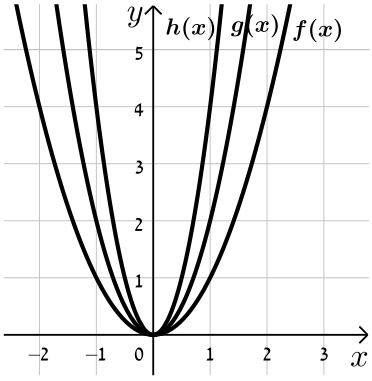
13) סרטוטים בסוף.

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

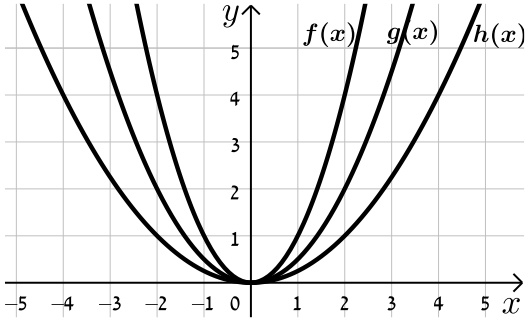
1)



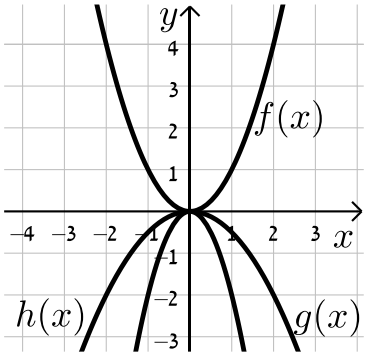
5)



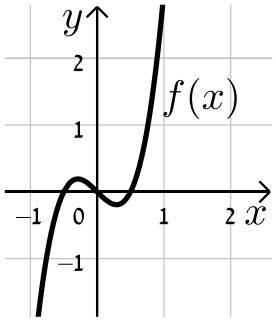
6)



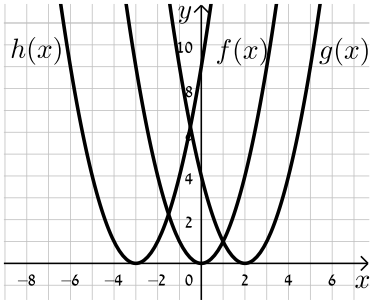
7)



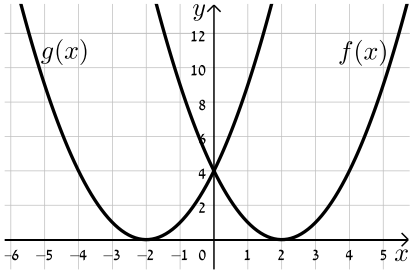
8)



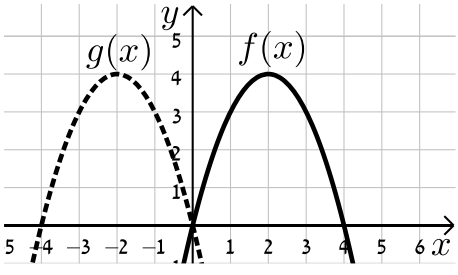
9)



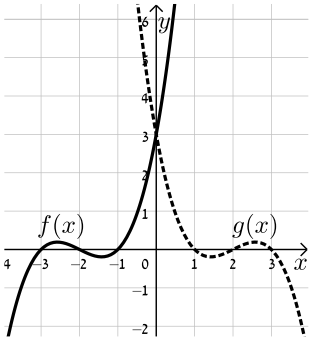
12)



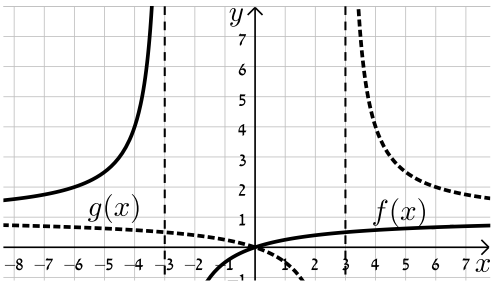
13) סעיף א



13) סעיף ב'



13) סעיף ג'



פונקציית הערך המוחלט:

שאלות:

1) נתונות הפונקציות: $f(x)=x$ ו- $g(x)=|x|$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים עם ציר ה- x.

ב. סרטטו את שני הגרפים במערכת צירים אחת והסבר מה ההבדל ביניהם.

ג. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=x-2$?

ד. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=3(x-2)$?

ה. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=3x-2$?

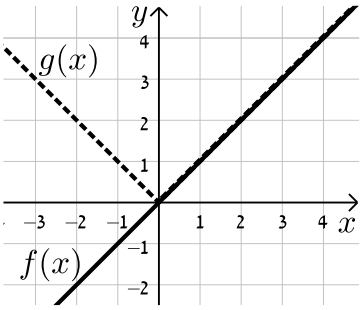
2) סרטטו במערכת צירים אחת את זוגות הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2-2x$ ו- $g(x)=|x^2-2x|$.

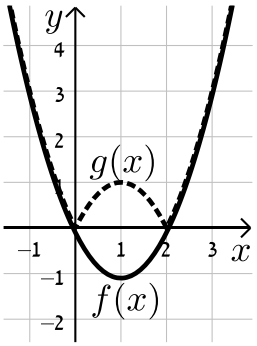
ב. $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=|x^3|$.

תשובות סופיות:

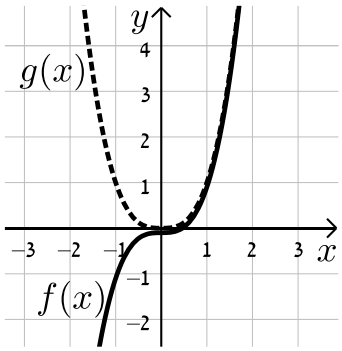
1) א. $(0,0)$ ב. להלן סרטוט:



2) א. להלן סרטוט:



ב. להלן סרטוט:



שאלון 471

אנליזה של פונקצית פולינום

תוכן העניינים:

כללי הגזירה: 313
סיכום כללי: 313
שאלות: 313
תשובות סופיות: 314
שיפוע משיק לגרף הפונקציה: 315
סיכום כללי: 315
שאלות: 315
תשובות סופיות: 316
מציאת נקודת השקה לפי שיפוע משיק: 317
סיכום כללי: 317
שאלות: 317
תשובות סופיות: 317
מציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה: 318
סיכום כללי: 318
שאלות: 318
תשובות סופיות: 319
חקירת פונקצית פולינום: 320
סיכום כללי: 320
שאלות: 322
תשובות סופיות: 326
חקירה בתחום סגור: 328
סיכום כללי: 328
שאלות: 329
תשובות סופיות: 329
שאלות עם פרמטרים: 330
סיכום כללי: 330
שאלות: 330

כללי הגזירה:

סיכום כללי:

פונקצית הנגזרת:

בהינתן הפונקציה $y = x^n$ כאשר n מספר טבעי, הנגזרת שלה תחושב: $y' = n \cdot x^{n-1}$.

כללים:

- בפונקציה עם מקדם: $y = Ax^n$, נכפול את הנגזרת פי מקדם זה: $y' = A \cdot nx^{n-1}$.
- בפונקציה עם מספר מחוברים נגזור כל מחובר בנפרד.
- נגזרת של מספר קבוע היא 0.

שאלות:

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y = x^2$ ב. $y = x^3$ ג. $y = x^6$

ד. $y = 4x^3$ ה. $y = 12x^4$ ו. $y = \frac{1}{2}x^2$

ז. $y = 7$ ח. $y = -3x^2$ ט. $y = -\frac{1}{3}x^3$

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 7x^2 + 23x - 6$ ב. $f(x) = 6x^2 + 8x + 4$

ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3$ ד. $f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y = 5x^2 - 3x$ ב. $y = 3x^3 + 14x$

ג. $y = \frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5$ ד. $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{7}x^5$

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y=(x-2)(x+3)$ ב. $y=x^2(3-x)$

ג. $y=(x+2)^2$ ד. $y=3x(x-1)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $y'=2x$ ב. $y'=3x^2$ ג. $y'=6x^5$ ד. $y'=12x^2$ ה. $y'=48x^3$

ו. $y'=x$ ז. $y'=0$ ח. $y'=-6x$ ט. $y'=-x^2$.

2) א. $f'(x)=14x+23$ ב. $f'(x)=12x+8$ ג. $f'(x)=x-3x^2$ ד. $f'(x)=\frac{1}{2}x^3$

3) א. $y'=10x-3$ ב. $y'=9x^2+14$ ג. $y'=2x^5-2x^4$

ד. $y'=\frac{2}{3}x^3-\frac{15}{7}x^4$.

4) א. $y'=2x+1$ ב. $y'=6x-3x^2$ ג. $y'=2x+4$

ד. $y'=9x^2-12x+3$.

שיפוע משיק לגרף הפונקציה:

סיכום כללי:

הנגזרת של פונקציה בנקודה שבה $x=x_0$ מסוים תיתן את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה.
מקובל לקרוא לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה גם בשם **שיפוע הפונקציה** בנקודה שבה $x=x_0$.
מתמטית נרשום: $f'(x_0)=m$.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $y=x^2$.

א. מצאו את נגזרת הפונקציה.

ב. חשבו את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x=3$.

2) נתונה הפונקציה: $y=5x^2-2x$.

א. מצאו את נגזרת הפונקציה.

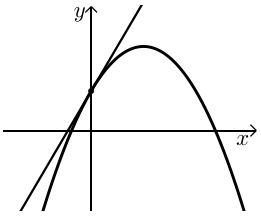
ב. חשבו את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x=-2$.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-4x+2$.

חשבו את: $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(-1)$, $f'(3)$.

4) חשבו את שיפוע המשיק לפונקציה $y=2x^4-x$ בנקודה $x=1$.

5) נתונה הפונקציה: $y=-x^2+6x+8$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- y.

תשובות סופיות:

1 א. $y'=2x$ ב. $y'(3)=6$.

2 א. $y'=10x-2$ ב. $y'(-2)=-22$.

3 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2.5$, $f'(-1)=2$, $f'(3)=50$.

4 $m=y'(1)=7$.

5 א. $(0,8)$ ב. $m=6$.

מציאת נקודת השקה לפי שיפוע המשיק:

סיכום כללי:

כדי למצוא נקודת השקה בהינתן שיפוע הפונקציה (או שיפוע המשיק לגרף הפונקציה) בנקודה זו, נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לשיפוע הנתון.
מהמשוואה המתקבלת נמצא את שיעור/י ה- x של נקודות ההשקה.
נציב את שיעורי ה- x שהתקבלו מפתרון המשוואה בפונקציה המקורית $f(x)$
כדי למצוא את שיעור ה- y ולכתוב את שיעורי הנקודות המלאים.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 + 9x - 3$.

א. מצאו נקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא 17.

ב. מצאו נקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא 0.

2) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 9x$.

א. חשבו את $f'(1)$.

ב. חשבו את ערכי x עבורם מתקיים: $f'(x) = 3$.

3) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-5)(x+1)^2$.

א. מצאו את שיעורי הנקודות שבהן שיפוע הפונקציה הוא אפס.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא -12.

תשובות סופיות:

1) א. $(2,23)$ ב. $\left(-2\frac{1}{4},-13\frac{1}{8}\right)$.

2) א. $f'(1) = -6$ ב. $x = \pm 2$.

3) א. $(-1,0)$, $(3,-32)$ ב. $(1,-16)$.

מציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה:

סיכום כללי:

כדי למצוא משוואת משיק נעזר בנוסחה לכתיבת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$

כאשר (x_1,y_1) הם שיעורי נקודה ההשקה ו- m הוא שיפוע הישר.

- בשאלות שבהן נקודת ההשקה נתונה, נמצא את השיפוע ע"י הנגזרת (הצבת הנקודה בנגזרת).
- בשאלות שבהן השיפוע נתון, נמצא את נקודת ההשקה ע"י השוואת הנגזרת לשיפוע הנתון.

שאלות:

1) לפונקציה $y=3x^2$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x=2$.
כתבו את משוואתו.

2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y=\frac{x^3+12x}{3}$ בנקודה שבה $x=-1$.

3) מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $y=2x^2+5x-3$ בנקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x.

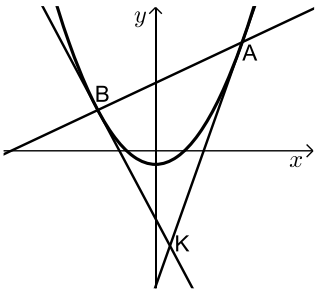
4) לגרף הפונקציה $y=3x^2-5x+8$ מעבירים משיק ששיפועו 7.
א. מצאו את שיעורי נקודת ההשקה.
ב. כתבו את משוואת המשיק.

5) מצאו נקודה על גרף הפונקציה $y=x^2-2x-1$ שבה המשיק מקביל לציר ה- x.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-2x^2+9x+4$.

מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה המקבילים לישר $y=8x-2$.

7) הישר $y=x+5$ חותך את גרף הפרבולה $y=x^2-1$ בנקודות A ו-B (ראו איור).



מעבירים משיקים לגרף הפרבולה בנקודות A ו-B.

המשיקים נפגשים בנקודה K.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצאו את משוואות המשיקים.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה K.

תשובות סופיות:

1) $y=12x-12$.

2) $y=5x+\frac{2}{3}$.

3) $y=7x-3\frac{1}{2}$ ו-$y=-7x-21$.

4) א. $(2,10)$ ב. $y=7x-4$.

5) $(1,-2)$.

6) $y=8x+4$ ו-$y=8x+4\frac{4}{27}$.

7) א. $A(3,8)$, $B(-2,3)$ ב. $y=-4x-5$ ו-$y=6x-10$ ג. $K\left(\frac{1}{2},-7\right)$.

חקירת פונקצית פולינום:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

פונקציה המורכבת מ-'חוליות' של x-ים בחזקות שונות, כאשר כל החזקות הן מספרים טבעיים, נקראת פונקציה פולינומית.

דוגמאות: $f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{x}{2}$, $f(x)=x^3-x^2+4$, $f(x)=x^2+7x+10$.

הערה:

לעיתים נקבל פונקציות פולינום אשר יש לסדר אותן תחילה.

תחום ההגדרה של פונקצית הפולינום:

פונקציה פולינומית מוגדרת לכל ערך של x .

תחומי עליה וירידה של פונקציה:

- תחום עלייה הוא כזה שבו ערכי הפונקציה גדלים ככל שמתקדמים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- תחום ירידה הוא כזה שבו ערכי הפונקציה קטנים ככל שמתקדמים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

נקודות מינימום ומקסימום של פונקציה:

- נקודת מקסימום היא נקודה שעד אליה הפונקציה עולה ואחריה הפונקציה יורדת.
- נקודת מינימום היא נקודה שעד אליה הפונקציה יורדת ואחריה הפונקציה עולה.
- נקודות מקסימום ומינימום של פונקציה נקראות:
  נקודות הקיצון המקומיות (פנימיות) של הפונקציה.
- בנקודות הקיצון, הפונקציה משנה את מגמת ההתקדמות שלה
  (מעלייה לירידה, או מירידה לעלייה).

כתיבת תחומי עלייה וירידה באמצעות הנגזרת:

נתונה פונקציה $f(x)$ ונתונה נקודה (x_0, y_0) על גרף הפונקציה.

- אם נגזרת הפונקציה בנקודה, $f'(x_0)$, היא חיובית אז הפונקציה במגמת עלייה.
- אם נגזרת הפונקציה בנקודה, $f'(x_0)$, היא שלילית את הפונקציה במגמת ירידה.

בקצרה:

- אם: $f'(x_0) > 0$ אז $f(x)$ עולה.
- אם: $f'(x_0) < 0$ אז $f(x)$ יורדת.

נקודות קיצון:

נקודות קיצון של פונקציה הן נקודות אשר מאפסות את נגזרת הפונקציה והפונקציה משנה את מגמת ההתקדמות שלה לפניהן ואחריהן.

אם נקודה $A(x_0, y_0)$ מקיימת: $f'(x_0) = 0$ והפונקציה עולה לפני A ויורדת אחריה, או להיפך, אז נאמר כי הנקודה $A(x_0, y_0)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה.

- אם הפונקציה יורדת לפני הנקודה A ועולה אחריה, אז A היא **נקודת מינימום**.
- אם הפונקציה עולה לפני הנקודה A ויורדת אחריה, אז A היא **נקודת מקסימום**.

טבלת תחומי עלייה וירידה:

כשאנו מקבלים פונקציה $f(x)$ ומוצאים את הנקודות שמאפסות את נגזרתה $(f'(x) = 0)$

דרך נוחה לתאר את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה תהיה באמצעות טבלת תחומי עלייה וירידה.

כללים למציאת נקודות קיצון וקביעת סוג הקיצון:

1) נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס: $f'(x)=0$.

2) נפתור את המשוואה שהתקבלה ונמצא את שיעורי ה- x של הנקודות החשודות לקיצון.

3) נמצא את שיעורי ה- y של כל הנקודות שהתקבלו ונרשום אותן במלואן.

4) נקבע את סוג הקיצון (מקסימום או מינימום) ע"י טבלת תחומי עלייה וירידה.

שלבי חקירה מלאה:

1) מציאת/כתיבת תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) מציאת נקודות הקיצון וקביעת סוגן (מקסימום או מינימום).

3) כתיבת תחומי עלייה וירידה.

4) מציאת נקודות חיתוך עם צירים (במידה וישנן).

5) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות:

מציאת נקודות קיצון וקביעת תחומי עלייה וירידה:

1) נתונה הפונקציה הבאה: $y=x^2-10x+21$.

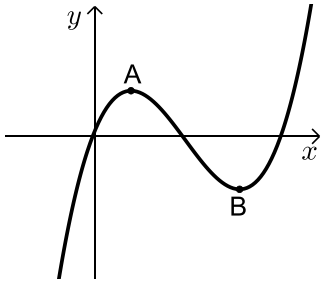
א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ב. באלו תחומים הפונקציה עולה ובאילו תחומים היא יורדת?

2) לפניכם גרף הפונקציה: $y=x^3-15x^2+48x+6$.

הנקודה A היא נקודת המקסימום של הפונקציה

והנקודה B היא נקודת המינימום שלה.



א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.

ב. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

3) מצאו את נקודות הקיצון (הפנימיות) וכתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

א. $y=-2x^3+12x^2$.

ב. $y=2x^3+3x^2-12x$.

4) נתונה הפונקציה: $y=x^3+x+3$.

א. הראו כי לפונקציה אין נקודות קיצון כלל.

ב. הוכיחו כי הפונקציה עולה לכל ערך של x.

חקירת פונקציה:

5) נתונה הפונקציה: $y=x^2-9x+8$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

6) חקרו את הפונקציה: $y=x^3-3x^2-9x$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

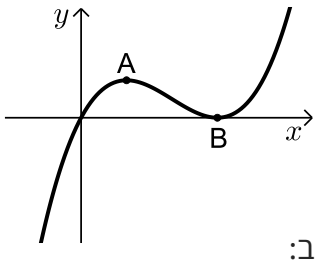
ב. נקודות מינימום ומקסימום.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

7) באיור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $y=x(x-1)^2$.



לפונקציה מקסימום מקומי בנקודה A ומינימום מקומי בנקודה B.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. עבור אילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה ב:

(1) שלוש נקודות.

(2) שתי נקודות.

(3) נקודה אחת.

8) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-6x^3+10x^2$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות המינימום ונקודות המקסימום של הפונקציה.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר $y=k$. בכמה נקודות חותך הישר את גרף הפונקציה בכל מקרה:

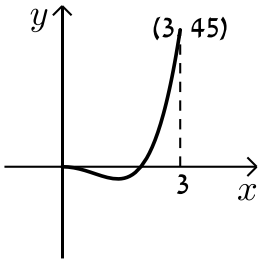
(1) $k=-2$.

(2) $k=8$.

(3) $k=12$.

9) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:



i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבססו על ממציאכם מהסעיפים הקודמים
וסרטטו את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$.
(הוסיפו את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$
לגרף שסרטטתם בסעיף הקודם).

10) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:

תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y, מציאת נקודות קיצון וסיווגן,
כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמקו באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמכו על ממציאכם מהסעיפים הקודמים והוסיפו לסקיצה שסרטטתם בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכיחו כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

11) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבססו על ממציאכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסיפו את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטתם בסעיף הקודם).

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמקו ע"י חישוב מתאים.

ג. הסתמכו על ממציאכם מהסעיפים הקודמים והוסיפו לסקיצה שעשיתם את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

תשובות סופיות:

1) א. $\min(5,-4)$ ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.

2) א. $x_A=2$, $x_B=8$ ב. עולה: $x>8$, $x<2$, יורדת: $2<x<8$.

3) א. $\min(0,0)$, $\max(4,64)$, עולה: $0<x<4$, יורדת: $x>4$, $x<0$.

ב. $\min(1,-7)$, $\max(-2,20)$, עולה: $x>1$, $x<-2$, יורדת: $-2<x<1$.

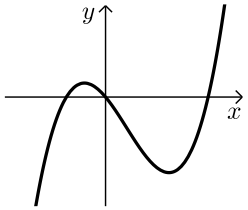
4) א. שאלת הוכחה. ב. הנגזרת חיובית לכל ערך של x ולכן הפונקציה תמיד עולה.

5) א. כל x ב. $\min\left(4\frac{1}{2},-12\frac{1}{4}\right)$ ג. $(0,8)$, $(1,0)$, $(8,0)$

ד. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

6) א. כל x ב. $\max(-1,5)$, $\min(3,-27)$ ג. עולה: $x>3$, $x<-1$, יורדת: $-1<x<3$

ד. $(0,0)$ ה. להלן סקיצה:



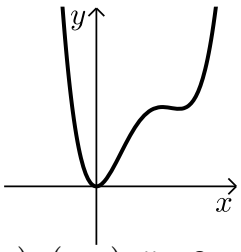
7) א. $B(1,0)$, $A\left(\frac{1}{3},\frac{4}{27}\right)$ ב. (i) $0<k<\frac{4}{27}$

ב. (ii) $k=0$, $\frac{4}{27}$ ב. (iii) $k<0$, $k>\frac{4}{27}$

8) א. כל x ב. $\min(0,0)$, $\max(2,8)$, $\min\left(2\frac{1}{2},7\frac{13}{16}\right)$

ג. עולה: $0<x<2$, $x>2\frac{1}{2}$, יורדת: $x<0$, $2<x<2\frac{1}{2}$ ד. $(0,0)$.

ה. להלן סקיצה:



ו. (i) אף נקודה.

ו. (ii). 3 נקודות שונות.

ו. (iii) 2 נקודות שונות.

9) א. i. $0\le x\le 3$ ii. $(0,0)$, $(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,

$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2}<x<3$, יורדת: $0<x<\sqrt{2}$ v. סרטוט בסוף.

ב. סעיף הוכחה. ג. סרטוט בסוף.

10) א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$, סרטוט בסוף.

ב. זוגית. ג. סרטוט בסוף. ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

11) א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$,

נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,

עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$, סרטוט סוף.

ב. אי-זוגית. ג. סרטוט בסוף.

12) א. i $-4 \le x \le 0$, ii. $(0,0)$, $(-1,0)$, iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,

$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4 < x < -0.723$, יורדת: $-0.723 < x < 0$

v. סרטוט בסוף. ג. אי-זוגית. ד. סרטוט בסוף.

חקירה בתחום סגור:

סיכום כללי:

חקירה בתחום סגור:

למדנו כי פונקצית הפולינום מוגדרת לכל x, כלומר עבור כל ערך של x נקבל ערך y כלשהו.

לעיתים מקובל לתחום את הפונקציה בתחום מסוים, למשל: $2 \le x \le 8$, $x > 7$ וכו'.

- תחום סגור - מסומן עם סוגריים מרובעות: $2 \le x \le 6 \to [2,6]$ וכולל את קצוות התחום.
- תחום פתוח - מסומן עם סוגריים עגולות: $2 < x < 6 \to (2,6)$ ואינו כולל את קצוות התחום.

נקודות קיצון פנימיות ונקודות קיצון קצה:

- נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) הן נקודות המתקבלות מאיפוס הנגזרת ושינוי מגמת ההתקדמות של הפונקציה לפניהן ואחריהן (בעצם, מה שעשינו עד כה).
- נקודות קיצון קצה הן נקודות קצה התחום הסגור הנתון בשאלה.

סיכום:

בחקירת פונקציה בקטע סגור נגדיר את נקודות הקיצון המוחלטות כך:

- נקודת מקסימום מוחלטת:
  הנקודה הגבוהה ביותר מבין נקודות מקסימום הקצה והמקומיות.
- נקודת מינימום מוחלטת:
  הנקודה הנמוכה ביותר מבין נקודות מינימום הקצה והמקומיות.

הערה:

ייתכן ותהיינה יותר מנקודת מקסימום מוחלטת אחת או יותר מנקודת מינימום מוחלטת אחת.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-6x+10$ בקטע $[0,4]$.

א. מצאו את שיעורי נקודות הקצה של תחום ההגדרה.

ב. מצאו את הנקודות שבהן הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ג. ציינו את נקודות הקיצון המקומיות והמוחלטות של הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3+3x^2+1$ בקטע $[-3,2]$.

מצאו את נקודות הקיצון המוחלטות והמקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x-x^3$ בקטע $[-3,2]$.

מצאו את נקודות הקיצון המוחלטות והמקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.

תשובות סופיות:

1) א. $(0,10)$ קצה max, $(4,2)$ קצה max ב. $\min(3,1)$ מקומי

ג. $\max(0,10)$ מוחלט, $\min(3,1)$ מוחלט.

2) $\min(-3,-26)$ מוחלט, $\max(2,29)$ מוחלט.

3) $\max(-3,18)$ מוחלט, $\min(-1,-2)$ מוחלט, $\min(2,-2)$ מוחלט.

שאלות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

בשאלות שבהן נתון פרמטר, יש לבצע את כל הפעולות האלגבריות שלמדנו עם התייחסות לפרמטר כאל מספר.

לאחר שמצאנו את ערכו של הפרמטר, נזכור לכתוב את הפונקציה ואת הנגזרת פעם נוספת בטרם נמשיך בפתרון השאלה.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $y=ax^2+3$, a הוא פרמטר.

א. מצאו את a אם ידוע כי $y'(-1)=4$.

ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=4$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3+kx+1$, k הוא פרמטר.

א. מצאו את k אם ידוע כי שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=-1$ הוא 2.

ב. מצאו נקודה נוספת שבה: $f'(x)=2$.

ג. כתבו את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ שבהם $f'(x)=2$.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{Ax^3}{3}-2x^2-x-1$, A הוא פרמטר.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=3$ מקביל לישר $y=5x+3.5$.

מצאו את משוואת המשיק.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3+bx^2-48x+12$, b הוא פרמטר.

שיעור ה- x של הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא 2.

מצאו את ערכו של b והראו שהנקודה היא נקודת מינימום.

5) לפונקציה: $f(x)=mx^3-3x^2$ (m פרמטר) יש נקודת קיצון שבה: $x=1$.

א. הוכיחו שנקודה זו היא נקודת מינימום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=-2$.

6) לפניכם הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, a פרמטר.

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקרו את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמקו באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמכו על ממציאכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

7) לפניכם הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$, b פרמטר.

ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצאו את b וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמקו את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמכו על ממציאכם מהסעיפים הקודמים והוסיפו לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

תשובות סופיות:

1) א. $a=-2$ ב. $y=-16x+35$

2) א. $k=-1$ ב. $(1,1)$ ג. $y=2x+3$, $y=2x-1$.

3) $y=5x-19$ (הערך של A הוא 2).

4) $b=6$.

5) א. הוכחה. (מתקבל: $m=2$) ב. $y=36x+44$.

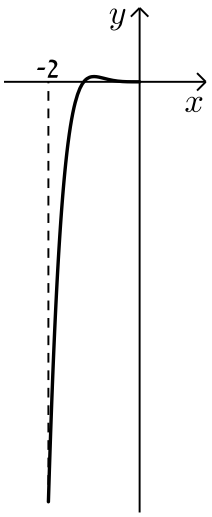
6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(-1.225,0)$,
נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. סרטוט בסוף.
ג. זוגית. ד. סרטוט בסוף.

7) א. $b=0$ ב. i $0\le x\le 2$, ii. $(0,0),(1.29,0)$, iii. $\min(2,-56)$ קצה, $\max(1,2)$,
$\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$ v. סרטוט בסוף.
ג. אי-זוגית. ד. סרטוט בסוף.

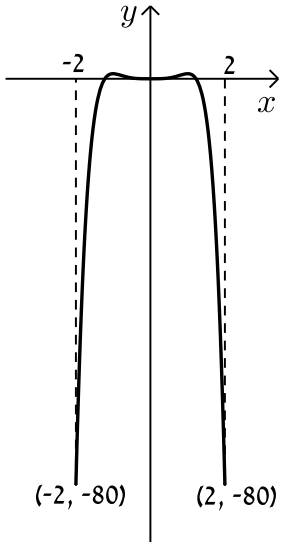
סרטוטים:

שאלה 6:

סעיף א'

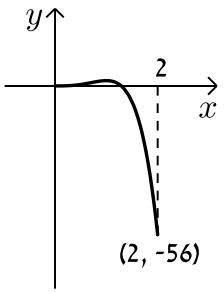


סעיף ג'

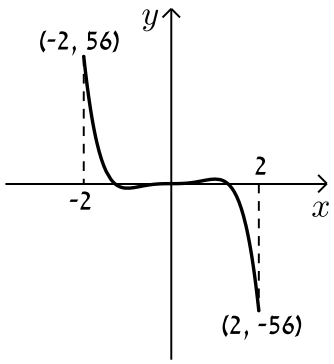


שאלה 7:

סעיף א'



סעיף ד'



שאלון 471

פונקציה מורכבת ופונקצית מכפלה

תוכן העניינים:

פונקציה מורכבת ופונקצית מכפלה..... 333

נגזרת של פונקציה מורכבת: 334

סיכום כללי:..... 334

שאלות:..... 334

תשובות סופיות: 334

נגזרת של מכפלת פונקציות: 335

סיכום כללי:..... 335

שאלות:..... 335

תשובות סופיות: 335

נגזרת של פונקציה מורכבת:

סיכום כללי:

נגזרת פונקציה מורכבת:

$$f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$$

שאלות:

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\left(1-3x^3\right)^3$

ב. $f(x)=\left(x\left(x^2+3\right)+3\right)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $f'(x)=-27x^2\left(1-3x^3\right)^2$ ב. $f'(x)=6\left(x^3+3x+3\right)\left(x^2+1\right)$.

נגזרת של מכפלת פונקציות:

סיכום כללי:

נגזרת פונקצית מכפלה:

$$f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$$

שאלות:

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=3x^2\cdot x$

ב. $f(x)=x^2\cdot x^3$

ג. $f(x)=x(3x+7)$

ד. $f(x)=3x^3(3x-1)$

ה. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ו. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$

ז. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

ח. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

תשובות סופיות:

1) א. $f'(x)=9x^2$

ב. $f'(x)=5x^4$

ג. $f'(x)=6x+7$

ד. $f'(x)=36x^3-9x^2$

ה. $f'(x)=6x^2-8x+3$

ו. $f'(x)=9x^2+56x-20$

ז. $f'(x)=36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

ח. $f'(x)=9x^2-20x+8$

שאלון 471

הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

תוכן העניינים:

הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת..... 336

הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת: 337

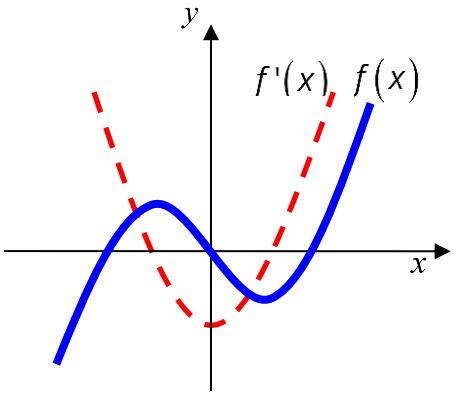
סיכום כללי:..... 337

שאלות:..... 337

תשובות סופיות: 339

הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת:

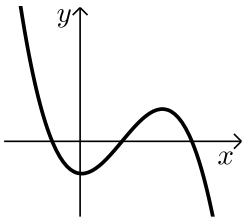
סיכום כללי:



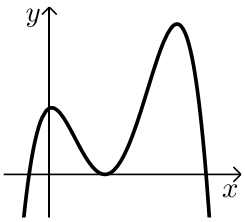
- כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית ולהפך.
- כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית ולהפך.
- כאשר ל-$f(x)$ יש נקודת קיצון, $f'(x)$
- מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ולהפך.

שאלות:

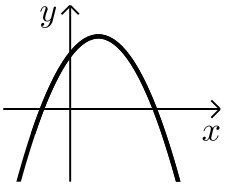
1) נתון גרף של פונקציה.
ציירו על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת.
נמקו את שיקוליך בשרטוט.



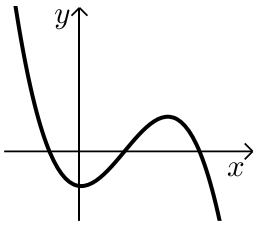
2) נתון גרף של פונקציה.
ציירו על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת.
נמקו את שיקוליך בשרטוט.



3) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
ציירו על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא עובדת בראשית הצירים.
נמקו את שיקוליך בשרטוט.



4) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
ציירו על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים.
נמקו את שיקוליך בשרטוט.



5) נתונה הפונקציה $f(x)=2(x-2)^3-6x$.

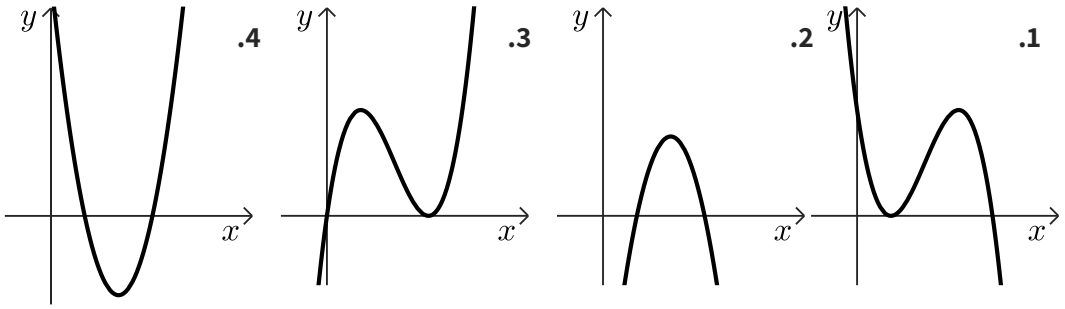
א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

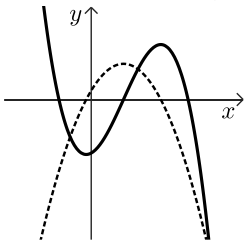
ה. לפניכם 4 גרפים. קבעו איזה מבניהם עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$. נמקו.



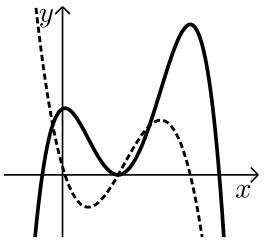
ו. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|$, כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $g(x)$?

תשובות סופיות:

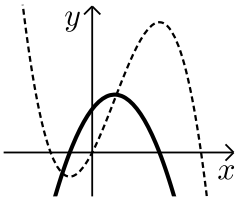
1)



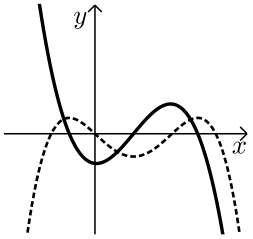
2)



3)



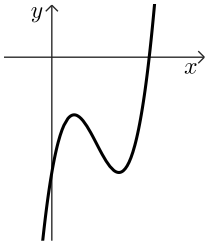
4)



5) א. $(0,-16)$ ב. מקסימום: $(1,-8)$, מינימום: $(3,-16)$

ג. עלייה: $x<1$, $x>3$, ירידה: $1<x<3$

ד. להלן גרף:



ה. גרף מספר 4.

ו. 3 נקודות קיצון.

שאלון 471

קדם אנליזה של פונקצית השורש הריבועי

תוכן העניינים:

קדם אנליזה של פונקצית השורש הריבועי..... 340

פונקצית השורש: 341

סיכום כללי:..... 341

שאלות:..... 342

תשובות סופיות: 348

פעולת השורש על פונקציה נתונה: 349

סיכום כללי:..... 349

שאלות:..... 349

תשובות סופיות: 352

פונקצית השורש:

סיכום כללי:

פונקצית השורש:

פונקציה הכוללת ביטוי או ביטויים עם שורש נקראת פונקצית שורש.
דוגמאות לפונקציות שונות עם שורשים:

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\ f(x)=\sqrt{x-2}\ ,\ f(x)=\sqrt{3x-1}\ ,\ f(x)=\sqrt{x^2-4}\ ,\ f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$$

תחום ההגדרה של פונקצית שורש:

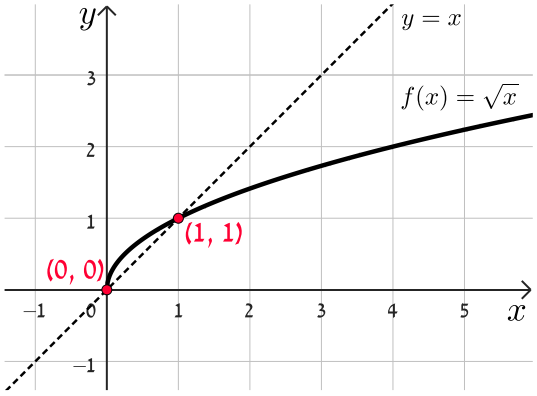
ביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

דוגמאות:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \rightarrow\ x\geq 0$$
$$f(x)=\sqrt{3x-1} \quad \rightarrow\ x\geq \frac{1}{3}$$
$$f(x)=\sqrt{x^2-4} \quad \rightarrow\ x\leq -2\ ,\ x\geq 2$$

גרף פונקצית השורש:

באיור הבא ניתן לראות את הקשר שבין גרף פונקצית השורש לבין גרף פונקצית הקו הישר מהצורה: $y=x$.



- הפונקציות נחתכות ב-$(0,0)$ וב-$(1,1)$.
- עבור $0<x<1$, גרף השורש נמצא מעל לישר.
- עבור $x>1$ גרף השורש נמצא מתחת לישר.

שאלות:

1) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x-5}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x-5}$

ג. $f(x)=2\sqrt{x-5}$

ד. $f(x)=\sqrt{2x}-5$

2) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=x+\sqrt{x}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-7}{2}$

ג. $f(x)=7-\sqrt{x}$

ד. $f(x)=7x-\sqrt{x}$

3) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-1}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-3x}-x}{3}$

ג. $f(x)=\dfrac{1}{5}\cdot(3x)^2+\sqrt{3x}$

ד. $f(x)=x^2-3x+3\sqrt{x}$

4) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

ב. $f(x)=\sqrt{49-x^2}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^2+10x}$

ד. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2-10x+25}$

ו. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

ז. $f(x)=\sqrt{x^2+25}$

ח. $f(x)=\sqrt{x^2+3x+4}$

ט. $f(x)=\sqrt{12-x-x^2}$

י. $f(x)=\sqrt{(x+4)(x-2)-7}$

יא. $f(x)=\sqrt{x+(x+2)^2}$

יב. $f(x)=\sqrt{3(x+2)+x(x-1)}$

5) מצאו את תחומי ההגדרה של פונקציות השורש הבאות:

א. $f(x)=x^2-\sqrt{x^2-x-12}$

ב. $f(x)=4+\sqrt{24-5x-x^2}-\frac{x}{3}$

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sqrt{x+a}$, a פרמטר.

ידוע כי הנקודה $A(3,4)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

א. מהו ערכו של הפרמטר a?

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2+\sqrt{bx+4}$, b פרמטר ($b\neq 0$).

ידוע כי הפונקציה מוגדרת בתחום: $x\le 4$.

א. (1) מהו ערכו של הפרמטר b?

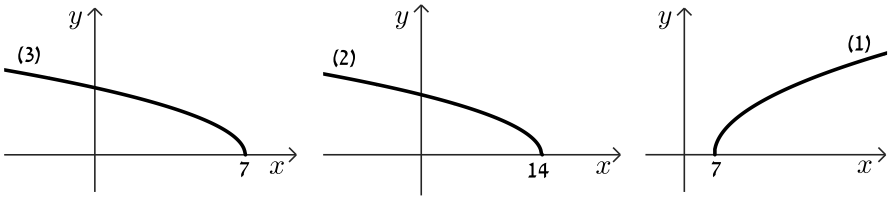
(2) כתבו את נקודת קצה תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

(2) כתבו את משוואתו של ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y ונקודת הקצה של הפונקציה שמצאתם בסעיף א (2).

ג. מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

8) נתונות שתי הפונקציות: $f(x)=2x-14$ ו- $g(x)=7-x$.



א. קבעו איזה מבין הגרפים (3)-(1) מתאים לפונקציה $\sqrt{f(x)}$ ואיזה מתאים לפונקציה $\sqrt{g(x)}$.

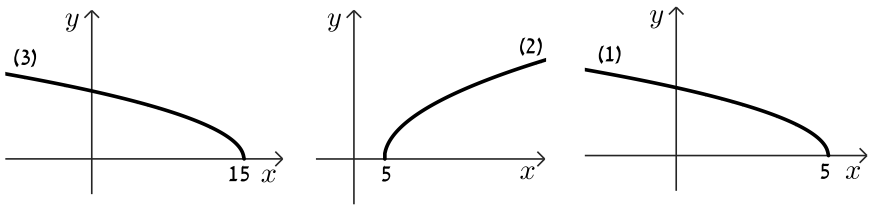
ב. איזו מבין הפונקציות הבאות מתאימה לגרף הנוסף שלא מתאים לפונקציות $\sqrt{f(x)}$ ו- $\sqrt{g(x)}$?

פונקציה 1: $h(x)=\sqrt{7-2x}$.

פונקציה 2: $k(x)=\sqrt{14-2x}$.

פונקציה 3: $j(x)=\sqrt{14-x}$.

9) נתונות שתי הפונקציות: $f(x)=15-3x$ ו- $g(x)=5x-25$.



א. קבעו איזה מבין הגרפים (3)-(1) מתאים לפונקציה $\sqrt{f(x)}$ ואיזה מתאים לפונקציה $\sqrt{g(x)}$.

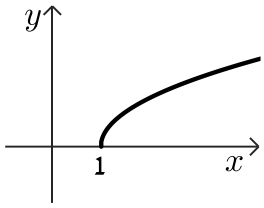
ב. איזו מבין הפונקציות הבאות מתאימה לגרף הנוסף שלא מתאים לפונקציות $\sqrt{f(x)}$ ו- $\sqrt{g(x)}$?

פונקציה 1: $h(x)=\sqrt{3x-45}$.

פונקציה 2: $k(x)=\sqrt{45-3x}$.

פונקציה 3: $j(x)=\sqrt{x+15}$.

10) נתונות שלוש הפונקציות הבאות: $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$, $h(x)=\sqrt{x-1}$.



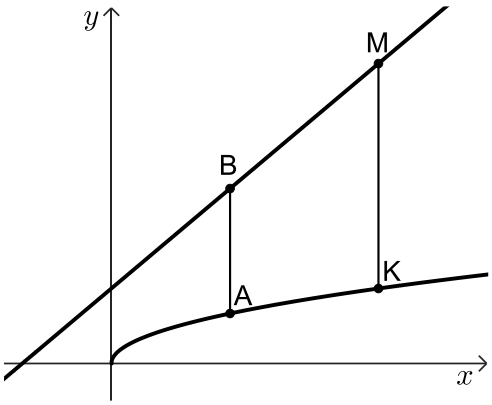
א. הגרף הבא מתאים לאחת מן הפונקציות הנ"ל.
קבעו לאיזו פונקציה מתאים לגרף. נמקו.

ב. באלו מן הפונקציות הבאות הנקודה שבה $x=10$ קיימת על הגרפים שלהם?

11) באיור שלפניכם נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}$ ונתון הישר: $g(x)=2x+3$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הישר $g(x)$

ובה $y=11$. ידוע כי הקטע AB מקביל לציר ה- y.



א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. חשבו את שיעורי הנקודה A.

ג. חשבו את אורך הקטע AB.

ד. מסמנים נקודות K ו-M על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בהתאמה כך שהקטע KM מקביל לציר ה- y.

ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה K הוא 9.

(1) מצאו את שיעורי הנקודה K.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה M.

(3) חשבו את אורך הקטע KM.

(4) חשבו את שטח של טרפז ABMK.

12) נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x-3}$ ו- $g(x)=\sqrt{11-x}$.

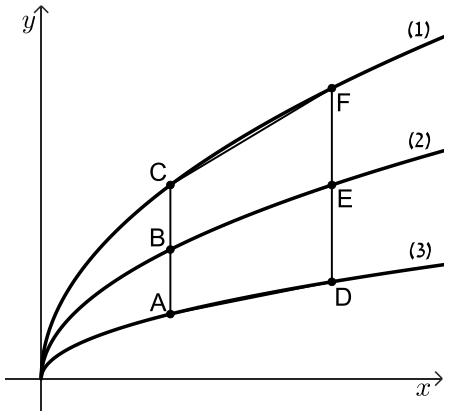
א. כתבו את תחום ההגדרה של כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות זו עם זו.

ג. באיזה תחום מתקיים: $f(x)>g(x)$ ובאיזו תחום מתקיים: $f(x)<g(x)$?

13) באיור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=2\sqrt{x}$, $h(x)=3\sqrt{x}$.

הנקודות A, B, C, D, E ו-F נמצאות על הגרפים של הפונקציות כמופיע באיור.



א. התאימו את גרפים של הפונקציות למשוואות שלהן.

ב. ידוע כי הנקודות A, B ו-C נמצאות על הישר $x=4$.
הוכיחו כי הנקודה B היא אמצע הקטע AC.

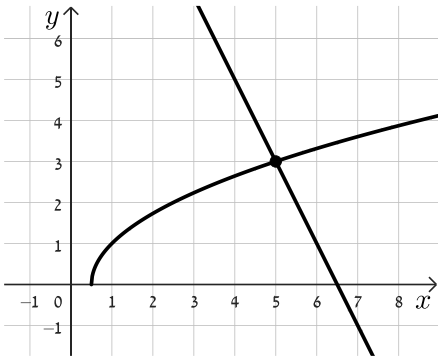
ג. מגדירים טרפז ADFC ($AC \parallel DF$).
ידוע כי שיעור ה- y של הנקודה E הוא 6.
(1) כתבו את שיעורי הנקודה E.
(2) מהו אורכו של גובה הטרפז?
(3) מצאו את שיעורי הנקודות D ו-F.
(4) מצאו את שטחו של הטרפז ADFC.

ד. מעבירים את הקטע BE.
הוכיחו כי מתקיים: $\frac{S_{ADEB}}{S_{ADFC}}=\frac{1}{2}$.

14) ברצוננו לפתור את אי השוויון הבא: $\sqrt{2x-1}<13-2x$.

כדי לבצע זאת מגדירים שתי פונקציות: $f(x)=\sqrt{2x-1}$ ו- $g(x)=13-2x$.

הגרפים של שתי הפונקציות מופיעות באיור הבא:



א. היעזרו בתרשים וכתבו את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. כתבו את פתרון אי השוויון על סמך האיור.

ג. נתייחס לאי השוויון באופן אלגברי ונפתור אותו בשתי הדרכים הבאות:
(1) פתרו את אי-שוויון באופן ישיר ע"י העלאה בריבוע ומציאת חיתוך עם תחום ההגדרה.
(2) מצאו את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות וקבעו את הפתרון המתאים.
(3) הסבירו את ההבדל בשתי הגישות, באיזו גישה קיבלתם את הפתרון הנכון? מה הסיבה לפתרון השגוי?

ד. על סמך האיור, מה יהיה פתרון אי השוויון: $\sqrt{2x-1}>13-2x$?

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 5$ ב. $x \geq 2.5$ ג. $x \geq 5$ ד. $x \geq 0$.

2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 0$ ג. $x \geq 0$ ד. $x \geq 0$.

3) א. $x \geq \frac{1}{3}$ ב. $x \leq \frac{1}{3}$ ג. $x \geq 0$ ד. $x \geq 0$.

4) א. $x \geq 1$, $x \leq -3$ ב. $-7 \leq x \leq 7$ ג. $x \geq 0$, $x \leq -10$.

ד. כל x ה. כל x ו. כל x.

ז. כל x ח. כל x ט. $-4 \leq x \leq 3$.

י. $x \geq 3$, $x \leq -5$ יא. $x \geq -1$, $x \leq -4$ יב. כל x.

5) א. $x \geq 4$, $x \leq -3$ ב. $-8 \leq x \leq 3$.

6) א. $a = -2$ ב. $x \geq 2$.

7) א. (1) $b = -1$ (2) $(4,6)$ ב. (1) $(0,4)$.

ב. (2) $y = \frac{1}{2}x + 4$ ג. $(-5,0)$.

8) א. גרף 1: $\sqrt{f(x)}$, גרף 3: $\sqrt{g(x)}$ ב. פונקציה 3.

9) א. גרף 1: $\sqrt{f(x)}$, גרף 2: $\sqrt{g(x)}$ ב. פונקציה 2.

10) א. $h(x)$ ב. $f(x)$, $h(x)$.

11) א. $B(4,11)$ ב. $A(4,2)$ ג. $AB = 9$ יח"א.

ד. (1) $K(9,3)$ ד. (2) $M(9,21)$ ד. (3) $KM = 18$ יח"א ד. (4) 67.5 יח"ש.

12) א. עבור $f(x)$: $x \geq 3$, עבור $g(x)$: $x \leq 11$ ב. $(7,2)$.

ג. עבור $g(x) > f(x)$: $7 < x \leq 11$, עבור $f(x) > g(x)$: $3 \leq x < 7$.

13) א. גרף 1: $h(x)$, גרף 2: $g(x)$, גרף 3: $f(x)$ ב. ראו בסרטון.

ג. (1) $E(9,6)$ ג. (2) 5 יח"א ג. (3) $D(9,3)$ ג. (4) 25 יח"ש.

ד. ראו בסרטון.

14) א. $(5,3)$ ב. $x > 5$ ג. (1) $5 < x < 8.5$.

ג. (2) $g(x) < f(x)$ עבור $x > 5$ ג. (3) ראו בסרטון ד. $\frac{1}{2} \leq x < 5$.

פעולת השורש על פונקציה נתונה:

סיכום כללי:

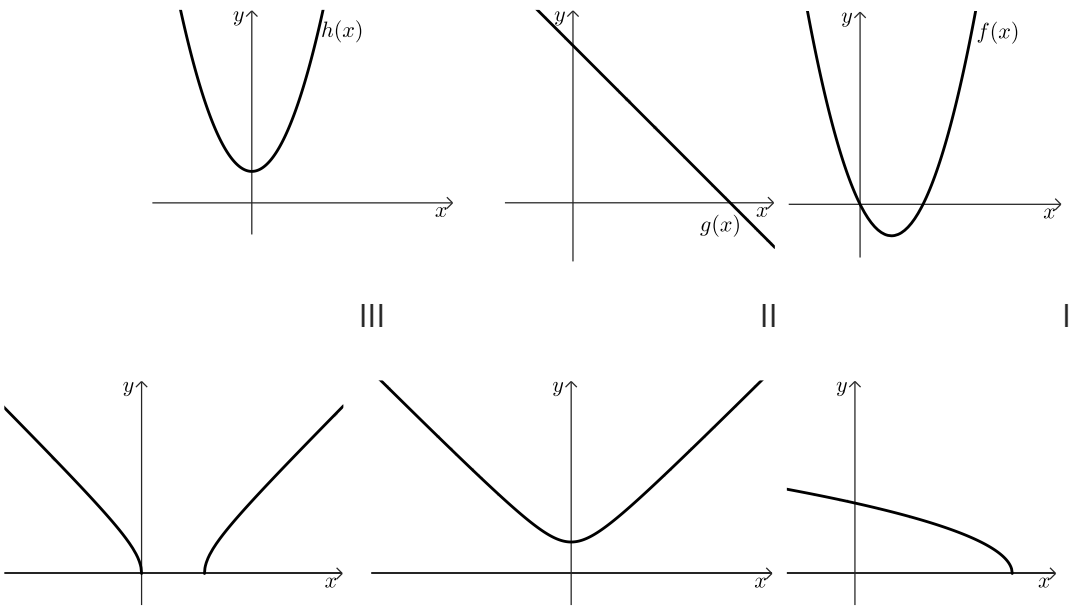
פעולת שורש על פונקציה מודרת באופן הבא: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ כאשר $f(x)$ היא פונקציה כלשהי.

- תחום ההגדרה של $g(x)$ יהיה $f(x)\geq 0$.
- תחומי החיוביות יישארו חיוביים.
- תחומי השליליות ייעלמו, שכן $g(x)$ אינה מוגדרת עבור $f(x)<0$.
- כל נקודה (x,y) שעל גרף הפונקציה $f(x)$ יהפוך ל-$(x,\sqrt{y})$ על גרף הפונקציה $g(x)$.

שאלות:

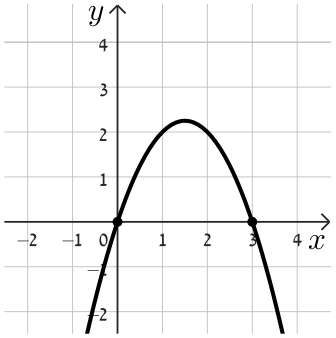
1) לפניכם הגרפים של 3 פונקציות: $f(x)$, $g(x)$ ו-$h(x)$,
ו-3 גרפים של השורשים של הפונקציות, כלומר: $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{g(x)}$ ו-$\sqrt{h(x)}$.
קבעו איזה גרף מהגרפים I-III מתאים לכל פונקציה מהפונקציות (1)-(3).

(1) $f(x)$ (2) $g(x)$ (3) $h(x)$

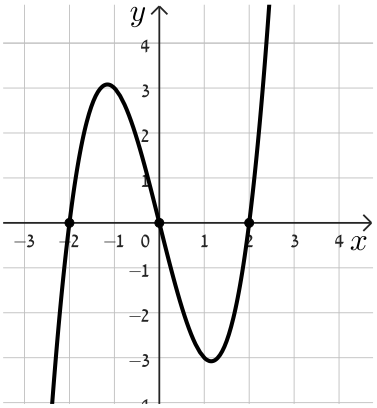


2) סרטטו באותה מערכת הצירים את גרף פונקצית השורש של הפונקציה $f(x)$ הנתונה בכל סעיף.

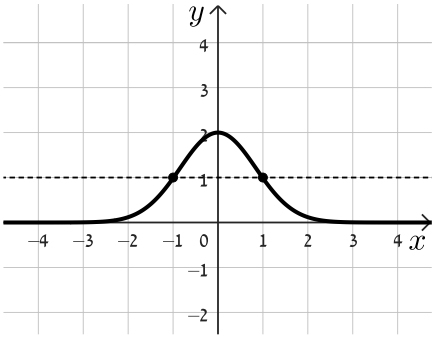
א.



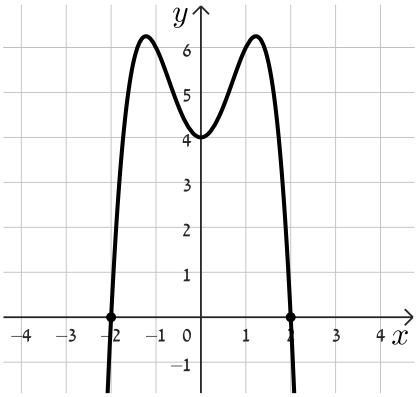
ב.



ג.

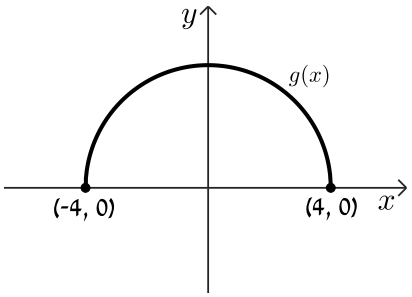


ד.



3) נתונה הפונקציה $f(x)$. מגדירים: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

היעזרו בגרף הפונקציה $g(x)$ וקבעו איזו מבין הפונקציות הבאות היא $f(x)$:



א. $f(x)=4x-x^2$

ב. $f(x)=x^2-16$

ג. $f(x)=16-x^2$

ד. $f(x)=x^2-8x+16$

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{4}x(x+3)$.

מגדירים את הפונקציה: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ ואת הפונקציה: $h(x)=\frac{1}{f(x)}$

א. (1) כתבו את הפונקציה $g(x)$ בצורה מפורשת.

(2) מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ב. (1) כתבו את הפונקציה $h(x)$ בצורה מפורשת.

(2) מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$?

ג. הראו כי שלושת הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו-$h(x)$ נחתכים באותן הנקודות ומצאו אותן.

ד. באיור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$.

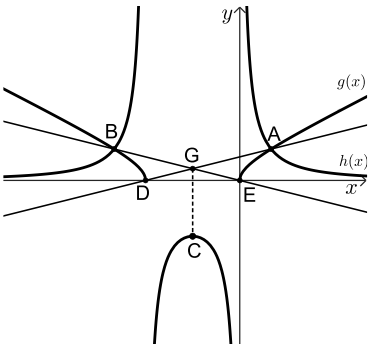
הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של הגרפים של הפונקציות (A ברביע הראשון).

הנקודות D ו-E הן נקודות קיצון הקצה של הפונקציה $g(x)$.

הנקודה C היא נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

מעבירים ישרים AD ו-BE אשר נחתכים בנקודה G.

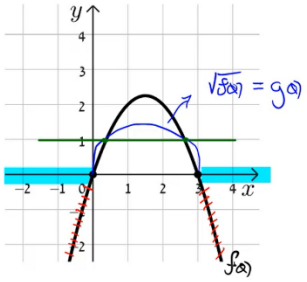
מצאו את אורך הקטע CG.



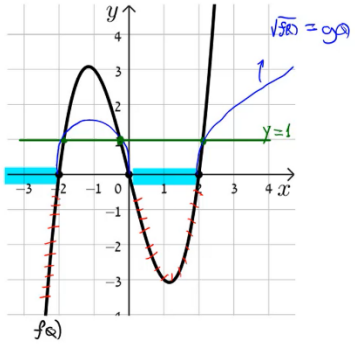
תשובות סופיות:

1) I: $g(x)$, II: $h(x)$, III: $f(x)$.

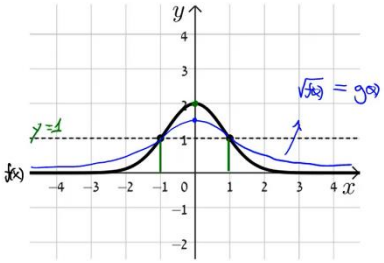
2) א. ראו סרטוט:



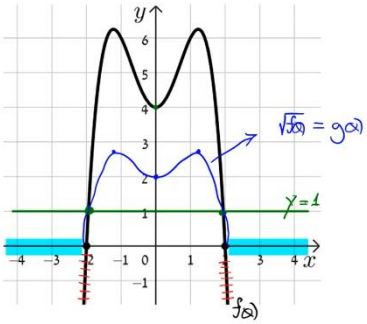
ב. ראו סרטוט:



ג. ראו סרטוט:



ד. ראו סרטוט:



3) ג. $f(x)=16-x^2$

4) א. (1) $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x(x+3)}$

א. (2) $x\le -3$, $x\ge 0$.

ב. (1) $h(x)=\frac{4}{x(x+3)}$

ב. (2) $x\ne -3$, $x\ne 0$.

ג. $(-4,1)$, $(1,1)$

ד. 2.152 יח"א = CG.

שאלון 471

אנליזה של פונקצית שורש

תוכן העניינים:

אנליזה של פונקצית שורש..... 353

משוואות עם שורש ריבועי:..... 354

סיכום כללי:..... 354

שאלות:..... 355

תשובות סופיות:..... 356

אי-שוויונות ממעלה ראשונה:..... 357

סיכום כללי:..... 357

שאלות:..... 357

תשובות סופיות:..... 358

אי-שוויונות ממעלה שנייה:..... 359

סיכום כללי:..... 359

שאלות:..... 359

תשובות סופיות:..... 360

הנגזרת של פונקצית השורש הריבועי:..... 361

סיכום כללי:..... 361

שאלות:..... 361

תשובות סופיות:..... 362

חקירת פונקצית שורש:..... 363

סיכום כללי:..... 363

שאלות:..... 364

תשובות סופיות:..... 367

שאלות עם פרמטרים:..... 368

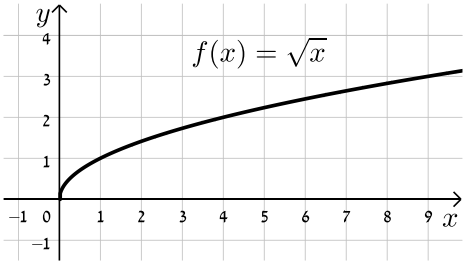
שאלות:..... 368

תשובות סופיות:..... 368

משוואות עם שורש ריבועי:

סיכום כללי:

הצורה הכללית של פונקצית השורש:



תחום ההגדרה של פונקצית השורש היסודית:

תחום ההגדרה של הפונקציה: $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ הוא $x\geq 0$.

תחום ההגדרה של פונקציה מהצורה: $f\left(x\right)=\sqrt{ax+b}$ הוא: $x\geq -\frac{b}{a}$.

עקרונות בפתרון משוואות עם שורשים:

כדי לפתור משוואה הכוללת את הביטוי $\sqrt{x}$ נבצע:

1) בידוד האיבר $\sqrt{x}$ (ניתן גם לבודד אותו עם מקדם מספרי, למשל: $3\sqrt{x}$)

2) העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה.

3) מציאת x (לעיתים ייתכן פתרון בודד ולעיתים יתכנו מספר פתרונות).

4) בדיקה של ערך/ערכי ה- x ע"י הצבה במשוואה לפני ההעלאה בריבוע.

הערה:

במקרים מסוימים בהם יתקבל פתרון יחיד, נדלג על הבדיקה (שלב 4).

שאלות:

חזרה על טכניקה בפתרון משוואות עם שורשים:

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\sqrt{x}=5$

ב. $\sqrt{x}-1=3$

ג. $\sqrt{2x}=3$

ד. $2\sqrt{x}=14$

ה. $2\sqrt{x}-1=0$

ו. $3\sqrt{x}-28=2$

2) פתרו את המשוואות הבאות:

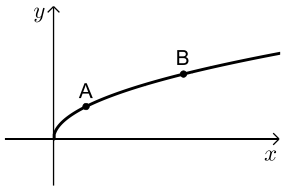
א. $x-\sqrt{x}=0$

ב. $3x-6\sqrt{x}=0$

ג. $\frac{4}{\sqrt{x}}=1$

ד. $\frac{1}{2\sqrt{x}}=2$

3) בציור הבא מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ ועליו נקודות A ו-B.



א. ידוע כי שיעור ה- x בנקודה A הוא 1.
מה הוא שיעור ה- y של הנקודה A?

ב. שיעור ה- x של הנקודה B הוא 9.
כתבו את שיעורי הנקודה B.

ג. קבעו אלו מבין הנקודות הבאות יכול להימצא על גרף הפונקציה $f(x)$:

(1) $C(6,12)$

(2) $D(49,7)$

(3) $E(-4,16)$

ד. מצאו את שיעורי הנקודה F אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא 9.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=6-\sqrt{x}$.

מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x}-8x$.

מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרו את המשוואות הבאות:

6) $\sqrt{2x+5}=7$

7) $\sqrt{2x+7}+4=x$

8) $\sqrt{10x+6}+9=x$

9) $\sqrt{x+6}-2=2x$

10) $\sqrt{24-x}+3=2x$

11) $\sqrt{x+16}+4=2x$

12) $2x=16-3\sqrt{x-1}$

13) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$

14) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=25$ ב. $x=16$ ג. $x=4.5$ ד. $x=49$

ה. $x=\frac{1}{4}$ ו. $x=100$.

2) א. $x=0,1$ ב. $x=0,4$ ג. $x=16$ ד. $x=\frac{1}{16}$.

3) א. $y_A=1$ ג. $B(9,3)$ ג. רק נקודה (2) – D. ד. $F(81,9)$.

4) $(36,0)$, $(0,6)$.

5) $\left(\frac{1}{16},0\right)$, $(0,0)$.

6) $x=22$

7) $x=9$

8) $x=25$

9) $x=0.25$

10) $x=3.75$

11) $x=4.25$

12) $x=5$

13) $x=6$

14) $x=4,-3$

אי-שוויונות ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתרו את אי-השוויונות הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$

2) כל x

3) אף x

4) $x>-2$

5) $x<5$

6) אף x

7) $x\geq 12$

8) $x>-13$

אי-שוויונות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

שאלות:

פתרו את אי השוויונות הריבועיים הבאים:

1) $x^2-6x+8>0$

2) $x^2-4x+3<0$

3) $x^2+10x+25\geq 0$

4) $-3x^2+2x+1\leq 0$

5) $-3x^2+13x-12\geq 0$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את אי השוויון הבא: $2x^2+3x+6\geq 0$.

ב. כיצד ישתנה הפתרון של סעיף א' אם מחליפים

את סימן אי השוויון: $2x^2+3x+6<0$?

פתרו את אי השוויונות הריבועיים הבאים:

7) $x^2<256$

8) $x^2-13x<-42$

9) $(x-4)(x+3)\geq 0$

10) $(x-1)(x-3)>3x+11$

11) $(x+5)^2+x(x+1)>31$

12) $(x-7)^2>(x+2)(x+3)+x(3-x)-29$

13) $(x+1)^2<x-6$

14) $(x-9)(x-1)\leq 6(x^2+3)+x(2-x)$

15) נתונות הפונקציות הריבועיות: $f(x)=5x^2+2$ ו- $g(x)=x^2+3x+2$.

א. מצאו את התחום בו מתקיים: $f(x)>0$ ואת התחום בו מתקיים: $g(x)>0$

ב. מצאו את התחום בו מתקיים: $f(x)>g(x)$.

ג. באיזה תחום מתקיימים: $f(x)>g(x)$ וגם $g(x)>0$?

תשובות סופיות:

1) $x<2\,,\,x>4$

2) $1<x<3$

3) כל x.

4) $x\le -\frac{1}{3}\,,\,x\ge 1$

5) $\frac{4}{3}\le x\le 3$.

6) א. כל x. ב. אף x.

7) $-16<x<16$

8) $6<x<7$

9) $x\le -3\,,\,x\ge 4$

10) $x<-1\,,\,x>8$

11) $x<-6\,,\,x>\frac{1}{2}$

12) $x<4\,,\,x>18$

13) אף x.

14) כל x.

15) א. $f(x)$: כל x, $g(x)$: $x<-2\,,\,x>-1$ ב. $x<0\,,\,x>\frac{3}{4}$

ג. $x<-2\,,\,-1<x<0\,,\,x>\frac{3}{4}$.

הנגזרת של פונקצית השורש הריבועי:

סיכום כללי:

כלל הגזירה של פונקצית השורש:

הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ היא: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=-3\sqrt{x}$

ג. $f(x)=3x-\sqrt{x}$

ד. $f(x)=4\sqrt{x}+4x+3$

ה. $f(x)=x^2-2\sqrt{x}$

ו. $f(x)=\frac{1}{6}\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^2$

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

תשובות סופיות:

1)

א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ב. $f'(x)=-\frac{3}{2\sqrt{x}}$

ג. $f'(x)=3-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ד. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+4$

ה. $f'(x)=2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

ו. $f'(x)=\frac{1}{12\sqrt{x}}-\frac{2}{3}x$

2)

א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

ב. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}$

ג. $f'(x)=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$

ד. $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$

ה. $f'(x)=\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $f'(x)=6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$

ז. $f'(x)=\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$

ח. $f'(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$

חקירת פונקצית שורש:

סיכום כללי:

שלבי החקירה של פונקצית השורש:

1) מציאת תחום ההגדרה.
2) מציאת נקודות הקיצון וקביעת סוגן.
3) כתיבת תחומי העלייה והירידה.
4) מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
5) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

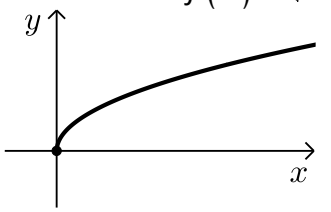
הערות:

- בשאלות שונות נקבל סעיפי חקירה חלקיים או מלאים (תלוי בשאלה) ולעיתים ייתכן גם שילוב של חקירה חלקית ושימוש במשיקים.
- בשאלות מסוימות לא נדרש לצייר סקיצה של גרף הפונקציה אלא לבחור סקיצה נכונה מבין מספר אפשרויות. במקרים אלו נבחן את תוצאות סעיפי החקירה ונאתר את הסקיצה הנכונה.

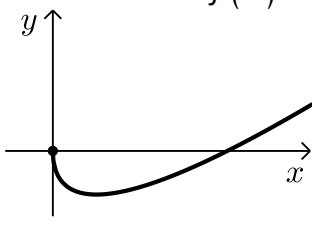
נקודות קיצון קצה ונקודות קיצון מקומיות:

פונקציות עם שורשים מהצורה $\sqrt{x}$ כוללות תחום הגדרה שהוא $x \geq 0$.
במקרים אלו נבחין כי הפונקציה 'מתחילה' מהנקודה שבה $x = 0$ ומתקדמת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

$f(x) = \sqrt{x}$



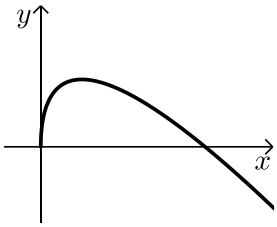
$f(x) = x - \sqrt{x}$



נקודת ההתחלה נקראת **נקודת קיצון הקצה** של הפונקציה או: **קיצון קצה**.

- מקסימום קצה: נקודה אשר הפונקציה מתחילה ממנה ויורדת אחריה.
- מינימום קצה: נקודה אשר הפונקציה מתחילה ממנה ועולה אחריה.

שאלות:



1) בציור הבא מתוארת הפונקציה: $f(x)=12\sqrt{x}-x$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה)?

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

2) מצאו את נקודות המקסימום והמינימום (המקומיות וקיצון הקצה) של הפונקציות הבאות.
פרטו בכל פונקציה אלו נקודות הן מקומיות ואלו נקודות הן קצה.

א. $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{x}{8}+2$.

ב. $f(x)=x^2-4\sqrt{x}$.

ג. $f(x)=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-1$.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=3\sqrt{x}-6$.

א. מה הוא תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כתבו את נגזרת הפונקציה.

ג. (1) האם יש לפונקציה נקודת קיצון (פנימית)? אם כן מצאו אותה.
(2) הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=x-3\sqrt{x}$.

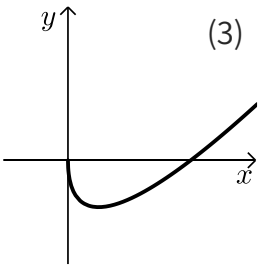
א. כתבו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

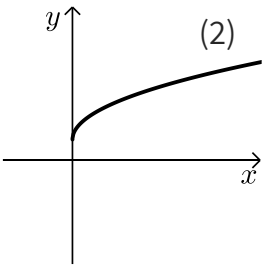
ב. מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבעו את סוגה.

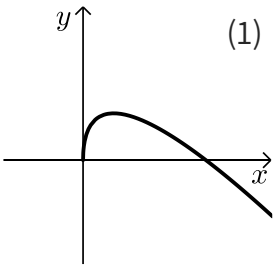
ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. לפניכם 3 סקיצות (1)-(3) של פונקציות שונות.
קבעו איזו מהן מתאימה לפונקציה $f(x)$.







5) נתונה הפונקציה: $f(x)=12\sqrt{x}-3x$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. לפניכם רשימה של נקודות על ציר ה- x: $(144,0)$, $(16,0)$, $(4,0)$, $(0,0)$.

קבעו אלו מהן נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$. נמקו.

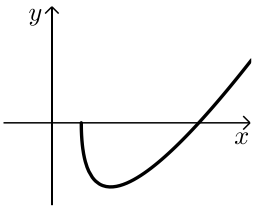
ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.

ד. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

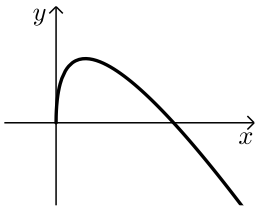
ה. אחד מן הגרפים (4)-(1) שלפניכם מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$.

קבעו איזה מהם ונמקו את קביעתכם.

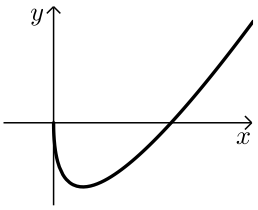
(4)



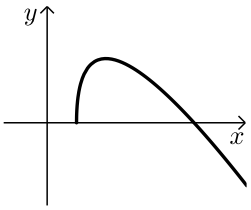
(3)



(2)



(1)



6) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x-8\sqrt{x}+9$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגה.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x? נמקו.

ז. קבעו בכמה נקודות כל אחד מהישרים הבאים חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

(1) הישר: $y=-1$.

(2) הישר: $y=10$.

(3) הישר: $y=1$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{2x-13}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) הראו כי הפונקציה $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x+3)$.

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax\cdot\sqrt{12-x}$. $a>0$ הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4$ הוא 9. מצאו את a.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

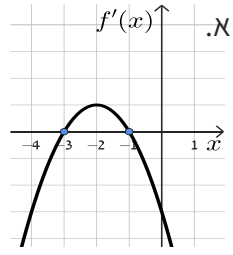
ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

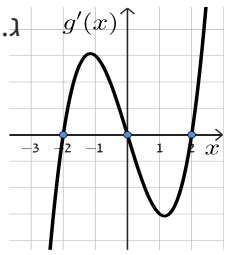
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

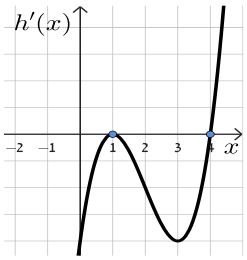
ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)-k$, הפונקציה $g(x)$ משיקה לציר ה-x. מצאו את k.

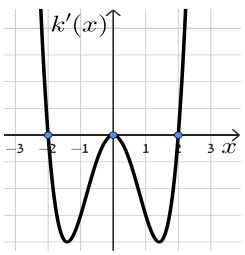
9) לפניכם הגרפים של הפונקציות $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$, $k'(x)$ שהן פונקציות הנגזרת של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ בהתאמה.

מצאו על פי הנתונים שבסרטוט את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ וקבעו את סוגן.

א.


ב.


ג.


ד.


תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 0$ ב. $\min(0,0)$ קצה, $\max(36,36)$

ג. עולה: $0 < x < 36$, יורדת: $x > 36$. ד. $(144,0)$, $(0,0)$.

2) א. $\min(0,2)$ קצה, $\max(64,10)$ ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(1,-3)$

ג. $\max(0,-1)$ קצה, $\min\left(\frac{1}{36},-1\frac{1}{24}\right)$ (מקומי).

3) א. $x \geq 0$ ב. $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$ ג. (1) אין נקודות קיצון פנימיות.

ג. (2) הוכחה.

4) א. $x \geq 0$ ב. $\min\left(2\frac{1}{4},-2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $x > 2\frac{1}{4}$, יורדת: $0 < x < 2\frac{1}{4}$

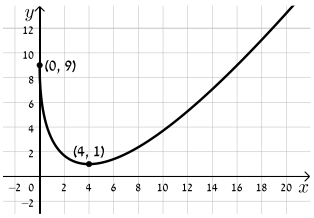
ד. $(9,0)$, $(0,0)$ ה. סקיצה (3).

5) א. $x \geq 0$ ב. $(0,0)$ ו-$(16,0)$ ג. $\max(4,12)$

ד. עולה: $0 < x < 4$, יורדת: $x > 4$ ה. סקיצה (3).

6) א. $x \geq 0$ ב. $\min(4,1)$ ג. עולה: $x > 4$, יורדת: $0 < x < 4$

ד. $(0,9)$ ה. להלן סקיצה:

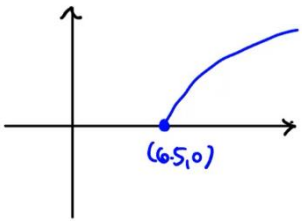


ו. לא.

ז. i. 0 נקודות, ii. נקודה אחת, iii. נקודה אחת.

7) א. (1) $x \geq 6.5$ א. (2) $(6.5,0)$ א. (3) ראו בסרטון.

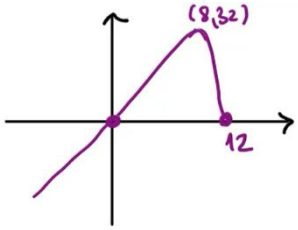
א. (4) להלן סקיצה:



ב. $x \geq 3.5$.

8) א. $x \leq 12$ ב. (1) $a = 2$ ב. (2) $(12,0)$, $(0,0)$.

ג. $\min(12,0)$, $\max(8,32)$ ד. להלן סקיצה:



ה. $k = 32$.

9) $f(x)$: min: $x=-3$, max: $x=1$. $g(x)$: min: $x=-2,2$, max: $x=0$

$h(x)$: min: $x=4$. $k(x)$: max: $x=-2$, min: $x=2$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

1) לגרף הפונקציה: $f(x)=ax+\sqrt{x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x=4$ ושיפועו הוא 1.

א. מצאו את ערך הפרמטר a.

ב. כתבו את משוואת המשיק.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x}+bx$, b הוא פרמטר.

ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון פנימית עבור $x=1$.

א. מצאו את b.

ב. כתבו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית.

ג. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון.

תשובות סופיות:

1) א. $a=\frac{3}{4}$ ב. $y=x+1$.

2) א. $b=-1$ ב. $(1,1)$ ג. $y=1$.

שאלון 471

בעיות קיצון בפונקצית פולינום

תוכן העניינים:

בעיות קיצון בפונקצית פולינום..... 369

בעיות קיצון במספרים:..... 370

שאלות:..... 370

תשובות סופיות:..... 370

בעיות קיצון גאומטריות במישור:..... 371

שאלות:..... 371

תשובות סופיות:..... 372

בעיות קיצון גאומטריות במרחב:..... 373

שאלות:..... 373

תשובות סופיות:..... 374

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:..... 375

שאלות:..... 375

תשובות סופיות:..... 376

בעיות קיצון במספרים:

שאלות:

1) נתונים שני מספרים שאחד מהם גדול ב-8 מהשני.
מצא את שני המספרים שמכפלתם מינימלית.

2) מהי התוצאה הגדולה ביותר שאפשר לקבל אם מחסרים ממספר את ריבועו?

3) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x+y=20$.
א. הבע את y באמצעות x.
ב. הבע את המכפלה $x\cdot y$ באמצעות x.
ג. מצא את שני המספרים שמכפלתם היא מקסימלית.

4) הסכום של שני מספרים הוא 14.
א. מצא מה צריכים להיות שני המספרים כדי שסכום הריבועים שלהם יהיה מינימלי.
ב. מצא את סכום הריבועים המינימלי של שני המספרים.

5) הסכום של שלושה מספרים חיוביים הוא 36.
המספר השני גדול פי 2 מהמספר הראשון.
א. סמן ב- x את המספר הראשון והבע באמצעותו את המספר השלישי.
ב. מצא את הערך של x שעבורו מכפלת שלושת המספרים תהיה מקסימלית.

תשובות סופיות:

1) 4 ו-4-.

2) 0.25.

3) א. $y=20-x$ ב. $M=20x-x^2$ ג. 10, 10.

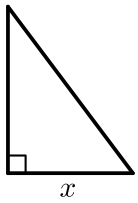
4) א. 7, 7. ב. 98.

5) א. $36-3x$, $2x$, x ב. $x=8$. המספרים: 8, 16, 12.

בעיות קיצון גאומטריות במישור:

שאלות:

1) באיור שלפניך נתון משולש ישר זווית שבו סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.



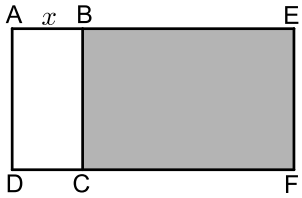
מסמנים ב- x את אורכו של אחד מהניצבים.

א. (1) הבע באמצעות x את אורכו של הניצב השני.

(2) הבע באמצעות x את שטח המשולש.

ב. מצא את x עבורו שטח המשולש הוא מקסימלי.

2) נתון מלבן ABCD שהיקפו הוא 72 ס"מ.



נסמן ב- x את אורך הצלע AB.

א. הבע באמצעות x את אורך הצלע BC.

על הצלע BC בנו מלבן נוסף BEFC

(המלבן האפור בציור).

אורך הצלע BE גדולה פי 3 מאורך הצלע AB.

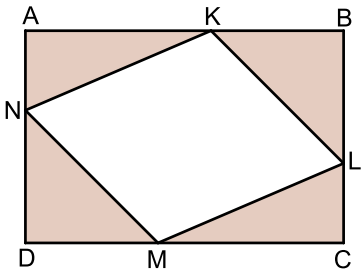
ב. (1) הבע באמצעות x את שטח המלבן BEFC.

(2) מצא עבור איזה ערך של x שטח המלבן BEFC הוא מקסימלי.

3) במלבן ABCD נתון: $AB = DC = 12$ ס"מ, $AD = BC = 8$ ס"מ.

על צלעות המלבן הקצו קטעים שווים: $BK = BL = DM = DN = x$

ונוצרו ארבעה משולשים ששטחם צבוע באיור.

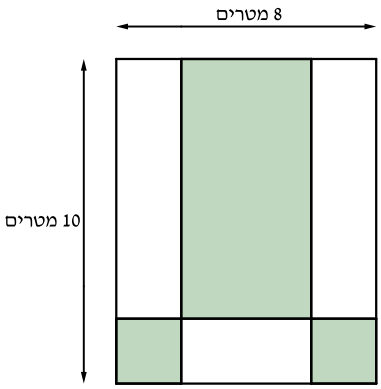


א. הבע באמצעות x את כל השטח הצבוע באיור.

ב. מה צריך להיות ערכו של x כדי שהשטח הצבוע יהיה מינימלי?

א. חשב את שטח המרובע KLMN כאשר השטח הצבוע הוא מינימלי.

4) נתונה מדשאה מלבנית שמידותיה הן 10 מטרים ו-8 מטרים.
רוצים להקצות שטח המיועד לשתילי תבלינים המורכב
משני ריבועים זהים ומלבן כמתואר בציור
(השטח הירוק).
מסמנים ב- x את אורך הצלע של הריבועים.



א. הבע באמצעות x את כל השטח המיועד
לשתילי התבלינים.

ב. מה צריך להיות x עבורו השטח המיועד
לשתילי התבלינים יהיה מינימלי?

ג. בהנחה ש-1 מ"ר של שתילי תבלינים עולה 50 ₪,
מה יהיה המחיר המינימלי של שתילי התבלינים?

תשובות סופיות:

1) א. (1) $12-x$ ס"מ א. (2) $S=6x-\frac{x^2}{2}$ ב. $x=6$.

2) א. $BC=AD=36-x$ ב. (1) $S_{BEFC}=108x-3x^2$ ב. (2) $x=18$.

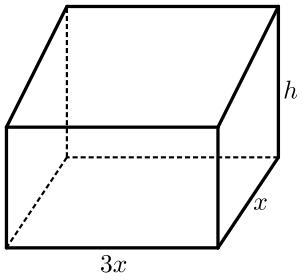
3) א. $S=2x^2-20x+96$ ב. $x=5$ ג. 50 סמ"ר $=S_{KLMN}$.

4) א. $S=4x^2-28x+80$ ב. 3.5 מטר $=x$ ג. 1550 ₪.

בעיות קיצון גאומטריות במרחב:

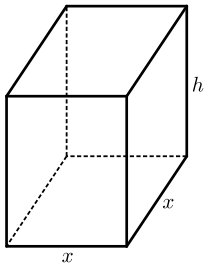
שאלות:

1) בונים תיבה שגובהה h מטרים.
בסיס התיבה הוא מלבן שמקצוע אחד בו ארוך
פי 3 מהמקצוע השני.
מסמנים ב- x את אורכו של מקצוע הבסיס הקטן.
נתון: $x+h=18$.



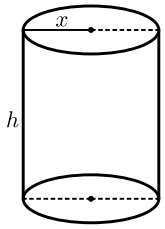
א. הבע את h באמצעות x.
ב. הבע באמצעות x את נפח התיבה.
ג. מצא את x עבורו נפח התיבה הוא מקסימלי.

2) נתונה תיבה שגובהה h ובסיסה ריבוע שצלעו x מטרים.
נתון כי: $2x+h=60$.



א. הבע את h באמצעות x.
ב. הבע באמצעות x את שטח הפנים של התיבה.
ג. מצא את מידות התיבה עם שטח הפנים המקסימלי.

3) נתון גליל שרדיוס בסיסו הוא x ס"מ וגובהו h ס"מ.
נתון כי: $3x+h=72$.



א. הבע את h באמצעות x.
ב. הבע באמצעות x את שטח המעטפת של הגליל.
ג. מצא מה צריך להיות רדיוס הבסיס כדי
ששטח המעטפת של הגליל יהיה מקסימלי.

4) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

5) מכל הגלילים שהקיף פרשת המעטפת הוא k, מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $h=18-x$ ב. $V=54x^2-3x^3$ ג. $x=12$.

2) א. $h=60-2x$ ב. $P=240x-6x^2$ ג. $20\times20\times20$.

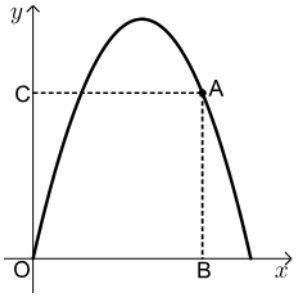
3) א. $h=72-3x$ ב. $M=144\pi x-6\pi x^2$ ג. 12 ס"מ.

4) $4\cdot4\cdot4$ ס"מ.

5) $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $=V$.

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

שאלות:



1) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+9x$.

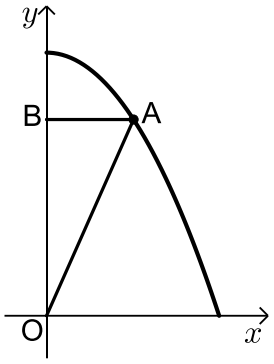
מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABOC.

נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A.

א. (1) הבע באמצעות x את שיעורי הנקודה A.

(2) הבע באמצעות x את היקף המלבן ABOC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם היקף המלבן ABOC הוא מקסימלי.



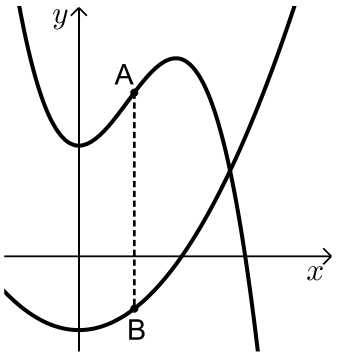
2) נתון גרף הפונקציה: $f(x)=27-x^2$ ברביע הראשון.

ישר המקביל לציר ה- x חותך את גרף הפונקציה בנקודה A שנמצאת ברביע הראשון, ואת ציר ה- y בנקודה B.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים O.

א. מה צריך להיות שיעור ה- x של הנקודה A כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?



3) בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=-2x^3+4x^2+3$ ו- $g(x)=x^2-2$

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$.

הקטע AB מקביל לציר ה- y.

שיעור ה- x של הנקודות A ו-B הוא חיובי.

הנקודה A נמצאת מעל הנקודה B, כמתואר בסרטוט.

נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודות A ו-B.

א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AB.

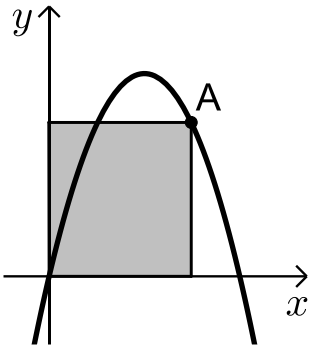
ב. מצא את הערך של x שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

ג. עבור הערך של x שמצאת בסעיף ב', מצא את המרחק של הנקודה B מציר ה- x.

4) נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$.

מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



תשובות סופיות:

1) א. (1) $A(x,-x^2+9x)$ א. (2) $P_{ABOC}=-2x^2+20x$ ב. $A(5,20)$

2) א. $x_A=3$ ב. 27 יח"ש $S=$.

3) א. $AB=-2x^3+3x^2+5$ ב. $x=1$ ג. $d=1$.

4) $A(4,8)$.

שאלון 471

בעיות קיצון בפונקצית שורש

תוכן העניינים:

בעיות קיצון בפונקצית שורש..... 377

בעיות קיצון במספרים:..... 378

שאלות:..... 378

תשובות סופיות:..... 378

בעיות קיצון גאומטריות במישור:..... 379

שאלות:..... 379

תשובות סופיות:..... 379

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:..... 380

שאלות:..... 380

תשובות סופיות:..... 381

בעיות קיצון במספרים:

שאלות:

1) מצא מספר חיובי שאם נכפיל אותו פי 2 ונחסר מהתוצאה את השורש הריבועי של המספר, נקבל הפרש מינימלי. מה הוא הפרש זה?

2) נתונים שני מספרים: $2\sqrt{x}$ ו- $-x$.

א. מצא את x עבורו סכום שני המספרים הנתונים הוא מקסימלי.

ב. מצא את סכום שני המספרים הנתונים עבור הערך של x שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות:

1) המספר: $\frac{1}{16}$. ההפרש: $-\frac{1}{8}$.

2) א. $x=1$ ב. 1-, 2.

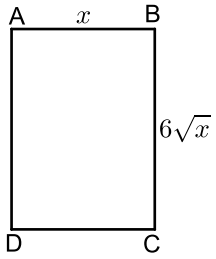
בעיות קיצון גאומטריות במישור:

שאלות:

1) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

2) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a, מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

3) לפניכם מלבן ABCD שבו אורך הצלע AB מסומנת ב- x ואורך הצלע BC היא $6\sqrt{x}$.



א. מצאו את x שעבורו ההפרש בין BC ל-AB הוא מקסימלי.

ב. חשבו את שטח המלבן עבור ערך ה- x שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות:

1) 8 יחידות אורך.

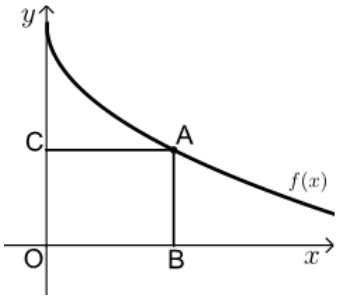
2) א. $\frac{a}{3}$

3) א. $x=9$ ב. 162 יח"ש $= S_{ABCD}$.

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=7-2\sqrt{x}$.



מן הנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון,
הורידו אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABOC כמתואר באיור
(הנקודה O היא ראשית הצירים).
נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A.

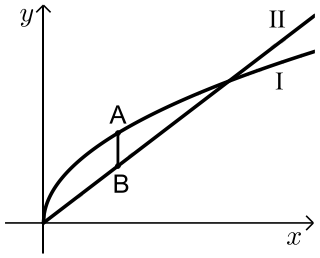
א. (1) הבע באמצעות x את היקף המלבן ABOC.

(2) מצא את שיעור ה- x של הנקודה A עבורו היקף המלבן ABOC הוא מינימלי.

ב. עבור שיעור ה- x שמצאת בתת-סעיף א (2), מה הוא היקף המלבן ABOC?

2) באיור שלפניך מתוארים שני גרפים שמשוואותיהם:

I. $y=4\sqrt{x}$ II. $y=\frac{1}{2}x$.

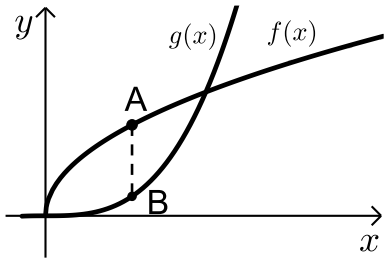


הנקודה A נמצאת על גרף I והנקודה B נמצאת על גרף II
כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.
הנקודות A ו-B נמצאות בין נקודות החיתוך של הגרפים
כמתואר באיור.

א. מצאו את שיעור ה- x של הנקודה A עבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

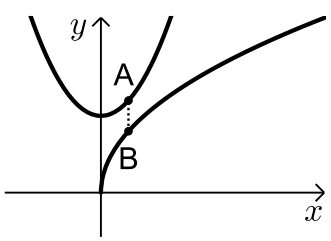
ב. חשבו את האורך המקסימלי של הקטע AB.

3) נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.



את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B,
שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל
לציר ה- y.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך
הקטע AB יהיה מקסימלי?

4) נתונות שתי הפונקציות: $f(x)=4\sqrt{x}\ ,\ g(x)=x^2+5$.



א. התאימו לכל גרף את הפונקציה המתאימה.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודות A ו-B כדי שאורך הקטע AB (המקביל לציר ה- y) יהיה מינימלי?

ג. חשבו את אורך הקטע המינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. (1) $P_{ABOC}=2x-4\sqrt{x}+14$ א. (2) $x=1$ ב. 12 יח"א.

2) א. $x=16$ ב. 8 יח"א = AB.

3) $A(1,2)$.

4) א. הנקודה A נמצאת על g והנקודה B נמצאת על f.

ב. $A(1,6)\ ,\ B(1,4)$.

ג. האורך המינימלי הוא 2 יחידות אורך.

שאלון 471

קדם אנליזה של פונקצית מנה – הפונקציה ההופכית

תוכן העניינים:

קדם אנליזה של פונקצית מנה – הפונקציה ההופכית..... 382

גרף הפונקציה ההופכית:..... 383

סיכום כללי:..... 383

שאלות:..... 384

אסימפטוטה אופקית:..... 387

סיכום כללי:..... 387

שאלות:..... 388

חיתוך בין גרף הפונקציה וההופכית לה:..... 389

סיכום כללי:..... 389

שאלות:..... 389

סרטוט גרף הכולל אסימפטוטה אנכית:..... 390

סיכום כללי:..... 390

שאלות:..... 391

טרנספורמציות עם פונקציה הופכית:..... 394

סיכום כללי:..... 394

שאלות:..... 395

תשובות סופיות:..... 397

גרף הפונקציה ההופכית:

סיכום כללי:

מספר הופכי:

המספר ההופכי של מספר נתון הוא מספר (השונה מ-0), שמכפלתו במספר הנתון שווה ל-1.

במילים אחרות, זהו המספר שמקבלים ע"י חלוקת 1 במספר הנתון.

מסקנות:

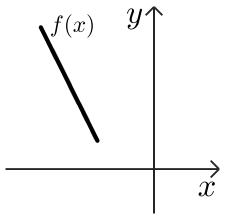
- הסימן של שני מספרים הופכיים זהה:
  אם מספר הוא חיובי, אז גם ההופכי לו יהיה חיובי,
  ואם מספר הוא שלילי אז גם ההופכי לו יהיה שלילי.
- ל-0 אין הופכי!
- ישנם שני מספרים שהם הופכיים של עצמם: 1, -1.

הקשר בין תכונות פונקציה והפונקציה ההופכית לה:

	חיוביות ושליליות		עלייה וירידה		נקודות קיצון	
$f(x)$	חיובית	שלילית	עולה	יורדת	$\min(x,y)$	$\max(x,y)$
$\frac{1}{f(x)}$	חיובית	שלילית	יורדת	עולה	$\max\left(x,\frac{1}{y}\right)$	$\min\left(x,\frac{1}{y}\right)$

שאלות:

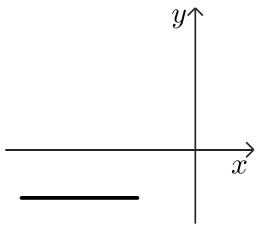
1) לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=-2x-6$ בתחום: $-8\le x\le -4$.



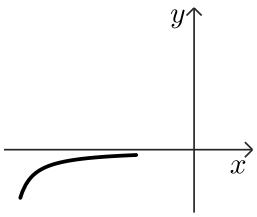
נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=\frac{1}{-2x-6}$.

העזרו בתחומי החיוביות והשליליות ובתחומי העלייה והירידה,

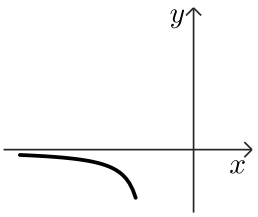
ובחרו איזה מבין הגרפים שלפניכם מתאים לפונקציה $g(x)$ בתחום הנ"ל.



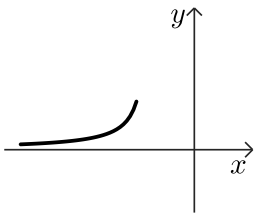
ד.



ג.



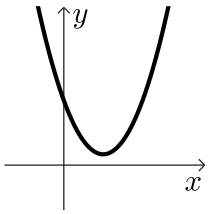
ב.



א.

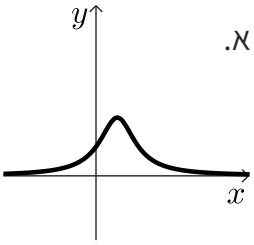
הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון וסוגה
$f(x)$					
$g(x)$					

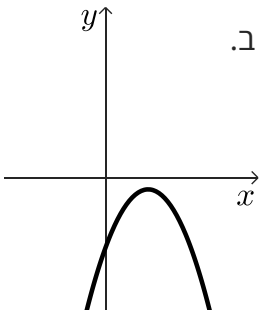
2) לפניכם גרף הפונקציה: $g(x)=2x^2-4x+4$.

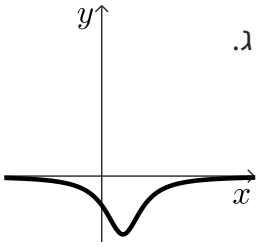


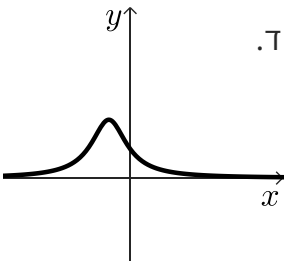
נתונה הפונקציה $h(x)$, המקיימת: $h(x)=\frac{1}{2x^2-4x+4}$.

העזרו בנקודת הקיצון, בתחומי החיוביות והשליליות ובתחומי העליה והירידה,
ובחרו איזה מבין הגרפים שלפניכם מתאים לפונקציה $h(x)$ בתחום הנ"ל.

א.


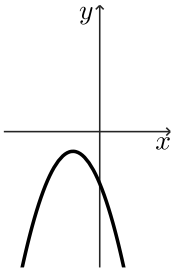
ב.


ג.


ד.


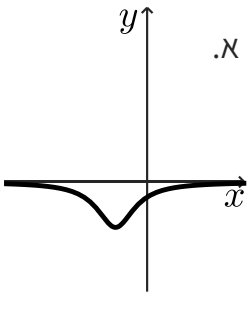
הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון וסוגה
$g(x)$					
$h(x)$					

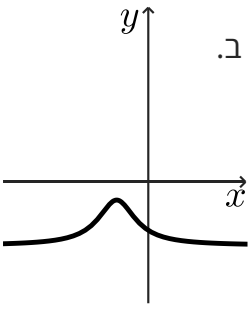
3) לפניכם גרף הפונקציה: $f(x)=-x^2-4x-6$.

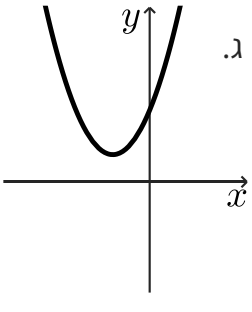


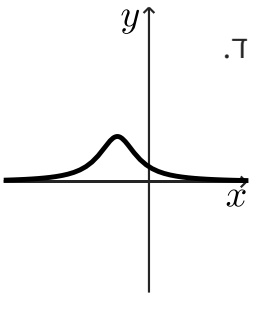
נתונה הפונקציה $h(x)$, המקיימת: $h(x)=\frac{1}{-x^2-4x-6}$.

העזרו בנקודת הקיצון, בתחומי החיוביות והשליליות ובתחומי העליה והירידה,
ובחרו איזה מבין הגרפים שלפניכם מתאים לפונקציה $h(x)$.

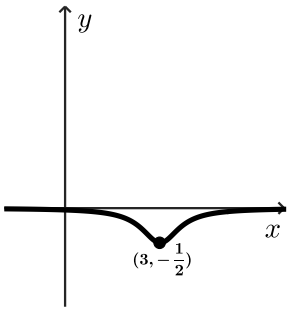
א.


ב.


ג.


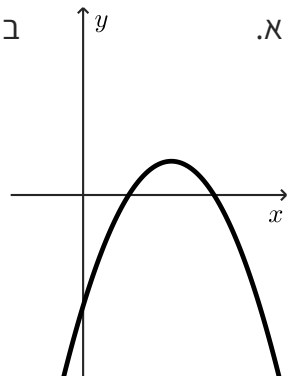
ד.


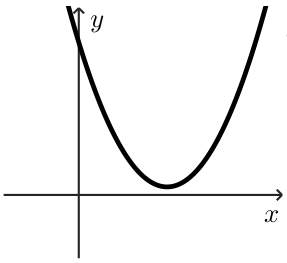
4) נתונות שתי פונקציות, $f(x)$ ו-$g(x)$, המוגדרות לכל x, ומקיימות: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

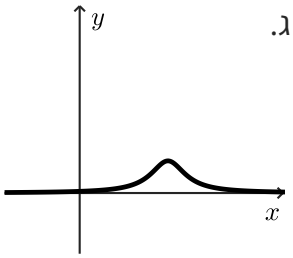


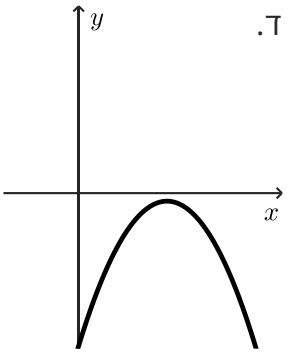
בשרטוט שלפניכם מתוארת הפונקציה $g(x)$.

לפניכם 4 גרפים, בחרו איזה מבין הגרפים מתאים לייצג את הפונקציה $f(x)$, ונמקו.

א.


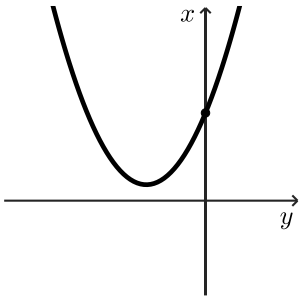
ב.


ג.


ד.


הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון וסוגה
$f(x)$					
$g(x)$					

5) לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x, וחיובית לכל x.



נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום ששיעוריה הם $(-3,2)$, מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

אסימפטוטה אופקית:

סיכום כללי:

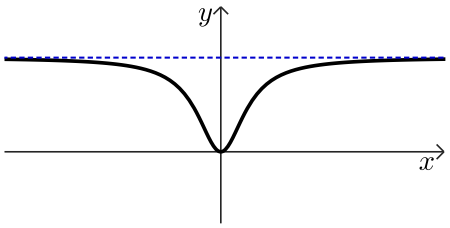
אסימפטוטה אופקית:

ישר מהצורה $y=a$, המקביל לציר ה-x, נקרא **אסימפטוטה אופקית** לפונקציה $f(x)$ אם עבור ערכי x הולכים וגדלים $(x\to+\infty)$ או עבור ערכי x הולכים וקטנים $(x\to-\infty)$ המרחק בין גרף הפונקציה $f(x)$ לישר $y=a$ שואף לאפס.

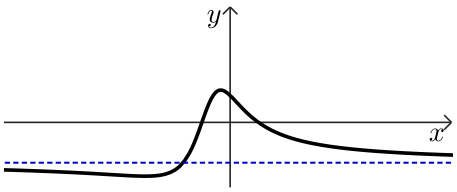
כאשר מדובר בפונקציה מהצורה $\frac{1}{f(x)}$, האסימפטוטה האופקית תהיה $y=0$ (ציר ה-x)

ישנן פונקציות אחרות, שלהן יהיו אסימפטוטות אופקיות אחרות, למשל:

הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$



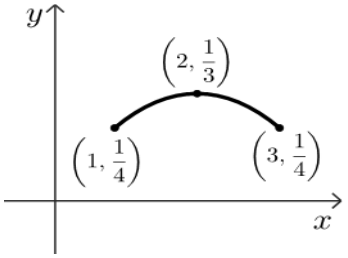
הפונקציה: $f(x)=\frac{4-x^2}{x^2+3x+6}$



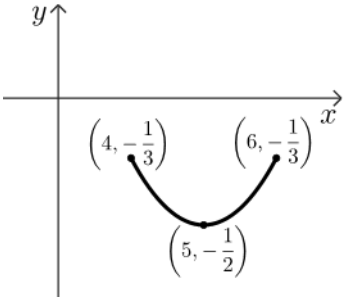
שאלות:

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה פונקציה וגרף חלקי שלה (כל הפונקציות מוגדרות לכל x).
השלימו בכל אחד מן הגרפים את האסימפטוטה האופקית, כתבו את משוואתה והשלימו את הסרטוט של גרף הפונקציה.

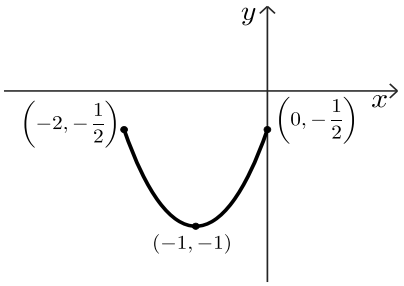
א. $y=\frac{1}{x^2-4x+7}$



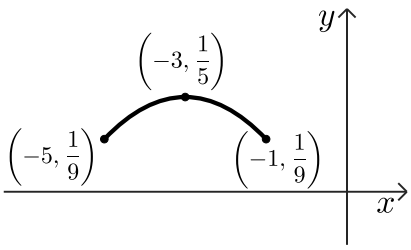
ב. $y=\frac{1}{-x^2+10x-27}$



ג. $y=\frac{1}{-x^2-2x-2}$

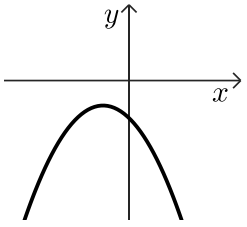


ד. $y=\frac{1}{x^2+6x+14}$



7) בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)=-x^2-2x-3$.

סרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$, המקיימת: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.



הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון וסוגה
$f(x)$					
$g(x)$					

חיתוך בין גרף הפונקציה וההופכית לה:

סיכום כללי:

הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ נחתכות כאשר $y=1$ או $y=-1$.

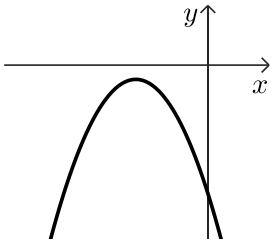
הערות:

1) אם בנקודה שבה $y=1$ או $y=-1$ יש לפונקציה נקודת קיצון, אז היא תהיה נקודת החיתוך היחידה שלה ושל הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ כאשר עבור $\frac{1}{f(x)}$ נקודה זו תהיה גם קיצון מהסוג השני.

2) אם הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(x)>1$ או $f(x)<-1$ בכל תחום הגדרתה, אז היא לא תחתוך את גרף הפונקציה ההופכית $\frac{1}{f(x)}$ כלל.

שאלות:

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=-x^2-4x-4.5$ ונתון גרף הפונקציה $f(x)$:



א. סרטטו באותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה ההופכית $\frac{1}{f(x)}$. היעזרו בטבלה הבאה:

הפונקציה	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$					
$\frac{1}{f(x)}$					

ב. מה ניתן לומר על נקודות החיתוך של שתי הפונקציות?

סרטוט גרף הכולל אסימפטוטה אנכית:

סיכום כללי:

אסימפטוטה אנכית:

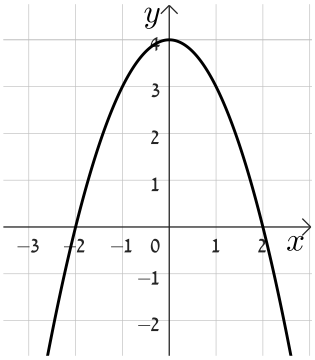
ישר מהצורה $x=a$ המאונך לציר ה-x, נקרא אסימפטוטה אנכית לפונקציה,
אם ככל שערכי x מתקרבים ל-a מימין או משמאל, ערכי הפונקציה מתקרבים ל-$\infty+$ או ל-$\infty-$.

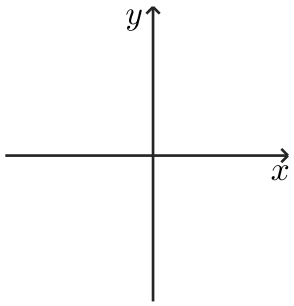
סיכום תכונות פונקציה והפונקציה ההופכית לה:

	$f(x)$	$\frac{1}{f(x)}$
תחום הגדרה	כל x	אם ל-$f(x)$ יש חיתוך עם ציר ה-x, אז $\frac{1}{f(x)}$ לא מוגדרת בנקודות אלו
חיוביות ושליליות	תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ ושל $\frac{1}{f(x)}$ נשמרים	
עלייה וירידה	תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ ושל $\frac{1}{f(x)}$ הם הפוכים (בהתאם לתחום ההגדרה)	
נקודות קיצון	(x,y) קיצון של $f(x)$ אז $\left(x,\frac{1}{y}\right)$ קיצון של $\frac{1}{f(x)}$ כאשר $y\neq 0$. סוג הקיצון מתהפך	
חיתוך עם ציר ה-x	ייתכן	אין
אסימפטוטה אנכית	אין	בנקודות חיתוך של $f(x)$ עם ציר ה-x, ל-$\frac{1}{f(x)}$ יש אסימפטוטה אנכית
אסימפטוטה אופקית	אין	$y=0$
נקודות משותפות	$f(x)$ ו-$\frac{1}{f(x)}$ נחתכות בנקודות שבהן $y=1$ או $y=-1$.	

שאלות:

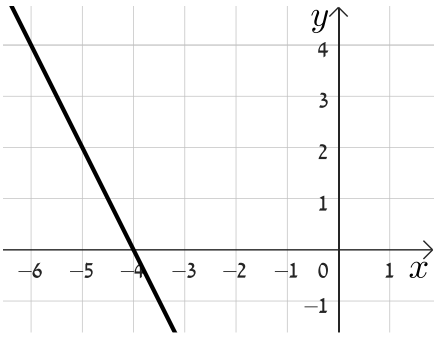
9) נתונה הפונקציה: $f(x)=-x^2+4$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.

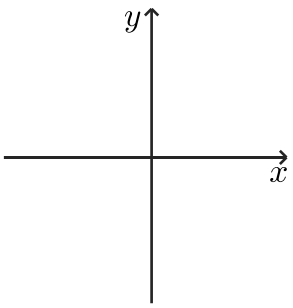




הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

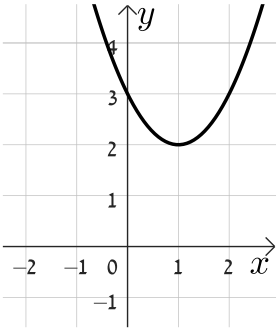
10) נתונה הפונקציה: $g(x)=-2x-8$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.

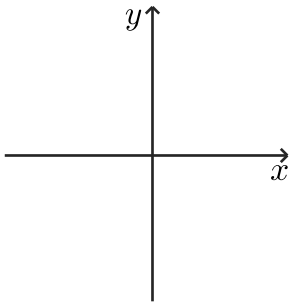




הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

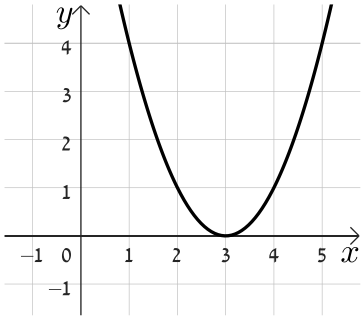
11) נתונה הפונקציה: $h(x)=x^2-2x+3$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.

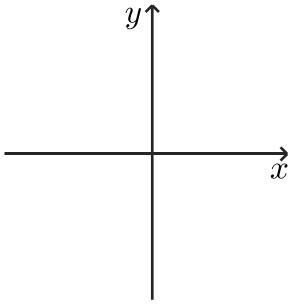




הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

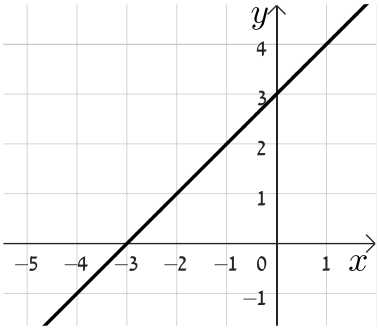
12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-6x+9$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.

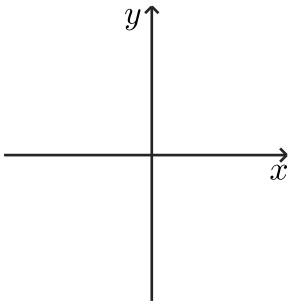




הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

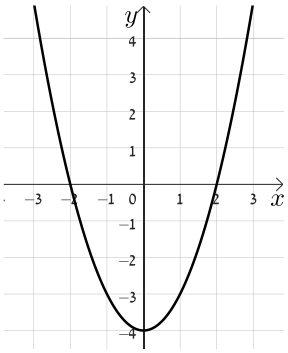
13) נתונה הפונקציה: $g(x)=x+3$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.

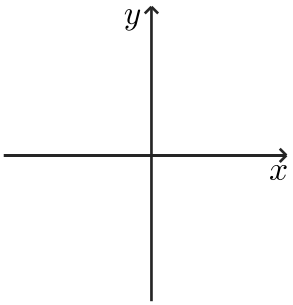




הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

14) נתונה הפונקציה: $h(x)=x^2-4$. סרטטו סקיצה של הפונקציה ההופכית לה.





הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

טרנספורמציות עם פונקציה הופכית:

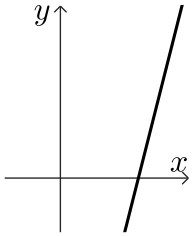
סיכום כללי:

להלן סיכום תכונות הטרנספורמציות שנלמדו עבור פונקציות:

	השינוי	אסימפטוטה אנכית $x=a$	אסימפטוטה אופקית $y=b$
$f(x)\pm k$	הזזה אנכית	לא משתנה	משתנה: $y=b\pm k$
$f(x\pm k)$	הזזה אופקית	משתנה: $x=a\pm k$	לא משתנה
$k\cdot f(x)$	כיווץ/ מתיחה	לא משתנה	משתנה: $y=b\cdot k$
$-f(x)$	שיקוף ביחס לציר x	לא משתנה	משתנה: $y=-b$
$f(-x)$	שיקוף ביחס לציר y	משתנה: $x=-a$	לא משתנה
$\lvert f(x)\rvert$	ערך מוחלט	לא משתנה	$y=\lvert b\rvert$

שאלות:

15) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x)=3x-9$.

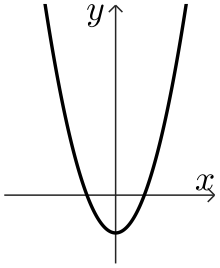


העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $k(x)=\frac{1}{3x-9}+3$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

16) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x)=x^2-1$.

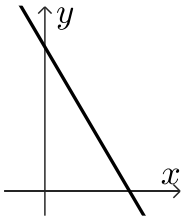


העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $h(x)=\frac{1}{(x-2)^2-1}$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

17) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x)=6-2x$.

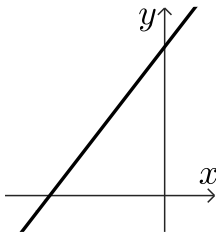


העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של

גרף הפונקציה: $h(x)=\frac{6}{6-2x}$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

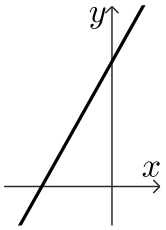
18) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x)=2x+8$.



העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: $h(x)=-\frac{1}{2x+8}$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

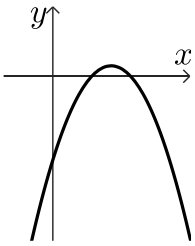
19) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x)=x+7$.



העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: $h(x)=\frac{1}{-x+7}$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

20) בסרטוט שלפניכם נתון גרף הפונקציה: $f(x)=-x^2+6x-8$.



העזרו בנתונים שעל הגרף, וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה: $h(x)=\left|\frac{1}{-x^2+6x-8}\right|$.

הפונקציה	תחום הגדרה	אסימפטוטות	תחום חיוביות	תחום שליליות	תחום עליה	תחום ירידה	נקודת קיצון
$f(x)$							
$\frac{1}{f(x)}$							

תשובות סופיות:

1) גרף א.

2) גרף א.

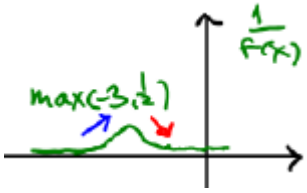
3) גרף א.

4) גרף ד.

5) א. כל x ב. $\max\left(-3,\frac{1}{2}\right)$

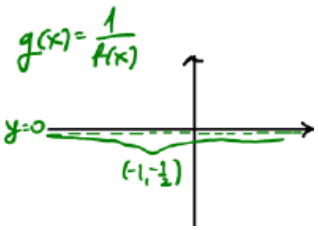
ג. עלייה: $x<-3$, ירידה: $x>-3$

ד. להלן סרטוט:

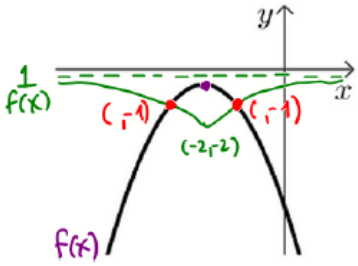


6) ראו פתרון ואיורי סקיצות בסרטון הוידאו.

7) להלן סרטוט:



8) א. ראו סרטוט בצד.



ב. הפונקציות נחתכות בשתי נקודות.

9) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

10) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

11) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

12) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

13) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

14) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

15) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

16) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

17) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

18) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

19) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

20) ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

שאלון 471

אנליזה של פונקצית מנה

תוכן העניינים:

אנליזה של פונקצית מנה..... 398

תחום ההגדרה של פונקצית מנה: 400

סיכום כללי:..... 400

שאלות:..... 400

תשובות סופיות: 401

הנגזרת של פונקצית מנה:..... 402

סיכום כללי:..... 402

שאלות:..... 402

תשובות סופיות: 404

שיפוע משיק ומשוואת משיק: 406

סיכום כללי:..... 406

שאלות:..... 406

תשובות סופיות: 408

תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון: 409

שאלות:..... 409

תשובות סופיות: 410

אסימפטוטה אנכית:..... 411

סיכום כללי:..... 411

שאלות:..... 411

תשובות סופיות: 411

אסימפטוטה אופקית:..... 412

סיכום כללי:..... 412

שאלות:..... 413

תשובות סופיות: 415

חקירה מלאה: 416

שאלות:..... 416

תשובות סופיות: 418

שאלות מסכמות ברוח בגרויות: 419
שאלות: 419
תשובות סופיות: 420
הקשר שבין גרף הנגזרת לפונקציה: 421
שאלות: 421
תשובות סופיות: 423

תחום ההגדרה של פונקצית מנה:

סיכום כללי:

מציאת תחום ההגדרה של פונקצית מנה:

כאשר פונקציה מורכבת ממנה של שני ביטויים: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$, נדרוש כי הביטוי שבמכנה לא יתאפס.

כלומר: $g(x)\neq 0$.

שאלות:

1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x-3}{x-6}$

ב. $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$

ג. $f(x)=\frac{8}{x^2-8x+12}$

ד. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+4}$

ה. $f(x)=\frac{x^2+5}{(x+5)^2}$

ו. $f(x)=\frac{4-x}{(x+2)(x-7)}$

ז. $f(x)=\frac{2}{x-6}+\frac{x}{2x+4}$

2) לאילו מהפונקציות הבאות תחום ההגדרה הוא: $x\neq -5$?

א. $f(x)=\frac{x-4}{x^2-25}$

ב. $f(x)=\frac{x+5}{x-1}$

ג. $f(x)=\frac{-5}{x^2+25}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+1}{(x+5)^2}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+7}{x^2+ax+24}$ הוא $x\neq 6$.

מצאו את a.

4) נתון שהפונקציה: $f(x)=\frac{2-x}{x^2+x+a}$ **אינה מוגדרת** בנקודה שבה $x=-3$.

א. מצאו את a.

ב. מהי נקודת אי ההגדרה הנוספת של הפונקציה?

5) הפונקציה: $y=\frac{5x}{12x-a}$ אינה מוגדרת כאשר $x=\frac{1}{2}$.

מצאו את הערך של a.

6) הפונקציה: $y=\frac{3-x}{(3-bx)^2}$ מוגדרת עבור $x\neq 6$.

מצאו את הערך של b.

7) הראו כי הפונקציה: $f(x)=\frac{8-3x}{x^2-6x+10}$ מוגדרת לכל x.

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq 6$ ב. $x\neq \pm 2$ ג. $x\neq 2,6$ ד. כל x ה. $x\neq -5$

ו. $x\neq -2,7$ ז. $x\neq -2,6$.

2) פונקציה ד.

3) $a=-10$.

4) א. $a=-6$ ב. $x=2$.

5) $a=6$

6) $b=\frac{1}{2}$

7) ראו הוכחה בסרטון הוידאו.

הנגזרת של פונקצית מנה:

סיכום כללי:

גזירה של פונקצית מנה:

כלל הגזירה של פונקצית מנה: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

כללים לנגזרות מיידיות:

- נגזרת מיידית 1: $\left(\frac{a}{x}\right)'=-\frac{a}{x^2}$, כאשר a הוא מספר כלשהו.
- נגזרת מיידית 2: $\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$, $f(x)\neq 0$.

שאלות:

1) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y=\frac{x+2}{3-x}$

ב. $y=\frac{x^2}{x+5}$

ג. $y=\frac{2}{4x-1}$

ד. $y=\frac{2x}{x+4}$

ה. $y=\frac{5x-3}{2x+7}$

ו. $y=\frac{2x+3}{x}$

2) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

3) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y=\frac{1-x}{-2x^2+3}$

ב. $y=\frac{x^2-3}{x+3}+3$

ג. $y=\frac{2x^2}{x^2+5}-\frac{4}{x^2+5}$

4) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+6}+3$

ב. $y=\frac{x^2+2x+5}{x^2-6x+9}$

ג. $y=\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3}$

5) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{6}{x}-\frac{x}{6}+6$

ב. $f(x)=2x^2-\frac{7}{x}-12$

6) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{1}{6-x}$

ב. $f(x)=\frac{1}{4x-3}$

ג. $f(x)=\frac{4}{x-7}$

ד. $f(x)=\frac{5}{2x-9}$

ה. $f(x)=\frac{2}{3x-9}+\frac{2}{x}$

תשובות סופיות:

1) א. ת.ה. $x \neq 3$, נגזרת: $y' = \frac{5}{(3-x)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq -5$, נגזרת: $y' = \frac{x^2+10x}{(x+5)^2}$

ג. ת.ה. $x \neq \frac{1}{4}$, נגזרת: $y' = \frac{-8}{(4x-1)^2}$

ד. ת.ה. $x \neq -4$, נגזרת: $y' = \frac{8}{(x+4)^2}$

ה. ת.ה. $x \neq -3.5$, נגזרת: $y' = \frac{41}{(2x+7)^2}$

ו. ת.ה. $x \neq 0$, נגזרת: $y' = \frac{-3}{x^2}$

2) א. ת.ה. $x \neq -\frac{1}{2}$, נגזרת: $y' = \frac{5}{(1+2x)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq 2.4$, נגזרת: $y' = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$

ג. ת.ה. כל x, נגזרת: $y' = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$

3) א. ת.ה. $x \neq \pm 1.22$, נגזרת: $y' = \frac{-2x^2+4x-3}{(-2x^2+3)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq -3$, נגזרת: $y' = \frac{x^2+6x+3}{(x+3)^2}$

ג. ת.ה. כל x, נגזרת: $y' = \frac{28x}{(x^2+5)^2}$

4) א. ת.ה. כל x, נגזרת: $y' = \frac{-4x^2+16x}{(x^2-3x+6)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq 3$, נגזרת: $y' = \frac{-8x^2+8x+48}{(x^2-6x+9)^2}$

ג. ת.ה. $x \neq 1,3$, נגזרת: $y' = \frac{-8x^2-2x+28}{(x^2-4x+3)^2}$

5) א. ת.ה. $x \neq 0$, נגזרת: $y' = -\frac{6}{x^2} - \frac{1}{6}$

ב. ת.ה. $x \neq 0$, נגזרת: $y' = 4x + \frac{7}{x^2}$

6) א. ת.ה. $x \neq 6$, נגזרת: $y' = \frac{1}{(6-x)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq \frac{3}{4}$, נגזרת: $y' = -\frac{4}{(4x-3)^2}$

ג. ת.ה. $x \neq 7$, נגזרת: $y' = -\frac{4}{(x-7)^2}$

ד. ת.ה. $x \neq 4.5$, נגזרת: $y' = -\frac{10}{(2x-9)^2}$

ה. ת.ה. $x \neq 0,3$, נגזרת: $y' = \frac{-6}{(3x-9)^2} - \frac{2}{x^2}$

שיפוע משיק ומשוואת משיק:

סיכום כללי:

נתונה פונקציה $f(x)$ אז:

- נגזרת של פונקציה בנקודה מסוימת $A(x_1,y_1)$ תיתן את שיפוע הפונקציה או שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו.
- נכתוב את משוואת המשיק ע"י שימוש בנוסחה: $y-y_1=m(x-x_1)$ כאשר: $m=f'(x_1)$.

שאלות:

1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה הנתונה העובר בנקודה המופיעה לידה:

א. $x=1\,,\,y=\dfrac{x+3}{x-2}$

ב. $x=-3\,,\,y=\dfrac{x-1}{(x+4)^2}$

ג. $x=3\,,\,y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}-2$

2) מצאו שתי נקודות על גרף הפונקציה: $f(x)=\dfrac{3x-4}{x-6}$, בהן שיפוע המשיק לגרף הוא: $m=-3.5$.

3) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x+a}{x+4}$ בנקודה שבה $x=-1$ הוא 1.

א. מצאו את הערך של a.

ב. הציבו $a=-5$ ומצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

ג. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודה שבה $x=-1$.

4) נתונה הפונקציה: $y=\frac{x^2+bx}{x-2}$, b הוא פרמטר.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 9-.

מצאו את הערך של b ואת שיעורי נקודת ההשקה.

5) באילו נקודות על גרף הפונקציה: $y=\frac{6}{x}-\frac{x}{3}$, המשיק לגרף הפונקציה יוצר זווית של $45°$ עם ציר ה-x?

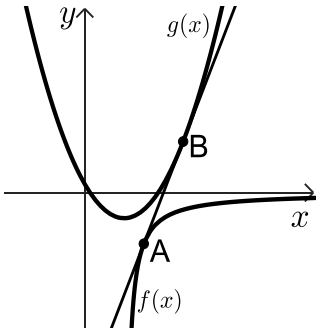
6) מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x}$, המאונכים לישר $y=8x-3$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-2}{x-3}$.

א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת האפס שלה.

ב. האם קיים משיק נוסף לגרף הפונקציה המקביל למשיק שמצאתם בסעיף א'?
אם כן, מהי נקודת ההשקה שלו?

8) לפניכם ישר המשיק בנקודה A לגרף הפונקציה: $f(x)=-\frac{9}{x-2}$.



שיעור ה-y של הנקודה A הוא 9-.

בסרטוט מופיע רק החלק של גרף הפונקציה $f(x)$

הנדרש בשאלה.

א. מצאו את שיעורי ה-x של הנקודה A.

ב. מצאו את משוואת המשיק.

ג. נתון שהישר המשיק בנקודה B לפרבולה: $g(x)=1.5x^2-6x+1.5$.

מצאו את שיעורי הנקודה B.

9) לפניכם שתי פונקציות: $f(x)=\frac{x^2-a}{x-1}$, $g(x)=x^2-6x+8$, a הוא פרמטר.

נתון: $f'(0)=g'(5)$.

א. מצאו את הפרמטר a.

ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=2$.

ג. האם המשיק שמצאתם בסעיף ב' משיק גם לגרף הפונקציה $g(x)$? נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. $y=-5x+4$ ב. $y=9x+23$ ג. $y=-3x+11$

2) $(8,10)$, $(4,-4)$.

3) א. $a=-5$ ב. $(-1,-2)$ ג. $y=x-1$.

4) $(1,-4)$, $b=3$.

5) $(-3,-1)$, $(3,1)$.

6) $y=-\frac{1}{8}x-1$, $y=-\frac{1}{8}x+1$.

7) א. $y=-x+2$ ב. $(4,2)$.

8) א. $A(3,-9)$ ב. $y=9x-36$ ג. $B(5,9)$.

9) א. $a=4$ ב. $y=4x-8$ ג. לא.

תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון:

שאלות:

1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את:

(1) תחומי העלייה והירידה.

(2) נקודות הקיצון וקביעת סוגן.

א. $y=-5x-\frac{5}{x}$

ב. $y=\frac{3}{x}-\frac{x}{3}$

ג. $y=\frac{4}{x+2}-\frac{1}{x-5}$

ד. $y=x^3+\frac{48}{x}$

ה. $y=\frac{2}{x^2-4x+3}$

ו. $y=\frac{-3x}{(x-1)^2}$

ז. $y=\frac{(x-2)^2}{x^2+6}$

ח. $y=\frac{16-x^2}{9-x^2}$

2) לפונקציה: $f(x)=\frac{x+a}{8+x^2}$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את a ואת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{x+1}+x+1$.

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלו).

תשובות סופיות:

1) א. (1) עלייה: $0<x<1\ ,\ -1<x<0$ ירידה: $x<-1\ ,\ x>1$

א. (2) $\max(1,-10)\ ,\ \min(-1,10)$

ב. (1) עלייה: אף x, ירידה: $x\neq 0$ ב. (2) אין נקודות קיצון.

ג. (1) עלייה: $5<x<12\ ,\ 2\frac{2}{3}<x<5$ ירידה: $x>12\ ,\ -2<x<2\frac{2}{3}\ ,\ x<-2$

ג. (2) $\max\left(12,\frac{1}{7}\right)\ ,\ \min\left(2\frac{2}{3},1.285\right)$.

ד. (1) עלייה: $x>2\ ,\ x<-2$ ירידה: $0<x<2\ ,\ -2<x<0$

ד. (2) $\max(-2,-32)\ ,\ \min(2,32)$

ה. (1) עלייה: $1<x<2\ ,\ x<1$ ירידה: $x>3\ ,\ 2<x<3$ ה. (2) $\max(2,-2)$

ו. (1) עלייה: $x>1\ ,\ x<-1$ ירידה: $-1<x<1$ ו. (2) $\max\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.

ז. (1) עלייה: $x>2\ ,\ x<-3$ ירידה: $-3<x<2$ ז. (2) $\max\left(-3,\frac{5}{3}\right)\ ,\ \min(2,0)$

2) א. $a=1\ ,\ f(x)=\frac{x+1}{8+x^2}$ ב. $\max\left(2,\frac{1}{4}\right)\ ,\ \min\left(-4,\frac{1}{8}\right)$

ג. עלייה: $-4<x<2$, ירידה: $x>2\ ,\ x<-4$.

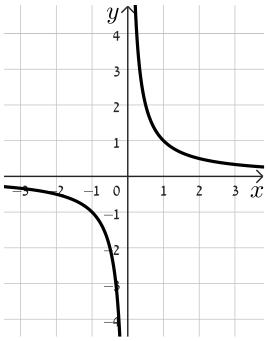
3) עלייה: $x>-1\ ,\ x<-1$, ירידה: אף x.

אסימפטוטה אנכית:

סיכום כללי:

מסקנות מבדיקת שאיפה של פונקצית מנה:

- ככל שערכי x **שואפים ל-0 מימין**, ערכי הפונקציה **שואפים** לפלוס אינסוף $(+\infty)$
- ככל שערכי x **שואפים ל-0 משמאל**, ערכי הפונקציה **שואפים** למינוס אינסוף $(-\infty)$



אסימפטוטה אנכית:

ישר מהצורה: $x=x_0$ המאונך לציר ה- x ייקרא אסימפטוטה אנכית של $f(x)$ אם עבור ערכי x המתקרבים ל- x_0, ערכי הפונקציה $f(x)$ שואפים לפלוס או מינוס אינסוף.

שאלות:

1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האנכית עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

ב. $f(x)=4x^3-x^2+\frac{x}{2}+1$

ג. $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

ד. $f(x)=\frac{5x^2+4x}{x^2-1}$

ה. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ו. $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-8}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x^2+4}$

תשובות סופיות:

1) א. אין ב. אין ג. $x=3$ ד. $x=1\,,\,x=-1$

ה. $x=4\,,\,x=0$ ו. $x=4\,,\,x=-2$ ז. אין.

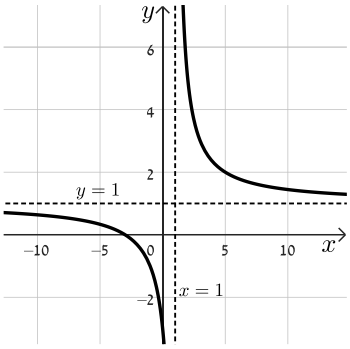
אסימפטוטה אופקית:

סיכום כללי:

מסקנה מבדיקת שאיפה של פונקצית מנה:

- ככל שערכי x **שואפים לפלוס אינסוף** $(+\infty)$, ערכי הפונקציה **שואפים ל-1.**
- ככל שערכי x **שואפים למינוס אינסוף** $(-\infty)$, ערכי הפונקציה **שואפים ל-1.**

אסימפטוטה אופקית:



ישר מהצורה: $y = y_0$ הוא אסימפטוטה של פונקציה $f(x)$
אם עבור ערכי x ההולכים וגדלים לפלוס אינסוף או למינוס אינסוף,
ערכי הפונקציה מתקרבים לישר.

דרכים למציאת אסימפטוטה אופקית:

נתונה פונקצית מנה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר: $g(x) \neq 0$.

- אם מעלת הפולינום $f(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $g(x)$ אז: $y = 0$.
  דוגמה: $y = \frac{x+2}{x^2+1}$.
- אם מעלת הפולינום $f(x)$ שווה למעלת הפולינום $g(x)$
  אז האסימפטוטה האופקית שווה ליחס המקדמים של ה-x עם החזקה הגבוהה ביותר.
  דוגמה: $y = \frac{4x^2-1}{x^2+x+2}$.
- אם מעלת הפולינום $f(x)$ גדול ממעלת הפולינום $g(x)$
  אז אין אסימפטוטה אופקית.
  דוגמה: $y = \frac{x^2-x-2}{2x-1}$.

שאלות:

1) מצאו את משוואות האסימפטוטות האופקיות והאנכיות עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $y=\frac{4}{x}$

ב. $y=\frac{x}{x-8}$

ג. $y=\frac{2x}{1-5x}$

ד. $y=\frac{x^2}{x+10}$

ה. $y=\frac{3x^2}{1-4x}$

ו. $y=-\frac{3}{x^2}$

ז. $y=\frac{7x}{x^2+7}$

ח. $y=\frac{2x^2}{x^2+5}$

ט. $y=\frac{x-2}{x^2-8x}$

י. $y=\frac{7}{x^2-10x+21}$

יא. $y=\frac{6x}{(x+3)(x-5)}$

יב. $y=\frac{x^2-1}{49-x^2}$

יג. $y=-\frac{8x^2}{1-4x^2}$

יד. $y=-\frac{x^2-25}{(x-3)^2}$

2) מצאו את משוואות האסימפטוטות האופקיות והאנכיות עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $y=\frac{8}{x}+2$

ב. $y=x-5+\frac{4}{x}$

ג. $y=\frac{14}{x^2}-2$

ד. $y=1+\frac{20}{x}+\frac{100}{x^2}$

ה. $y=3+\frac{x^2-67}{x^2+1}$

ו. $y=9-\frac{x^2+2}{x^2}$

ז. $y=\frac{3-x}{(5x-6)^2}+3$

ח. $y=1-\frac{5}{(5-x)^2}$

3) נתון כי לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אנכית $x=3$ ואסימפטוטה אופקית $y=1$.

איזה מהביטויים שלפניכם יכול לייצג את הפונקציה $f(x)$?

א. $f(x)=\frac{2x-2}{x^2-3}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-9}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+9}$

ד. $f(x)=\frac{x-1}{x^2-9}$

4) נתונות הפונקציות הבאות:

(1) $h(x)=\frac{25-x^2}{36-x^2}$ (2) $g(x)=\frac{64+x^2}{64-x^2}$ (3) $f(x)=\frac{x^2-16}{25+x^2}$.

לכל אחת מן הפונקציות קיימות אסימפטוטות אנכיות, אופקיות, או שתיהן.

א. קבעו לאלו פונקציות יש אסימפטוטות אנכיות, ומצאו אותן.

ב. קבעו לאלו פונקציות יש אסימפטוטות אופקיות, ומצאו אותן.

ג. דני טוען כי קיימת פונקציה אחת מבין הפונקציות הנתונות בשאלה אשר חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה. האם דני צודק? נמקו בעזרת חישוב מתאים.

ד. האם נכון לומר כי תמיד כאשר לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית, היא לא תחתוך אותה? נמקו מילולית, אין צורך בחישובים.

5) לפונקציה $y=\frac{3x^2+7}{x^2-8}+a$ יש אסימפטוטה אופקית $y=4$.

מצאו את ערך הפרמטר a.

6) לפונקציה $y=6-\frac{4+bx^2}{3-2x^2}$ יש אסימפטוטה אופקית $y=2$.

מצאו את ערך הפרמטר b.

7) הישר $x=1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+ax+3}$.

א. מצאו את הערך של a.

ב. (1) האם קיימת לפונקציה אסימפטוטה אנכית נוספת?

אם לא – נמקו, אם כן – מצאו אותה.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

ג. באיזו נקודה חותך גרף הפונקציה את האסימפטוטה האופקית שלו?

תשובות סופיות:

1) א. $x=0$, $y=0$ ב. $x=8$, $y=1$ ג. $x=0.2$, $y=-0.4$

ד. $x=-10$, אין אסימפטוטה אופקית. ה. $x=\frac{1}{4}$, אין אסימפטוטה אופקית.

ו. $x=0$, $y=0$ ז. אין אסימפטוטה אנכית, $y=0$

ח. אין אסימפטוטה אנכית, $y=2$ ט. $x=0$, $x=8$, $y=0$

י. $y=0$, $x=7$, $x=3$ יא. $x=-3$, $x=5$, $y=0$

יב. $y=-1$, $x=-7$, $x=7$ יג. $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$, $y=2$

יד. $y=-1$, $x=3$.

2) א. $x=0$, $y=2$ ב. $x=0$, $y=-2$

ג. $x=0$, אין אסימפטוטה אופקית. ד. $x=0$, $y=1$

ה. אין אסימפטוטה אנכית, $y=4$ ו. $x=0$, $y=8$

ז. $y=3$, $x=1.2$ ח. $y=1$, $x=5$.

3) סעיף ב.

4) א. פונקציה (1): $x=6$, $x=-6$, פונקציה (2): $x=8$, $x=-8$

ב. פונקציה (1): $y=1$, פונקציה (2): $y=-1$, פונקציה (3): $y=1$.

ג. דני טועה. ד. לא נכון.

5) $a=1$.

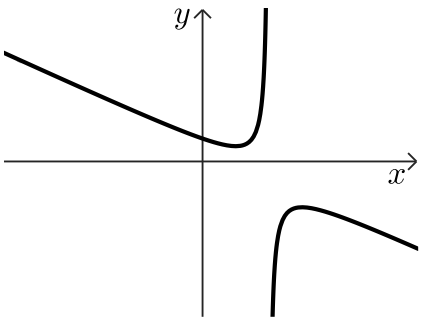
6) $b=-8$.

7) א. $a=-4$ ב. (1) כן, $x=3$ (2) $y=2$ ג. $(0.75,2)$.

חקירה מלאה:

שאלות:

1) לפניכם גרף הפונקציה: $y=\frac{x^2-6x+12}{12-3x}$.



מצאו עבור פונקציה זו:

א. תחום הגדרה.

ב. משוואת האסימפטוטה האנכית.

ג. שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-y.

ד. שיעורי נקודות המינימום והמקסימום.

ה. תחומי העלייה והירידה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+16}{4x}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראו כי הפונקציה אי זוגית.

ג. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים.

ד. מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. הסבירו מדוע גרף הפונקציה לא חותך את הצירים.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה

ז. עבור אילו ערכי k אין פתרונות למשוואה $f(x)=k$?

ח. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x+2)$.

מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה?

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ זוגית.

ה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה.

ו. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ז. סרטטו את גרף הפונקציה.

ח. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)+k$.

האם הפונקציה $g(x)$ זוגית? נמקו.

ט. ידוע שלפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=-5$.

מצאו את k.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+x+1}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלו).

ד. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ה. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ו. סרטטו את גרף הפונקציה.

ז. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=-3f(x)$.

(1) מהי האסימפטוטה האופקית של $g(x)$?

(2) הוסיפו לסרטוט את הפונקציה $g(x)$ בקו מקווקו.

תשובות סופיות:

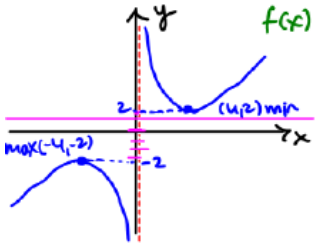
1) א. $x\neq 4$ ב. $x=4$ ג. $(0,1)$ ד. $\max(6,-2)\ ,\ \min\left(2,\frac{2}{3}\right)$

ה. עלייה: $4<x<6\ ,\ 2<x<4$, ירידה: $x>6\ ,\ x<2$.

2) א. $x\neq 0$ ב. הוכחה. ג. $x=0$ ד. $\max(-4,-2)\ ,\ \min(4,2)$

עלייה: $x>4\ ,\ x<-4$, ירידה: $0<x<4\ ,\ -4<x<0$

ה. אין חיתוך עם הצירים. ו. להלן סקיצה:

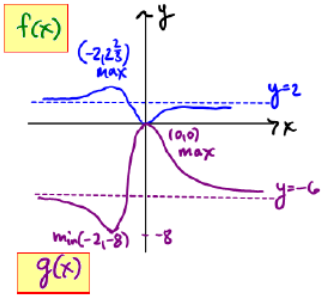


ז. $-2<k<2$ ח. $x=-2$.

3) א. כל x. ב. $y=1$ ג. $(0,-2)\ ,\ (-2,0)\ ,\ (2,0)$

ד. הוכחה. ה. $\min(0,-2)$

ו. עלייה: $x>0$, ירידה: $x<0$ ז. להלן סקיצה:



ח. $g(x)$ זוגית. ט. $k=-6$.

4) א. כל x. ב. $y=2$

ג. $(0,0)$ ד. $\max\left(-2,\frac{8}{3}\right)\ ,\ \min(0,0)$

ה. עלייה: $x>0\ ,\ x<-2$, ירידה: $-2<x<0$ ו. להלן סרטוט:

ז. (1). $y=-6$. ז. (2) ראו תוספת בסקיצה להלן.

שאלות מסכמות ברוח בגרויות:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{-x^2+6x-8}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. הגדירו פונקציה חדשה $g(x)=f(x)+k$.

מה צריך להיות ערכו של k על מנת שגרף הפונקציה $g(x)$ ישיק לישר $y=5$

(מצאו את שני הפתרונות).

ו. הגדירו פונקציה חדשה $h(x)=f(x+1)$ אביחי טוען שהאסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$ זהות לאלו של הפונקציה $f(x)$. האם אביחי צודק?

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x-b}{x+2}+1$. b הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-y בנקודה $(0,-2)$.

ב. מצאו את b.

הציבו את הערך של b שמצאתם בסעיף ב בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ז.

ג. מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

ה. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

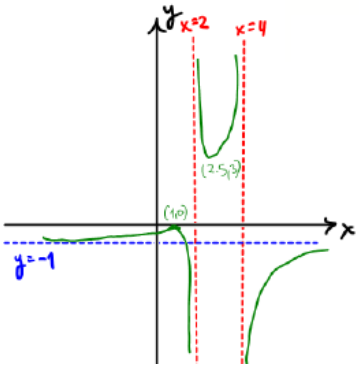
ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ז. הסבירו מדוע אין פתרון למשוואה: $\frac{3x-6}{x+2}+1=4$.

תשובות סופיות:

1) א. (1). $x \neq 2,4$ א. (2). $x=2,4\ ,\ y=-1$

ב. $\min(2.5,3)$, $\max(1,0)$ ג. $\left(0,-\frac{1}{8}\right)$, $(1,0)$ ד. להלן סקיצה:



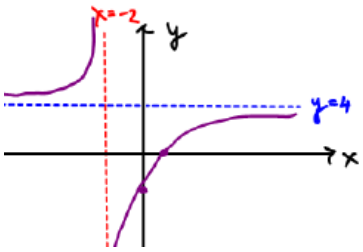
ה. $k=2,5$ ו. אביחי טועה.

2) א. $x \neq -2$ ב. $b=6$

ג. $x=-2\ ,\ y=4$ ד. $(1,0)$

ה. עלייה: $x>2\ ,\ x<-2$, יורדת: אף x.

ו. להלן סקיצה:



ז. ראו הסבר בפתרון הוידאו באתר.

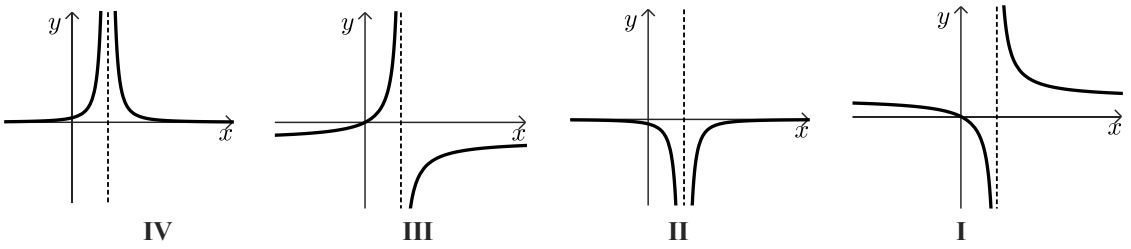
הקשר שבין גרף הנגזרת לפונקציה:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-4}$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

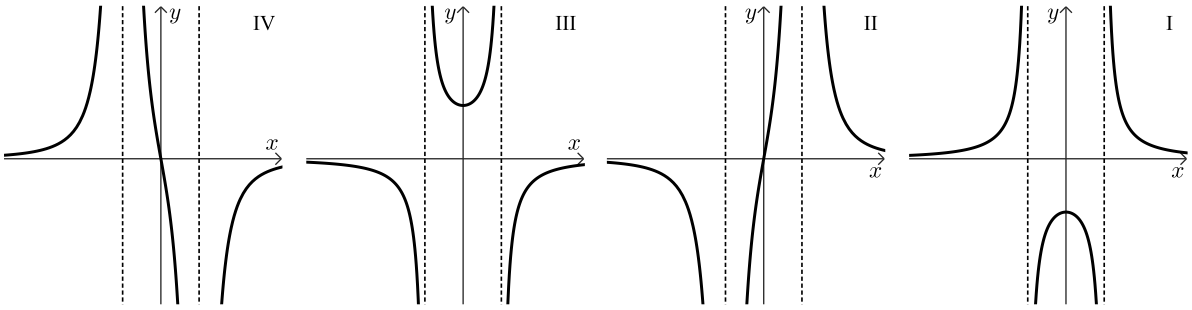
אחד מן הגרפים I-IV מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו.



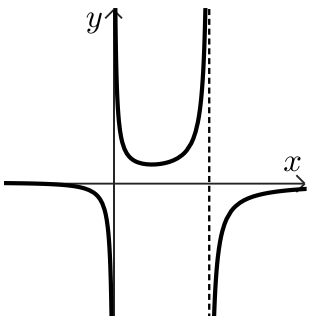
2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{4x^2-1}$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

אחד מן הגרפים I-IV מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו.



3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+4}{5x-x^2}$ כמתואר באיור.

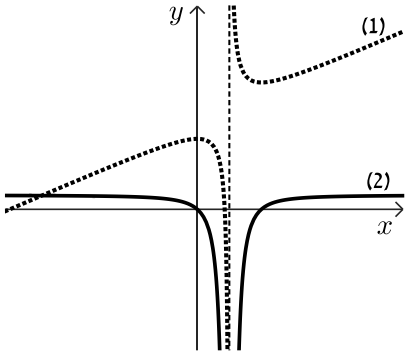


לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום , ששיעור ה-y שלה הוא 1.

הגדירו פונקציה חדשה $g(x)$ כך שפונקציית הנגזרת שלה מקיימת: $g'(x)=f(x)-1$.

קבעו האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון. נמקו.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}+5$.



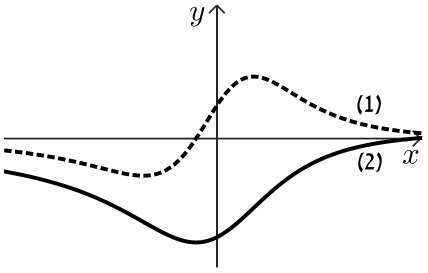
באיור שלפניכם מופיעים הגרפים של שתי פונקציות:

הפונקציה $f(x)$ ופונקצית הנגזרת, $f'(x)$.

לשתי הפונקציות אותו תחום ההגדרה.

קבעו איזה מבין שני הגרפים (1)-(2) מתאים לפונקציה $f(x)$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-3}{x^2+2}$.



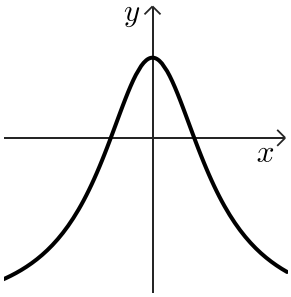
באיור שלפניכם מופיעים הגרפים של שתי פונקציות:

הפונקציה $f(x)$ ופונקצית הנגזרת, $f'(x)$.

לשתי הפונקציות אותו תחום ההגדרה.

קבעו איזה מבין שני הגרפים (1)-(2) מתאים לפונקציה $f(x)$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{17-x^2}{x^2+9}-1$ (הפונקציה מוגדרת לכל x).



א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x)=f(x)$

(הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ מוגדרות באותו תחום הגדרה).

(1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן.

(3) מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודות: $x=2$, $x=3$.

תשובות סופיות:

1) גרף II.

2) גרף IV.

3) אין לה נקודת קיצון.

4) גרף (1).

5) גרף (2).

6) א. $(-2,0)$, $(2,0)$ ב. חיובית: $-2<x<2$, שלילית: $x>2$, $x<-2$.

ג. (1) עלייה: $-2<x<2$, ירידה: $x>2$, $x<-2$.

ג. (2) $x=\pm 2$ ג. (3) עבור: $x=2$: $m=0$, עבור: $x=3$: $m=-\frac{5}{9}$.

שאלון 471

בעיות קיצון בפונקצית מנה

תוכן העניינים:

בעיות קיצון בפונקצית מנה..... 424

בעיות בהנדסת המישור: 425

שאלות:..... 425

תשובות סופיות: 426

בעיות בהנדסת המרחב: 427

שאלות:..... 427

תשובות סופיות: 427

בעיות בפונקציות וגרפים: 428

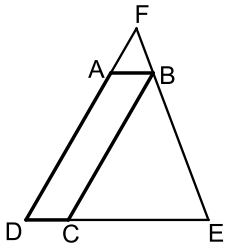
שאלות:..... 428

תשובות סופיות: 429

בעיות בהנדסת המישור:

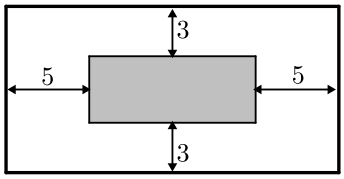
שאלות:

1) המרובע ABCD הוא מקבילית. מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן: $AB = 2$, $AD = 8$.
מסמנים את אורך הצלע DE ב- x.



א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע DF.
ב. מצאו את x בעבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.
ג. מה הוא הסכום המינימלי?

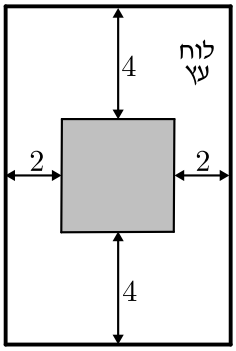
2) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ".
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).



יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר. מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.
ב. מה תהיינה מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

3) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:
יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ.
כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר בעבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין בעבור המשימה?
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה בעבור המידות שאלינה בחרה?

4) אדם מתכנן לבנות מרפסת בצורת מלבן בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת (ראה איור).
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

תשובות סופיות:

1) א. $DF=\frac{8x}{x-2}$ ב. מתקבלת הפונקציה: $L=\frac{x^2+6x}{x-2}$. הפתרון הוא: $x=6$.
ג. $L=18$.

2) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.

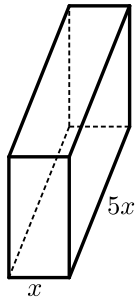
3) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ ב. $S=98$.

4) 4 על 6.

בעיות בהנדסת המרחב:

שאלות:

1) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש בכדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.



2) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

תשובות סופיות:

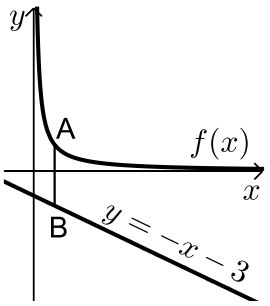
1) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

2) $3\cdot 6\cdot 8$ ס"מ.

בעיות בפונקציות וגרפים:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$ ונתון הישר: $y=-x-3$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB

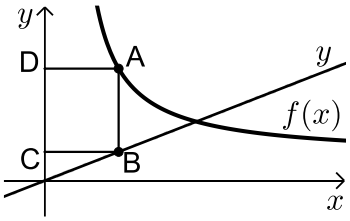
מקביל לציר ה- y.

מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי

שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.

2) באיור שלפניכם מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x)=\frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y=\frac{9x}{25}$.



הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של

הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y כך שנוצר המלבן ABCD.

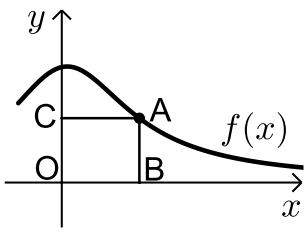
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הביעו באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצאו את t עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x\geq 0$.



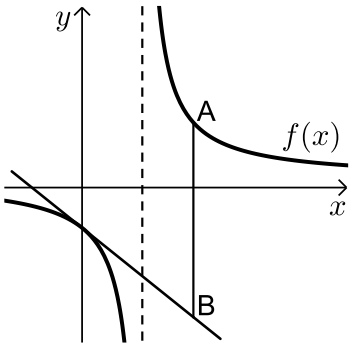
מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים

אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$.



מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

א. מצאו את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

1) $A(2,2)$

2) א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=12.88$ מ"ר.

3) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$.

4) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$.

5) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

שאלון 471

האינטגרל הלא-מסוים

תוכן העניינים:

האינטגרל הלא-מסוים..... 430

חישובי אינטגרלים: 431

סיכום כללי:..... 431

שאלות:..... 431

מציאת פונקציה קדומה: 432

שאלות:..... 432

תשובות סופיות:..... 434

חישובי אינטגרלים:

סיכום כללי:

הגדרה וחוקים יסודיים:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , \ (n \neq -1)$.
- עבור מקדם קבוע a נקבל: $\int Ax^n dx = A\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , \ (n \neq -1)$.

שאלות:

1) מצאו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$

ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$

ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3}x^5 dx$

ו. $\int 7dx$

ז. $\int \left(\frac{5}{6}x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3}\right)dx$

ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b\right)dx$

2) מצאו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$

ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a}\right)dx$

ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

3) מצאו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (5x-1)^3 dx$

ב. $\int 3(2-7x)^4 dx$

ג. $\int \frac{18}{(6x+5)^2} dx$

מציאת פונקציה קדומה:

שאלות:

4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצאו את הפונקציה.

5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=x^2-8x+2$. נתון: $f(-2)=1$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

6) נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x)=9x^2-4$.

ערך הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 3.

א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ב. מצאו את $f(x)$.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

7) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-3$.

לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.

א. מצאו את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

ב. מצאו את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

8) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-6x-5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

א. מצאו את שיעור ה-x של הנקודה A.

ב. מצאו את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.

ג. מצאו את משוואת המשיק.

9) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x-4$.

הישר $y=2x+5$ משיק לגרף הפונקציה. מצאו את $f(x)$.

10) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=8x-6$.

א. מצאו את $f'(x)$ אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x=2$.

ב. מצאו את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא $\frac{2}{3}$.

11) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=2x-3$.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 4. מצאו את $f'(x)$.

ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצאו את $f(x)$.

תשובות סופיות:

1 א. $\frac{x^4}{4}+c$ ב. $2x^6+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+c$ ד. $\frac{x^4}{2}+c$

ה. $\frac{x^6}{9}+c$ ו. $7x+c$ ז. $\frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c$

ח. $\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c$.

2 א. $-\frac{x^{-2}}{2}+c$ ב. $-\frac{1}{2x^2}+c$ ג. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c$

ד. $2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c$.

3 א. $\frac{(5x-1)^4}{20}+c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35}+c$ ג. $-\frac{3}{6x+5}+c$

4 $f(x)=x^2-6x+14$.

5 א. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+23\frac{2}{3}$ ב. $y=-5x+27$.

6 א. $y=5x-2$ ב. $f(x)=3x^3-4x+4$ ג. $(0,-2)$, $(0.4,0)$.

7 א. $x=0$ ב. $f(x)=x^2-3x+7$.

8 א. $x=-1$ ב. $f(x)=-3x^2-5x-8$ ג. $y=x-5$.

9 $f(x)=1.5x^2-4x+11$.

10 א. $f'(x)=4x^2-6x-4$ ב. $f(x)=\frac{4x^3}{3}-3x^2-4x+10$

11 א. $f'(x)=x^2-3x+6$ ב. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{1}{6}$

שאלון 471

האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים:

האינטגרל המסוים וחישובי שטחים 435

האינטגרל המסוים: 436

סיכום כללי: 436

שאלות: 436

תשובות סופיות: 437

חישובי שטחים: 438

סיכום כללי: 438

חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים): 438

שאלות: 439

תשובות סופיות: 445

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים: 446

שאלות: 446

תשובות סופיות: 449

האינטגרל המסוים:

סיכום כללי:

האינטגרל המסוים:

נתונה פונקציה $f(x)$ ולה פונקציה קדומה $F(x)$, כלומר: $F(x)=\int f(x)dx=F(x)+c$.

נגדיר את האינטגרל המסוים בעזרת הסימון הבא: $\int_a^b f(x)dx$.

כאשר:

- a – הגבול התחתון של האינטגרל (ה-'רצפה').
- b – הגבול העליון של האינטגרל (ה-'תקרה').

נחשב את ערכו של האינטגרל המסוים בעזרת הפונקציה הקדומה של $f(x)$ באופן הבא:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

שאלות:

1) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_2^5\left(x^2+5x\right)dx$

ב. $\int_{-4}^{-1}x^2\left(x-3\right)dx$

ג. $\int_{-3}^{3}\left(x^3+4x\right)dx$

ד. $\int_{-1}^{1}3\left(2x-1\right)^5dx$

ה. $\int_1^2\frac{2}{\left(x-3\right)^2}dx$

ו. $\int_1^4\frac{x-1}{x^3}dx$

2) לפניכם האינטגרל הבא: $\int_1^a\left(4x-7\right)dx$.

מצאו עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1-.

3) לפניכם האינטגרל הבא: $\int_{a}^{2}\left(x-3x^2\right)dx$.

א. כתבו ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- a.

ב. מצאו עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$.

תשובות סופיות:

1) א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1 ו. $\frac{9}{32}$

2) $a=2\ ,\ 1.5$.

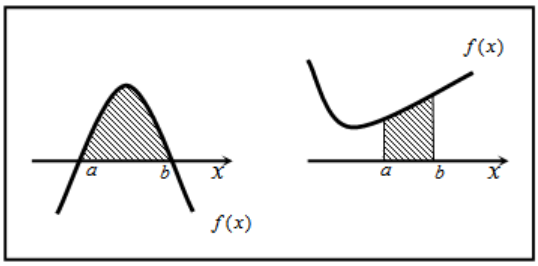
3) א. $a^3-\frac{1}{2}a^2-6$ ב. $a=0\ ,\ 1\ ,\ -\frac{1}{2}$.

חישובי שטחים:

סיכום כללי:

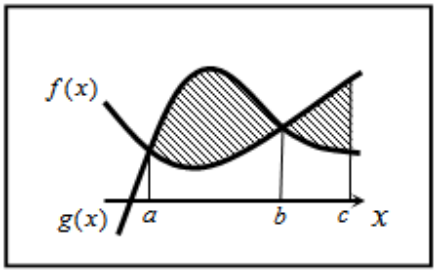
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים):

- שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x:



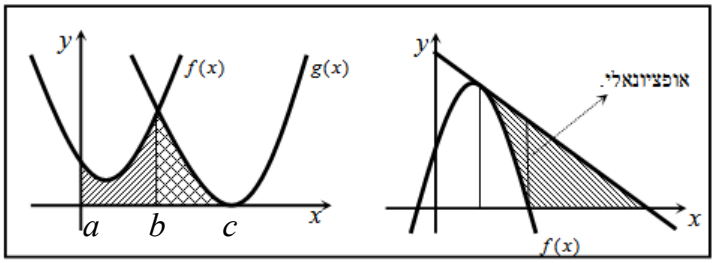
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

- שטח הכלוא בין שני גרפים כך שגרף אחד כולו מעל השני:



$$S_1=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$$
$$S_2=\int_b^c\left(f(x)-g(x)\right)dx$$
$$S=S_1+S_2$$

- שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x:

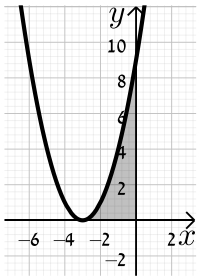


$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

שאלות:

חישובי שטחים יסודיים:

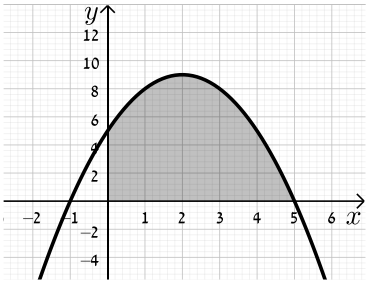
1) נתונה הפונקציה: $y=(x+3)^2$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה לצירים.

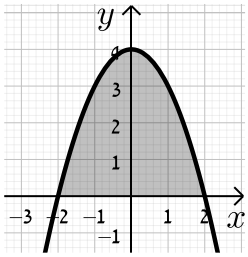
2) נתונה הפונקציה: $y=-x^2+4x+5$.



א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y.

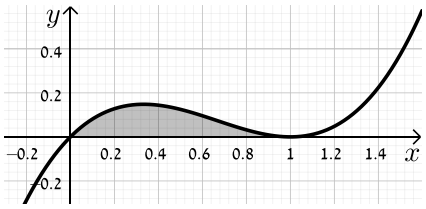
3) נתונה הפונקציה: $y=-x^2+4$.



א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

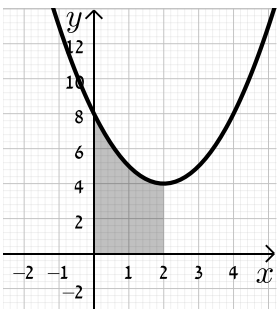
ב. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה לציר ה- x.

4) מצאו את השטח המוגבל תחת הפונקציה: $f(x)=x^3-2x^2+x$ וציר ה- x כמתואר באיור:

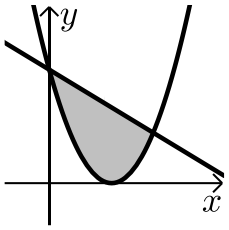


5) נתונה הפונקציה: $y=x^2-4x+8$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים וקודקוד הפרבולה.

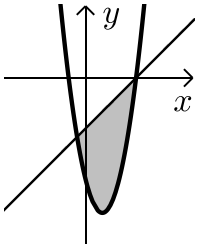


שטח הכלוא בין שתי פונקציות:



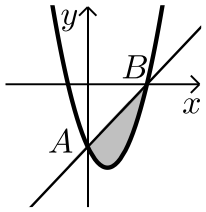
6) נתונות הפונקציות: $y=(x-3)^2$; $y=-x+9$.

חשבו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



7) נתונות הפונקציות הבאות: $g(x)=x-6$; $f(x)=x^2-4x-12$.

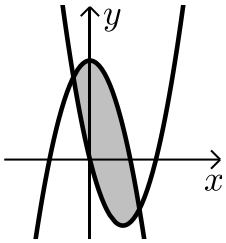
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים
של הפונקציות הנ"ל.



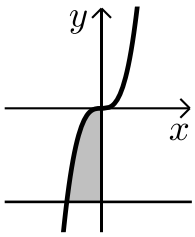
8) נתונה הפונקציה: $y=3x^2-6x-9$.

א. מצאו נקודות חיתוך של הפונקציה
עם הצירים (נסמנן ב-A ו-B).

ב. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AB.

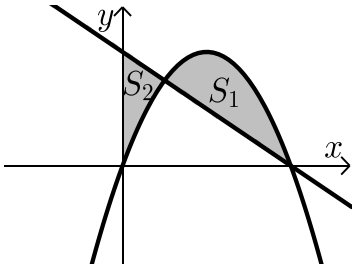


9) חשבו את השטח המוגבל בין גרפים של
הפונקציות: $y=-x^2+6$; $y=x^2-4x$.



10) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
הישר $y=-8$ וציר ה- y כמתואר באיור.



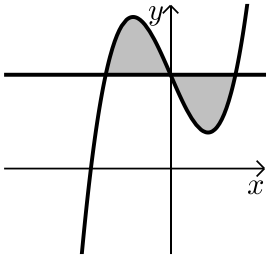
11) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=-x^2+4x$; $g(x)=-x+4$.

מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב-S_1
ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה- y
ב-S_2 כמתואר באיור.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. חשבו את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

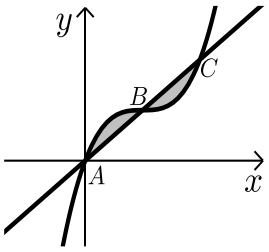
12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x+5$ והישר $y=5$.



א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשבו את השטח המוגבל ביניהן.

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+3x$.

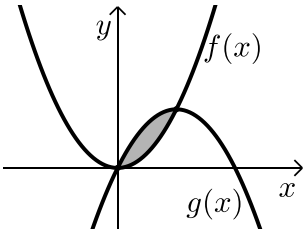


הישר AC חותך את גרף הפונקציה

בנקודות הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.

חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

14) הפונקציות: $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=-x^2+2x$

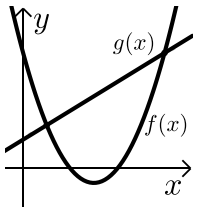


נחתכות ב-2 נקודות.

א. מצאו את נקודות החיתוך.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.

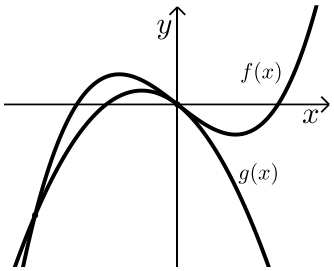
15) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-6x+8$ ו- $g(x)=x+2$.



מצאו את השטח המוגבל בין הגרפים והצירים.

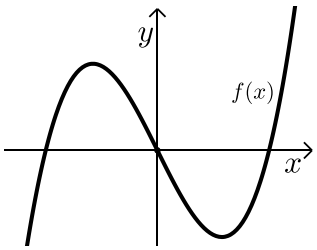
16) חשבו את גודל השטח הכלוא בין

הפונקציות: $f(x)=2x^3-x$, $g(x)=-2x^2-x$.



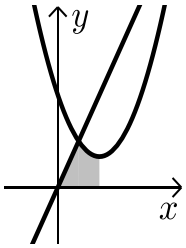
17) חשבו את גודל השטח הכלוא בין

הפונקציה: $f(x)=x^3-4x$ וציר ה- x.



חישובי שטחים מורכבים:

18) הפונקציות המתוארות בשרטוט הן: $y=x^2-4x+6$; $y=3x$.

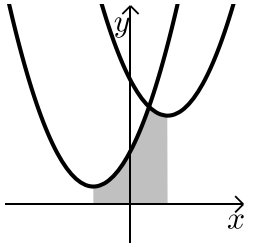


א. מצאו את קדקוד הפרבולה.

ב. מצאו נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשמאל לקודקוד הפרבולה.

ג. חשבו את השטח המסומן שבשרטוט.

19) נתונות הפונקציות: $y=x^2+4x+6$, $y=x^2-4x+14$.



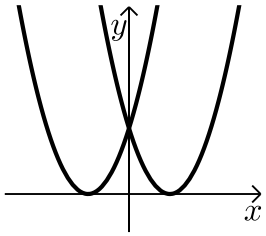
א. מצאו את שיעורי ה- x של קודקודי הפרבולות.

ב. חשבו את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. חשבו את השטח המסומן בשרטוט.

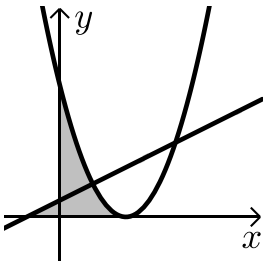
20) נתונות הפונקציות: $f(x)=(x-3)^2$ ו- $g(x)=(x+3)^2$

כמתואר באיור:



חשבו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x.

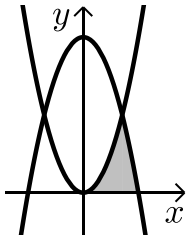
21) נתונות שתי הפונקציות: $y=(x-2)^2$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.



א. מצאו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x.

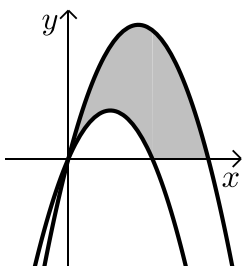
ב. מצאו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y.

22) נתונות הפונקציות: $y=8-x^2$, $y=x^2$.



חשבו את השטח המוגבל על ידי שתי הפונקציות וציר ה- x ברביע הראשון.

23) נתונות הפרבולות הבאות: $g(x)=-x^2+3x$, $f(x)=-x^2+5x$.



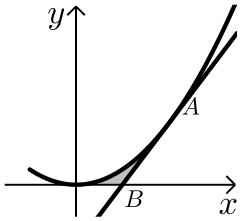
חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x.

24) נתונה הפונקציה: $y=2x^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה $A(1,2)$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B.

חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x.



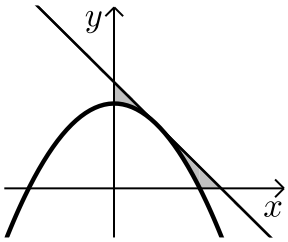
25) נתונה הפונקציה: $y=-x^2+4$.

בנקודה $(1,3)$ העבירו משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- y.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x.



26) משוואת הפרבולה היא: $f(x)=-2x^2+3x+2$.

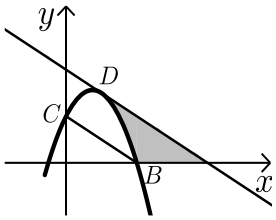
הנקודות $C(0,2)$, $B(2,0)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה עם הצירים.

המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x.

ג. מצאו את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y.



שאלות עם פרמטר:

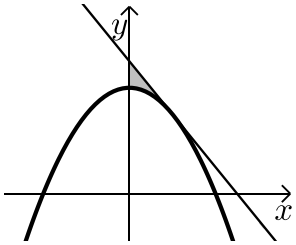
27) נתונה הפרבולה: $y=ax^2+8$.

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה

שבה $x=2$ הוא 2-.

א. חשבו את a.

ב. חשבו את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר ה- y.



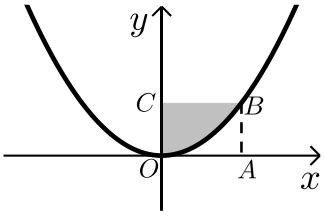
28) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y=ax^2$ (a פרמטר).

המרובע ABCO הוא ריבוע.

הקודקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

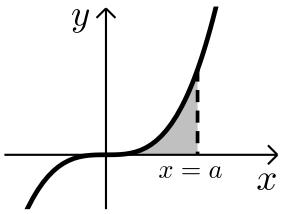
מצאו את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בסרטוט.



29) נתונה הפונקציה: $y = x^3$.

מעבירים אנך לציר ה-x: $x = a$ (a פרמטר חיובי)

כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה-x.



א. הבע באמצעות a את השטח האפור בציור.

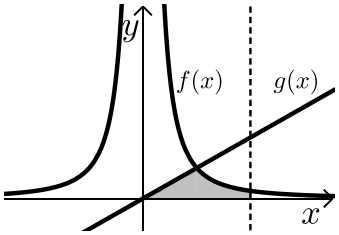
ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל-a^2.

חישובי אינטגרלים עם פונקצית מנה:

30) נתונות שתי פונקציות: $g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה-x.



תשובות סופיות:

1) א. $(-3,0)$ ב. 9 יח"ש

2) א. $(5,0)$, $(-1,0)$ ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש

3) א. $(-2,0)$, $(2,0)$ ב. $10\frac{2}{3}$ יח"ש

4) $\frac{1}{12}$ יח"ש

5) $10\frac{2}{3}$ יח"ש

6) $20\frac{5}{6}$ יח"ש

7) $57\frac{1}{6}$ יח"ש

8) $10\frac{2}{3}$ יח"ש

9) $21\frac{1}{3}$ יח"ש

10) 12 יח"ש

11) א. $(4,0)$, $(1,3)$ ב. $2\frac{5}{11}$

12) א. $(2,5),(0,5),(-2,5)$ ב. 8 יח"ש

13) 0.5 יח"ש

14) א. $(1,1)$, $(0,0)$ ב. $\frac{1}{3}$ יח"ש

15) $3\frac{5}{6}$ יח"ש

16) $\frac{1}{6}$ יח"ש

17) 8 יח"ש

18) א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש

19) א. $x=\pm 2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש

20) 18 יח"ש

21) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש

22) 4.418 יח"ש

23) $16\frac{1}{3}$ יח"ש

24) $\frac{1}{6}$ יח"ש

25) א. $y=-2x+5$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{7}{12}$ יח"ש

26) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש

ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש

27) א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש

28) $a=\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ יח"ש

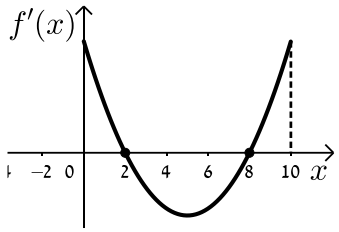
29) א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$

30) 1 יח"ש

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

שאלות:

1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 10$.



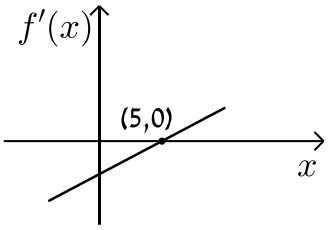
בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם:

$f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$ וכן: $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **<u>גרף הנגזרת והצירים</u>** ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x=2$.

2) לפניכם הגרף של הפונקציה $f'(x)$.



הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

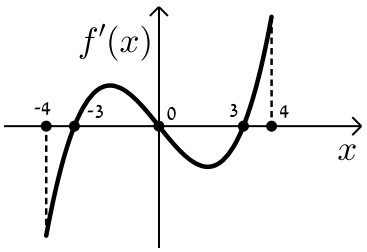
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא 2-.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$ והצירים.

3) בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.



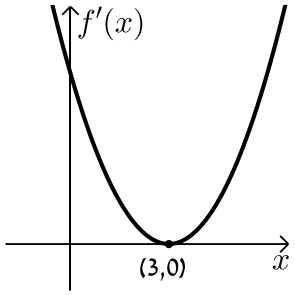
א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3)=f(3)=m$.
סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות m).

ד. השטח הכלוא בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$ וציר ה- x ברביעים השני והרביעי הוא 16 יח"ש.
מצאו את m.

4) הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא:

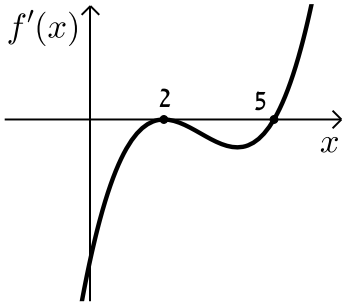


א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

5) באיור שלפניכם מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.



ידוע כי הנקודות $A(5,-4.75)$, $B(2,2)$ ו-$C(0,14)$ נמצאות על $f(x)$.

א. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

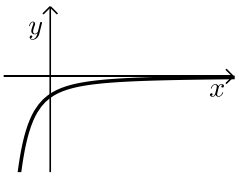
ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

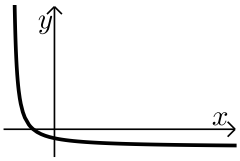
ד. חשבו את השטח מוגבל בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$ והצירים בתחום $0\le x\le 5$.

6) באיורים שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

i.



ii.

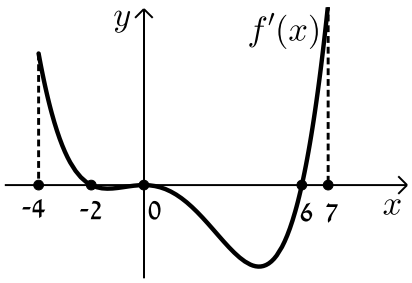


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-2$.

מהו השטח המוגבל בין **<u>גרף הנגזרת</u>** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

7) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



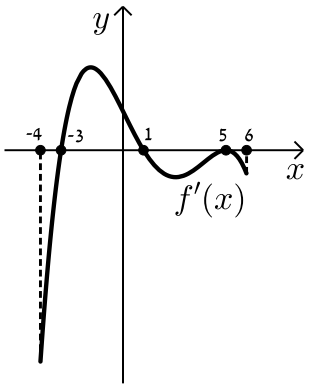
א. סרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$

לפי הנתונים: $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **<u>גרף הנגזרת</u>** וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **<u>גרף הנגזרת</u>** וציר ה- x ברביע הרביעי.

8) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



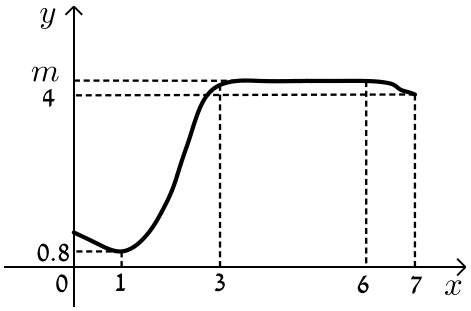
א. סרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 6$ עבור

הנתונים: $f(5) = -83\frac{1}{3}$, $f(1) = 36\frac{2}{15}$, $f(-3) = -356\frac{2}{5}$.

ב. חשבו את כלל השטח הכלוא בין **<u>גרף הנגזרת</u>**

וציר ה- x בתחום: $-3 \le x \le 5$.

9) בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < 7$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים

על הצירים וענה על השאלות הבאות:

א. מצאו עבור אילו ערכים של x השונים

מ-6 מתקיים:

(1) $f'(x) > 0$.

(2) $f'(x) = 0$.

(3) $f'(x) < 0$.

ב. נתון כי: $\int_3^6 m dx = 15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה- y.

מצאו את $f(5)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 < x < 3$.

ד. מצאו את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$

וציר ה- x בתחום $1 < x < 3$.

תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות של השאלות הבאות מופיעות בסוף התשובות.

1) ב. 10 יח"ש.

2) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$.
ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$
ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.

3) א. עולה: $3<x\le 4$, $-3<x<0$, יורדת: $0<x<3$, $-4\le x<-3$
ב. $x_{min}=3$, $x_{max}=0$, $x_{min}=-3$. ג. הוכחה ד. $m=-8$

4) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.

5) א. $\min(5,-4.75)$.
ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. הוכחה ד. 18.75 יח"ש.

6) א. I: $f'(x)$, II: $f(x)$
ב. 1 יח"ש.

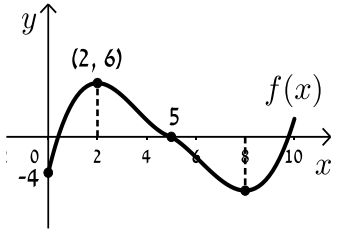
7) א. הוכחה ב. 9.6 יחש. ג. 604.8 יח"ש.

8) א. הוכחה ב. 512 יח"ש.

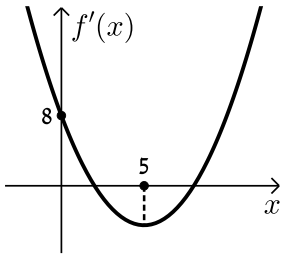
9) א. (1). $f'(x)>0:\ 1<x<3$
א. (2). $f'(x)=0:\ x=1,\ 3\le x<6$.
א. (3). $f'(x)<0:\ 6<x<7,\ 0<x<1$
ב. $m=5$, $f(5)=5$ ד. 4.2 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

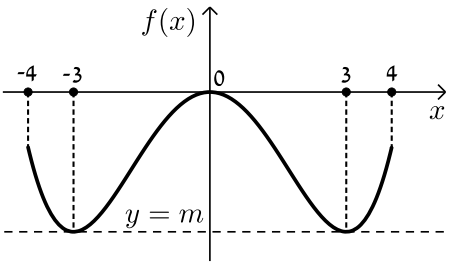
(1



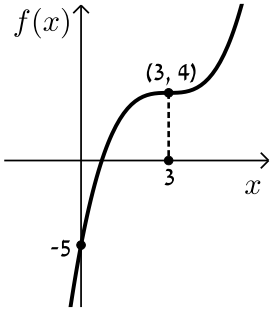
(2



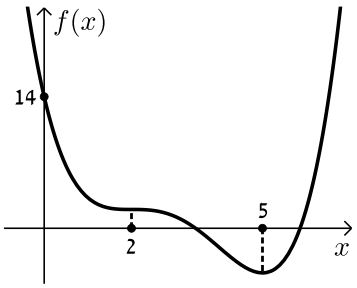
(3



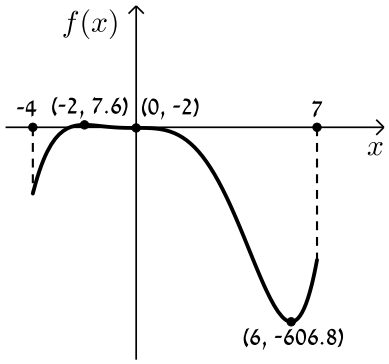
(4



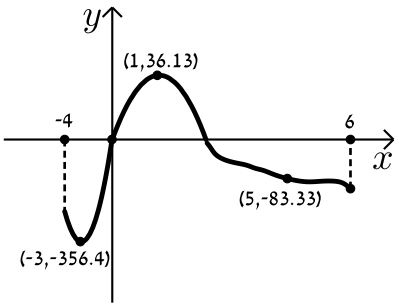
(5



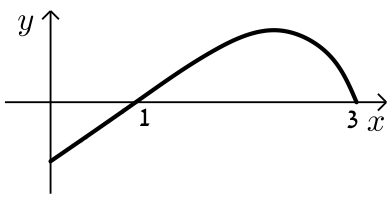
(7



(8



(9



שאלון 471

מבוא ומושגי יסוד

תוכן העניינים:

מבוא ומושגי יסוד 451

אוכלוסייה, מדגם וסוגי משתנים: 452

סיכום כללי: 452

שאלות: 453

תשובות סופיות: 463

שכיחות יחסית: 466

סיכום כללי: 466

שאלות: 466

תשובות סופיות: 469

מציאת סכום שכיחויות מתוך השכיחות היחסית: 470

שאלות: 470

תשובות סופיות: 472

השוואה בין התפלגויות: 473

סיכום כללי: 473

שאלות: 473

תשובות סופיות: 474

שכיחות מצטברת: 475

סיכום כללי: 475

שאלות: 476

תשובות סופיות: 478

משתנים בקבוצות שוות רוחב: 479

סיכום כללי: 479

שאלות: 480

תשובות סופיות: 482

אוכלוסייה, מדגם וסוגי משתנים:

סיכום כללי:

הגדרה:

סטטיסטיקה היא תחום שעוסק באיסוף וניתוח נתונים כדי ללמוד על תופעות שונות.

בעזרת כלים סטטיסטיים ניתן לזהות דפוסים, להשוות בין נתונים ולהסיק מסקנות בצורה מסודרת ומדויקת. סטטיסטיקה משמשת בתחומים רבים כמו מדע, כלכלה ורפואה, ועוזרת להבין את העולם סביבנו על בסיס מידע ועובדות.

מהו משתנה בסטטיסטיקה?

משתנה בסטטיסטיקה הוא כל מאפיין שאפשר לבדוק או למדוד, והוא יכול להשתנות בין פרטים שונים או בין מצבים שונים. משתנים יכולים להיות מספריים (כמותיים) או מילוליים (איכותיים), בהתאם לסוג הנתונים שאוספים ולשאלה שאותה חוקרים.

משתנה איכותי:

משתנה שמתאר תכונות או קטגוריות במקום מספרים.

כלומר, הוא מחלק את הנתונים לקבוצות שונות, אבל אי אפשר לבצע עליו חישובים מתמטיים.

משתנה כמותי בדיד:

משתנה שמתאר מספרים, אבל רק כאלה שאפשר לספור בצורה ברורה ומדויקת (כלומר, הוא לא יכול לקבל ערכים עם שברים או מספרים עשרוניים).

משתנה כמותי רציף:

משתנה שמתאר מספרים, אבל כאלה שיכולים לקבל כל ערך בטווח מסוים,

כולל שברים ומספרים עשרוניים.

שאלות:

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים כתבו מהי האוכלוסייה הנבדקת וקבעו האם המשתנה הוא איכותי או כמותי.
מיינו את המשתנים הכמותיים שמצאתם לשני סוגים - משתנה כמותי בדיד ומשתנה כמותי רציף.

א. בדיקת קוטר עגבניות השרי בחממה של ניסים החקלאי.
ב. בדיקת חוג הלימודים הראשי של סטודנטים באוניברסיטת בן גוריון.
ג. בדיקת מספר ימי הגשם מידי חודש בשנת 2024.
ד. בדיקת צבע העיניים של ילדי גן טלמון.
ה. בדיקת משקל שקיות אבקת מרק שמיוצרות ביום מסוים במפעל.
ו. בדיקת מספר השגיאות של תלמידי כיתה י'4 בהכתבה באנגלית.

2) חברת בנייה, הבונה פרויקט מגורים חדש ערכה מחקר ומדדה את המשתנים הבאים.
לגבי כל משתנה, קבעו האם הוא איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף.

א. מספר חדרי השינה בדירה.
ב. מחירי הדירות.
ג. גובה עציצי הנוי בכניסה לכל דירה.
ד. מספר המכוניות בבעלות כל אחד מבעלי הדירות.
ה. צבעי המכוניות שבבעלות בעלי הדירות.
ו. המרחק של הפרויקט מכל אחד ממוסדות החינוך בעיר.
ז. מוסדות החינוך בהם לומדים ילדי הדיירים.
ח. גובה השכר החודשי של בעלי הדירות.
ט. כמות הדיירים בכל אחת מהדירות.
י. סוג חיית המחמד שבבעלות כל אחד מהדיירים.

3) בחנות "בגד-לי" נערכים לקראת קבלה של קולקציית ביגוד חדשה.
נשאלה השאלה: אלו פרטי לבוש יש לכלול בחנות.

א. ערכו רשימה של פרטי לבוש המתאימים, לדעתך, להיכלל בהיצע.
ב. הציעו קריטריון למיון פרטי הלבוש למחלקות שונות.
ג. רשמו בכל מחלקה 5 פריטים אפשריים.

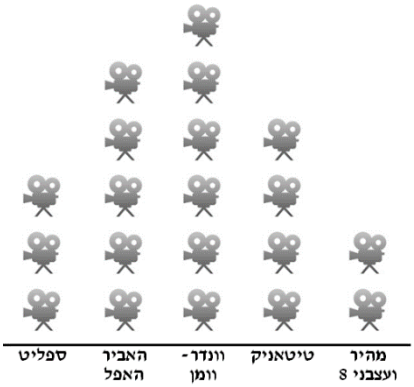
4) רשת מתחילה של בתי קפה פתחה שני סניפים: בתל אביב ובחולון.
בסניף תל אביב יש 35 עובדים ובסניף חולון יש 20 עובדים.
הנתונים מוצגים בתרשים הבא:

סניף	מספר העובדים
חולון	
תל אביב	

א. כמה עובדים מייצגת הצורה ?
ב. כמה עובדים מייצגת הצורה ?
ג. מהו היחס בין מספר העובדים בסניף חולון למספר העובדים בסניף תל-אביב?
ד. מהו היחס בין מספר העובדים בסניף תל-אביב למספר העובדים בסניף חולון?
ה. הסבירו את תשובתכם לסעיפים ג' ו-ד'.
ו. האם מתוך טבלת הנתונים אפשר לקבל מידע על מספר המנהלים שבכל סניף? הסבירו את תשובתכם.

5) סקר של רשת בתי הקולנוע "סרטוב" בדק מהו הסרט האהוב על בני נוער מבין 5 אפשרויות והציג את הנתונים הבאים. הסימן: מייצג **עשרה** בני-נוער.

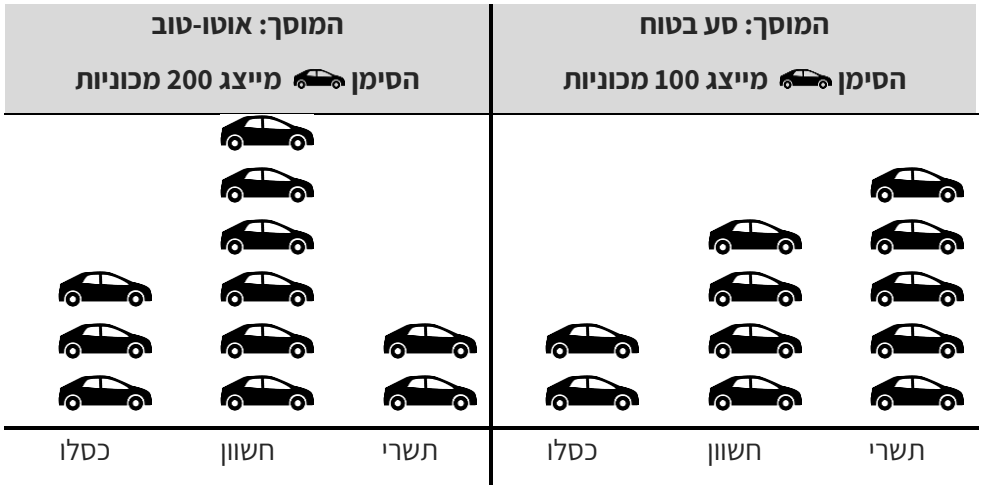
א. רכזו את הנתונים בטבלה הבאה:



שם סרט	מהיר ועצבני 8	טיטאניק	וונדר -וומן	האביר האפל	ספליט	סה"כ
מספר בני-נוער						
אחוז בני-נוער						

ב. מהו מספר בני הנוער שהשתתף בסקר?
ג. מהו הסרט האהוב ביותר לפי הסקר הנ"ל?
ד. כמה בני-נוער לא בחרו בסרט "האביר האפל"?

6) להלן שני תרשימים המייצגים את מספר המכוניות שנכנסו לתיקון בשני המוסכים "אוטו-טוב" ו-"סע בטוח" בחודשים: תשרי, חשוון וכסלו.



א. האם התרשימים מייצגים אותם נתונים כמותיים? נמקו.

ב. כמה מכוניות עברו תיקון בכל מוסך במהלך חודש חשוון?

ג. רכזו את הנתונים עבור כל מוסך בטבלה הבאה:

חודש	תשרי	חשוון	כסלו	סה"כ
מספר המכוניות שעברו תיקון				
האחוז שמהווה מספר המכוניות שתוקנו מכלל המכוניות				

חודש	תשרי	חשוון	כסלו	סה"כ
מספר המכוניות שעברו תיקון				
האחוז שמהווה מספר המכוניות שתוקנו מכלל המכוניות				

ד. מהו היחס בין מספר המכוניות שתוקנו ע"י המוסך "סע בטוח" למספר המכוניות שתוקנו ע"י המוסך "אוטו-טוב"?

7) לפניכם קבוצת מספרים:

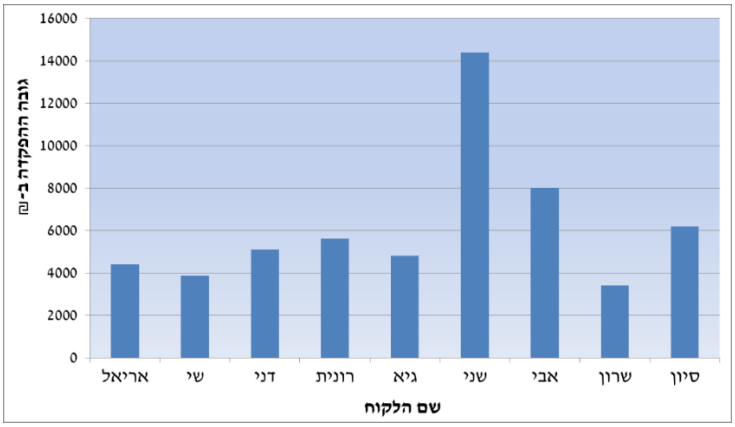
2 , 25 , 13 , 40 , 3 , 17 , 36 , 21 , 14 , 8 , 5 , 20 , 18 , 33 , 15.

מיינו את המספרים לקבוצות: 0-10, 11-20, 21-30 ו-31-40

וכתבו כמה מספרים יש בכל קבוצה. היעזרו בטבלה הבאה:

קבוצה	מ-0 עד 10	מ-11 עד 20	מ-21 עד 30	מ-31 עד 40
המספרים				
סה"כ				

8) דיאגרמת המקלות שלפניכם מתארת את ההפקדה החודשית של 10 לקוחות בנק "העובדים" לתוכניות החיסכון הפרטיות שלהם בחודש ינואר 2018:



א. מהו גובה ההפקדה של אבי?

ב. מי מבין הלקוחות הפקיד את הסכום הגדול ביותר?

ג. מי מבין הלקוחות הפקיד את הסכום הנמוך ביותר?

ד. האם ניתן להסיק מהתרשים כמה לקוחות יש לבנק?

ה. האם ניתן להסיק מה תהיה ההפקדה של סיון בחודש פברואר?

9) בסקר מסוים נתבקשו 400 תלמידים בבית הספר "עין צור" לבחור את העיסוק המועדף עליהם בשעות הפנאי מבין: ספורט, בילוי עם חברים, קריאת ספרים, צפייה בטלוויזיה. להלן התוצאות שהתקבלו:

- 160 תלמידים בחרו בבילוי עם חברים.
- 120 תלמידים בחרו בספורט.
- 48 תלמידים בקריאת ספרים.
- 72 תלמידים בצפייה בטלוויזיה.

א. סדרו את הנתונים הנ"ל בטבלה מתאימה. נמקו את שיקולכם.

ב. הציגו את הנתונים בדיאגרמת מקלות.

ג. הציגו את הנתונים בדיאגרמת עוגה מתאימה. נמקו את חישוביכם.

10) למשפחת דגן הוצאות של 8,000 ₪ בחודש שמתחלקים באופן הבא:

- 4,000 ₪ מזון לבית.
- 2,000 ₪ חשבונות חשמל, מים וגז.
- 1,000 ₪ הוצאות רכב (כגון דלק, ביטוח וכו').
- 1,000 ₪ בילויים.

א. הציגו את הנתונים בדיאגרמת מקלות.

ב. הציגו את הנתונים בדיאגרמת עוגה.

11) במתנ"ס המקומי מתקיימים מידי שבוע חוגים לילדים.

מנהל המתנ"ס ערך סקר בקרב קבוצת ילדים לגבי מספר החוגים אליו רשום כל ילד.

4 ילדים נרשמו ל-4 חוגים כל אחד, x ילדים נרשמו ל-3 חוגים כל אחד, 6 ילדים נרשמו ל-2 חוגים כל אחד, 8 ילדים נרשמו לחוג אחד בלבד ו-3 ילדים לא נרשמו לאף חוג.

מנהל המתנ"ס מעוניין להציג את הנתונים שאסף באמצעות טבלת שכיחויות.

א. האם מספר החוגים אליו נרשם כל ילד מייצג את ערך המשתנה הנמדד או את השכיחות?

ב. סדרו את הנתונים בטבלת שכיחויות (בשורה העליונה רשמו את ערכי המשתנה הנמדד ובשורה השנייה רשמו את ערכי השכיחות).

מנהל המתנ"ס גבה מכל אחד מהילדים 10 ש"ח דמי רישום עבור כל חוג אליו הילד נרשם.

סה"כ גבה מנהל המתנ"ס מהילדים שהשתתפו בסקר 480 ש"ח דמי רישום.

ג. מצאו את x.

12) בטבלה שלפניכם מוצגת התפלגות המחירים של מחירי דירות בפרויקט מגורים:

מחיר הדירה ב-₪	1,500,000	1,750,000	2,000,000	2,250,000	2,500,000
מספר הדירות	12	30	48	24	36

א. קבעו עבור כל שורה האם היא מייצגת את המשתנה (התכונה הנבדקת) או את השכיחות.

ב. האם המשתנה הוא כמותי או איכותי? אם המשתנה כמותי, קבעו אם הוא כמותי בדיד או כמותי רציף.

ג. כמה דירות נמכרו ב-2,000,000 שקלים?

ד. כמה דירות נמכרו במחיר הנמוך מ-2,000,000 שקלים?

ה. כמה דירות נמכרו במחיר הגבוה מ-2,000,000 שקלים?

ו. כמה דירות בפרויקט?

ז. מה אחוז הדירות בפרויקט שנמכרות ב-1,750,000 שקלים?

ח. במהלך תהליך הרכישה, כל רוכש שמשלם מקדמה רשאי לבחור לפי תור את הדירה שברצונו לרכוש (הרוכש הראשון בוחר ראשון, השני בוחר שני וכן הלאה). המקדמה אינה מוחזרת לרוכש, גם אם לא נותרו דירות לשביעות רצונו.
רוני, הרוכש ה-105, מעוניין לרכוש דירה שאינה היקרה ביותר ואינה הזולה ביותר.
האם תמליצו לרוני לשלם את המקדמה? נמקו.

13) בסניף "הים" של רשת ריהוט מפורסמת מוצעים למכירה 20 שולחנות מ-4 דגמים שונים:

	דגם א	דגם ב	דגם ג	דגם ד
מחיר השולחן ב-₪	1200	1400	2000	3000
כמות השולחנות בחנות	6	8	5	x

א. כמה שולחנות נמכרים ב-3,000 ש"ח?

ב. כמה שולחנות מחירם הוא לכל היותר 2000 ש"ח?

ג. כמה שולחנות מחירם הוא לפחות 2,000 ש"ח?

ד. שי פתר את סעיף ג' כך: "בטבלה מתוארים מחירים של 20 שולחנות סה"כ.
אם 14 שולחנות נמכרים לכל היותר ב-2,000 ש"ח, אז כל השולחנות הנותרים נמכרים בלפחות 2,000 ש"ח ולכן 6 שולחנות נמכרים בלפחות 2,000 ש"ח."
האם שי צודק? נמקו.

ה. מה יכול להיות מחירו של שולחן שהוא בין ה-10 הזולים ביותר?

ו. הרשת יצאה במבצע: מחירם של 2 מהשולחנות מדגם ב' ירד ל-1,200 ש"ח, ומחירו של שולחן אחד מדגם ג' ירד ל-1,400 ש"ח.
(1) סדרו מחדש את טבלת השכיחויות בהתאם לירידת המחירים
(התייחסו למחיר השולחן ומספר השולחנות בלבד - ללא תלות בדגם)
(2) קבעו מה הקשר בין מחיר השולחן לבין מספר השולחנות המוצעים למכירה.
השתמשו במילים 'עולה', 'יורד'.

14) הטבלה הבאה מתארת את התפלגות ציוני התעודה במקצוע חשבון של 200 תלמידי שכבה ג' בבית הספר 'רביבים':

מספר התלמידים	2		15	6	21		66	62
הציון	בלתי מספיק	מספיק בקושי	מספיק	כמעט טוב	כמעט טוב מאוד	טוב	טוב מאוד	מצוין

א. קבעו איזו שורה מייצגת את המשתנה, ואיזו מייצגת את השכיחות.

ב. האם המשתנה הוא כמותי או איכותי?
אם המשתנה כמותי, קבעו אם הוא כמותי בדיד או כמותי רציף.

ג. כמה מתלמידי השכבה קיבלו את הציון 'כמעט טוב'?

ד. המורה חילקה תעודות הצטיינות לתלמידים שקיבלו ציון 'טוב מאוד' ומעלה.
מה אחוז התלמידים שקיבלו תעודת הצטיינות?

נתון כי 12% מתלמידי השכבה קיבלו ציון 'טוב'.

ה. (1) חשבו כמה תלמידים קיבלו את הציון 'טוב'.
(2) חשבו כמה תלמידים קיבלו את הציון 'מספיק בקושי'.

המורה החליטה להזמין לקורס קיץ 10% מתלמידי השכבה.
לקורס יוזמנו תלמידים מבין בעלי הציונים הנמוכים ביותר.

ו. חשבו כמה תלמידים יוזמנו לקורס הקיץ?

ז. יוחאי קיבל ציון 'כמעט טוב'. האם ייתכן שיוחאי יוזמן לקורס הקיץ? נמקו.

ח. רשמו את פירוט הציונים של 7 התלמידים שקיבלו את הציונים הנמוכים ביותר.

15) ברשת משקאות לאורח חיים בריא מציעים מגוון רחב של משקאות.
בכל משמרת מועסקים 5 עובדים שמכינים משקאות ללקוחות.
כל עובד מקבל מספר עובד ייחודי עבורו. על כל אחד מהעובדים יש לתעד ברשימה, תחת מספר העובד שלו, את כמות המשקאות שהכין באותה המשמרת.
כאשר תיעדו העובדים את הכנת המשקאות בטבלה שלפניכם, הם שכחו לרשום ליד כל שורה האם היא מייצגת את מספר העובד או את מספר המשקאות שהכין.

14	18	15	11	15	
15	14	13	12	11	

א. מצאו איזו שורה מייצגת את מספר העובד ואיזו שורה מייצגת את מספר המשקאות. נמקו.

ב. כמה משקאות הכינו כל העובדים יחד במהלך המשמרת?

עובד שמכין לפחות 20% מהמשקאות במשמרת מועמד להיות 'עובד מצטיין'.

ג. מי מהעובדים מועמד להיות 'עובד מצטיין'?

מסתבר ש-2 העובדים שהכינו את מספר המשקאות הקטן ביותר שכחו לרשום את המשקאות שהכינו בשעה האחרונה של המשמרת. כל אחד מהם הכין 2 משקאות בשעה זו.

ד. בנו טבלת שכיחויות שמתארת את התפלגות המשקאות החדשה.

ה. האם השינוי השפיע על התשובה לסעיף ג'? נמקו.

16) במדינת ישראל, סטודנטים לתואר ראשון נדרשים לשפר ציוניהם עד ל-"רמת פטור מאנגלית" כדי להיות זכאים לתואר. רמת האנגלית של התלמיד נקבעת בהתאם לציון שלו בפרק האנגלית בפסיכומטרי (או במבחן דומה כגון אמי"ר או אמיר"ם) בהתאם למפורט בטבלה הבאה:

רמת הקורס באנגלית	ציון בפרק האנגלית בפסיכומטי או מבחן אמי"ר/אמיר"ם
פטור מלימודי אנגלית	134 ומעלה
מתקדמים 2	120-133
מתקדמים 1	100-119
טרום מתקדמים 2	95-99
טרום מתקדמים 1	85-94
מתחילים 2	78-84
מתחילים 1	64-77

לפניכם רשימת ציוני האנגלית של 20 מועמדים:

140 , 96 , 90 , 134 , 112 , 89 , 84 , 130 , 86 , 143 , 117 , 94 , 85 , 78 , 76 , 132 , 137 , 97 , 81 , 125.

א. העתיקו למחברתכם את טבלת השכיחויות הבאה והשלימו בה את הנתונים:

הרמה							
מספר מועמדים							

רמת האנגלית המינימלית הנדרשת באקדמיה היא רמת טרום מתקדמים 1.

ב. איזה אחוז מהמועמדים בוודאות לא יתקבלו ללימודים אקדמיים?

מועמד ברמת 'מתקדמים 1' או 'מתקדמים 2' נדרש להשתתף בקורס אנגלית אחד במהלך התואר.

ג. כמה מהמועמדים יידרשו להשתתף בקורס אנגלית אחד לכל היותר במהלך התואר?

שניים מהמועמדים נבחנו פעם נוספת ושיפרו את ציונם ב-10 נקודות, כך שכעת רוב המועמדים ברשימה נדרשים להשתתף בקורס אנגלית אחד או פחות במהלך התואר.

ד. רשמו מה עשוי להיות הציון הקודם של אותם המועמדים.

תשובות סופיות:

1) א. אוכלוסייה: עגבניות שרי, משתנה: קוטר העגבניות (משתנה כמותי רציף).
ב. אוכלוסייה: סטודנטים, משתנה: חוג לימודים ראשי (משתנה איכותי).
ג. אוכלוסייה: חודשי שנת 2024, משתנה: מספר ימי הגשמים בחודש (משתנה כמותי בדיד).
ד. אוכלוסייה: ילדי גן טלמון, משתנה: צבע עיניים (משתנה איכותי).
ה. אוכלוסייה: שקיות אבקת מרק, משתנה: משקל שקית אבקת מרק (משתנה כמותי רציף).
ו. אוכלוסייה: תלמידי כיתה י'4, משתנה: מספר השגיאות (משתנה כמותי בדיד).

2) משתנה כמותי איכותי: ה, ז, י.
משתנה כמותי בדיד: א, ד, ט.
משתנה כמותי רציף: ב, ג, ו, ח.

3) א. להלן פריטים לדוגמא: מכנסים, חולצות, נעלים, תחתונים, חזיות, נעלים, כפכפים, סנדלים, חליפות, חולצות טריקו, חגורות, וכו'.
ב. להלן מספר קריטריונים למיון (מחלקות ביגוד):
גברים, נשים, ילדים תינוקות, הלבשה תחתונה, נעליים.
ג. גברים: מכנסים, ג'ינסים, חולצות, מכופתרות, חגורות.
נשים: שמלות, גופיות, מכנסיים, פיג'מות, חצאיות.
ילדים: חליפות, מכנסים, חולצות, טייטסים, טרנינגים, ג'ינסים, פיג'מות.
תינוקות: בגדי גוף, אוברולים, רגליות, גופיות, חיתולי טטרה.
הלבשה תחתונה: חזיות, גרביים, תחתונים, גוזיות, גרביונים.
נעליים: נעלי ילדים, נעלי נשים, נעלי גברים, נעלי בית, נעלי ספורט, נעלי אלגנט.

4) א. 10 עובדים. ב. 5 עובדים. ג. 4:7 ד. 7:4.
ה. יחס תלוי בסדר שבין הגדלים. לכן מתקבלות תוצאות שהן מספרים הופכיים.
ו. לא. הטבלה לא מפרטת את מידע זה.

5) א. ריכוז הנתונים מופיע מתחת לסעיפים.
ב. 200 בני-נוער. ג. וונדר-וומן. ד. 150 בני-נוער.

שם סרט	מהיר ועצבני 8	טיטאניק	וונדר-וומן	האביר האפל	ספליט	סה"כ
מספר בני-נוער	20	40	60	50	30	200
אחוז בני-נוער	10%	20%	30%	25%	15%	100%

6) א. לא. מכיוון שכמות המכוניות בכל מוסך שונה.
ב. מוסך "סע בטוח" – 400 מכוניות. מוסך "אוטו-טוב" – 1200 מכוניות.
ג. להלן ריכוז הנתונים: ד. 1:2.

מוסך: סע בטוח

חודש	תשרי	חשוון	כסלו	סה"כ
מספר המכוניות שעברו תיקון	500	400	200	1100
האחוז שמהווה מספר המכוניות שתוקנו מכלל המכוניות	45.45%	36.36%	18.18%	100%

מוסך: אוטו-טוב

חודש	תשרי	חשוון	כסלו	סה"כ
מספר המכוניות שעברו תיקון	400	1200	600	2200
האחוז שמהווה מספר המכוניות שתוקנו מכלל המכוניות	18.18%	54.54%	27.27%	100%

7) להלן מיון המספרים:

קבוצה	מ-0 עד 10	מ-11 עד 20	מ-21 עד 30	מ-31 עד 40
המספרים	2 , 3 , 5 , 8	13 , 14 , 15 , 17 , 18 , 20	21 , 25	33 , 36 , 40
סה"כ	4	6	2	3

8) א. 8000 ₪. ב. שני ג. שרון. ד. לא. ה. לא.

9) לפתרון מלא צפו בפתרון בוידאו.

10) לפתרון מלא צפו בפתרון בוידאו.

11) א. כן ב. להלן טבלה: ג. $x = 4$.

מספר החוגים	4	3	2	1	0
מספר הילדים	4	x	6	8	3

12)

13) א. משתנה: מחיר הדירה, שכיחות: מספר הדירות ב. כמותי בדיד ג. 48 דירות.
ד. 42 דירות ה. 60 דירות ו. 150 דירות ז. 20% ח. לא נמליץ.

14) א. שולחן אחד ב. 19 שולחנות ג. 6 שולחנות ד. לא צודק.
ה. 1200 או 1400 ש"ח.
ו. (1) להלן טבלה: ו. (2) ככל שמחיר השולחן יורד, כך מספר השולחנות עולה.

	דגם א	דגם ב	דגם ג	דגם ד
מחיר השולחן ב-₪	1200	1400	2000	3000
כמות השולחנות בחנות	8	7	4	1

15) א. משתנה: הציון, שכיחות: מספר התלמידים ב. איכותי ג. 6 תלמידים.

ד. 64% ה. (1) 24 תלמידים (2) 4 תלמידים ו. 20 תלמידים ז. לא

ח. בלתי מספיק, בלתי מספיק, מספיק בקושי, מספיק בקושי, מספיק בקושי, מספיק בקושי, מספיק.

16) א. שורה עלינו: מספר המשקאות, שורה תחתונה: מספר העובד ב. 73 משקאות.

ג. 14, 13, 11 ד. להלן טבלה: ה. כן. העובדים המצטיינים כעת: 15, 14

מספר המשקאות	15	13	15	18	16
מספר עובד	11	12	13	14	15

17) א. להלן טבלה: ב. 25% ג. 9 מועמדים ד. 90, 94, 96, 97.

הרמה	מתחילים 1	מתחילים 2	טרום מתקדמים 1	טרום מתקדמים 2	מתקדמים 1	מתקדמים 2	פטור מלימודי אנגלית
מספר מועמדים	1	3	5	2	2	3	4

שכיחות יחסית:

סיכום כללי:

שכיחות:

מספר הפעמים בהן מופיע פריט בקבוצה,
או: מספר הפעמים שהתקבלה תוצאה מסוימת בניסוי/סקר.

שכיחות יחסית:

היחס בין השכיחות לבין המספר הכולל של הפריטים בקבוצה.
או: המנה בין מספר הפעמים שהתקבלה תוצאה מסוימת בניסוי/סקר לבין מספר הפעמים שהניסוי בוצע.

שכיחות יחסית באחוזים:

כאשר נכפיל את השכיחות היחסית פי 100 נקבל את האחוזר של הקבוצה.

שאלות:

1) לכבוד יום האהבה קנה רפי לבת זוגתו, ליאת, זר פרחים.
ליאת ספרה את הפרחים שבזר ומיינה אותם לפי צבע בטבלה הבאה:

צבע הפרח	ירוק	לבן	אדום	צהוב	סגול	סה"כ
שכיחות	18	10	2	5	15	
שכיחות יחסית						

א. כמה פרחים קנה רפי לליאת?

ב. (1) השלימו את השורה של שכיחות יחסית וכתבו אותה באמצעות שברים פשוטים בלבד.
(2) השלימו את השורה של השכיחות היחסית באחוזים.

ג. (1) מה סכום השכיחויות היחסיות שחישבת בסעיף ב(1)?
(2) מה סכום השכיחויות היחסיות שחישבת בסעיף ב(2)?

2) חנות הבגדים "בגד לי" ממוקמת במרכז העיר, ברחוב 'הרימון'.
הרחובות 'הברוש' ו'הגפן' נמצאים בצפון העיר, ורחוב 'התמר' נמצא בדרום העיר.
מנהל חנות בגדים "בגד-לי" ערך רישום של רחובות המגורים של כל עובדיו.
הנתונים מוצגים בטבלת השכיחויות הבאה:

רחוב	הברוש	הגפן	הרימון	התמר	סה"כ
שכיחות	2	10	6	12	

א. כמה עובדים יש בחנות?
ב. מהי השכיחות היחסית של העובדים שגרים ברחוב 'הגפן'?
ג. לאיזה רחוב יש שכיחות יחסית של $\frac{2}{5}$?
ד. מה אחוז העובדים המתגוררים בצפון העיר?
ה. 3 עובדים עברו מרחוב 'הגפן' לרחוב 'הברוש'.
האם אחוז העובדים המתגוררים בצפון העיר השתנה? נמקו.
ו. לצוות החנות הצטרפו 2 עובדים חדשים. המתגוררים ברחוב 'התמר'.
האם אחוז העובדים המתגוררים בצפון העיר השתנה כעת? נמקו.

3) בטבלת השכיחויות הבאה מתואר הגובה (בס"מ) של 50 קני-סוף שנאספו באופן אקראי.

גובה (בס"מ)	150	155	160	165	170	סה"כ
שכיחות						
שכיחות יחסית	30%	20%	40%	8%	2%	

א. מלאו את המשבצות הריקות בטבלה.
ב. רשמו בשבר פשוט את השכיחות של הקנים שגובהם הוא 170 ס"מ.
ג. קנה-סוף נחשב 'ארוך במיוחד' אם רוב קני-הסוף שנמדדו קצרים ממנו.
מה אחוז קני הסוף ה-'ארוכים במיוחד'?

4) בחממה של ניסים מגדלים עגבניות.
הפועלים ממיינים את העגבניות לפי גדלים: קטנטנות, קטנות, בינוניות, גדולות, גדולות מאוד.
לפניכם טבלת התפלגות גודל העגבניות בסיום יום קטיף:

גודל	מספר ק"ג שנקטפו
גדולות מאוד	6
גדולות	19
בינוניות	15
קטנות	22
קטנטנות	18

א. מהו המשתנה? האם הוא איכותי או כמותי?

ב. (1) מה גודל העגבנייה השכיח ביותר?

(2) מבלי לחשב, קבעו מהו גודל העגבנייה ששכיחותו היחסית היא הגדולה ביותר.
נמקו קביעתכם.

ג. מהו סכום השכיחויות היחסיות (בשברים פשוטים) של כל גדלי העגבניות.
ענו מבלי לחשב. נמקו.

ד. עגבניות גדולות מיועדות לייצוא.
בחממה של יעקב רבע מהעגבניות הן עגבניות גדולות.
באיזו חממה אחוז העגבניות הנשלחות לייצוא גדול יותר - החממה של ניסים או החממה של יעקב?

5) כרמית התבוננה בלוח טיסות בו מופיעות 26 טיסות.
בטבלה שלפניכם מתוארת התפלגות הטיסות לפי החברה המפעילה את הטיסה:

חברת תעופה	ארקיע	אל-על	ישראייר	חברות זרות
כמות טיסות	6	5		

נתון כי מספר הטיסות שמפעילות חברות זרות גדול פי 4 ממספר הטיסות שמופעלות על ידי חברת ישראייר.

א. מצאו כמה טיסות מופעלות על ידי חברת ישראייר וכמה טיסות מופעלות על ידי חברות זרות.

ב. (1) האם רוב הטיסות מופעלות על ידי חברות ישראליות?
(הניחו כי החברות: ארקיע, אל-על וישראייר, הן חברות בבעלות ישראלית).

(2) מה השכיחות היחסית (בשבר פשוט) של טיסות המופעלות על ידי חברות ישראליות?

תשובות סופיות:

1) א. 50 פרחים ב. ראו טבלה: ג. (1) 1 ג. (2) 100%.

צבע הפרח	ירוק	לבן	אדום	צהוב	סגול
שכיחות	18	10	2	5	15
שכיחות יחסית (שברים פשוטים)	$\frac{9}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
שכיחות יחסית (אחוזים)	36%	20%	4%	10%	30%

2) א. 30 עובדים ב. $\frac{1}{3}$ ג. רחוב התמר ד. 40% ה. לא ו. כן.

3) א. ראו טבלה: ב. $\frac{1}{50}$ ג. 10%.

גובה (בס"מ)	150	155	160	165	170	סה"כ
שכיחות	15	10	20	4	1	50
שכיחות יחסית	30%	20%	40%	8%	2%	100%

4) א. איכותי, גודל העגבניות ב. (1) קטנות ב. (2) קטנות ג. 1 ד. החממה של יעקב.

5) א. ישראייר: 3 טיסות, חברות זרות: 12 טיסות ב. (1) כן ב. (2) $\frac{7}{12}$

מציאת סכום שכיחויות מתוך השכיחות היחסית:

שאלות:

1) החגורות במרכז הישראלי לקפוארה הן לפי צבעי דגל ברזיל: ירוק, צהוב, כחול ולבן.
סדר החגורות מתחיל מצבע ירוק, ומתקדמים לצבעים: צהוב, כחול ולבסוף לבן.
לפניכם התפלגות צבעי החגורות של המתאמנים במרכז:

צבע החגורה	ירוק	צהוב	כחול	לבן
מספר מתאמנים	12	20		10

השכיחות היחסית של בעלי חגורה ירוקה היא 0.2.

א. חשבו את מספר המתאמנים במרכז.

ב. חשבו את מספר המתאמנים בעלי חגורה כחולה.

ביום שלישי נערך טקס חגורה ובו שניים מהמתאמנים קיבלו חגורה חדשה
(עברו מרמה אחת לרמה הבאה אחריה). המאמן ערך טבלת שכיחויות יחסיות חדשה וגילה כי
השכיחות היחסית של המתאמנים בעלי חגורה ירוקה ובעלי חגורה כחולה לא השתנתה.

ג. מה צבע החגורות החדש של המתאמנים שהועלו בדרגה?

ד. בחרו את האפשרות המתאימה להשלמת המשפט:
ככל שצבע החגורה מתקדם, ההתפלגות:

(1) עולה (2) יורדת (3) עולה ואז יורדת (4) יורדת ואז עולה

2) בריכת השחייה השכונתית מציעה רכישת כרטיסייה המזכה ב-10 כניסות במחיר מוזל.
מנהל הבריכה בדק את מספר הכניסות שניצלו רוכשי כרטיסיות בחודש מסוים.
התוצאות מתוארות בטבלה שלפניכם:

מספר כניסות שנוצלו	4	5	6	7	8	9	10
שכיחות יחסית	0.06	0.12	0.1		0.22	0.2	0.16

א. חשבו מהי השכיחות היחסית של רוכשים שניצלו 7 כניסות.
ב. ידוע כי 8 רוכשים ניצלו את כל הכניסות בכרטיסיה. חשבו כמה רוכשים נספרו בסקר.
ג. כמה רוכשים ניצלו פחות מ-50% מהכניסות?
ד. מה השכיחות היחסית של הרוכשים שניצלו את רוב הכניסות בכרטיסיה?
ה. (1) הוסיפו שורה נוספת לטבלה ורשמו בה את השכיחות של כל אחד מהמשתנים.
(2) עבור כל אחד מערכי המשתנה, חשבו את היחס בין שכיחותו לבין שכיחותו היחסית.
(3) מה הקשר בין התוצאה שקיבלתם בסעיף ה (2) לבין התוצאה שקיבלתם בסעיף א?
נסחו מסקנה כללית.

3) בחנות בעלי-חיים מוכרים בעלי-חיים מ-5 סוגים.
בטבלה שלפניכם רשומים מספר בעלי החיים מכל סוג בחנות והשכיחויות היחסיות שלהם.

סוג בע"ח	ארנבים	אוגרים	דגים	חתולים	תוכים
שכיחות יחסית		35%	25%		15%

נתון כי השכיחות היחסית של הארנבים גדולה פי 1.5 מהשכיחות היחסית של החתולים.
א. השלימו את הטבלה.
ב. יונתן הקטן והמשועמם נכנס עם אימו לחנות וספר 20 ראשים של בעלי-חיים.
כמה רגליים של בעלי-חיים יש בחנות?
(הדרכה: ראשית, מצאו מה השכיחות של כל אחד מסוגי בעלי-החיים).
ג. חשבו את השכיחות היחסית של בעלי-חיים בחנות שיש להן פחות מ-4 רגליים.
ד. יונתן ואימו קנו דג אחד ומספר תוכים. לאחר הרכישה, השכיחות היחסית של הדגים לא השתנתה. כמה תוכים רכשו יונתן ואימו?

תשובות סופיות:

1) א. 60 מתאמנים ב. 18 מתאמנים ג. כחול ולבן ד. (3) עולה ואז יורדת.

2) א. 0.14 ב. 50 ג. 3 רוכשים ד. 0.82

ה. (1) ראו טבלה: ה. (2) ראו טבלה:

ה. (3) היחס בין שכיחות המשתנה לבין השכיחות היחסית שווה לסכום השכיחויות.

מספר כניסות שנוצלו	4	5	6	7	8	9	10
שכיחות יחסית	0.06	0.12	0.1	0.14	0.22	0.2	0.16
שכיחות	3	6	5	7	11	10	8
יחס	50	50	50	50	50	50	50

3) א. ראו טבלה: ב. 54 רגליים ג. 40% ד. 3 תוכים.

סוג בע"ח	ארנבים	אוגרים	דגים	חתולים	תוכים
שכיחות יחסית	15%	35%	25%	10%	15%

השוואה בין התפלגויות:

סיכום כללי:

בהשוואה בין שתי התפלגויות של אותו משתנה (שמקבל את אותם הערכים), נוכל להשתמש בשכיחות היחסית כדי לראות איזה ערך מוביל יותר בכל התפלגות. כאשר ערך מסוים מקבל שכיחות יחסית גבוהה יותר בהתפלגות אחת מאשר בשנייה, משמעות הדבר היא שהוא תופס חלק גדול יותר באותה התפלגות.

שאלות:

1) קציני הרכב של 2 חברות משלוחים ערכו תיעוד של מספר תאונות הדרכים שעשו הנהגים בחברה. התקבלו התוצאות הבאות:

מספר התאונות	מספר הנהגים בחברה א'	מספר הנהגים בחברה ב'
0	12	15
1	18	13
2	6	19
3	4	13

א. 'נהג זהיר' הוא נהג שלא היה מעורב בתאונת דרכים.
באיזו מהחברות יש יותר 'נהגים זהירים'?

ב. מהי השכיחות היחסית של 'הנהגים הזהירים' בכל אחת מהחברות?
קצין הרכב בחברה א' טוען שהנהגים שלו 'זהירים יותר' כי שכיחותם היחסית של הנהגים הזהירים אצלו גבוהה יותר מאשר שכיחותם היחסית בחברה ב'.
קצין הרכב בחברה ב' טוען שהנהגים שלו 'זהירים יותר' כי שכיחות הנהגים הזהירים אצלו גבוהה יותר מאשר שכיחותם בחברה א'.

ג. מי מבין השניים צודק לדעתכם? נמקו.

2) במוקד מכירות עובדים מספר מוקדנים במשמרת.
במהלך המשמרת, כל מוקדן מתעד את מספר השיחות שקיבל במהלך המשמרת, וכן את מספר השיחות שהסתיימו ברכישה מצד הלקוח. להלן טבלת נתונים שהתקבלה בסיום משמרת:

מספר סידורי מוקדן	1	2	3	4	5
מספר השיחות הנכנסות		40	40		
מספר המכירות	12		5	9	17
אחוז מכירות מתוך השיחות הנכנסות	24%	30%		18.75%	25%

א. (1) מיהו המוקדן ששכיחות המכירות שלו היא הגבוהה ביותר?
(2) איזה מוקדן הוא בעל אחוזי המכירה הגבוהים ביותר במהלך המשמרת?

ב. אחראי המשמרת החליט להעניק כוכב הצטיינות לאיש המכירות הטוב ביותר במהלך המשמרת. הוא התלבט בין שני המוקדנים מסעיף א.
למי אתם הייתם מעניקים את הכוכב? מדוע?

ג. אוהד טען:
'סכום האחוזים חייב להסתכם ל-100%, לכן אחוז המכירות של מוקדן 2 הוא 2.25%'.
האם אוהד צודק? נמקו את קביעתכם.

מסתבר שמוקדנית נוספת עבדה במשמרת זו ושכחה לתעד את נתוניה.
אחוז המכירות של מוקדנית זו הוא 20%, ואחראי המשמרת העניק לה את כוכב ההצטיינות.

ד. (1) בהתייחס לסעיף ב' - לפי איזה קריטריון בחר אחראי המשמרת להעניק את כוכב ההצטיינות? נמקו.
(2) הוסיפו עמודה נוספת לטבלה עבור מוקדנית מספר 6, ותנו דוגמה למספרים שיתאימו לנתוני סעיף זה ויצדיקו את הענקת כוכב הצטיינות למוקדנית זו.

תשובות סופיות:

1) א. חברה א' ב. בחברה א': $\frac{3}{10}$, בחברה ב': $\frac{1}{4}$ ג. חברה א'.

2) א. (2) מוקדן 5 א. (2) מוקדן 2 ב. מוקדן 5 ג. אוהד טועה.
ד. (1) לפי מספר המכירות ד. (2) ראו טבלה:

מספר סידורי מוקדן	1	2	3	4	5	6
מספר השיחות הנכנסות		40	40			90
מספר המכירות	12	12	5	9	17	18
אחוז מכירות מתוך השיחות הנכנסות	24%	30%	12.5%	18.75%	25%	20%

שכיחות מצטברת:

סיכום כללי:

הגדרה:

שכיחות מצטברת היא סכום של כל השכיחויות עד לערך מסוים (כולל אותו ערך).
במילים אחרות, זהו מספר התצפיות או הפריטים שערכם קטן או שווה לערך נתון.
אם נסתכל על התפלגות של ערכים מסודרים, השכיחות המצטברת בכל נקודה מייצגת את סך כל התצפיות מתחילת ההתפלגות ועד לאותה נקודה.

הגדרה:

שכיחות מצטברת יחסית היא הסכום של כל השכיחויות היחסיות עד לערך מסוים (כולל אותו ערך).
היא מייצגת את החלק היחסי או האחוז של התצפיות שערכן קטן או שווה לערך נתון.
בעוד שהשכיחות המצטברת מתייחסת למספרים המוחלטים, השכיחות המצטברת היחסית מבטאת זאת באחוזים או בשברים מתוך כלל האוכלוסייה.

שאלות:

1) בשכבה י' הוכרז מבצע 'מגיעים בזמן'.
רכזת השכבה ערכה תיעוד של כמות איחורי הבוקר של תלמידים שנכנסו באיחור לבית הספר (בכל שבוע יש 5 ימי לימודים):

מספר האיחורים השבועי	1	2	3	4	5
השכיחות (מספר התלמידים)	26	19	17	14	12
השכיחות המצטברת					

א. השלימו את הנתונים בשורה האחרונה של הטבלה.
ב. כמה תלמידים איחרו השבוע לבית הספר? מאיזו שורה עדיף לענות על סעיף זה?
ג. כמה תלמידים איחרו רוב השבוע (אך לא כל השבוע)?
מאיזו שורה עדיף לענות על סעיף זה?
ד. מה כמות האיחורים הכללית בשכבה?
ה. בהתאם לנתונים שלפניכם, חשבו את אחוז האיחורים הכללי בשכבה
(הדרכה: מצאו קודם את השלם. כמה פעמים סה"כ כל התלמידים היו אמורים להגיע בזמן לבית הספר?)

מנהל בית הספר טען שהטבלה לא משקפת כראוי את מצב השכבה, כי הרכזת לא התייחסה לכמות התלמידים שהגיעו בזמן.

ו. לפניכם שתי טענות. עבור כל טענה - קבעו אם היא נכונה או שגויה. נמקו את קביעתכם:
(1) אם נוסיף את עמודת התלמידים שלא איחרו כלל, כמות האיחורים הכללית לא תשתנה.
(2) אם נוסיף את עמודת התלמידים שלא איחרו כלל, אחוז האיחורים הכללי לא ישתנה.

2) מורן, קונדיטור מתחיל, ערך מכירה ביתית של עוגות שמרים. סך הכל מכר מורן 30 עוגות.
מחירון העוגות (בשקלים): שוקולד - 20, חלווה - 25, שקדים - 30, פיסטוק - 35, בייגלה מלוח - 40.
להלן התפלגות העוגות שנמכרו:

טעם	שוקולד	חלווה	שקדים	פיסטוק	בייגלה מלוח
מחיר (בשקלים)	20	25	30	35	40
שכיחות	5	7	10	5	
שכיחות מצטברת					
שכיחות יחסית מצטברת					

א. אלו שתי משבצות בטבלה ניתן למלא מבלי לבצע אף חישוב?

ב. השלימו את המשבצות החסרות בטבלה.

ג. כמה עוגות נמכרו בפחות מ-35 ש"ח? מאיזו שורה נוח לראות את התשובה לסעיף זה?

ד. מבלי לבצע חישובים נוספים - האם קיימות עוגות שהשכיחות היחסית שלהן במכירה הייתה זהה?

ה. מה השכיחות היחסית של העוגות שנמכרו במחיר ביניים (לא במחיר היקר ביותר ולא במחיר הזול ביותר)?

ו. (1) לפי הנתונים שלפניכם, האם קיים קשר בין מחיר העוגה לבין שכיחות המכירה שלה?

(2) מורן מעוניין לבצע מכירה נוספת. הוא מתכנן להכין עוגה בטעם חדש.
באיזה מחיר תמליצו לו להציע את העוגה החדשה? מדוע?

תשובות סופיות:

1) א. ראו טבלה למטה. ב. 88 תלמידים, מהשורה של השכיחות המצטברת.
ג. 31 תלמידים, מהשורה של השכיחות המצטברת ד. 231 איחורים.
ה. 52.5% ו. (1) נכונה (2) לא נכונה.

מספר האיחורים השבועי	1	2	3	4	5
השכיחות (מספר התלמידים)	26	19	17	14	12
השכיחות המצטברת	26	45	62	76	88

2) א. שכיחות מצטברת ושכיחות יחסית מצטברת של בייגלה מלוח ב. ראו טבלה:
ג. 22 עוגות, מהשורה של השכיחות המצטברת ד. כן, עוגות שוקולד ופיסטוק ה. $\frac{11}{15}$.
ו. (1) ישנה מגמת עלייה ככל שהמחיר עולה עד ל30 ש"ח ולאחר מכן ירידה (2) 30 ש"ח.

טעם	שוקולד	חלווה	שקדים	פיסטוק	בייגלה מלוח
מחיר (בשקלים)	20	25	30	35	40
שכיחות	5	7	10	5	3
שכיחות מצטברת	5	12	22	27	30
שכיחות יחסית מצטברת	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{9}{10}$	1

משתנים בקבוצות שוות רוחב:

סיכום כללי:

רוחב של קבוצה:

הרוחב של קבוצה הוא ההפרש בין הגבול העליון לגבול התחתון של הקבוצה. כאשר מחלקים נתונים לקבוצות או מקבצים (בינים), רוחב הקבוצה מייצג את הטווח של ערכים שנכללים באותה קבוצה.

נקודת האמצע של קבוצה:

נקודת האמצע של קבוצה היא הערך שנמצא באמצע הטווח של הקבוצה.
מחשבים אותה על ידי חיבור הגבול התחתון והגבול העליון של הקבוצה וחלוקה ב-2.

האם ניתן לחלק את הטבלה ל-5 קבוצות שוות רוחב?

כדי לחלק את הטבלה ל-5 קבוצות שוות רוחב, נבדוק את הטווח הכולל של מספר המכירות ונחלק אותו ל-5 חלקים שווים. הטווח הכולל הוא מ-0 עד 7 מכירות, כלומר 8 ערכים אפשריים.
כדי לחלק ל-5 קבוצות שוות רוחב, נחשב את רוחב כל קבוצה:

$$\text{רוחב קבוצה} = \frac{\text{טווח כולל}}{\text{מספר קבוצות רצוי}} = \frac{8}{5} = 1.6$$

מכיוון שלא ניתן לחלק את מספר המכירות לחלקים של 1.6 לא ניתן לחלק את הטבלה הזו ל-5 קבוצות שוות רוחב.

מסקנה:

ניתן לחלק טבלה למספר קבוצות המאחד קבוצות קיימות ברוחב שווה מכיוון שהדבר תלוי בטווח הנתונים ובמספר הקבוצות הרצוי. כאשר טווח הנתונים אינו מתחלק במספר שלם במספר הקבוצות הרצוי, לא ניתן ליצור קבוצות בדיוק שוות רוחב.

שאלות:

1) להלן משכורות חודשיות (בש"ח) של 34 עובדים:

משכורות	מספר עובדים
5500	3
6000	6
6500	7
7000	8
7500	6
8000	4

א. סדרו את המשכורות בטבלה הבאה (השלימו את השכיחויות).
הדרכה: רשמו תחילה את המשכורות לפי הסדר מהקטן לגדול.

משכורות	מספר עובדים
5500-6000	
6500-7000	
7500-8000	

ב. מצאו את הרוחב של כל קבוצה.

ג. מצאו את הרוחב של כל הקבוצות יחד (תחום המשכורות).

ד. מצאו את נקודת האמצע של כל קבוצה.

ה. בנו טבלה שבה המשכורות הנ"ל מחלוקות ל-2 קבוצות שוות רוחב ומצאו את נקודת האמצע של כל קבוצה.

ו. (1) שני טענה שבטבלה שבסעיף ה' יש פחות מידע מאשר בטבלה שבסעיף א', ובטבלה שבסעיף א' יש פחות מידע מאשר בטבלת הנתונים המקורית.
האם שני צודקת? נמקו.
(2) מה לדעתכם היתרון שבהצגת הנתונים בקבוצות?

2) כאשר תינוק נולד מבצעים מספר מדידות חיוניות, ביניהן מדידת היקף הראש של התינוק.
להלן התפלגות היקפי הראש של תינוקות שנולדו ביום מסוים:

היקף ראש	32-32.99	33-33.99	34-34.99	35-35.99	36-36.99	37-37.99
שכיחות	4	17	24	33	23	1

א. בנו טבלת שכיחויות רגילה שבה כל קבוצה מיוצגת על ידי ערך יחיד שהוא נקודת האמצע שלה.

ב. נבו טען שבהתאם לטבלה שבסעיף א' קיימים 4 תינוקות בעלי היקף ראש של 32.5 ס"מ.
ליהי טענה שייתכן שיש 5 תינוקות בעלי היקף ראש של 33 ס"מ.
- האם נבו צודק? נמקו.
- האם ליהי צודקת? נמקו.

ג. (1) מנהלת המחלקה ביקשה לקבל את נתוני ההתפלגות בטבלת שכיחויות שבה היקפי הראש מחולקים ל-4 קבוצות. האם תוכלו לבנות טבלה כזו בהתאם לנתונים שבידיכם? מדוע?
(הדרכה: חשבו את רוחב כל הקבוצות יחד, ולאחר מכן קבעו את התחום של כל קבוצה בחלוקה ל-4 קבוצות).
(2) בהתאם לנתונים שבידיכם, תוכלו לבנות טבלת שכיחויות שבה היקפי הראש מחולקים ל-2 קבוצות? אם כן - עשו זאת. אם לא - הסבירו מדוע.

תשובות סופיות:

1) א. ראו טבלה: ב. 500 ש"ח ג. 2500 ש"ח ד. 5750, 6750, 7750.

משכורות	מספר עובדים
5500-6000	9
6500-7000	15
7500-8000	10

ה. ראו טבלה: ו. (1) שני צודקת ו. (2) יעילה כאשר יש כמו גדולה של נתונים.

נקודת אמצע	משכורות	מספר עובדים
6000	5500-6500	16
7500	7000-8000	18

2) א. ראו טבלה: ב. נבו טועה, ליהי צודקת.

היקף ראש	32.5	33.5	34.5	35.5	36.5	37.5
שכיחות	4	17	24	33	23	1

ג. (1) לא ניתן ג. (2) ניתן, ראו טבלה:

היקף ראש	32-34.99	35-37.99
שכיחות	45	57

שאלון 471

מדדי מרכז

תוכן העניינים:

מדדי מרכז 483

הממוצע - הגדרה ותכונות: 485

סיכום כללי: 485

שאלות: 486

תשובות סופיות: 489

מציאת השכיחות בעזרת הממוצע: 490

סיכום: 490

שאלות: 490

תשובות סופיות: 490

ממוצעים של קבוצות וממוצע משוקלל: 491

סיכום כללי: 491

שאלות: 491

תשובות סופיות: 491

הוספת נתונים וחישוב ממוצע חדש: 492

סיכום כללי: 492

שאלות: 492

תשובות סופיות: 493

ממוצע גדל, קטן או לא משתנה: 494

סיכום כללי: 494

שאלות: 494

תשובות סופיות: 496

שאלות בממוצעים עם שני נעלמים: 497

סיכום כללי: 497

שאלות: 497

תשובות סופיות: 497

השכיח: 498
סיכום כללי: 498
שאלות: 498
תשובות סופיות: 500
החציון: 501
סיכום כללי: 501
שאלות: 501
תשובות סופיות: 504
שאלות כלליות במדדי מרכז: 505
שאלות: 505
תשובות סופיות: 507

הממוצע - הגדרה ותכונות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הממוצע הוא המנה (או היחס) בין סכום הנתונים למספרם:

$$\text{הממוצע} = \frac{\text{סכום הנתונים}}{\text{מספר הנתונים}}$$

את ערכי הנתונים עצמם מקובל לסמן ב- $x_{\square}$ כאשר בכתב התחתון נרשום את המיקום של הנתון, למשל: x_1, x_2, x_3 וכך הלאה.

נסמן ב- N את סך כל הנתונים ואת הממוצע נסמן ב- $\bar{x}$.

תכונות הממוצע:

הממוצע לא נותן מידע לגבי התפלגות הנתונים או טווח הנתונים.

1) תוספת של מספר קבוע לכל הנתונים שקולה לתוספת של המספר הקבוע לממוצע עצמו.

2) הכפלה של כל הנתונים בגודל קבוע שקולה להכפלת הממוצע עצמו באותו הקבוע.

הגדרה:

סכום כל ההפרשים בין כל אחד מהמספרים, למספר הממוצע נקרא **סכום הסטיות** מהממוצע.

תכונה מרכזית:

- סכום הסטיות מהממוצע תמיד יהיה שווה לאפס.

ממוצע בטבלת שכיחויות:

נציג טבלת שכיחויות באופן הבא:

הציון - x_i	4	5	6	7	8	9
מספר התלמידים - f_i	3	8	7	2	4	1

והממוצע יחושב לפי: $\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_N f_N}{N}$ כאשר: $N = f_1 + f_2 + \ldots + f_N$.

שאלות:

1) חשבו את הממוצע של קבוצות המספרים הבאים:

א. 5 , 7 , 8 , -1 , 4 , 9 , 3.

ב. -2 , -15 , 6 , 7 , -3 , 0.

2) חשבו את הממוצע של קבוצות המספרים הבאים:

א. 2 , 2 , 2 , 2 , 6 , 6 , 7 , 7 , 7 , 8.

ב. 5 , 5 , 5 , 5 , 4 , 4 , 4 , 8 , 8 , 8 , 1 , 1.

ג. 4 , 2 , 7 , 7 , 4 , 8 , 1 , 9 , 2 , 5 , 2 , 2 , 4.

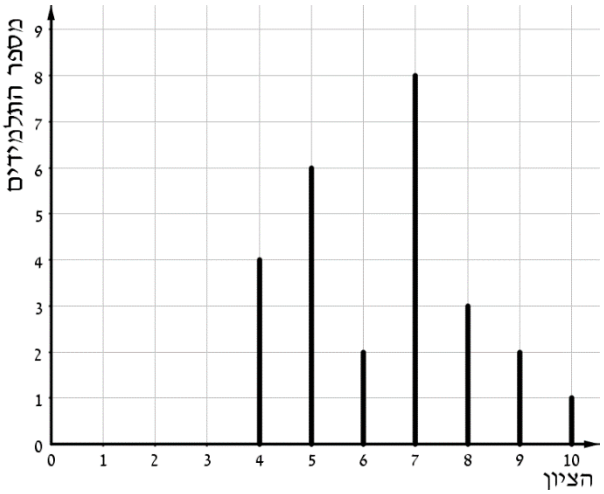
3) הציונים בכיתה שבה 30 תלמידים במבחן מסוים מופיעים בטבלת השכיחויות הבאה.
חשבו את הציון הממוצע.

הציון	4	5	6	7	8	9
מספר התלמידים	3	8	7	2	4	1

4) בדיאגרמת המקלות שלפניך מתואר התפלגות הציונים של במבחן בספרות.

א. כתבו את הנתונים בטבלת שכיחויות.

ב. חשבו את הציון הממוצע בכיתה.



5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. רשמו 5 ציונים שהנמוך בהם יהיה 40 והגבוה יהיה 95, כך שהממוצע יהיה 74.

ב. רשמו 5 ציונים שהנמוך בהם יהיה 40 והגבוה יהיה 95, כך שהממוצע יהיה 80.

ג. האם ניתן לקבל ממוצע של 90 בעבור רשימה של 5 ציונים שבה הציון הנמוך ביותר הוא 40 והגבוה ביותר הוא 95? הסבירו.

ד. מהו הממוצע הגבוה ביותר שניתן לקבל מרשימה של 5 ציונים שהנמוך בהם הוא 40 והגבוה בהם הוא 95? הסבירו.

6) הציון הממוצע של 5 תלמידים הוא 88. התלמיד השישי קיבל באיחור את ציונו ואז התברר שהממוצע לא השתנה כלל. מהו ציונו של התלמיד השישי?

7) לפניכם המספרים הבאים: 6 , 6 , 6 , 6 , 6.

א. מה הממוצע של המספרים?

ב. איזה מספר ניתן להוסיף לרשימה על מנת לקבל ממוצע שבוודאות יהיה גדול יותר? נמקו.

ג. איזה מספר ניתן להוסיף לרשימה על מנת לקבל ממוצע שבוודאות יהיה קטן יותר? נמקו.

ד. מוסיפים את המספרים 7 ו-5 בלבד.
האם הממוצע יגדל/יקטן/ישאר זהה? נמקו.

8) מדדו את הגובה של 5 חרקים שונים.
במקום להציג את הגובה עצמו, בוחרים להציג בכמה סוטה הגובה של כל חרק מהגובה הממוצע של כולם (כלומר, רשמו את ההפרש בין גובה כל אחד לבין הגובה הממוצע).
להלן רשימת נתוני הסטיות מהגובה הממוצע: 8 , 4 , 1 , 5- , 6-.

א. אביב הסתכל ברשימה בלבד וטען כי ישנה טעות.
כיצד ידע אביב כי ישנה טעות מבלי לדעת את גובהם של כל חברי הקבוצה?

ב. לאחר בדיקה נתגלה כי הערך 1 היה אמור להיכתב עם סימן מינוס לפניו. כלומר: 8, 4, 1-, 5-, 6-.
האם עדיין ישנה טעות?

9) בכיתה מסוימת נמדד יום אחד הגובה של כל התלמידים הנוכחים בכיתה.
נמצא כי הגובה הממוצע של הבנים הוא 162 ס"מ והגובה הממוצע של הבנות הוא 156 ס"מ.
באותו יום היו חסרים שני תלמידים. כאשר הם הגיעו לכיתה למחרת, מדדו את גובהם. ממוצע הגבהים של הבנים וממוצע הגבהים של הבנות חושבו מחדש. במפתיע, הגובה הממוצע של הבנות לא השתנה וגם הגובה הממוצע של הבנים לא השתנה (לעומת הממוצעים שחושבו יום קודם).

א. נתון שאחד מהתלמידים שהיו חסרים היא בת, והשני הוא בן.
יובל אמר שגובהו של הבן הוא 162 ס"מ. האם יובל צודק? הסבר.

ב. אם שני התלמידים שהיו חסרים הם בנים, וגובהו של אחד מהם הוא 160 ס"מ. מה גובהו של התלמיד השני? נמקו.

10) האם ממוצע יכול להיות מספר אשר אינו מופיע בכלל הנתונים שנאספו?

11) האם לשתי סדרות של מספרים יכול להיות אותו ממוצע על אף שיש להם מספרים שונים?

12) בבית חרושת מייצרים את הרהיטים הבאים:

שולחנות כתיבה, כיסאות לפינת מחשב, שידה לחדר שינה ובסיס למיטה.

א. האם ניתן להגדיר ממוצע של סוג הרהיט אשר מיוצר ע"י בית החרושת?

ב. במידה ונתון כי בית החרושת מייצר את הכמויות הבאות בשבוע:

- 10 שולחנות כתיבה.
- 40 כיסאות לפינת מחשב.
- 20 שידות לחדר שינה.
- 30 בסיסים למיטות.

האם כעת ניתן להסיק מהו סוג הרהיט הממוצע שמיוצר? נמק.

ג. האם ניתן למצוא כמה פריטים בממוצע המפעל מייצר בשבוע?

אם כן – כמה? אם לא – נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. $-1\frac{1}{6}$.

2) א. 4.9 ב. $4\frac{5}{6}$ ג. 4.384.

3) 5.96.

4) א. ראה טבלת שכיחויות מלאה בסרטון הוידאו. ב. 6.38.

5) א. 40 , 60 , 80 , 95 , 95 , 95 ב. 40 , 80 , 90 , 95 , 95 , 95.

ג. לא. הממוצע הגבוה ביותר יתכן כאשר: 40 , 95 , 95 , 95 , 95 והוא 84.

ד. הממוצע הגבוה ביותר הוא 84.

6) 88.

7) א. 6. ב. כל מספר הגדול מ-6. ג. כל מספר הקטן מ-6.

ד. לא ישתנה. הממוצע של 5 ו-7 הוא 6. תוספת של מספרים עם אותו ממוצע לא תשנה אותו.

8) א. סכום ההפרשים אינו אפס. ב. לא.

9) א. כן. ב. 164 ס"מ.

10) כן.

11) כן.

12) א. לא ניתן להגדיר ממוצע לנתונים שמיים. ב. לא, מאותה הסיבה.

ג. לא. הנתונים מעידים כמה רהיטים מיוצרים בשבוע ותו לא.

מציאת השכיחות בעזרת הממוצע:

סיכום:

בנושא זה נלמד כיצד לחבר משוואה למציאת נעלם שנמצא בשכיחות.

שאלות:

1) נתונה התפלגות ציונים במתמטיקה בכיתה י"א 2.
ממוצע הציונים הוא 6.5. מצאו את x.

ציון	5	6	7	8	9
מספר תלמידים	4	x	5	3	1

2) התפלגות הציונים במבחן שנערך בהיסטוריה נתונה בטבלה הבאה.
ידוע כי ממוצע הציונים הוא 62.5. מה הוא ערכו של x?

ציון	40	50	60	70	80	90	100
מספר תלמידים	3	4	6	2	x	1	1

תשובות סופיות:

1) $x=7$.

2) $x=3$.

ממוצעים של קבוצות וממוצע משוקלל:

סיכום כללי:

כדי לחשב ממוצע כולל המורכב ממספר קבוצות, אין צורך לדעת את הציון של כל תלמיד ותלמיד.
אלא נניח כי כל התלמידים בקבוצה מסוימת קיבלו את הציון הממוצע.

שאלות:

1) תלמידי כיתה י"א 1 נבחנו במתמטיקה.
בטור א' ישבו 30 תלמידים, ציונם הממוצע הוא 75.
בטור ב' ישבו 20 תלמידים, ציונם הממוצע לא ידוע.
הציון הממוצע של כל תלמידי הכיתה הוא 73.
מה הוא הציון הממוצע של תלמידי טור ב'?

2) בבית החולים "המשמר" ישנן שתי דרגות שכר: גבוהה לרופאים, ונמוכה לאחיות.
השכר השעתי של רופא גבוה ב-50 ₪ מהשכר השעתי של אחות.
בבית החולים עובדים 40 רופאים ו-120 אחיות.
השכר הממוצע בבית החולים הוא 72.5 ₪ לשעה.
מה הוא השכר השעתי של אחות ומה הוא השכר השעתי של רופא?

3) אולם אירועים ידוע מחזיק 60 מלצרים ו-10 אחראי משמרת.
אחראי משמרת מקבל שכר שעתי הגבוה ב-21 ₪ מהשכר השעתי שמקבל מלצר. השכר הממוצע של כל העובדים הוא 43 ₪.
מצאו את השכר השעתי של מלצר ואת השכר השעתי של אחראי משמרת.

תשובות סופיות:

1) הציון הממוצע של תלמידי טור ב' הוא 70.
2) שכר שעתי של אחות: 60 ₪, שכר שעתי של רופא: 110 ₪.
3) שכר שעתי של מלצר: 40 ₪, שכר שעתי של אחראי משמרת: 61 ₪.

הוספת נתונים וחישוב ממוצע חדש:

סיכום כללי:

כאשר נתונה קבוצת מספרים עם ממוצע מסוים, אז:

- אם נוסיף מספר הגדול מהממוצע, הוא יגדיל את הממוצע של כל המספרים.
- אם נוסיף מספר הקטן מהממוצע, הוא יקטין את הממוצע של כל המספרים.

שאלות:

1) בכיתה י"ב נבחנו 15 תלמידים והציון הממוצע שלהם היה 8.2.
שבוע לאחר מכן נבחנו 2 תלמידים נוספים.
האחד קיבל ציון 8.9 והשני קיבל ציון 9.2.
א. חשבו את ממוצע הציונים החדש של כיתה י"ב.
ב. האם ממוצע הציונים החדש גבוה יותר או נמוך יותר מהממוצע הקודם? מדוע?

2) במבחן שנערך בכיתה התקבלו הציונים הבאים:
14 תלמידים קיבלו ציון 8, 5 תלמידים קיבלו ציון 9, 3 תלמידים קיבלו ציון 10.
א. מה הוא ממוצע הציונים הכיתתי?
ב. שבוע לאחר מכן נבחנו עוד 6 תלמידים וכולם קיבלו ציון 8.
האם הממוצע החדש גדל או קטן בהשוואה לממוצע הקודם?

3) המשכורת הממוצעת של עובד ב-4 חודשים היא 6000 ₪.
מה צריכה להיות משכורתו בחודש החמישי כדי שהממוצע החדש לא ישתנה?

4) תלמיד חישב ומצא כי ממוצע 5 הבחינות האחרונות שלקח במחשבים הוא 82.
א. מה צריך להיות ציונו במבחן השישי כדי שממוצע הציונים בכל 6 הבחינות יישאר 82?
ב. החל מאיזה ציון הממוצע של התלמיד בכל 6 הבחינות יעלה? נמק.

5) שוקלים 30 שקיות של חטיף מסוים ומקבלים משקל ממוצע של 80 גרם.
לאחר מכן התברר כי זה הוא המשקל הממוצע של 20 שקיות בלבד.
עבור 10 השקיות הנוספות יש להוסיף 3 גרם למשקל הקודם של כל שקית.
מה המשקל הממוצע החדש של כל שקית?

תשובות סופיות:

1) א. 8.3 ב. הממוצע החדש גבוה יותר מהממוצע הקודם.

2) א. 8.5 ב. הממוצע קטָן.

3) 6000 ₪.

4) א. 82 ב. עליו לקבל ציון הגבוה מ-82.

5) 81 גרם.

ממוצע גדל, קטן או לא משתנה:

סיכום כללי:

בשאלות שבנושא זה נלמד על הקשר שבין ממוצעים של קבוצות וממוצע כללי.

שאלות:

1) בכיתה ז'2 מדדו את הגבהים של כל תלמידי הכיתה
ונמצא כי הגובה הממוצע של הבנים הוא 154 ס"מ והגובה הממוצע של הבנות הוא 144 ס"מ.
ידוע כי היחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה זו הוא 2:3.
מהו הגובה הממוצע של כל תלמידי הכיתה?

2) בכיתה לומדים 10 בנים ו-15 בנות. ממוצע הגבהים של הבנות הוא 160 ס"מ וממוצע הגבהים של הבנים הוא 175 ס"מ. לכיתה הצטרפו בן אחד ובת אחת. כאשר מדדו את הגובה של שני התלמידים שהצטרפו התברר שהגובה הממוצע של הבנות לא השתנה וגם הגובה הממוצע של הבנים לא השתנה.

א. מה הגובה של התלמיד שהצטרף?
ב. מה הגובה של התלמידה שהצטרפה?
ג. רוני טוען כי גם הממוצע החדש של גובה כלל תלמידי הכיתה לא השתנה. |האם רוני צודק?

3) בכיתה מסוימת נמדד יום אחד הגובה של כל התלמידים הנוכחים בכיתה.
באותו יום היו חסרים שני תלמידים. כאשר הם הגיעו למחרת, מדדו את גובהם וממוצע הגבהים של הבנים וממוצע הגבהים של הבנות חושבו מחדש. במפתיע, הגובה הממוצע של הבנים לא השתנה וגם הגובה הממוצע של הבנות לא השתנה (לעומת הממוצעים שחושבו יום קודם).
ג'סיקה אמרה שגם הגובה הממוצע של כל תלמידי הכיתה לא השתנה לעומת הממוצע הקודם.
האם ג'סיקה צודקת? הסבר.

4) רמי חוגג את יום הולדתו החמישי עם כל בני משפחתו:
הוריו זיגי וסנונית בני ה-45, אחיו רונן בן ה-8 ואחותו יעל בת ה-4.

א. מצאו את הגיל הממוצע במשפחה.

ב. לחגיגה הגיעו שני חברים בני 6. האם הגיל הממוצע של המשתתפים גדל או קטן או לא השתנה יחסית לממוצע הקודם?

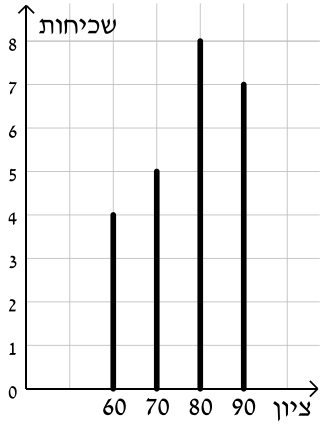
ג. אחר כך הגיעו לחגיגה סבא וסבתא של רמי, שנולדו באותה שנה. מה גילם אם הגיל הממוצע החדש של הנוכחים הוא 27?

5) במקהלה ישנם 10 זמרים בני 35 ו-6 זמרים בני 30.

א. מהו הגיל הממוצע של הזמרים?

ב. לאחר מכן הצטרפו 8 תלמידי תיכון ממקהלת בית הספר העירוני. האם הגיל הממוצע של הזמרים עלה או ירד?

6) בדיאגרמת העמודות שלפניכם מתוארת התפלגות הציונים במבחן באנגלית שנערך בכיתה י'.



א. מהו מספר התלמידים בכיתה?

ב. מהו הציון הממוצע?

ג. 6 תלמידים ניגשו למבחן חוזר. ארבעה מהם שציונם 70 ו-80 שיפרו ל-90. האם יש שינוי בממוצע הציונים של כלל הכיתה?

7) ציונם של תלמידים במבחן במתמטיקה הם 70, 80 ו-90.
3 תלמידים קיבלו ציון 70, 5 תלמידים קיבלו 80 ו-2 תלמידים קיבלו 90.
4 תלמידים נעדרו מן המבחן, נבחנו בשבוע שלאחר מכן וכל אחד מהם קיבל ציון 60. האם הממוצע החדש גדל. קטן או לא השתנה? נמק.

תשובות סופיות:

1) 148 ס"מ.

2) א. 175 ס"מ. ב. 160 ס"מ. ג. רוני טועה.

3) ג'סיקה טועה (ראו הסבר מפורט בסרטון הוידאו).

4) א. 21.4 ב. הממוצע קטן. ג. בני 62 שנים.

5) א. 33.125. ב. הגיל הממוצע ירד.

6) א. 24 תלמידים. ב. 77.5. ג. כן! (ראו הסבר בסרטון הוידאו).

7) הממוצע החדש יקטן (ראו הסבר מלא בסרטון הוידאו).

שאלות בממוצעים עם שני נעלמים:

סיכום כללי:

בנושא זה נלמד כיצד להגדיר ולחבר שתי משוואות למציאת שני נעלמים בשאלה.

שאלות:

1) בכיתה 40 תלמידים. 25 קיבלו ציון 7, חלק מן התלמידים קיבלו 8 והאחרים קיבלו ציון 9. כמה תלמידים קיבלו ציון 8 וכמה תלמידים קיבלו ציון 9 אם ממוצע הציונים הוא 7.5?

2) במפעל ישנן 3 דרגות שכר: למנהלים 10,000 ₪, לטכנאים 7500 ₪ ולפקידים 5500 ₪. השכר הממוצע במפעל הוא 6860 ₪. במפעל ישנם 8 מנהלים ובסך הכל ישנם 50 עובדים (כולל המנהלים). כמה טכנאים וכמה פקידים עובדים במפעל?

תשובות סופיות:

1) 10 תלמידים קיבלו ציון 8 ו-5 תלמידים קיבלו ציון 9.

2) במפעל יש 16 טכנאים ו-26 פקידים.

השכיח:

סיכום כללי:

טווח נתונים:

בביצוע סקר/ניסוי, התוצאות נעות בין ערכים מסוימים הנקרא **טווח נתונים**.
זה הוא התחום של נתונים מהקטן ביותר ועד הגדול ביותר.

השכיח:

הערך הנפוץ יותר בביצוע סקר.
יכולים להיות יותר משכיח אחד.

שאלות:

שאלות חישוב יסודיות:

1) מצאו מהו המספר השכיח ברשימת המספרים הבאה: 3 , 4 , 4 , 5 , 8.

2) מצאו מהו הציון השכיח ברשימת הציונים הבאה:
22 , 46 , 61 , 87 , 22 , 87 , 67 , 23 , 87 , 5.

3) סדרו את המספרים הבאים בטבלת שכיחויות ומצאו את השכיח:
5 , 6 , 4 , 3 , 3 , 8 , 5 , 6 , 4 , 7 , 5 , 6 , 8 , 5 , 7 , 3.

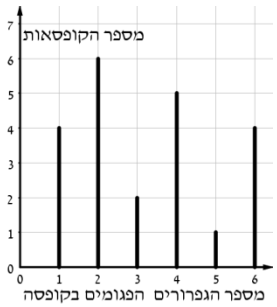
4) מצאו את הציון השכיח בטבלה הבאה:

ציון	4	5	6	7	8	9
שכיחות	3	8	7	2	4	1

5) מצאו את הציון השכיח בטבלה הבאה:

ציון	4	5	6	7	8	9
שכיחות	5	3	4	5	2	1

6) דיאגרמת המקלות שלפניך מתארת את התפלגות הגפרורים הפגומים בקופסה.
מצאו את מספר הגפרורים הפגומים השכיח.



7) במפעל מסוים בדקו את השכר היומי של הפועלים.
את התוצאות ריכזו בטבלה הבאה:

השכר	100	110	120	130	140	150
מספר הפועלים	5	15	20	10	5	25

א. סרטטו דיאגרמת מקלות של התפלגות השכר במפעל.
ב. מצאו את השכר השכיח במפעל.

שאלות כלליות:

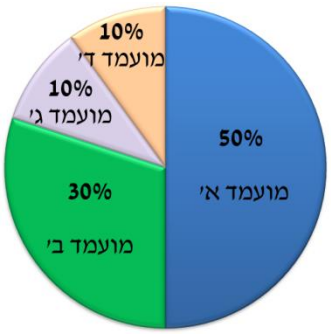
8) לפניכם ציונים שקיבלו במבחן במתמטיקה:
40 , 50 , 80 , 70 , 50 , 80 , 80 , 60 , 100 , 40 , 70 , 80 , 40 , 60.

א. השלם את הטבלה הבאה:

ציון	40	50	60	70	80	100
שכיחות						
שכיחות יחסית						

ב. מהו טווח הנתונים?
ג. כמה תלמידים עשו את המבחן?
ד. מהו הציון שכיח במבחן?
ה. מהי השכיחות היחסית של התלמידים שקיבלו ציון 80?
ו. ידוע כי ציון הנמוך מ-60 הוא נכשל (לא כולל 60).
מהי השכיחות היחסית של התלמידים שנכשלו במבחן?
ז. סרטטו דיאגרמת מקלות מתאימה.

9) דיאגרמת העוגה הבאה מתארת את התפלגות הבוחרים לרשות מקומית של 4 מועמדים:
מועמד א', מועמד ב', מועמד ג' ומועמד ד'.



א. מי הוא המועמד השכיח בקרב הבוחרים?
האם ניתן לומר כי מועמד זה זכה בבחירות?
ב. עקב תקלה בהנהלת הקלפי, התברר כי 10% מהבוחרים של מועמד א' שייכים למעשה למועמד ג'.
האם השינוי ישפיע על המועמד השכיח?

10) במבחן מסוים התקבלה התפלגות ציונים כלשהי.
דנה טוענת כי הציון השכיח חייב להיות אחד מהציונים של ההתפלגות.
רמי טוען כי הציון השכיח לא חייב בהכרח להיות אחד מהציונים שהתקבלו.
מי לדעתכם צודק? נמקו.

11) האם ניתן לאפיין סקר שמכיל תוצאות שמיות גם באמצעות השכיח?
אם כן – תנו דוגמה מתאימה שתמחיש את טענתכם.
אם לא – נמקו מדוע.

תשובות סופיות:

1) 4.

2) 87.

3) להלן סידור בטבלת שכיחויות: השכיח הוא: 87.

מספר	5	22	23	46	61	67	87
שכיחות	1	2	1	1	1	1	3

4) 5.

5) 7 ו-4.

6) 2 גפרורים פגומים.

7) א. עיין בסרטון לפתרון מלא. ב. 150 ₪.

8) א. הטבלה המלאה מופיעה בסוף הסעיפים. ב. 60.
ג. 14 תלמידים. ד. 80 ה. $\frac{2}{7}$ ו. עיין בסרטון לפתרון מלא.

ציון	40	50	60	70	80	100
שכיחות	3	2	2	2	4	1
שכיחות יחסית	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$

9) א. מועמד א'. כן – הוא זכה בבחירות.
ב. לא, מכיוון שלמועמד א' יהיו 40% מהקולות והוא עדיין יחזיק ברוב.

10) הציון השכיח הוא הנפוץ ביותר ולכן חייב להיות אחד מהערכים המתקבלים.

11) כן. לדוגמאות לסקרים עם ערכים שמיים צפה בסרטון הוידאו.

החציון:

סיכום כללי:

החציון:

החציון הוא מדד מרכזי המתאר את הערך האמצעי של סדרת נתונים הרשומים בסדר עולה (או יורד).

איך מוצאים חציון?

נניח כי באופן כללי מתקבלת סדרה עם N איברים בסדר עולה (או יורד).

- אם N הוא מספר אי זוגי, החציון יהיה האיבר במקום: $\frac{N+1}{2}$.
- אם N הוא מספר זוגי, החציון יחושב ע"י ממוצע של שני האיברים האמצעיים. אלו הם האיברים: $\frac{N}{2}$ ו-$\frac{N}{2}+1$.

שאלות:

שאלות חישוב יסודיות:

1) בכל תרגיל נתונה רשימת מספרים בסדר עולה.
מצאו את החציון.

א. $5,5,6,7,7$.

ב. $1,1,7,7,7,9,9$.

ג. $2,2,2,3,3,4,4,4,5,5,6,6,6$.

2) בכל תרגיל נתונה רשימת מספרים בסדר עולה.
מצאו את החציון.

א. $3,3,6,6,9,9$.

ב. $1,2,2,2,3,3,8,8$.

ג. $1,4,4,6,6,7,7,7,8,8$.

3) מצאו את החציון בכל אחד מאוסף המספרים הבאים:

א. $5, 4, 5, 4, 3, 7, 5, 5, 4, 6, 3$.

ב. $8, 5, 6, 4, 3, 3, 8, 5, 6, 4, 7, 5, 6, 8, 5, 7$.

4) בכיתה נערך מבחן. להלן התפלגות הציונים של התלמידים.
מצאו את הציון החציון בכיתה (הציון ה-'חציוני').

הציון	4	5	6
מספר התלמידים	3	2	4

5) בכיתה נערך מבחן. להלן התפלגות הציונים של התלמידים.
מצאו את הציון החציון בכיתה (הציון ה-'חציוני').

הציון	4	5	6	8	9	10
מספר התלמידים	2	4	5	4	6	1

6) לפניכם טבלה המתארת את התפלגות השכר השעתי (ב-₪) של פועלים במפעל מסוים:

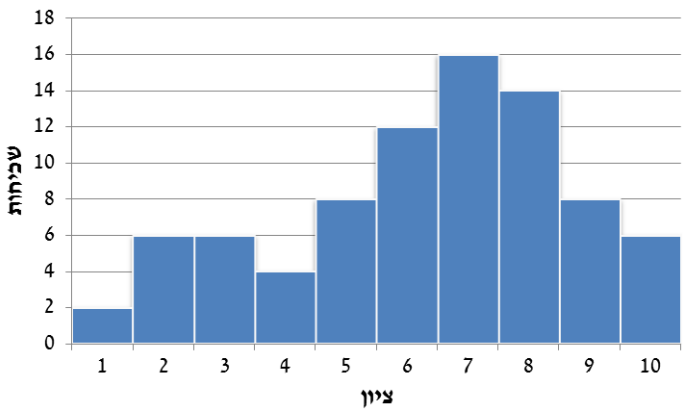
השכר השעתי	25	30	35	40	55	70
מספר הפועלים	15	10	20	15	10	5

א. כמה פועלים במפעל?

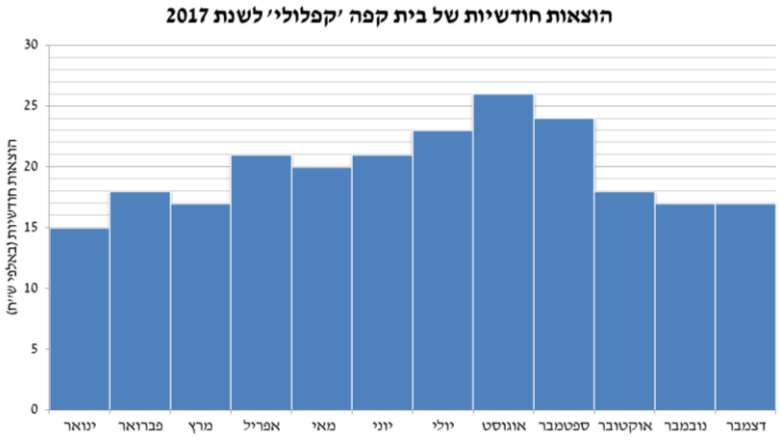
ב. מהו חציון השכר במפעל?

7) מצאו את החציון בכל אחד מהגרפים הבאים:

א. להלן התפלגות ציונים במבחן שכבתי במתמטיקה לכיתה ט':



ב. להלן התפלגות הוצאות תחזוקה חודשיות של בית הקפה "קפלולי" לשנת 2017 (באלפי ₪):



שאלות כלליות:

8) נתונות שתי סדרות של מספרים:

סדרה א': 35 , 75 , 50 , 40 , 80.

סדרה ב': 15 , 78 , 30 , 90 , 55 , 60 , 25 , 45.

הראו שהחציון בשתי הסדרות זהה.

9) נתונה סדרת מספרים שבה החציון הוא 60.

דני טוען כי הוספת המספר 60 לסדרה לא תשנה את ערך החציון.

האם דני צודק? נמקו.

10) נתונה סדרת המספרים הבאה: 4 , 16 , 12 , 8 , 7.

א. מהו החציון?

ב. הוסיפו לסדרה 2 מספרים כך שהחציון לא ישתנה.

ג. הוסיפו לסדרה 3 מספרים כך שהחציון לא ישתנה.

11) במבחן בהיסטוריה שנערך בכיתה ח' 1, קיבלו התלמידים את הציונים המתוארים בטבלת ההתפלגות הבאה:

הציון	50	60	70	80	90	100
מספר התלמידים	5	6	7	3	5	2

א. מהו חציון הציונים?

ב. מיכל המורה החליטה לתת לכל תלמיד תוספת של 5 נקודות.
האם הדבר ישפיע על הציון החציון? אם כן - כיצד? אם לא - מדוע.

ג. מיכל חזרה בה והחליטה שבמקום לתת לכל התלמידים תוספת של 5 נקודות, היא תיתן תוספת זו רק לתלמידים שקיבלו 50.
האם החלטתה של מיכל תשפיע על ציון החציון?
אם כן – כיצד? אם לא – מדוע.

תשובות סופיות:

1) א. 6 ב. 7 ג. 4.

2) א. 6 ב. 2.5 ג. 6.5.

3) א. 5 ב. 5.5.

4) 5.

5) 6.

6) א. 75 פועלים. ב. 35 ₪.

7) א. 7 ב. 19000 ₪.

8) מתקבל 50 בשתי הסדרות.

9) דני צודק.

10) א. 8 ב. יש להוסיף מספר הקטן מ-8 ומספר הגדול מ-8.
ג. יש להוסיף שמספר הקטן מ-8, מספר הגדול מ-8 ו-8 עצמו.

11) א. 70 ב. החציון יזוז ב-5 ויהיה 75.
ג. לא. החציון ישאר 70.

שאלות כלליות במדדי מרכז:

שאלות:

1) חברת תיווך ערכה רישום של מספר הדירות שנותרו לה למכור בבניינים שברשותה.
החברה מיינה את הדירות לפי מספר חדרים.
הנתונים מרוכזים בטבלה הבאה:

מספר חדרים	1	2	3	4	5	6
מספר הדירות	4	8	5	3	4	2

א. מהו מספר החדרים השכיח בדירות שמוצעות למכירה? נמקו.
ב. מהו ממוצע מספר החדרים בדירות שמוצעות למכירה?
ג. מהו חציון מספר החדרים בדירות הנ"ל?

2) נתונה סדרת המספרים הבאה: 2 , 4 , 5 , 5 , 9.
א. מצאו את השכיח, הממוצע והחציון.
ב. האם הוספת המספר 5 תשנה את המדדים? אם כן - אלו?
ג. האם הוספת המספר 0 תשנה את המדדים? אם כן - אלו?

3) בבית קפה מסוים מועסקים 30 מלצרים, 8 אחראי משמרת ושני מנהלים.
שכרו של מלצר הוא: 6000 ₪.
שכרו של אחראי משמרת הוא: 10000 ₪.
שכרו של מנהל הוא: 12000 ₪.
א. סדרו את הנתונים בטבלת שכיחויות מתאימה.
ב. מצאו את השכר השכיח, את השכר הממוצע ואת השכר החציוני בבית הקפה.
ג. כיצד ישתנו כל אחד מהמדדים שחישבת בסעיף ב' אם המנהלים יקבלו תוספת שכר של 1000 ₪?
ד. כיצד ישתנו כל אחד מהמדדים שחישבת בסעיף ב' אם כל המלצרים יקבלו תוספת שכר של 500 ₪?

4) רשמו את היתרונות והחסרונות של כל אחד מהמדדים: שכיח, ממוצע וחציון.

5) מגדלים עגבניות בתל-אביב, חיפה ובאר-שבע. בכל עיר תנאי דישון שונים.
לאחר הקטיף, מדדו את המשקל של העגבניות ורשמו את התוצאות (ברמת דיוק של 200 גרם) בטבלת השכיחויות הבאה:

משקל העגבניה	200	400	600	800	1000
שכיחות העגבניות בתל-אביב	50	200	300	100	50
שכיחות העגבניות בחיפה	40	140	220	120	20
שכיחות העגבניות בבאר שבע	240	320	200	80	30

א. רשמו עבור כל עיר את המשקל השכיח, המשקל הממוצע והמשקל החציוני.
ב. קבעו עבור כל עיר מהו המדד המרכזי הגדול ביותר ומהו המדד המרכזי הקטן ביותר.

6) נתונים המספרים הבאים: 2 , 5 , 9 , 10.
א. הוסיפו לקבוצה הנ"ל מספר, כך שהממוצע של כל חמשת המספרים יהיה גדול ב-1 מהחציון.
ב. הסבירו מדוע קיימים רק 3 פתרונות אפשריים בלבד לבעיה זו.

7) ענו על שני הסעיפים הבאים:
א. תנו דוגמה לסדרת מספרים שבה החציון גדול מהממוצע.
ב. תנו דוגמה לסדרת מספרים שבה החציון קטן מהממוצע.

תשובות סופיות:

1) א. 2 חדרים. ב. 3.03 חדרים.ג. 3 חדרים.

2) א. שכיח: 5, ממוצע: 5, חציון: 5. ב. לא. כל המדדים ישארו זהים.

ג. השכיח והחציון ישארו זהים. הממוצע יהיה: 4.16.

3) א. ראה טבלת שכיחויות בסרטון הוידאו.

ב. שכיח: 6000 ₪, ממוצע: 7100 ₪, חציון: 6000 ₪.

ג. השכיח והחציון ישארו זהים. הממוצע יעלה: 7150 ₪.

ד. השכיח והחציון יהיו: 6500 ₪, הממוצע יהיה: 7475 ₪.

4) **השכיח - יתרון**: המדד היחיד שניתן להיעזר בו עבור נתונים שמיים.

השכיח - חיסרונות:

1. יכול להיות יותר מערך אחד.
2. יכול להיות מצב בו לא יהיה שכיח כלל אם המידע לא אותו דבר.
3. אינו מייצג באופן מדויק את הנתונים.

ממוצע - יתרון: נעזרים בכל הנתונים בכדי לחשב אותו.

ממוצע - חיסרון: מספרים מאוד גדולים או קטנים עשויים להרוס את הערך המתקבל.

חציון - יתרון: לא מושפע מערכים גדולים או קטנים מאוד.

חציון - חסרון: עבור מידע גדול, החישוב הוא ארוך מאוד.

5) א. **תל-אביב**: שכיח: 600 גרם, ממוצע: 571.42 גרם, חציון: 600 גרם.

חיפה: שכיח: 600 גרם, ממוצע: 577.77 גרם, חציון: 600 גרם.

באר-שבע: שכיח: 400 גרם, ממוצע: 448.275 גרם, חציון: 400 גרם.

ב. **תל-אביב**: גדול ביותר: שכיח וחציון. קטן ביותר: ממוצע.

חיפה: גדול ביותר: שכיח וחציון. קטן ביותר: ממוצע.

באר-שבע: גדול ביותר: ממוצע. קטן ביותר: שכיח וחציון.

6) א. 4 או 24, או 5.25. ב. ניתן להוסיף מספר כך שיהיה הקטן ביותר, הגדול ביותר או שווה לחציון.

7) א. 1 , 20 , 20. ב. 1 , 1 , 20.

שאלון 471

מדדי פיזור

תוכן העניינים:

מדדי פיזור 508

סטיית התקן: 509

סיכום כללי: 509

שאלות: 510

תשובות סופיות: 511

המשמעות של סטיית התקן: 512

סיכום כללי: 512

שאלות: 512

תשובות סופיות: 514

שאלות בהן סטיית התקן נתונה: 515

סיכום כללי: 515

שאלות: 515

תשובות סופיות: 515

שאלות עם סטיית תקן, ממוצע, שכיח וחציון: 516

שאלות: 516

תשובות סופיות: 517

סטיית התקן:

סיכום כללי:

סטיית התקן:

מדד לפיזור הציונים.

סטיית התקן מאפשרת למדוד עד כמה רחוקים הציונים מהציון הממוצע.

נחשב את סטיית התקן ע"י היעזרות בטבלה באופן הבא:

ציון (x)	מספר תלמידים (f)	סה"כ	סטיות מהממוצע $x-\bar{x}$	סטיות מהממוצע בריבוע $(x-\bar{x})^2$	סכום סטיות מהממוצע בריבוע $f\cdot(x-\bar{x})^2$

כאשר חישוב סטיית התקן יתבצע כך:

$$S=\sqrt{\frac{\text{סכום הסטיות מהממוצע בריבוע}}{\text{סך כל השכיחויות}}}$$

הערה:

הנוסחה הכללית של סטיית התקן היא: $S=\sqrt{\frac{f_1\cdot(x_1-\bar{x})^2+f_2\cdot(x_2-\bar{x})^2+....+f_N\cdot(x_N-\bar{x})^2}{f_1+f_2+...+f_N}}$

כאשר:

$\bar{x}$ - ממוצע הנתונים (הציונים).

x_i - נתון (ציון) מסוים.

f_i - השכיחות של הציון x_i.

N - מספר כל הקבוצות הנתונים.

S - סטיית התקן.

שאלות:

1) נתונה טבלת השכיחויות הבאה:

הציון (x)	5	6	7
מספר התלמידים (f)	4	2	4

א. מצאו את ממוצע הציונים.

ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.

2) נתונה התפלגות הציונים במבחן מסוים:

הציון	4	5	6	7	8	9
מספר התלמידים	3	8	7	1	5	1

א. מצאו את ממוצע הציונים.

ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.

3) בטבלה שלפניכם מתוארת התפלגות הציונים במבחן מסוים:

ציון (x)	**מספר תלמידים** (f)	**סה"כ**	$f\cdot(x-\bar{x})^2$
5	4		
6	5		
7	6		
8	5		

א. חשבו את הממוצע.

ב. השלימו את הטבלה.

ג. מצאו את סטיית התקן של הציונים.

4) חשבו את סטיית התקן של המספרים הבאים: 5, 3, 8, 7, 6, 2, 6, 6, 5, 2, 5, 6, 2, 7.

תשובות סופיות:

1) א. $\bar{x}=6$ ב. $S=0.89$.

2) א. $\bar{x}=6$ ב. $S=1.41$.

3) א. $\bar{x}=6.6$ ב. ראו טבלה מלאה בסרטון הוידאו. ג. $S=1.06$.

4) $S=2.6322$.

המשמעות של סטיית התקן:

סיכום כללי:

סטיית התקן היא מדד שממנו ניתן ללמוד על סט הנתונים בשאלה מספר דברים.

להלן מספר מסקנות שניתן לקבל על סמך סטיית התקן:

מסקנות:

- ככל שסטיית התקן גדולה יותר, כך פיזור הציונים גדול יותר.
- כאשר נוסף ציון (או ציונים) שהמרחק שלו מהציון הממוצע קטן יותר מהמרחקים הקיצוניים ביותר, סטיית התקן החדשה תהיה קטנה יותר.
- כאשר נוסף ציון (או ציונים) שהמרחק שלו מהציון הממוצע גדול יותר מהמרחקים הקיצוניים ביותר, סטיית התקן החדשה תהיה גדולה יותר.

הערות:

1) אם מוסיפים לקבוצת ציונים, ערכים נוספים השווים לציון הממוצע, אז סטיית התקן תקטן.

2) כאשר ישנם נתונים בעלי ערכים שונים (לפחות שני ערכים שונים) לא ייתכן שסטיית התקן תהיה שווה לאפס.

שאלות:

1) ממוצע הגבהים של תלמידי הכיתה הוא 168 ס"מ. לכיתה נוסף תלמיד חדש. ממוצע הגבהים החדש של כל תלמידי הכיתה כעת נשאר 168 ס"מ.

א. מה הוא הגובה של התלמיד החדש?

ב. האם סטיית התקן של הגובה של כל תלמידי הכיתה (כולל התלמיד החדש) קטנה יותר או גדולה יותר מסטיית התקן הקודמת, ללא התלמיד החדש? נמקו.

2) לפניכם 3 סדרות של מספרים:

i. 5 , 9.

ii. 5 , 7 , 7 , 9.

iii. 5 , 5 , 7 , 7 , 7 , 7 , 7 , 9 , 9.

א. חשבו את הממוצע של כל אחת מהסדרות.

ב. מה ניתן לומר על סטיית התקן של סדרות הציונים האלו?

ג. כמה פעמים יש להוסיף את המספר 7 כדי שסטיית התקן תהיה שווה ל-1?

ד. האם ניתן ע"י הוספה של המספר 7 להגיע לסטיית תקן 0? נמקו.

3) בכיתה י"א נערך מבחן במתמטיקה בשני טורים.

בטור א' התקבלו התוצאות הבאות: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 9, 10.

בטור ב' התקבלו התוצאות הבאות: 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8.

א. באיזה טור הצליחו התלמידים יותר?

ב. חשבו את סטיית התקן לכל טור.

ג. באיזו כיתה היה פיזור הציונים גדול יותר?

4) רמי חוגג את יום הולדתו השביעי עם כל בני משפחתו:

הוריו זיגי וסנונית בני ה-48, אחיו רונן בן ה-12 ואחותו יעל בת ה-5.

א. מצאו את הגיל הממוצע במשפחה.

ב. מהי סטיית התקן של הגיל?

ג. לחגיגה הגיעו שני חברים בני 6. האם סטיית התקן של גיל כלל הנוכחים בחגיגה גדלה, קטנה או שווה לסטיית התקן שמצאתם בסעיף הקודם? נמקו.

ד. אחר כך הגיעו לחגיגה סבא וסבתא של רמי, שנולדו באותה שנה.

הגיל הממוצע החדש של הנוכחים הוא 32.

(1) מה הוא הגיל של סבא ושל סבתא של רמי?

(2) האם סטיית התקן של גיל כלל הנוכחים גדלה, קטנה או שווה לסטיית התקן שמצאתם בסעיף הקודם? הסבירו.

5) מדדו את המשקל של שישה אנשים. במקום לרשום את המשקל של כל אחד מהם, הם רשמו בכמה סוטה משקלו של כל אחד, מהמשקל הממוצע של ששת האנשים. (כלומר, רשמו את ההפרש בין משקל כל אחד לבין המשקל הממוצע).

אחד ההפרשים נמחק בטעות.

חמשת ההפרשים האחרים הם: 8, 4, -2, -3, -4.

א. חשבו את ההפרש החסר. הסבר את אופן מציאתו.

ב. חשבו את סטיית התקן.

6) מדדו את המשקל של שבעה אנשים. במקום לרשום את המשקל של כל אחד מהם, רשמו בכמה סוטה משקלו של כל אחד, מהמשקל הממוצע של שבעת האנשים. (כלומר, רשמו את ההפרש בין משקל כל אחד לבין המשקל הממוצע). שניים מבין ההפרשים נמחקו בטעות.
חמשת ההפרשים האחרים הם: 5, 3, 2, 2-, 4-.

א. הציעו שלוש אפשרויות שונות לשני ההפרשים שנמחקו. הסבירו את תשובתכם.

ב. סמנו ב- x וב- y את שני ההפרשים שנמחקו. רשום תבנית פסוק המתארת את הקשר בין שני ההפרשים.

ג. בחרו את אחת הדוגמאות מסעיף א' וחשבו את סטיית התקן עבורה.

7) חמישה תלמידים נבחנו בהכתבה באנגלית. נתונות מספר שגיאות הכתיב שעשה כל אחד מהם במבחן: 15, 9, 8, 5, 4 (מספר אחד לכל תלמיד).

א. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של מספר השגיאות שעשו חמשת התלמידים.

ב. בהכתבה חוזרת עשה כל תלמיד 3 שגיאות פחות ממה שעשה בהכתבה הראשונה.

(1) מה ממוצע השגיאות החדש?

(2) הסבירו מדוע סטיית התקן לא השתנתה.

תשובות סופיות:

1) א. 168 ס"מ ב. קטנה יותר.

2) א. בכולן: $\bar{x}=7$ ב. ככל שמוסיפים יותר מספרים השווים לממוצע, סטיית התקן תקטן. ג. 6 פעמים. ד. לא ניתן להגיע לסטיית תקן אפס.

3) א. בטור ב'. ב. טור א': $S=2.23$, טור ב': $S=1$.
ג. בטור ב'.

4) א. $\bar{x}=24$ ב. $S=19.728$ ג. סטיית התקן תקטן.
ד. (1). בני 78 שנים. ד. (2). סטיית התקן תגדל.

5) א. $x=-3$ ב. $S=4.43$.

6) א. להלן אפשרויות: -3,-1 ; -2,-2 ; 0, 4- ; 10, 14-.
ב. $x+y+4=0$ ג. עבור 0 ו-4- נקבל: $S=3.25$.

7) א. $S=3.86$, $\bar{x}=8.2$ ב. (1). $\bar{x}=5.2$ ב. (2). כאשר מקטינים את כל הנתונים בגודל קבוע, הפיזור סביב הממוצע נשאר קבוע ולכן הממוצע יקטן אבל סטיית התקן לא תשתנה.

שאלות בהן סטיית התקן נתונה:

סיכום כללי:

בנושא זה נלמד כיצד לחבר משוואה מתוך הנוסחה של סטיית התקן ונמצא נעלם המופיע בשכיחות.

שאלות:

1) נתונה התפלגות ציונים במבחן בתנ"ך עם ממוצע 8 וסטיית תקן 0.5.
מצאו את x.

הציון (x)	7	8	9	10
מספר התלמידים (f)	8	x	4	2

2) נתונה התפלגות ציונים במבחן בתנ"ך עם סטיית תקן 1.
א. הראו כי הממוצע הוא 6.
ב. מצאו את x.

הציון (x)	4	5	6	7	8
מספר התלמידים (f)	6	7	x	7	6

3) ממוצע הציונים של 10 תלמידים הוא 7 וסטיית התקן היא 1.3.
לכיתה נוסף תלמיד שציונו הוא כמו הציון הממוצע.
חשבו את סטיית התקן של כל 11 התלמידים שבכיתה.

תשובות סופיות:

1) $x=66$.
2) א. הוכחה. ב. $x=36$.
3) $S=1.239$.

שאלות עם סטיית תקן, ממוצע, שכיח וחציון:

שאלות:

1) לפניכם רשימת מחירים של כרטיסים להופעת אמן לפי מקום ישיבה מהבמה:
75, 78, 82, 88, 91, 95, 100.

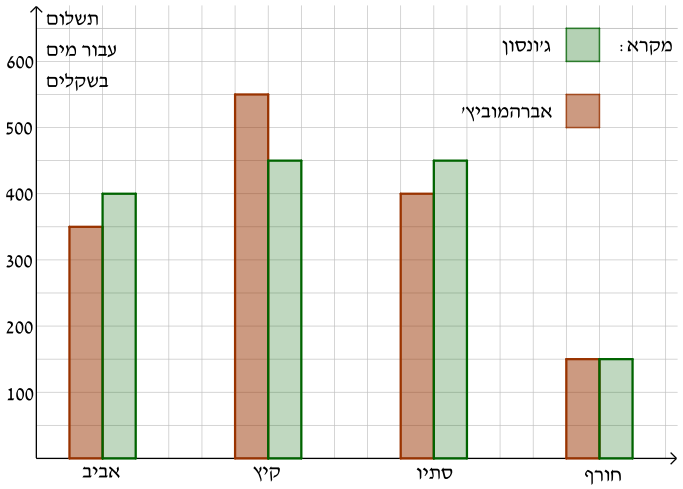
א. חשבו את ממוצע מחירי הכרטיסים ואת סטיית התקן.

ב. הוסיפו מחיר כרטיס כרצונכם להופעה חדשה כך שהממוצע לא ישתנה.
האם לאחר הוספת המספר, סטיית התקן גדלה? קטנה? או שלא השתנתה? נמקו.

ג. עינת טוענת שאם יתווסף המחיר 89 ₪, הממוצע יגדל.
האם היא צודקת? נמקו.

ד. איזה ציון יש לצרף לרשימה המקורית כדי שהחציון לא ישתנה?

2) לפניכם דיאגרמת מקלות המתארת את התשלום עבור צריכת המים של משפחת אברהמוביץ' ומשפחת ג'ונסון, בשנה מסוימת על פי עונות השנה.



א. באיזו עונה צרכה משפחת אבהרמוביץ' את כמות המים הגדולה ביותר?

ב. האם יש עונה בה הצריכה של שתי המשפחות שווה?

ג. באיזו משפחה ההוצאה השנתית גדולה יותר?

ד. באיזו משפחה סטיית התקן גדולה יותר?

ה. מהו החציון של התשלום עבור צריכת המים במשפחת אברהמוביץ'
ומהו החציון של התשלום עבור צריכת המים במשפחת ג'ונסון?

תשובות סופיות:

1) א. $S = 8.45$, $\bar{x} = 87$ ב. $x = 87$, סטיית התקן תקטן.

ג. כן, כי הוספת מספר הגדול מהממוצע יגדיל את הממוצע החדש. ד. 88.

2) א. בקיץ. ב. בחורף.

ג. שתי המשפחות צרכו את אותה כמות המים לאורך השנה.

ד. אברהמוביץ'.

ה. אברהמוביץ': 375, ג'ונסון: 425.

שאלון 471

מבוא להסתברות

תוכן העניינים:

מבוא להסתברות 518

ניסויים ותוצאות: 519

סיכום כללי: 519

שאלות: 519

תשובות סופיות: 520

שכיחות יחסית והסתברות: 521

סיכום כללי: 521

שאלות: 521

תשובות סופיות: 522

תכונות יסודיות של הסתברות: 523

סיכום כללי: 523

שאלות: 523

תשובות סופיות: 525

שאלות עם מאורע חד שלבי: 526

סיכום כללי: 526

שאלות: 526

תשובות סופיות: 539

ניסויים ותוצאות:

סיכום כללי:

הסתברות היא תורה מתמטית העוסקת בהתרחשויות עתידיות הכרוכות באי-ודאות,
אולם יש ביכולתינו לחשב את להעריך את **הסיכוי** לקבלת תוצאה עתידית מסוימת.

נבחין בין שלושה מצבים הקיימים בהערכת תוצאה עתידית:

- תוצאה אפשרית - ייתכן ותוצאה זו תתרחש.
- תוצאה וודאית - ידוע כי היא תתרחש באופן וודאי.
- תוצאה בלתי אפשרית - ידוע כי אינה תתרחש באופן וודאי.

שאלות:

1) היום יום ראשון. אלו מהתוצאות הבאות הן אפשריות / וודאיות / בלתי אפשריות? נמקו.

א. מחר יהיה יום שני.
ב. מחר יהיה יום קיצי.
ג. מחר יהיה יום רביעי.
ד. מחר תהיה שביתה כללית במשק.
ה. אחד מן הימים ב-3 הימים הבאים הוא שישי.
ו. אחד מן הימים ב-3 הימים הבאים הוא שלישי.

2) זורקים קוביית משחק הגונה.
קבע אלו מהתוצאות הבאות הן אפשריות / וודאיות / בלתי אפשריות. נמקו.

א. יתקבל המספר '4'.
ב. יתקבל מספר הקטן מ-'7'.
ג. יתקבל מספר זוגי.
ד. יתקבל מספר שריבועו הוא 100.
ה. יתקבל מספר שלילי.
ו. יתקבל מספר הגדול מ-'4'.

3) בכד 4 כדורים שחורים הזהים בגודלם ומשקלם. מוציאים באופן אקראי כדור מן הכד.
לגבי כל אחת מהתוצאות קבע האם היא אפשרית / וודאית / בלתי אפשרית.

א. יתקבל כדור כחול.

ב. יתקבל כדור שחור.

ג. בכד ישארו 2 כדורים בלבד.

ד. בכד ישארו 3 כדורים בלבד.

4) בכד יש 3 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים.
מוציאים באופן אקראי בזה אחר זה 3 כדורים מהכד. קבע לגבי כל אחת מהתוצאות הבאות האם היא אפשרית / וודאית או בלתי אפשרית.

א. יצאו 2 כדורים מאותו הצבע.

ב. כל הכדורים יהיו מאותו הצבע.

ג. מספר הכדורים הכחולים שבכד שווה למספר הכדורים האדומים.

5) בשקית אטומה ישנם עטים בשלושה צבעים: 3 עטים שחורים, 2 עטים אדומים ו-2 עטים כחולים.
בכל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם התוצאה היא אפשרית / וודאית / בלתי אפשרית ונמקו.

א. מוציאים באופן אקראי עט מהשקית:

(1) העט יהיה בצבע אדום.

(2) העט יהיה בצבע ירוק.

(3) בשקית ישארו 6 עטים.

(4) בשקית ישארו 5 עטים.

ב. מוציאים באופן אקראי 3 עטים מהשקית.

(1) כל העטים שהוצאו הם שחורים.

(2) כל העטים שהוצאו הם כחולים.

(3) ישארו בשקית עטים מכל הצבעים.

תשובות סופיות:

1) א. וודאית. ב. אפשרית. ג. בלתי אפשרית.
ד. אפשרית. ה. בלתי אפשרית. ו. וודאית.

2) א. אפשרית. ב. וודאית. ג. אפשרית.
ד. בלתי אפשרית. ה. בלתי אפשרית. ו. אפשרית.

3) א. בלתי אפשרית. ב. וודאית. ג. בלתי אפשרית. ד. וודאית.

4) א. וודאית. ב. בלתי אפשרית. ג. בלתי אפשרית.

5) א. (1). אפשרית. (2). בלתי אפשרית. (3). וודאית. (4). בלתי אפשרית.
ב. (1). אפשרית. (2). בלתי אפשרית. (3). אפשרית.

שכיחות יחסית והסתברות:

סיכום כללי:

סכום ההסתברויות של כל האפשרויות (הזרות) הכוללות את כל המצבים האפשריים שווה לסכום השכיחויות היחסיות ושווה ל-1 (כאשר השכיחות היחסית מיוצגת כשבר).

שאלות:

1) חברת תרופות פיתחה תכשיר שנועד למנוע עקיצות יתושים.
היא ערכה ניסוי ב-2000 אנשים אשר גרים באזורים רוויים ביתושים.
לאחר פרק זמן שבו כל האנשים השתמשו בתכשיר, דווח כי חלק מרוצים מאוד, חלק מרוצים באופן חלקי בלבד וחלק לא מרוצים כלל.
התוצאות מפורטות בטבלה הבאה:

התוצאה	מרוצה מאוד	מרוצה באופן חלקי	לא מרוצה כלל	סה"כ
שכיחות	800	700	500	**2000**
שכיחות יחסית				

א. השלימו את שורת השכיחות היחסית.

ב. בוחרים משתתף באופן אקראי.
מה הסיכוי שהוא מרוצה מהתכשיר הניסיוני?

ג. מה ההסתברות לבחור משתתף שמרוצה באופן חלקי או אינו מרוצה כלל מהתכשיר הניסיוני?

2) בווייטנאם יש מונסונים (סופות גשמים) בתדירות גבוהה יחסית לשאר מדינות אסיה.
בשנה מסוימת פורסם כי מתוך 365 ימי השנה ב-73 ימים היו מונסונים.

א. השלם את הטבלה הבאה:

התוצאה	מונסון	יום רגיל	סה"כ
שכיחות			**365**
שכיחות יחסית			

ב. מה ההסתברות שביום מסוים תהיה סופת מונסון בויטנאם?

3) זורקים מטבע הגון 2000 פעמים.
מסמנים ב- x את מספר הפעמים שהתקבל "עץ".
להלן 3 אפשרויות: (1) $x=1769$ (2) $x=1013$ (3) $x=$.
איזו מהאפשרויות נראית הסבירה ביותר? נמקו.

4) בעיירה מסוימת ישנם 8000 תושבים.
עורכים בחירות למועצה בין 4 מתמודדים.
2000 מתושבים מצביעים למועמד א', 1500 מתושבים מצביעים מועמד ב' והשאר מצביעים למועמדים ג' ו-ד'. ידוע כי השכיחות היחסית של המועמדים אשר מצביעים למועמד ד' היא 0.2.

א. כמה תושבים מצביעים למועמד ג'?

ב. מהי השכיחות היחסית של התושבים אשר הצביעו למועמד ג'?

ג. איזו הסתברות גדולה יותר:
לבחור באקראי תושב אשר הצביע למועמד ג' או תושב אשר הצביע למועמד ד'?

תשובות סופיות:

1) ב. $\frac{2}{5}$ ג. $\frac{13}{20}$.

2) א. ראה השלמת הטבלה בסרטון. ב. $\frac{4}{5}$.

3) אפשרות (2).

4) א. 2900 תושבים. ב. $\frac{29}{80}$ ג. תושב שהצביע למועמד ג'.

תכונות יסודיות של הסתברות:

סיכום כללי:

ניסוי בעל הסתברות אחידה:

כאשר בניסוי מסוים לכל התוצאות יש את אותה ההסתברות להתרחש הניסוי נקרא: ניסוי בעל הסתברות אחידה.
במקרה כזה אם מספר התוצאות הוא n אז ההסתברות של כל אחת מהתוצאות היא $\frac{1}{n}$.

כללים עם סכום הסתברויות:

- סכום ההסתברויות של כל התוצאות הבדידות בניסוי שווה ל-1.
- סכום ההסתברויות שתוצאה תתקבל ושהיא לא תתקבל הוא תמיד 1.

שאלות:

1) מירית הכינה בשיעור יצירה קובייה בת 10 פאות והיא מִסְפְּרָה כל אחד מהם מ-1 עד 10.
היא הטילה את הקובייה פעם אחת.

א. מה ההסתברות לקבל את המספר '7'?
ב. מה ההסתברות לקבל את המספר '4'?
ג. האם קובייה זו מתארת ניסוי בעל הסתברות אחידה?

2) בשק יש 5 כדורים: כחול, אדום, צהוב, ירוק ולבן.

א. האם ההסתברות להוציא כדור ירוק שווה להסתברות להוציא כדור כחול?
ב. האם ניתן להתייחס להוצאת כדור מהשק כאל ניסוי בעל הסתברות אחידה?
ג. מוסיפים כדור כחול לשק.
האם כעת הניסוי הוא בעל הסתברות אחידה? נמקו.
ד. מוסיפים 5 כדורים נוספים, אחד מכל צבע.
האם כעת הניסוי הוא בעל הסתברות אחידה? נמקו.

3) בדרכו חזרה מבית הספר, ספר יוסי את מספר המכוניות שחונות ברחוב מגוריו ומיין אותן לפי צבען. הוא ריכז את ממצאיו בטבלה הבאה:

מכונית	לבנה	כחולה	אדומה	שחורה	**סה"כ**
שכיחות	50	30	20	15	**115**

א. מה ההסתברות להיתקל במכונית אדומה?

ב. האם ניתן לומר כי ההסתברות להיתקל במכונית כחולה גדול מההסתברות להיתקל במכונית לבנה?

ג. השלימו את $\square$ ב- $<$, $>$ או $=$ במשפט הבא:

ההסתברות להיתקל במכונית שחורה + ההסתברות להיתקל במכונית כחולה $\square$ ההסתברות להיתקל במכונית לבנה

4) מטילים קוביית משחק הגונה פעם אחת.

א. מה ההסתברות לקבל את המספר 2?

ב. מה ההסתברות שלא לקבל את המספר 2?

ג. מה ההסתברות לקבל מספר הגדול מ-4?

ד. מה ההסתברות שלא לקבל מספר הגדול מ-4?

ה. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי?

ו. מה ההסתברות שלא לקבל מספר זוגי?

5) בפעילות של 'תגלית' ישנם 4 דוברי עברית, 4 דוברי אנגלית ו-4 דוברי צרפתית. בוחרים באקראי אחד מהאנשים.

א. מה ההסתברות שהוא דובר אנגלית?

ב. מה ההסתברות שהוא לא דובר אנגלית?

ג. מה ההסתברות שהוא דובר עברית?

ד. מה ההסתברות שהוא לא דובר עברית?

6) רושמים על פתקים זהים את הספרות: 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 3 , 4 , 4 , 5.
מכניסים את כל הפתקים למעטפה, מערבבים ובוחרים באקראי פתק.

א. מה ההסתברות לקבל את המספר 1?

ב. מה ההסתברות שלא לקבל את המספר 1?

ג. מה ההסתברות שלא לקבל את המספר 2?

7) מדדו את גובהם ומשקלם של 30 תלמידים וריכזו את התוצאות בטבלה הבאה.
בוחרים באקראי תלמיד.

טווח גבהים (בס"מ)	נמוך מ-170	נמוך מ-170	גבוה מ-170	גבוה מ-170
טווח משקלים (בק"ג)	55-60	60-65	55-60	60-65
מספר תלמידים	8	10	7	5

א. מה ההסתברות שהוא נמוך מ-170 ס"מ?
ב. מה ההסתברות שהוא נמוך מ-170 ס"מ ומשקלו בין 60-65 ק"ג?
ג. מה ההסתברות שהוא גבוה מ-170 ס"מ ומשקלו בין 60-65 ק"ג?
ד. מה ההסתברות שמשקלו אינו בתחום 60-65 ק"ג?
ה. מהו סכום ההסתברויות של כל התוצאות המופיעות בטבלה?
חשבו את ההסתברויות של כל מקרה ונמקו.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{10}$ ב. $\frac{1}{10}$ ג. כן.

2) א. כן. ב. כן. ג. לא. ד. כן.

3) א. $\frac{4}{23}$ ב. לא. ג. $<$.

4) א. $\frac{1}{6}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{2}$.

5) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $\frac{2}{3}$.

6) א. $\frac{2}{9}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. $\frac{2}{3}$.

7) א. $\frac{3}{5}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{6}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. הסכום הוא 1.

שאלות עם מאורע חד שלבי:

סיכום כללי:

בביצוע ניסוי מסוים ולו מספר תוצאות אפשריות נרצה למצוא את הסיכויים לקבל תוצאות שונות.
נדגים את העיקרון של מציאת הסתברות של מאורע בודד:

- **ביצוע ניסוי:** הטלת קוביית משחק הגונה.
- **תוצאות אפשריות:** קבלת אחד המספרים 1-6.
- **הגדרת מאורע:** התקבל המספר 3.

חישוב הסיכוי לקבלת המאורע הנ"ל: $P = \frac{\text{כמות התוצאות הכוללות במאורע}}{\text{סך כל התוצאות האפשריות}}$.

נקבל: $P = \frac{1}{6}$ שכן ישנה תוצאה אחת עבור המאורע הנ"ל מתוך 6 תוצאות אפשריות.

שאלות:

בחירת כדור:

1) נתונים 5 כדורים: 3 כחולים ו-2 אדומים. בוחרים באקראי כדור אחד.
   א. מה ההסתברות לבחור כדור אדום?
   ב. מה ההסתברות לבחור כדור כחול?

2) נתונים 4 כדורים שחורים, 2 כדורים אדומים ו-3 כדורים לבנים.
בוחרים באקראי כדור אחד.
   א. מה ההסתברות לבחור כדור אדום?
   ב. מה ההסתברות לבחור כדור לבן?
   ג. מה ההסתברות לבחור כדור שחור?

3) נתונים 10 כדורים, 6 מהם כחולים והשאר ירוקים.
בוחרים באקראי כדור אחד.
   א. מה ההסתברות לבחור כדור כחול?
   ב. מה ההסתברות לבחור כדור ירוק?

ציונים בכיתה:

4) להלן רשימת ציונים במבחן במתמטיקה בכיתה: 8 , 8 , 7 , 7 , 6 , 6 , 5.
בוחרים באקראי תלמיד אחד.

א. כמה תלמידים יש בכיתה?

ב. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו 5?

ג. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו 8?

5) בכיתה נערך מבחן ובו התקבלו הציונים הבאים: 9 , 9 , 8 , 7 , 7 , 7 , 6 , 6 , 5.
בוחרים באקראי תלמיד מהכיתה.

א. כמה תלמידים בכיתה?

ב. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו 7?

ג. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו 8?

ד. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו 7 או 8?

ה. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו הוא 5 או 6?

6) בכיתה נערך מבחן ובו התקבלו הציונים הבאים: 10 , 9 , 9 , 9 , 8 , 8 , 8 , 7 , 7.
בוחרים באקראי תלמיד מהכיתה.

א. כמה תלמידים בכיתה?

ב. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו 9?

ג. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו 8?

ד. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו לא 9?

ה. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו לא 8?

ו. מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו לא 9 ולא 8?

7) בטבלה שלפניך מתוארת התפלגות הציונים של תלמידים במבחן באנגלית:

ציון	5	6	7	8	9	10
מספר תלמידים	2	5	3	2	4	4

בוחרים באקראי תלמיד מהכיתה.

א. מה ההסתברות לבחור תלמיד שקיבל ציון 5?

ב. מה ההסתברות לבחור תלמיד שלא קיבל ציון 5?

ג. מה ההסתברות לבחור תלמיד שקיבל ציון 5 או 6?

8) בטבלה שלפניך מתוארת התפלגות הציונים של תלמידים במבחן בלשון:

ציון	5	6	7	8	9	10
מספר תלמידים	4	1	2	1	5	3

בוחרים באקראי תלמיד מהכיתה.

א. מה ההסתברות לבחור תלמיד שקיבל ציון 9?

ב. מה ההסתברות לבחור תלמיד שקיבל ציון 10?

ג. מה ההסתברות לבחור תלמיד שקיבל ציון 9 או 10?

ד. מה ההסתברות לבחור תלמיד שקיבל ציון הנמוך מ-9?

ה. מה ההסתברות לבחור תלמיד שקיבל ציון הגבוה מ-6?

9) לפניכם רשימת ציונים:

4 , 5 , 8 , 6 , 5 , 5 , 4 , 10 , 9 , 9 , 4 , 5 , 7 , 7 , 6 , 8 , 7 , 9.

א. סדר את הנתונים בטבלת שכיחויות.

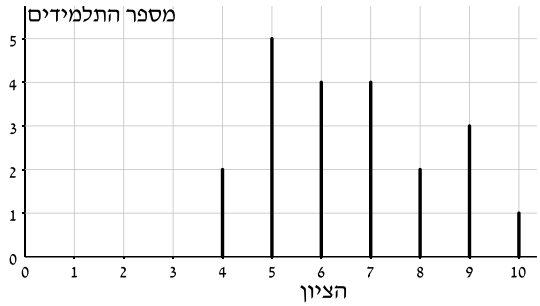
ב. בוחרים באקראי תלמיד מהכיתה.

(1) מה ההסתברות שציונו גבוה מ-8?

(2) מה ההסתברות שציונו נמוך מ-7?

(3) מה ההסתברות שציונו בין 6 (כולל) ל-8 (כולל)?

10) לפניכם דיאגרמת מקלות המתארת את התפלגות הציונים במבחן בכיתה מסוימת:



א. כמה תלמידים נבחנו?

ב. העבר את הנתונים לטבלת שכיחויות מתאימה.

ג. בוחרים באקראי תלמיד מהכיתה.

(1) מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו הוא 7?

(2) מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו גבוה מ-7?

(3) מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו נמוך מ-7?

(4) מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו הוא בין 6 ל-9?

(5) מה ההסתברות לבחור תלמיד שציונו לא 7?

מספר ילדים במשפחה:

11) בטבלה שלפניכם מתוארת התפלגות מספר ילדים למשפחה ביישוב מסוים.

מספר ילדים במשפחה	0	1	2	3	4
מספר משפחות	2	3	2	1	1

א. כמה משפחות יש ביישוב?

ב. מהו מספר הילדים הממוצע למשפחה ביישוב?

ג. בוחרים באקראי משפחה מהיישוב.

(1) מה ההסתברות שבמשפחה שנבחרה יש שני ילדים?

(2) מה ההסתברות שבמשפחה שנבחרה יש יותר מ-3 ילדים?

(3) מה ההסתברות שבמשפחה שנבחרה יש פחות משני ילדים?

ד. מהי השכיחות היחסית של המשפחות שבהן פחות משני ילדים?

ה. מהי השכיחות היחסית של המשפחות שבהן למעלה משני ילדים?

12) בטבלה שלפניכם מתוארת התפלגות מספר ילדים למשפחה ביישוב מסוים.

מספר ילדים במשפחה	0	1	2	3	4
מספר משפחות	4	2	2	1	1

א. כמה משפחות יש ביישוב?

ב. מהו מספר הילדים הממוצע למשפחה ביישוב?

ג. בוחרים באקראי משפחה מהיישוב.

(1) מה ההסתברות שבמשפחה שנבחרה יש שלושה ילדים?

(2) מה ההסתברות שבמשפחה שנבחרה יש יותר מילד אחד?

(3) מה ההסתברות שבמשפחה שנבחרה יש פחות משני ילדים?

ד. מהי השכיחות היחסית של המשפחות שבהן פחות משני ילדים?

ה. מהי השכיחות היחסית של המשפחות שבהן למעלה משני ילדים?

הגרלות והסתברות לזכות בפרס:

13) במסיבה השתתפו 450 איש. בה הוגרלו הפרסים הבאים:
1 טלוויזיה ביתית.
3 מערכות שמע ביתיות.
10 כרטיסים לסרט לפי בחירה.
15 מחזיקי מפתחות מעוצבים.
א. מה ההסתברות לזכות בטלוויזיה הביתית?
ב. מה ההסתברות לזכות במערכת השמע הביתית?
ג. מה ההסתברות לזכות בכרטיס לסרט?
ד. מה ההסתברות לזכות במחזיק מפתחות מעוצב?
ה. מה ההסתברות לזכות בפרס כלשהו?
ו. מה ההסתברות שלא לזכות באף פרס?

14) במסיבת כיתה השתתפו 600 תלמידים ובה הוגרלו הפרסים הבאים:
1 מחשב נייד.
5 טאבלטים.
10 כרטיסים לסרט לפי בחירה.
20 מחשבוני כיס מעוצבים.
א. מה ההסתברות לזכות במחשב נייד?
ב. מה ההסתברות לזכות בטאבלט?
ג. מה ההסתברות לזכות בכרטיס לסרט?
ד. מה ההסתברות לזכות מחשבון כיס מעוצב?
ה. מה ההסתברות לזכות בפרס כלשהו?
ו. מה ההסתברות שלא לזכות באף פרס?

15) חברת תעופה יצאה במבצע לנרשמים חדשים ובו הוגרלו הפרסים הבאים:
2 כרטיסי טיסה ליעד באירופה.
5 כרטיסי טיסה פנימיים (כלומר עבור טיסות בארץ בלבד).
10 ארוחות במסעדת "אוכלים ונהנים".
50 ערכות שינה לטיסות.
לרגל המבצע נרשמו 1000 אנשים.
א. מה ההסתברות לזכות בכרטיס טיסה ליעד באירופה?
ב. מה ההסתברות לזכות בכרטיס לטיסה פנימית?
ג. מה ההסתברות לזכות בכרטיס טיסה כלשהו?
ד. מה ההסתברות לזכות בפרס כלשהו?

משחק דומינו:

16) במשחק דומינו יש 28 אבנים כמתואר באיור.

בוחרים באקראי אבן אחת מבין 28 האבנים.

א. מה ההסתברות לבחור באבן שמספריה הם: 4,3?

ב. מה ההסתברות שעל האבן יהיו רשומים המספרים 2,5?

ג. מה ההסתברות שעל האבן יהיו המספרים 3,3?

ד. מה ההסתברות שעל האבן יהיו שני מספרים זהים?

ה. מה ההסתברות שעל האבן יהיו שני מספרים שונים?

ו. מה ההסתברות שאחד מהמספרים בלבד יהיה 3?

ז. מה ההסתברות שלפחות אחד מהמספרים יהיה 3?

ח. מה ההסתברות שלא יופיע המספר 3?

ט. מה ההסתברות שסכום שני המספרים שעל האבן יהיה 7?

י. מה ההסתברות שסכום שני המספרים שעל האבן יהיה 5?

יא. מה ההסתברות שמכפלת שני המספרים תהיה 5?

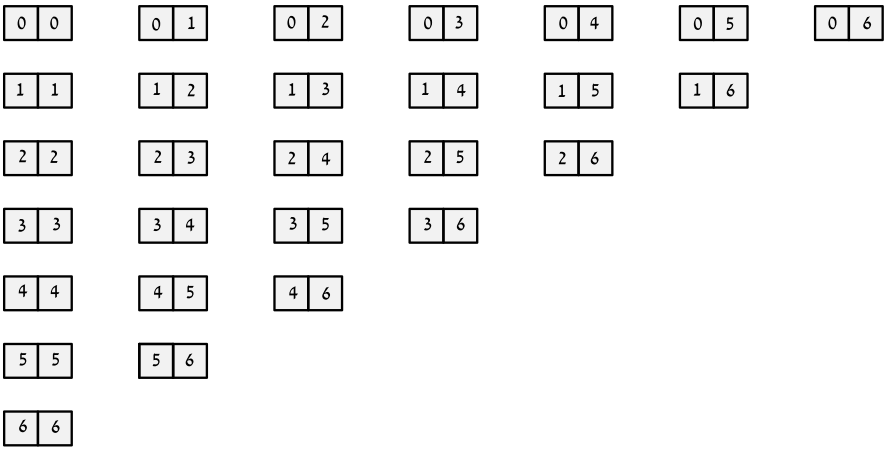
יב. מה ההסתברות שמכפלת שני המספרים תהיה 12?

יג. מה ההסתברות שמספר אחד יהיה גדול ב-2 מהמספר השני?

יד. מה ההסתברות שמספר אחד יהיה גדול ב-5 מהמספר השני?

טו. מה ההסתברות שמספר אחד יהיה גדול ב-6 מהמספר השני?

טז. מה ההסתברות שמספר אחד יהיה גדול ב-7 מהמספר השני?



הטלת קובייה משחק בודדת:

17) מטילים קובייה משחק מאוזנת שעליה הספרות: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.

א. מה ההסתברות לקבל את המספר 4?

ב. מה ההסתברות לא לקבל את המספר 4?

ג. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי כלשהו?

ד. מה ההסתברות לקבל מספר אי-זוגי כלשהו?

ה. מה ההסתברות לקבל מספר הגדול מ-3?

ו. מה ההסתברות לקבל מספר הגדול מ-4?

ז. מה ההסתברות לקבל מספר בין 2 ל-5?

ח. מה ההסתברות לקבל מספר הקטן מ-5?

ט. מה ההסתברות לקבל מספר הקטן מ-2?

י. מה ההסתברות לקבל מספר הגדול מ-8?

יא. מה ההסתברות לקבל מספר שלילי?

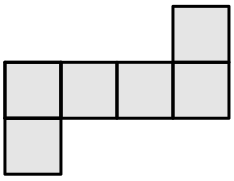
★ יב. מה ההסתברות לקבל מספר שמתחלק ב-3?

★ יג. מה ההסתברות לקבל מספר שמתחלק ב-4?

★ יד. מה ההסתברות לקבל מספר ראשוני?

18) על הפאות של קוביית משחק מאוזנת רשומים המספרים: 0 , 0 , 1 , 1 , 1 , 2.

מטילים את הקובייה פעם אחת.



א. השלם את האיור שבצד.

ב. מה ההסתברות לקבל את המספר 0?

ג. מה ההסתברות לקבל את המספר 1?

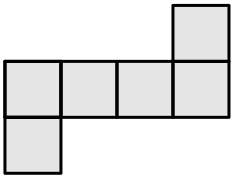
ד. מה ההסתברות לקבל את המספר 2?

ה. מה ההסתברות לקבל מספר שאינה 0?

ו. מה ההסתברות לקבל מספר הקטן מ-2?

19) על שתי פאות של קובייה רשום המספר 5, על שתי פאות נוספות רשום המספר 2 ועל שתי הפאות הנותרות רשום המספר 1.

מטילים את הקובייה פעם אחת.



א. השלם את האיור שבצד.

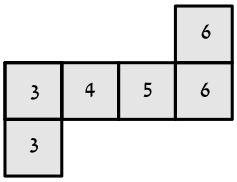
ב. מה ההסתברות לקבל את המספר 3?

ג. מה ההסתברות שלא לקבל את המספר 3?

ד. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי?

ה. מה ההסתברות לקבל מספר אי-זוגי?

20) רושמים על קוביית את המספרים הבאים ומטילים אותה פעם אחת.



א. מה ההסתברות לקבל את המספר 3?

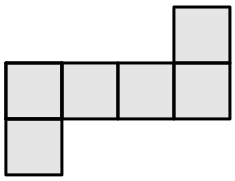
ב. מה ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב-3?

ג. מה ההסתברות לקבל מספר זוגי?

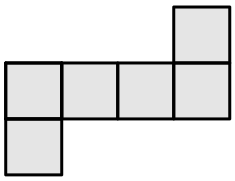
מה ההסתברות לקבל מספר הקטן מ-5?

21) תכננו קובייה לפי הדרישות הבאות:

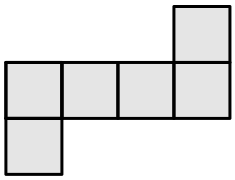
ההסתברות לקבל 2 היא $\frac{1}{2}$.



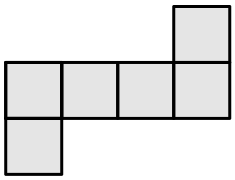
ההסתברות לקבל 1 היא $\frac{1}{3}$.



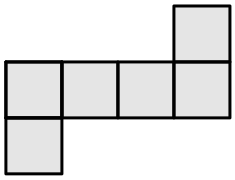
ההסתברות לא לקבל 1 היא $\frac{1}{6}$.



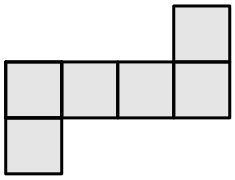
ההסתברות לקבל 1 היא $\frac{5}{6}$.



ההסתברות לקבל מספר זוגי היא $\frac{1}{3}$.

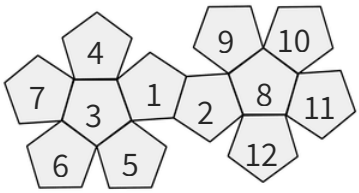


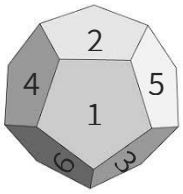
ההסתברות לקבל מספר הקטן מ-3 היא $\frac{1}{2}$.



תריסרון:

22) תריסרון הוא גוף בעל 12 פאות שהן מחומשים משוכללים.
באיור שלפניך מתואר תריסרון ממוספר.
מטילים אותו פעם אחת.



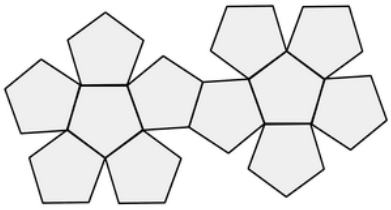


א. מה ההסתברות לקבל את המספר 5?
ב. מה ההסתברות לקבל מספר אי-זוגי?
ג. מה ההסתברות לקבל לפחות 10?
ד. מה ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב-3?
ה. מה ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב-4?
ו. מה ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב-5?

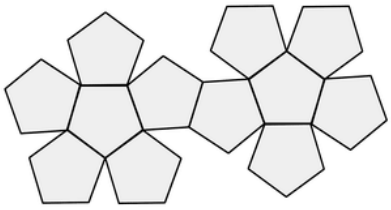
23) מוטי ואמיר מטילים תריסרון פעם אחת.
מוטי מנצח אם המספר המתקבל מתחלק ב-3 ואמיר מנצח אם מתקבל מספר זוגי.
למי משניהם יש סיכוי גדול יותר לנצח? נמקו.

24) רשמו על התריסון הבא מספרים שיקיימו את ההסתברויות הבאות.
אפשר לרשום כל מספר כמה פעמים.

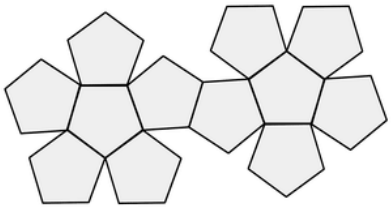
ההסתברות לקבל 4 היא $\frac{1}{2}$.



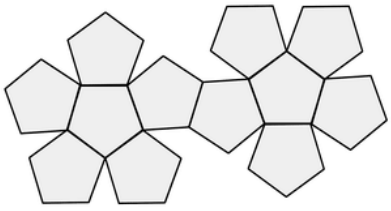
ההסתברות לקבל 3 היא $\frac{1}{12}$.



ההסתברות לקבל 8 היא $\frac{1}{4}$.

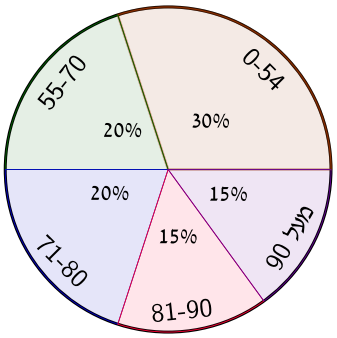


ההסתברות לקבל מספר זוגי היא $\frac{1}{3}$.



דיאגרמת עיגול:

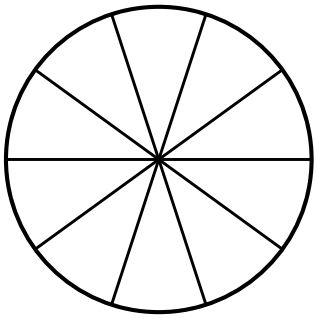
25) במבחן בית ספרי בספרות התקבלו התוצאות הבאות:



קבוצה א': 30% נכשלו במבחן (קיבלו מתחת ל-55).
קבוצה ב': 20% קיבלו בין 55 ל-70.
קבוצה ג': 20% קיבלו בין 71 ל-80.
קבוצה ד': 15% קיבלו בין 81 ל-90.
קבוצה ה': 15% קיבלו מעל ל-90.
כל התוצאות מופיעות בדיאגרמת העיגול שלפניך.
בוחרים באקראי תלמיד בבית הספר.

א. מה ההסתברות שהוא קיבל ציון גבוה מ-90?
ב. מה ההסתברות שהוא נכשל?
ג. מה ההסתברות שהוא קיבל ציון בין 71 ל-90?
ד. מה ההסתברות שהוא קיבל ציון הנמוך מ-80?

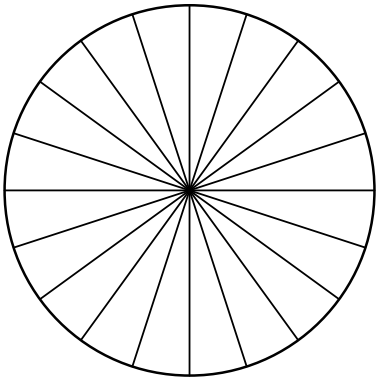
26) במבחן מסכם במתמטיקה התקבלו הציונים הבאים:



קבוצה א': 10% נכשלו במבחן (קיבלו מתחת ל-55).
קבוצה ב': 10% קיבלו בין 55 ל-70.
קבוצה ג': 20% קיבלו בין 71 ל-80.
קבוצה ד': 20% קיבלו בין 81 ל-90.
קבוצה ה': 30% קיבלו בין 91 ל-95.
קבוצה ו': 10% קיבלו מעל ל-95.

א. לפניך עיגול המחולק ל-10 חלקים שווים.
סמן את כל קבוצות התלמידים.
ב. בוחרים באקראי תלמיד.
(1) מה ההסתברות שהוא קיבל ציון הנמוך מ-70?
(2) מה ההסתברות שהוא קיבל ציון הגבוה מ-70?
(3) מה ההסתברות שהוא קיבל ציון בין 70 ל-90?
★ ג. האם הממוצע יכול להיות 90?

27) בבחירות לראשות עיר השתתפו 6 מועמדים: א', ב', ג', ד', ה' ו-ו'.
ערב הבחירות נערך סקר בקרב תושבי העיר ואלו תוצאותיו:



0.2 מהתושבים בחרו במועמד א'.
0.25 מהתושבים בחרו במועמד ב'.
0.15 מהתושבים בחרו במועמד ג'.
30% מהתושבים בחרו במועמד ד'.
$\frac{1}{20}$ מהתושבים בחרו במועמד ה'
והשאר בחרו במועמד ו'.

א. לפניך עיגול המחולק ל-20 גזרות שוות.
העזר בחלוקה זו וייצג את התוצאות בדיאגרמה.

ב. מועמדים א' ו-ב' מקימים מפלגה, האם הם ישיגו רוב כנגד שאר המועמדים במידה והשאר יקימו מפלגה נגדית? נמקו.

ג. מועמד ה' מסכים להצטרף למועמד א' בתנאי שמועמד ד' לא יצטרף אליהם.
האם מועמדים א' ו-ה' יכולים להקים קואליציה ולזכות ברוב קולות התושבים?

ד. בוחרים באקראי תושב מהעיר.
(1) מה ההסתברות שהוא בחר במועמד א' או ב'?
(2) מה ההסתברות שהוא לא בחר במועמד ו'?
(3) מה ההסתברות שהוא בחר במועמד שקיבל לפחות 10% מהקולות?

קריאת נתונים מתוך טבלה:

28) בבית הספר נעשה סקר ובו כמה בנים וכמה בנות מרכיבים משקפיים.
תוצאות הסקר מרוכזות בטבלה הבאה:

	מרכיב משקפיים	לא מרכיב משקפיים
בנים	220	160
בנות	180	300

א. כמה תלמידים לומדים בבית הספר?

ב. בוחרים תלמיד אחד מכלל תלמידי בית הספר.
(1) מה ההסתברות שנבחרה בת המרכיבה משקפיים?
(2) מה ההסתברות שנבחר תלמיד (בן או בת) שאינו מרכיב משקפיים?

29) בית הספר "בן-דורין" עוסק בהכנה למבחני קבלה לראיית חשבון.
בטבלה שלפניך מתוארים כלל הניגשים למבחן הקבלה.
ענו על הסעיפים הבאים על פי הטבלה:

	עבר	נכשל
למד בבית הספר	450	200
לא למד בבית הספר	100	150

א. כמה תלמידים ניגשו לבחינה?

ב. בוחרים באקראי תלמיד שניגש לבחינה.

(1) מה ההסתברות שהוא עבר את מבחן הקבלה ולא לומד בבית הספר?

(2) מה ההסתברות שהוא לומד בבית הספר ונכשל במבחן?

(3) מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הקבלה?

תכנון לפי הסתברויות נתונות:

30) בקופסא 100 פתקים זהים. חלקם צבועים בצבע שחור, חלקם בכחול וחלקם בלבן.
ידוע כי ההסתברות להוציא פתק שחור היא 0.2 וכי ההסתברות להוציא פתק לבן היא 0.5.

א. מה היא ההסתברות להוציא פתק כחול?

ב. כמה פתקים יש מכל צבע?

31) בכד 12 כדורים משלושה צבעים: צהוב, ירוק וסגול.
ידוע כי ההסתברות לבחור כדור צהוב היא $\frac{1}{3}$ וכי ההסתברות לבחור כדור סגול היא $\frac{1}{6}$.

א. מה היא ההסתברות לבחור כדור ירוק?

ב. כמה כדורים יש מכל צבע בכד?

32) בשק יש כדורים בשני צבעים: אדום וירוק.
ידוע כי ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{1}{4}$.

א. מה היא ההסתברות להוציא כדור ירוק?

ב. תנו דוגמה של מספר כדורים מכל צבע כך שההסתברויות שחשבתם תתקיימנה.

33) בשק יש כדורים משלושה צבעים: אדום, צהוב וירוק.

ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{4}{9}$ וההסתברות להוציא כדור צהוב היא $\frac{1}{3}$.

א. מה היא ההסתברות להוציא כדור ירוק?

ב. תנו דוגמה למספר כדורים מכל צבע שיקיים את ההסתברויות לעיל.

34) בשק יש כדורים בשלושה צבעים: תכלת, טורקיז ובורדו.

א. כמה כדורים מכל צבע אפשר לשים בשק, כך שההסתברות להוציא כדור תכלת תהיה $\frac{1}{3}$? רשמו שתי אפשרויות.

ב. ההסתברות להוציא כדור בורדו היא $\frac{1}{5}$ וההסתברות להוציא כדור תכלת היא $\frac{1}{10}$.
מה היא ההסתברות להוציא כדור טורקיז?

ג. ידוע כי ההסתברויות הן כמו של סעיף ב' וכי בשק יש 10 כדורים.
כמה כדורים בצבע תכלת וכמה כדורים בצבע בורדו יש?

ד. האם ייתכן שבשק יהיו 5 כדורים וההסתברויות להוציא כדור טורקיז היא $\frac{1}{8}$
וכדור תכלת היא $\frac{1}{4}$? נמקו.

ה. האם ייתכן שבשק יהיו 12 כדורים וההסתברויות להוציא כדור תכלת היא $\frac{1}{4}$
וכדור בורדו היא $\frac{1}{3}$? נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2}{5}$ ב. $\frac{3}{5}$.

2) א. $\frac{2}{9}$ ב. $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$ ג. $\frac{4}{9}$.

3) א. $0.6=\frac{6}{10}$ ב. $0.4=\frac{4}{10}$.

4) א. 8 תלמידים. ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$.

5) א. 9 תלמידים. ב. $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$ ג. $\frac{1}{9}$ ד. $\frac{4}{9}$ ה. $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$.

6) א. 10 תלמידים. ב. $0.3=\frac{3}{10}$ ג. $\frac{3}{10}$ ד. $\frac{7}{10}$ ה. $\frac{7}{10}$ ו. $\frac{4}{10}$.

7) א. 0.1 ב. 0.9 ג. $0.35=\frac{7}{20}$.

8) א. $\frac{5}{16}$ ב. $\frac{3}{16}$ ג. $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ ד. $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ ה. $\frac{11}{16}$.

9) א. סידור מופיע בסרטון. ב. (1). $\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$ (2). $\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$ (3). $\frac{7}{18}$.

10) א. 21 תלמידים. ב. טבלה מופיעה בסרטון.
ג. (1). $\frac{4}{21}$ (2). $\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$ (3). $\frac{11}{21}$ (4). $\frac{13}{21}$ (5). $\frac{17}{21}$.

11) א. 9 משפחות. ב. 1.55 ילדים למשפחה. ג. (1). $\frac{2}{9}$ (2). $\frac{1}{9}$ (3). $\frac{5}{9}$
ד. $\frac{5}{9}$ ה. $\frac{2}{9}$.

12) א. 10 משפחות. ב. 1.3 ילדים למשפחה. ג. (1). $\frac{1}{10}$ (2). $\frac{2}{5}$ (3). $\frac{3}{5}$
ד. $\frac{3}{5}$ ה. $\frac{1}{5}$.

13) א. $\frac{1}{450}$ ב. $\frac{1}{150}$ ג. $\frac{1}{45}$ ד. $\frac{1}{30}$ ה. $\frac{29}{450}$
ו. $\frac{421}{450}$.

14) א. $\frac{1}{600}$ ב. $\frac{1}{120}$ ג. $\frac{1}{60}$ ד. $\frac{1}{30}$ ה. $\frac{3}{50}$
ו. $\frac{47}{50}$.

15) א. $\frac{1}{500}$ ב. $\frac{1}{200}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{67}{1000}$.

16) א. $\frac{1}{28}$ ב. $\frac{1}{28}$ ג. $\frac{1}{28}$ ד. $\frac{1}{4}$ ה. $\frac{3}{4}$ ו. $\frac{3}{14}$

ז. $\frac{1}{4}$ ח. $\frac{3}{4}$ ט. $\frac{3}{28}$ י. $\frac{3}{28}$ יא. $\frac{1}{28}$ יב. $\frac{1}{14}$

יג. $\frac{5}{28}$ יד. $\frac{1}{14}$ טו. $\frac{1}{28}$ טז. 0.

17) א. $\frac{1}{6}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{2}{3}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. $\frac{1}{6}$ י. 0 יא. 0 יב. $\frac{1}{3}$

יג. $\frac{1}{6}$ יד. $\frac{1}{2}$.

18) א. איור בסרטון. ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{1}{6}$ ה. $\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}$.

19) א. איור בסרטון. ב. 0 ג. 1 ד. $\frac{1}{3}$ ה. $\frac{2}{3}$.

20) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{1}{2}$.

21) כל האיורים מופיעים בסרטון.

22) א. $\frac{1}{12}$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{6}$ ד. $\frac{1}{3}$ ה. $\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{6}$.

23) אמיר ינצח שכן $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

24) כל האיורים המלאים מופיעים בסרטון.

25) א. 0.15 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. 0.7.

26) א. חלוקה מופיעה בסרטון. ב. (1). 0.2 (2). 0.8 (3). 0.4.

ג. לא היות ו-60% מהציונים הם מתחת ל-90.

27) א. איור מופיע בסרטון. ב. לא, היות והם יהוו 45% בעוד ששאר המפלגות יהיו 55%.

ג. לא כי הם יהיו 25% בלבד. ד. (1). 0.45 (2). 0.95 (3). 0.9.

28) א. 860 תלמידים. ב. (1). $\frac{9}{43}$ (2). $\frac{23}{43}$.

29) א. 900 תלמידים. ב. (1). $\frac{1}{9}$ (2). $\frac{2}{9}$ (3). $\frac{7}{18}$.

30) א. 0.3 ב. 20 שחורים, 50 לבנים ו-30 כחולים.

31) א. $\frac{1}{2}$ ב. 6 ירוקים, 4 צהובים ו-2 סגולים.

32) א. $\frac{3}{4}$ ב. 1 אדום ו-3 ירוקים.

33) א. $\frac{2}{9}$ ב. 4 אדומים, 3 צהובים ו-2 ירוקים.

34) א. 4 תכלת, 3 טורקיז ו-5 בורדו, או: 1 מכל צבע. ב. 0.7

ג. כדור אחת תכלת ו-2 כדורים בצבע בורדו.

ד. לא, מכיוון שלא מתקבלים מספרים שלמים בחישוב מספר הכדורים.

ה. כן, 3 כדורים בצבע תכלת, 4 כדורים בצבע בורדו ו-5 כדורים בצבע טורקיז.

שאלון 471

הסתברות עם דיאגרמת עץ

תוכן העניינים:

הסתברות עם דיאגרמת עץ 542

כללי: 543

סיכום כללי: 543

שאלות: 543

תשובות סופיות: 546

כללי:

סיכום כללי:

- שאלות עם מאורעות תלויים הן שאלות שבהן ההסתברות של הניסוי השני תלויה בתוצאה של הניסוי הראשון.
- נתמקד בשני ניסיונות וכדי למצוא את ההסתברויות הנכונות נבנה "עץ הסתברויות" מתאים עבור השאלה.
- נמצא את ההסתברויות של כל ה-"ענפים" של העץ ולאחר מכן נבחר את המקרים המתאימים לכל אחד מסעיפי השאלה.

שאלות:

1) בכד ישנם 6 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים.
מוציאים באקראי כדור אחד, ומשאירים אותו בחוץ.
מערבבים, ומוציאים באקראי כדור שני.

א. מה ההסתברות להוציא כדור כחול ולאחריו כדור אדום?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים שיצאו יהיו אדומים?
ג. מה ההסתברות ששני הכדורים שיצאו יהיו כחולים?
ד. מה ההסתברות ששני הכדורים שיצאו יהיו באותו הצבע?
ה. מה ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים?

2) בכד ישנם 4 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים.
מוציאים באקראי כדור אחד, ומשאירים אותו בחוץ.
מערבבים, ומוציאים באקראי כדור שני.

א. מה ההסתברות להוציא כדור אדום ולאחריו כדור כחול?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים שיצאו יהיו אדומים?
ג. מה ההסתברות ששני הכדורים שיצאו יהיו כחולים?
ד. מה ההסתברות ששני הכדורים שיצאו יהיו באותו הצבע?
ה. מה ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים?

3) במפעל מסוים $\frac{1}{4}$ מהעובדים הם נשים ו- $\frac{3}{4}$ הם גברים.
40% מהגברים מעשנים ו-30% מהנשים מעשנות.
בוחרים באקראי עובד (גבר או אישה).

א. מה ההסתברות שנבחרה אישה מעשנת?

ב. מה ההסתברות שהעובד שנבחר מעשן?

ג. מה ההסתברות שהעובד שנבחר אינו מעשן?

4) בחוג מסוים $\frac{1}{3}$ מהמשתתפים הם בנים ו- $\frac{2}{3}$ מהמשתתפים הן בנות.
ידוע כי 50% מהבנים מרכיבים משקפיים ו-20% מהבנות מרכיבות משקפיים.
בוחרים באקראי משתתף (בן או בת).

א. מה ההסתברות שנבחר בן שמרכיב משקפיים?

ב. מה ההסתברות שהמשתתף שנבחר מרכיב משקפיים?

ג. מה ההסתברות שהמשתתף שנבחר אינו מרכיב משקפיים?

5) כיתות י'1 ו-י'2 צריכות לבחור נציג אחד מכל כיתה למועצת התלמידים של בית הספר.
בכל כיתה הגישו את מועמדותם שבעה תלמידים: ארבע בנות ושלושה בנים.
כל כיתה החליטה לבחור את הנציג בדרך שונה.

הבחירות בכיתה י'1: בוחרים באקראי תלמיד מבין שבעת התלמידים.

א. חיים הוא אחד מהמועמדים בכיתה י'1.
מהי ההסתברות שחיים יבחר? נמקו.

ב. לינוי היא אחת מן המועמדות בכיתה י'1.
מהי ההסתברות שלינוי תיבחר? נמקו.

הבחירות בכיתה י'2:
מטילים מטבע.
אם יוצא "פנים" – תייצג בת את הכיתה. הנציגה תיבחר באקראי מבין ארבע הבנות.
אם יוצא "גב" – ייצג בן את הכיתה. הנציג ייבחר באקראי מבין שלושת הבנים.

ג. לידור הוא אחד מהמועמדים בכיתה י'2.
מהי ההסתברות שלידור ייבחר? נמקו.

ד. מעיין היא אחת מן המועמדות בכיתה י'2. מהי ההסתברות שמעיין תיבחר? נמקו.

ה. באיזו כיתה כדאי לשרית ללמוד, י'1 או י'2, על מנת שסיכויה להיבחר יהיו גדולים יותר? נמקו.

6) נתונות שתי שקיות עם גולות אשר זהות בגודלן ומשקלן, והן בשני צבעים שונים: כחול ולבן.
בשקית אחת ישנן 8 גולות כחולות ו-4 גולות לבנות ושקית השנייה ישנן 6 גולות כחולות ו-8 גולות לבנות. זורקים קובייה: אם התקבל מספר הקטן מ-3 בוחרים באקראי גולה מהשקית הראשונה.
אם התקבל מספר הגדול מ-3 או שווה ל-3, בוחרים גולה מהשקית השנייה.

א. מה ההסתברות לבחור גולה מהשקית הראשונה?

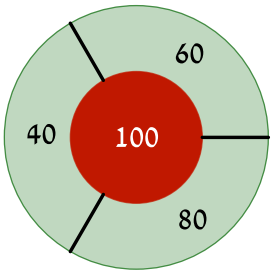
ב. מה ההסתברות לבחור גולה כחולה מהשקית הראשונה?

ג. מה ההסתברות לבחור גולה כחולה מהשקית השנייה?

ד. מה ההסתברות לבחור גולה כחולה?

ה. מה ההסתברות לבחור גולה לבנה?

7) בציור מופיע לוח קליעה למטרה.



טגניה זורק פעם אחת חץ ללוח.
ההסתברות שטגניה ייפגע בלוח היא 0.8.
כאשר טגניה פוגע בלוח:

- ההסתברות שלו לפגוע באזור של ה-100 נקודות היא $\frac{1}{2}$.

- ההסתברות שלו לפגוע בכל אחד מהאזורים האחרים היא $\frac{1}{6}$.

א. מה ההסתברות של טגניה לפגוע במטרה וגם לזכות ב-100 נקודות?

ב. מה ההסתברות של טגניה לפגוע במטרה וגם לזכות ב-60 נקודות?

ג. מה ההסתברות של טגניה לפגוע במטרה וגם לזכות ב-60 או 80 נקודות?

ד. מה ההסתברות של טגניה לפגוע במטרה ולזכות בפחות מ-100 נקודות או לא לזכות בנקודות כלל?

8) שני חברים, רמי ויוסף, שוקלים להתמודד בבחירות למועצת התלמידים.
ההסתברות שרמי יתמודד היא 0.9.
ההסתברות שיוסף יתמודד בבחירות תלויה בהחלטתו של רמי.
אם רמי יתמודד בבחירות, אז ההסתברות שיוסף יתמודד היא 0.6.
אם רמי לא יתמודד בבחירות, אז ההסתברות שיוסף יתמודד היא 0.75.

א. מה ההסתברות שרמי ויוסף יתמודדו ביחד בבחירות?

ב. מה ההסתברות שרמי בלבד יתמודד?

ג. מה ההסתברות שאחד מהחברים יתמודד לבדו?

9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

10) ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות.
יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי.
מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{1}{12}$ ג. $\frac{5}{12}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{2}$.

2) א. $\frac{5}{18}$ ב. $\frac{5}{18}$ ג. $\frac{1}{6}$ ד. $\frac{4}{9}$ ה. $\frac{5}{9}$.

3) א. $\frac{3}{40}$ ב. $\frac{3}{8}$ ג. $\frac{5}{8}$.

4) א. $\frac{1}{6}$ ב. $\frac{3}{10}$ ג. $\frac{7}{10}$.

5) א. $\frac{1}{7}$ ב. $\frac{1}{7}$ ג. $\frac{1}{6}$ ד. $\frac{1}{8}$ ה. כיתה י'1.

6) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{2}{7}$ ד. $\frac{32}{63}$ ה. $\frac{31}{63}$.

7) א. 0.4 ב. $\frac{2}{15}$ ג. $\frac{4}{15}$ ד. 0.6.

8) א. 0.54 ב. 0.36 ג. 0.435.

9) א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$ ג. $\frac{31}{50}$.

10) $\frac{77}{144}$

שאלון 471

הסתברות עם טבלה דו-מימדית

תוכן העניינים:

הסתברות עם טבלה דו-מימדית 547

הסתברות מותנית:..... 548

שאלות:..... 548

תשובות סופיות: 549

טבלה דו-מימדית: 550

שאלות:..... 550

תשובות סופיות: 551

הסתברות מותנית:

שאלות:

1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

2) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

3) נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגן שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי".
אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.

א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?

4) במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2.
ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪.
מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

5) בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים.
הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא $\frac{5}{14}$.
כמה כדורים בכד?

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$

2) א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$ ג. $\frac{9}{38}$

3) א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$

4) $\frac{1}{4}$.

5) 8 כדורים.

טבלה דו-מימדית:

שאלות:

1) 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים.
נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.

א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?

ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?

ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?

ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?

2) 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט.
80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות.
נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.

א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?

ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?

ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?

ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?

3) 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה.
75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?

ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?

ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?

4) בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים.
60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר.
מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

5) 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים.
אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים.
מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

6) בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים.
בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

תשובות סופיות:

1) א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן.

2) א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים.

3) א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$.

4) $\frac{1}{225}$.

5) 93.5%.

6) $\frac{1}{3}$.

שאלון 471

התפלגות נורמלית

תוכן העניינים:

התפלגות נורמלית..... 552

חזרה על סטיית התקן: 553

סיכום כללי:..... 553

שאלות:..... 554

תשובות סופיות: 556

ההיסטוגרמה:..... 557

סיכום כללי:..... 557

שאלות:..... 557

תשובות סופיות: 558

ההתפלגות הנורמלית: 559

סיכום כללי:..... 559

שאלות:..... 560

תשובות סופיות: 563

התפלגויות אסימטריות:..... 564

סיכום כללי:..... 564

שאלות:..... 564

תשובות סופיות: 567

התפלגות נורמלית סטנדרטית:..... 568

סיכום כללי:..... 568

שאלות:..... 569

תשובות סופיות: 575

טבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית: 577

סיכום כללי:..... 577

שאלות:..... 579

תשובות סופיות: 581

שאלות מסכמות: 582

שאלות:..... 582

חזרה על סטיית התקן:

סיכום כללי:

הגדרה:

סטיית התקן, S, מדד לפיזור הציונים.

סטיית התקן מאפשרת למדוד עד כמה רחוקים הציונים מהציון הממוצע.

נחשב את סטיית התקן ע"י היעזרות בטבלה באופן הבא:

ציון (x)	מספר תלמידים (f)	סה"כ	סטיות מהממוצע $x-\bar{x}$	סטיות מהממוצע בריבוע $(x-\bar{x})^2$	סכום סטיות מהממוצע בריבוע $f\cdot(x-\bar{x})^2$

כאשר חישוב סטיית התקן יתבצע כך:

$$S=\sqrt{\frac{\text{סכום הסטיות מהממוצע בריבוע}}{\text{סך כל השכיחויות}}}$$

הנוסחה הכללית לחישוב סטיית התקן:

הנוסחה הכללית של סטיית התקן היא:

$$S=\sqrt{\frac{f_1\cdot(x_1-\bar{x})^2+f_2\cdot(x_2-\bar{x})^2+....+f_N\cdot(x_N-\bar{x})^2}{f_1+f_2+...+f_N}}$$

כאשר:

$\bar{x}$ - ממוצע הנתונים (הציונים).

x_i - נתון (ציון) מסוים.

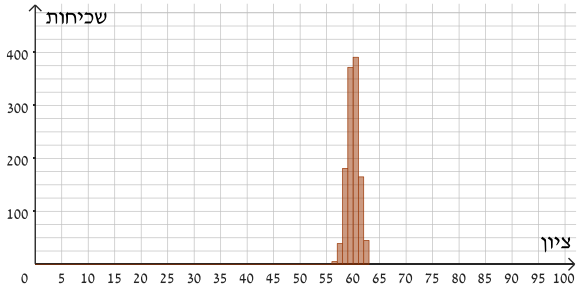
f_i - השכיחות של הציון x_i.

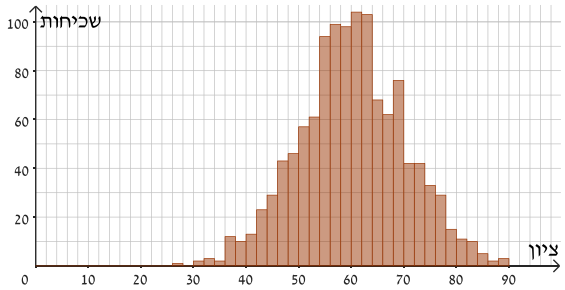
N - מספר כל הקבוצות הנתונים.

S - סטיית התקן.

משמעות סטיית התקן:

- סטיית תקן קטנה מעידה על פיזור צר של הנתונים סביב הממוצע.
- סטיית תקן גדולה מעידה על פיזור רחב של הנתונים סביב הממוצע.





ניתן לקבוע באופן מלא את גרף ההתפלגות הנורמלית בעזרת שני המדדים:
הממוצע $\bar{x}$ וסטיית התקן S.

- הממוצע קובע את מיקומו של ציר הסימטריה של הגרף.
- סטיית התקן קובעת את מידת הפיזור של הגרף (גרף רחב או צר).

שאלות:

1) נתונה התפלגות הציונים במבחן מסוים:

הציון	4	5	6	7	8	9
מספר התלמידים	3	8	7	1	5	1

א. מצאו את ממוצע הציונים.

ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.

2) בטבלה שלפניכם מתוארת התפלגות הציונים במבחן מסוים:

ציון (x)	מספר תלמידים (f)	סה"כ	$f\cdot(x-\bar{x})^2$
5	4		
6	5		
7	6		
8	5		

א. חשבו את הממוצע.

ב. השלימו את הטבלה.

ג. מצאו את סטיית התקן של הציונים.

3) לפניכם 3 סדרות של מספרים:

i. 5 , 9.

ii. 5 , 7 , 7 , 9.

iii. 5 , 5 , 7 , 7 , 7 , 7 , 9 , 9.

א. חשבו את הממוצע של כל אחת מהסדרות.

ב. מה ניתן לומר על סטיית התקן של סדרות הציונים האלו?

ג. כמה פעמים יש להוסיף את המספר 7 כדי שסטיית התקן תהיה שווה ל-1?

ד. האם ניתן ע"י הוספה של המספר 7 להגיע לסטיית תקן 0? נמק.

4) בכיתה י"א נערך מבחן במתמטיקה בשני טורים.

בטור א' התקבלו התוצאות הבאות: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 9, 10.

בטור ב' התקבלו התוצאות הבאות: 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8.

א. באיזה טור הצליחו התלמידים יותר?

ב. חשבו את סטיית התקן לכל טור.

ג. באיזו כיתה היה פיזור הציונים גדול יותר?

5) חמישה תלמידים נבחנו בהכתבה באנגלית. נתונות מספר שגיאות הכתיב שעשה כל אחד מהם במבחן: 15, 9, 8, 5, 4 (מספר אחד לכל תלמיד).

א. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של מספר השגיאות שעשו חמשת התלמידים.

ב. בהכתבה חוזרת עשה כל תלמיד 3 שגיאות פחות ממה שעשה בהכתבה הראשונה.

(1) מה ממוצע השגיאות החדש?

(2) הסבירו מדוע סטיית התקן לא השתנתה.

תשובות סופיות:

1) א. 6 ב. 1.41.

2) א. 6.6 ב. ראו פתרון בסרטון הוידאו. ג. 1.06.

3) א. סדרה 1 - 7, סדרה 2 - 7, סדרה 3 - 7.

ב. ככל שמוסיפים מספרים השווים לממוצע סטיית התקן תקטן.

ג. 6 פעמים. ד. לא ניתן.

4) א. טור ב' ב. טור א' - 2.23, טור ב' - 1 ג. טור ב'.

5) א. $\bar{x} = 8.2$, $S = 3.86$ ב. (1) 5.2

ב. (2) היות והממוצע וגם הציונים קטנו באותו הערך, הפיזור שלהם נשאר אותו דבר.

ההיסטוגרמה:

סיכום כללי:

היסטוגרמה:

בעיסוק עם משתנים רציפים, נציג גרפית את הנתונים הסטטיסטיים באמצעות טווחים של ערכים. הטווחים ייוצגו ע"י מלבנים שעוביים נקבע ע"י גבולות הטווח, וגובהם מתאר את שכיחות הנתונים שנמצאים בטווח זה.

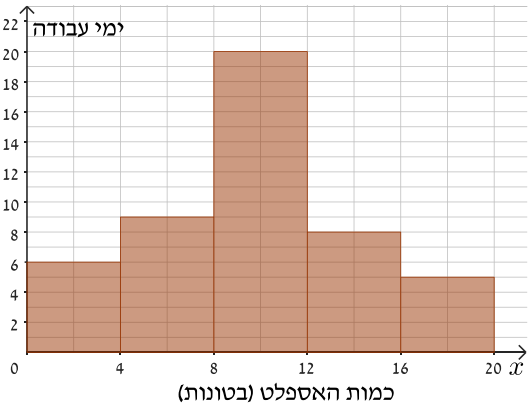
שאלות:

1) בעיר מסוימת פועלות 50 מספרות.
הטבלה הבאה מציגה את התפלגות המספרות לפי טווח ההכנסות החודשיות שלהן:

טווח הכנסה (באלפי ₪)	10 - 5	15 - 10	20 - 15	25 - 20	30 - 25	35 - 30	40 - 35
כמות מספרות	3	6	10	9	8	8	5

א. מהו המשתנה המיוצג בטבלה? האם הוא כמותי או איכותי?
ב. מצאו את רוחב כל קבוצת הכנסות (מחלקה).
ג. חשבו את נקודת האמצע של כל קבוצת הכנסות.
ד. סרטטו היסטוגרם המתאר את התפלגות ההכנסות של המספרות.

2) לפניכם היסטוגרם המתאר את כמות האספלט (בטונות) שיוצרה במפעל "דרכים חדשות" במהלך 48 ימי עבודה רצופים. כמות האספלט היומית מאורגנת בקבוצות כפי שמסומן מתחת לציר ה- x.



א. בנו טבלת שכיחויות מתאימה, כאשר בשורה הראשונה יופיעו טווחי כמויות האספלט (בטונות) כפי שמוצגים בהיסטוגרם, ובשורה השנייה יופיעו השכיחויות המתאימות (מספר הימים).

ב. מהו הרוחב של כל קבוצת כמויות (מחלקה)?

ג. חשבו את נקודת האמצע של כל קבוצת כמויות.

ד. חשבו בקירוב את כמות האספלט הכוללת שייצר המפעל ואת כמות האספלט הממוצעת ליום עבודה.

תשובות סופיות:

1) א. כמותי (ההכנסה החודשית של המספרה) ב. 5 (באלפי ₪)
ג. ראו פתרון בסרטון הוידאו. ד. ראו פתרון בסרטון הוידאו.

2) א. להלן טבלה: ב. 4 טונות ג. ראו בטבלה. ד. 468 טונות, 9.75 טונות = $\bar{x}$.

טווח ייצור (טונות)	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
מספר ימים	6	9	20	8	5

ההתפלגות הנורמלית:

סיכום כללי:

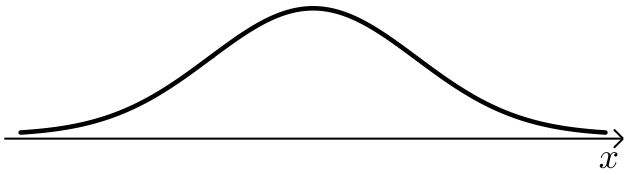
התפלגות:

התפלגות של משתנה מקרי היא התאמה בין כל ערך שהמשתנה המקרי יכול לקבל,
לבין השכיחות היחסית שלו במרחב המדגם.

התפלגות נורמלית וגרף הפעמון:

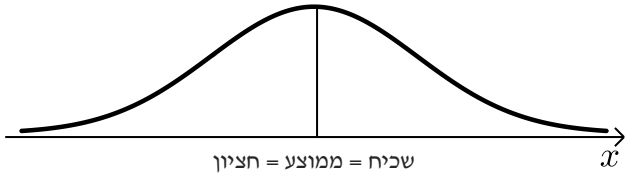
התפלגות נורמלית היא מההתפלגויות המרכזיות והשכיחות ביותר בסטטיסטיקה
היות והיא מתארת את ההתנהגות של תהליכים רבים בתחומי המדע בפרט ובחי היומיום בכלל.

הגרף שמתאר את התנהגות ההתפלגות עצמה נקרא **גאוסיאן** (על שמו של קרל פרדריך גאוס)
או בשפה העממית - **גרף הפעמון** עקב הדמיון שלו לצורת פעמון.



מדדים בהתפלגות נורמלית:

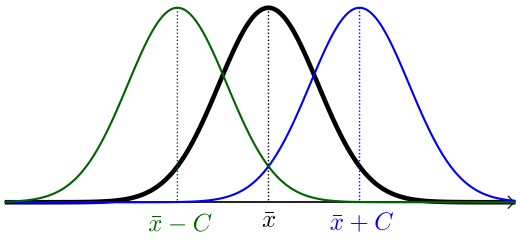
בהתפלגות נורמלית, השכיח, הממוצע והחציון מתלכדים לערך אחד:



הוספת קבוע לגרף ההתפלגות הנורמלית:

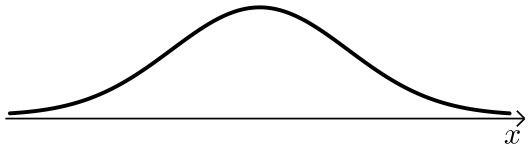
- כאשר מוסיפים לממוצע ערך חיובי, גרף ההתפלגות הנורמלית יזוז ימינה.
- כאשר מחסרים מן הממוצע ערך חיובי, גרף ההתפלגות הנורמלית יזוז שמאלה.

הזזות של גרף התפלגות נורמלית
(עבור: $C>0$):



שאלות:

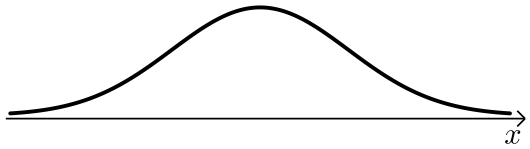
1) התפלגות הציונים של מבחן ארצי במתמטיקה היא נורמלית עם ממוצע של 71.
ידוע כי 12% מהנבחנים קיבלו ציון הגבוהה מ-80.
מהו הציון ש-12% מהנבחנים קיבלו פחות ממנו?



2) המשקל של נשים בגילאי 40-60 בעיר מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 65 ק"ג.
ידוע כי 60% מהנשים הוא במשקל שבין 56 ק"ג ל-74 ק"ג.

א. מה אחוז הנשים שמשקלן הוא בין 65 ק"ג ל-74 ק"ג?

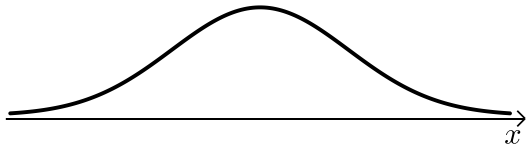
ב. מה הוא המשקל ש-20% מהנשים שוקלות פחות ממנו?



3) מדדו את משקלם של אבטיחים במקשה מסוים והתקבלה התפלגות נורמלית עם משקל ממוצע של 3.2 ק"ג לאבטיח. ידוע כי המשקל של שליש מהאבטיחים קטן מ-2.6 ק"ג.

א. מהו אחוז האבטיחים השוקלים מעל ל-3.8 ק"ג?

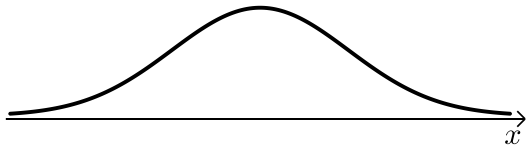
ב. מהי השכיחות היחסית של כל האבטיחים שמשקלם בין 2.6 ק"ג ל-3.8 ק"ג?



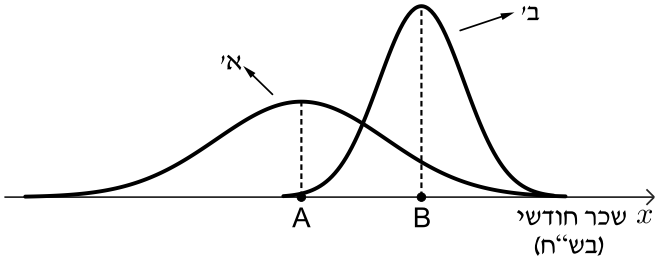
4) הציונים של מבחן ארצי מתפלגים נורמלית עם ממוצע של 68.
ידוע כי רבע מהתלמידים קיבלו ציון גבוה מ-78.

א. מהו אחוז התלמידים שקיבלו ציון נמוך מ-58?

ב. מהי השכיחות היחסית של התלמידים שציונם מתחת לממוצע אך גבוה מ-58?



5) בשתי חברות גדולות, 'מוטוריקס' ו-'רובוקם' התפלגות השכר היא נורמלית.
בחברת מוטוריקס השכר החציוני הוא 6000 ₪ וסטיית התקן היא 800 ₪.
בחברת רובוקם השכר השכיח הוא 7000 ₪ וסטיית התקן היא 200 ₪.



א. (1) קבעו אלו מבין הגרפים א' ו-ב' מתאימים לכל חברה.
(2) כתבו את הערכים של הנקודות A ו-B על ציר ה- x.

ידוע כי השכר החודשי של 10% מהעובדים שבחברה המתאימה לגרף א נמוך מ-5000 ₪.

ב. (1) סמנו בסרטוט את השטח המתאים לנתון.
(2) מה היא השכיחות היחסית של העובדים בחברה זו המקבלים מעל ל-7000 ₪?
(3) האם שכיחות יחסית זו גדולה, שווה, או קטנה מהשכיחות היחסית של העובדים בחברה ב' המשתכרים בשכר הנמוך מ-7000 ₪?

ג. מהי השכיחות היחסית של העובדים בחברה א' המשתכרים בין 6000 ₪ ל-7000 ₪?

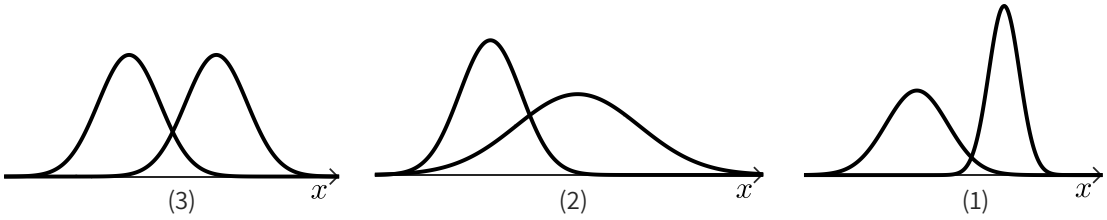
ד. האם נכון לטעון כי השכיחות היחסית של העובדים בחברה א' המשתכרים בין 6000 ₪ ל-7000 ₪ שווה לשכיחות היחסית של העובדים בחברה ב' המשתכרים בין 7000 ₪ ל-8000 ₪? נמקו את קביעתכם.

6) בכל אחד מן הסעיפים הבאים מתוארות שתי התפלגויות נורמליות.
התאימו בין המקרים שבכל סעיף למערכת הצירים המתאימה מתוך (1)-(3).

א. הגובה הממוצע של הקופים מזן מסוים הוא 50 ס"מ בעוד שהגובה הממוצע של קופים מזן אחר הוא 30 ס"מ. סטיית התקן של גובהי הקופים משני הזנים היא 5 ס"מ.

ב. בשנת 2020 המחיר הממוצע של דירה עמד על 1,500,000 ₪ (1.5 מיליון ₪)
בעוד שבשנת 2024 המחיר הממוצע הוא 2,000,000 ₪ (2 מיליון ₪).
סטיית התקן של המחירים בשנת 2020 היא 10,000 ₪ ובשנת 2024 היא 20,000 ₪.

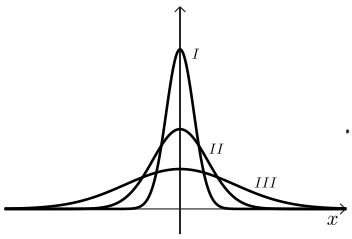
ג. מספר הילדים הממוצע למשפחה בבני ברק גדול פי 2 ממספר הילדים הממוצע למשפחה בעפולה, אך סטיית התקן של מספר הילדים בבני ברק קטנה פי 2 מסטיית התקן של מספר הילדים בעפולה.



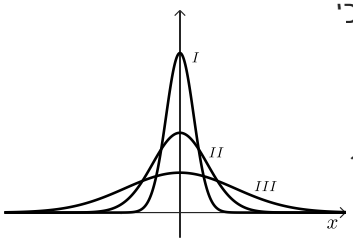
7) נתונות שלוש עקומות של התפלגות נורמלית המתאימות לשלוש אוכלוסיות שונות.
ענו על הסעיפים הבאים:

א. קבעו איזה מבין כל אחד מן ההיגדים מתאים לכל עקומה מבין עקומות: I-III.

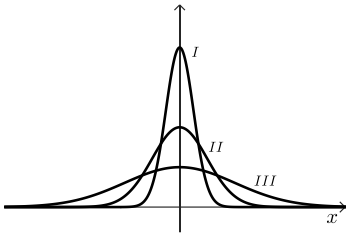
(1) ב-3 כיתות י' נערך מבחן. ממוצע הציונים השכבתי
(כלומר של כל הכיתות) הוא 76.
סטיית התקן של הציונים בכיתה י'1 היא 18,
סטיית התקן בכיתה י'2 היא 9 וסטיית התקן בכיתה י'3 היא 11.
איזו עקומה מתאימה לתיאור התפלגות הציונים בכל כיתה?



(2) מגדלים מלפפונים המגיעים לאורך ממוצע של 15 ס"מ ומחלקים
אותם ל-3 קבוצות: A, B ו-C. בקבוצה A סטיית התקן של אורכי
המלפפונים היא 6 ס"מ, בקבוצה B סטיית התקן של אורכי
המלפפונים היא 3 ס"מ, ובקבוצה C סטיית התקן של אורכי
המלפפונים היא 1.5 ס"מ. איזו עקומה מתאימה לכל קבוצה?



ב. כדי להזמין תרופה מסוימת, היה על קופת חולים לערוך מדידה של משקלם של כל
הגברים ביישוב מסוים. המשקל הממוצע הוא 70 ק"ג.
חילקו את הגברים ל-3 קבוצות לפי אזורי מגורים:
- אזור מגורים א'
- אזור מגורים ב'
- אזור מגורים ג'



ידוע כי התפלגות המשקלים בכל אזור היא נורמלית.
הציעו אפשרות לסטיות התקן עבורן פיזור המשקלים
באזור ב' יהיה הקטן ביותר ופיזור המשקלים באזור א' יהיה הגדול ביותר.

תשובות סופיות:

1) 62.

2) א. 30% ב. 56 ק"ג.

3) א. 33.33% ב. $\frac{1}{3}$.

4) א. 25% ב. $\frac{1}{4}$.

5) א. (1) א': "מוטוריקס", ב': "רובוקום" א. (2) $A(6000,0)$, $B(7000,0)$

ב. (1) ראו פתרון בסרטון הוידאו. ב. (2) 0.1 ב. (3) קטנה

ג. 0.4 ד. הטענה לא נכונה.

6) גרף 2 - מקרה ב', גרף 3 - מקרה א'.

7) א. (1) גרף 1 - כיתה י'2, גרף 2 - כיתה י'3, גרף 3 - כיתה י'1

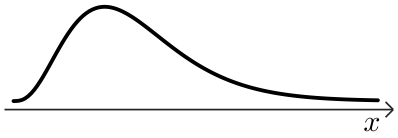
א. (2) גרף 1 - קבוצה G, גרף 2 - קבוצה B, גרף 3 - קבוצה A

ב. גרף 1 - אזור ב', גרף 2 - אזור ג', גרף 3 - אזור א'.

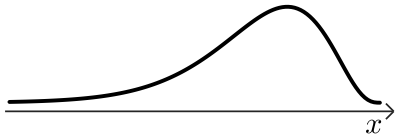
התפלגויות אסימטריות:

סיכום כללי:

התפלגות א-סימטרית עם זנב ימני (חיובית):



התפלגות א-סימטרית עם זנב שמאלי (שלילית):



סיכום קשר בין מדדים בהתפלגויות א-סימטריות:

סוג התפלגות א-סימטרית	קשר בין המדדים
ימנית (חיובית)	ממוצע > חציון > שכיח
שמאלית (שלילית)	שכיח > חציון > ממוצע

שאלות:

1) לפניכם תוצאות מבחן הסמכה ארצי בהנהלת חשבונות אשר נערך בשני מועדים (מועד חורף ומועד קיץ). בגרפים המצורפים מסומנים **החציון** (בקו מרוסק) **והממוצע** (בקו רציף) של התפלגויות הציונים. טווח הציונים במבחן זה נע בין 50 ל-300.

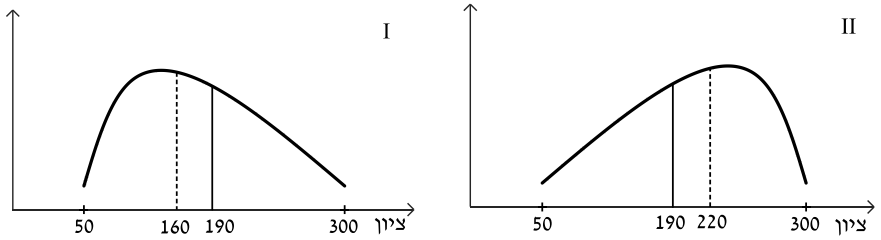
א. מהו הציון החציוני של התפלגויות הציונים בשני המבחנים?

ב. ידוע כי בשני המועדים התקבל אותו ציון ממוצע של 190.

(1) האם ניתן לקבוע איזה גרף מייצג כל מועד? נמקו.

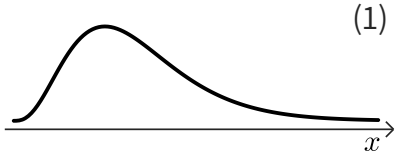
(2) במועד החורף חציון הציונים גדול יותר מממוצע הציונים, ובמועד הקיץ חציון הציונים קטן יותר מממוצע הציונים. קבעו איזה גרף מייצג את מועד החורף ואיזה גרף מייצג את מועד הקיץ.

ג. האם הציון השכיח בשני המועדים גדול, קטן או שווה לציון החציוני? נמקו את תשובתכם.

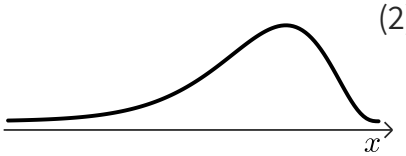


2) מבחן מסכם של קורס מסוים באוניברסיטה היה קשה מן הרגיל.
כתוצאה מכך, רוב הציונים היו נמוכים ומעט היו גבוהים.
לפניכם 4 גרפים של התפלגויות הציונים במבחן זה.

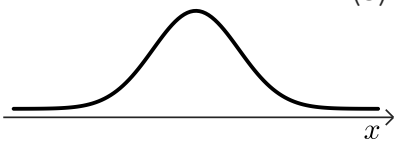
(1)



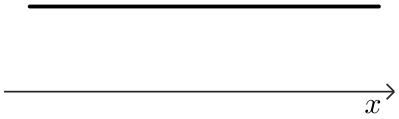
(2)



(3)



(4)

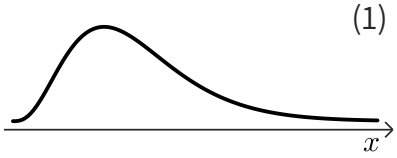


א. איזה מבין הגרפים יכול לתאר את ההתפלגות של ציוני המבחן המסכם?

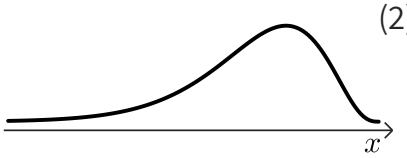
ב. תארו את הקושי של המבחנים שמתאימים לשלושת הגרפים האחרים.

3) במקשה אבטיחים גדלים אבטיחים מדי שנה שמשקלם הממוצע הוא 9 ק"ג.
בשנת 2020, עקב בצורת קשה, רוב האבטיחים שקלו מתחת לממוצע.
עקב כך בעלי המקשה החליטו לפתח את התשתיות וכך בשנת 2021 הצליחו לגדל אבטיחים שרובם שקלו מעל לממוצע. לפניכם גרפים (1)-(4) המתארים התפלגויות אפשריות שונות למשקל האבטיחים השנתי במקשה עבור שנה נתונה.

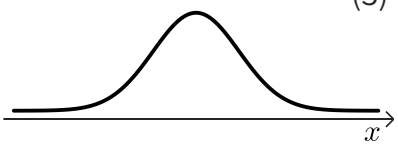
(1)



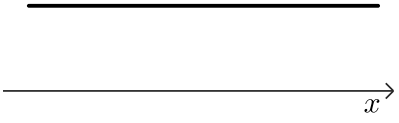
(2)



(3)



(4)

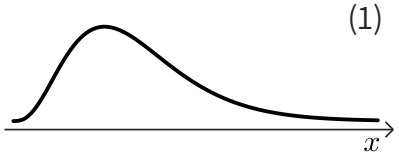


א. קבעו איזה מבין הגרפים הבאים מתאר נכונה את התפלגות משקל האבטיחים **בשנת 2020** ואיזה מבין הגרפים מתאר נכונה את התפלגות משקל האבטיחים **בשנת 2021**.

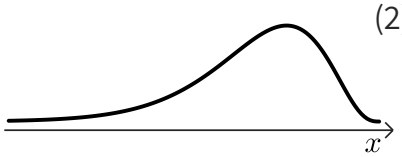
ב. איזה גרף מבין הגרפים (1)-(4) אינו אפשרי מבחינה מעשית. הסבירו.

4) בקורס מסוים באוניברסיטה נערך מבחן מסכם בשני מועדים – מועד א' ומועד ב'.
מבחן מועד א' היה קשה מהרגיל, ובו התקבלו רוב ציונים נמוכים ומעט ציונים גבוהים.
לעומת זאת, התפלגות הציונים במבחן מועד ב' היא נורמלית. להלן מוצגים גרפים (1)-(5).
בכל הגרפים, ציר ה- x מייצג את הציונים.

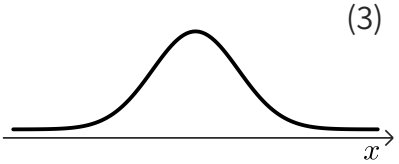
(1)



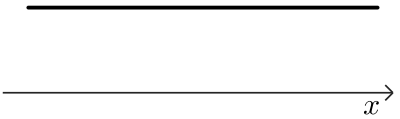
(2)



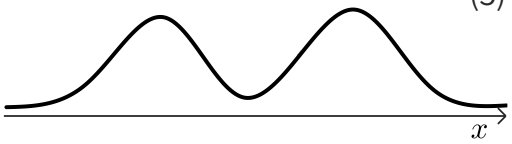
(3)



(4)



(5)

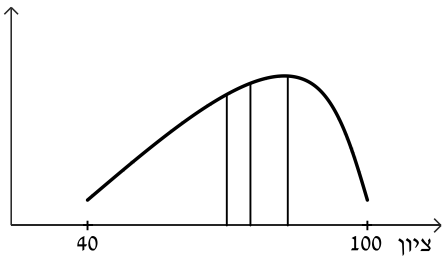


א. איזה מבין הגרפים יכול לתאר את ההתפלגות ציוני מבחן מועד א'
ואיזה מבניהם יכול לתאר את התפלגות הציונים של מבחן מועד ב'?

ב. קבעו לגבי כל אחד מההיגדים הבאים, לאיזה מהגרפים שבסרטוט הוא מתאים:
היגד א': רוב הציונים גבוהים ומעט נמוכים.
היגד ב': הרבה ציונים גבוהים, הרבה ציונים נמוכים ויש מעט ציוני ביניים.

ג. איזה מבין ההיגדים הבאים מתאים לגרף (4)?
היגד א': כל התלמידים קיבלו את אותו הציון במבחן.
היגד ב': לכל ציון יש את אותו מספר התלמידים שקיבלו אותו.

5) לפניכם התפלגות ציונים של מבחן שכבתי אשר נערך לכיתות יא' בבית הספר 'המצליחים'.
במבחן זה, הציון הממוצע הוא 77, חציון הציונים הוא 79 והציון השכיח הוא 83.



א. סמנו בקווים המתאימים על הגרף את שלושת המדדים (ממוצע, שכיח וחציון).

ב. האם ייתכן כי מחצית מהתלמידים קיבלו ציון הגבוה מ-81?

ג. דנה קיבלה ציון גבוה מהחציון. האם שכיחות כל הציונים הגבוהים מהציון של דנה גדולה, קטנה או שווה לשכיחות הציונים הנמוכים מהציון של דנה?

ד. שקד קיבלה ציון הנמוך מהממוצע. האם שכיחות הציונים הנמוכים מהציון של שקד גדולה, קטנה או שווה לשכיחות הציונים הגבוהים מהציון של שקד?

תשובות סופיות:

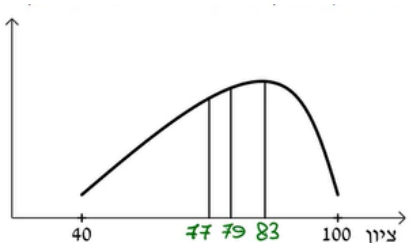
1) א. 220 ו-160 ב. (1) לא ניתן לקבוע. ב. (2) גרף 1 - מועד קיץ, גרף 2 - מועד חורף.
ג. בגרף 1 השכיח גדול מהחציון, בגרף 2 השכיח קטן מהחציון.

2) א. גרף 1 ב. ראו פתרון בסרטון הוידאו.

3) א. גרף 1 - שנת 2020, גרף 2 - שנת 2021 ב. גרף 4 אינו אפשרי.

4) א. גרף 1 - מבחן מועד א', גרף 3 - מבחן מועד ב' ב. (1) גרף 2 ב. (2) גרף 5
ג. היגד ב'

5) א. להלן סרטוט: ב. לא ייתכן ג. קטנה ד. קטנה.



התפלגות נורמלית סטנדרטית:

סיכום כללי:

הגדרה:

התפלגות נורמלית סטנדרטית הינה התפלגות נורמלית שבה הממוצע הוא 0 וסטיית התקן היא 1.
מקובל גם לקרוא לה: התפלגות נורמלית סטנדרטית (0,1).

כדי להפוך כל התפלגות נורמלית שבה ממוצע $\bar{x}$ וסטיית תקן S, לסטנדרטית נבצע:

1) הזזה של הגרף בממוצע $\bar{x}$.

2) חילוק הגרף בסטיית התקן S.

לתהליך הזה קוראים **סטנדרטיזציה של התפלגות נורמלית**.

ציון התקן:

גרף ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית מאופיין בממוצע 0 (על הציר האנכי) וסטיית תקן 1.
נסמן את הציר האופקי בגרף זה ב- z ונקרא לו **ציון התֶקֶן**.

מהו ציון התקן?

ציון התקן הוא מדד למיקום היחסי של התצפית, כלומר הוא למעשה בודק את המרחק של התצפית מהממוצע ביחס לפיזור בהתפלגות.
במילים אחרות, ציון התקן אומר עד כמה אני חריג בתוך האוכלוסייה שלי.

איך נחשב את ציון התקן?

כפי שראינו, נוכל לבצע סטנדרטיזציה לכל התפלגות נורמלית שנרצה ע"י שני השלבים שתיארנו מקודם. בהתאם לכך ציון התקן של תצפית מסוימת ניתן לחישוב לפי הנוסחה הבאה:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{\text{ציון ממוצע – ציון גולמי}}{\text{סטיית תקן}}$$

מסקנה:

לכל ציון גולמי, נתאים ציון תקן המתאר את המרחק שלו מן הממוצע ביחידת של סטיות תקן.

במילים אחרות, ציון התקן אומר לי בכמה סטיות תקן אני רחוק מהממוצע.

תכונות של ציון התקן:

1) ממוצע ציוני התקן שווה ל-0.

2) סטיית התקן של ציוני התקן שווה ל-1.

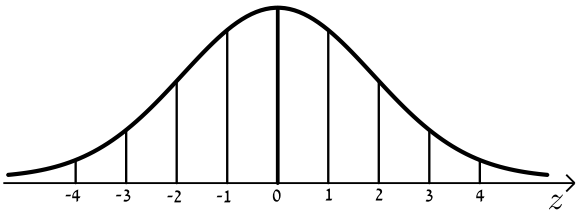
3) ציון התקן הוא גודל ללא מימד.

4) ציון תקן חיובי מעיד על ערך גולמי הנמצא מעל לממוצע.
ציון תקן שלילי מעיד על ערך גולמי הנמצא מתחת לממוצע.

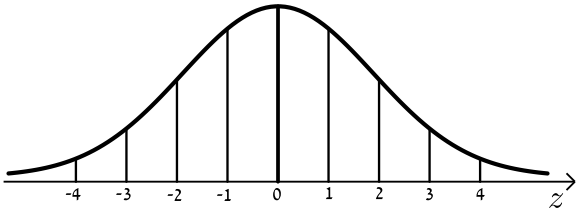
שאלות:

1) הגרף שלפניכם מתאר את עקומת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית.
התאימו לכל ציון תקן בתחום שבין 4- ל-4 ציון גולמי מתאים לכל אחד מהמקרים הבאים:

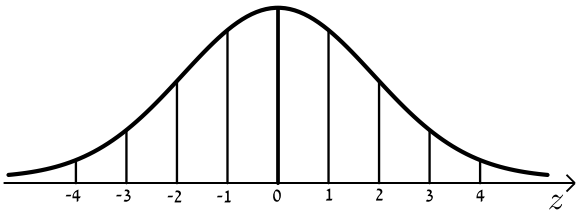
א. בכיתה נערך מבחן ובו התפלגות הציונים היא נורמלית עם ציון ממוצע של 60 וסטיית תקן של 4.



ב. גובהם של כל הזכרים, תושבי פקיסטן בגילאים 20-40 מתפלג נורמלית עם גובה ממוצע של 1.55 מטרים וסטיית תקן של 15 ס"מ.

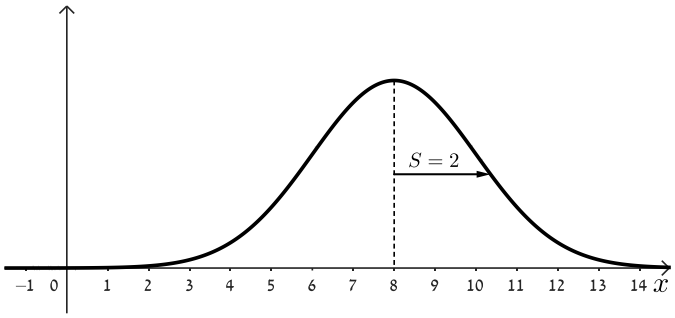


ג. משקלן של זברות בוגרות בסוואנה מקומית באפריקה מתפלג נורמלית עם משקל ממוצע של 400 ק"ג וסטיית תקן של 30 ק"ג.

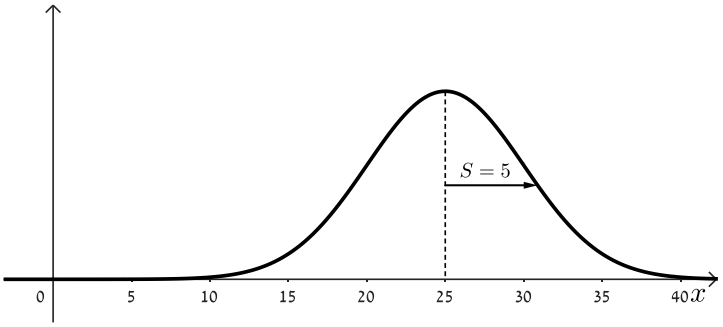


2) אלו פעולות יש לבצע בכל אחד מן המקרים הבאים על מנת לקבל התפלגות נורמלית סטנדרטית?

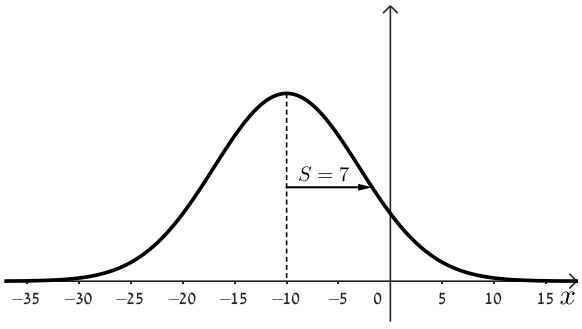
א.



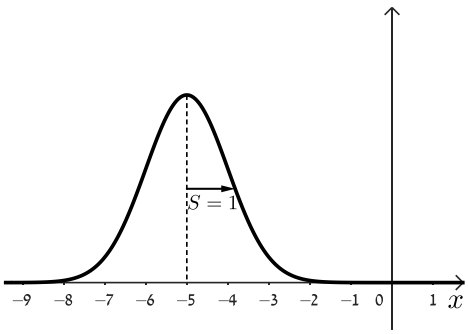
ב.



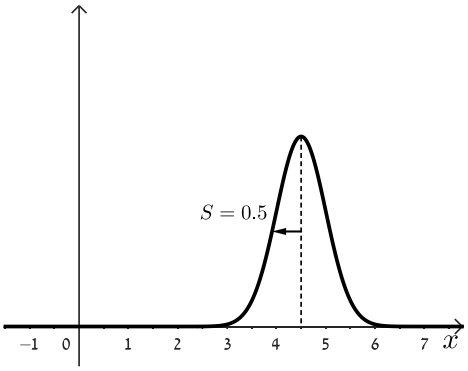
ג.



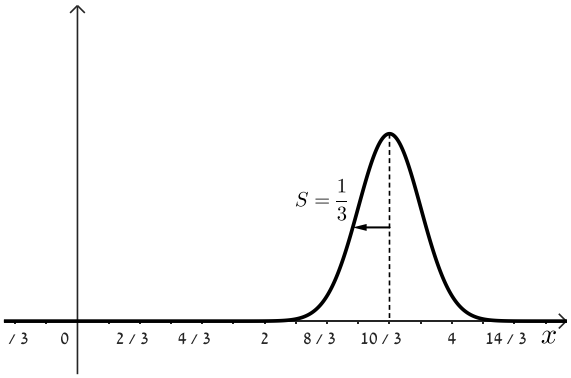
ד.



ה.



ו.



3) במועד הקיץ של הבגרות הארצית במתמטיקה לתלמידי 4 יחידות בשנת 2020 התפלגות הציונים היא נורמלית עם ממוצע של 72 נקודות וסטיית תקן של 5 נקודות.

א. גיל ניגש לבחינת הבגרות בשנה זו וקיבל ציון של 75.
מהו ציון התקן המתאים לגיל?

ב. נועה ניגשה גם היא לבחינה זו וקיבלה ציון של 70.
מהו ציון התקן המתאים לנועה?

4) חברת 'חטיפוני' מייצרת חטיף מאוד פופולרי במספר מדינות באירופה.
משקל החטיף מתפלג נורמלית עם משקל ממוצע של 80 גרם וסטיית תקן של 3 גרם.

א. מהו ציון התקן המתאים לחטיף שנבחר באופן מדגמי אשר משקלו הוא 81.8 גרם?

ב. מהו ציון התקן המתאים לחטיף שנבחר באופן מדגמי אשר משקלו הוא 77.6 גרם?

ג. מה יהיה משקלו של חטיף שנבחר באופן מדגמי אשר לו ציון תקן של:
(1) $z=1$ (2) $z=0.3$ (3) $z=-0.65$ (4) $z=-1.2$

ד. החברה מתחייבת לפצות לקוחות שקיבלו חטיף עם משקל הנמוך מ-75 גרם.
אלו ציוני תקן מתאימים למשקלם של חטיפים אשר יזכו את הלקוחות בפיצוי? נמקו.
(1) $z=0$ (2) $z=1.5$ (3) $z=-1$ (4) $z=-1.5$
(5) $z=-2$

5) רפי מנהל חווה חקלאית לגידול עגבניות הנמכרות בסיטונאות. בהצעת מחיר שהכין, נדרש רפי לציין את ההיקף הממוצע של העגבניות (בס"מ) ואת סטיית התקן של ההיקפים. מכיוון שחלק ממדידותיו אבדו, רפי אינו יכול לחשב את ההיקף הממוצע, אך הוא יודע שסטיית התקן של ההיקפים היא 0.8 ס"מ.

א. אם ידוע כי היקף עגבנייה מדגמית הוא 10.8 ס"מ וציון התקן המתאים לה הוא -1.25,
מהו ההיקף הממוצע של העגבניות?

ב. מהו ציון התקן של עגבנייה שהיקפה הוא 13.24 ס"מ?

ג. לקוח מסוים מבקש לרכוש מרפי עגבניות שהיקפן קטן מ-10.4 ס"מ.
לרפי יש מכונה מיוחדת שממיינת את העגבניות לפי היקפן. מאחר והמכונה מבצעת פעולות נוספות רבות, יש להזין אליה את ציון התקן המתאים להיקף העגבניות המרבי.
מהו ציון התקן שרפי צריך להזין למכונה?

6) באוכלוסייה מסוימת:
ציון התקן שמתאים לנתון 76 הוא z_1. ציון התקן שמתאים לנתון 70 הוא z_2.
ידוע כי: $z_1=3.5z_2$. חשבו את הממוצע.

7) במחקר מסוים תוצאות הממצאים מתפלגים נורמלית.
ידוע כי ערך של 46 מתאים לציון תקן z_1 וכי ערך של 55 מתאים לציון תקן z_2.

א. מה הוא ממוצע ערכי המחקר אם נתון כי: $z_1 = 2.2z_2$?

ב. על סמך ממציאכם מהסעיף הקודם, מה ניתן להגיד על הסימן של ציוני התקן z_1 ו- z_2?

ג. ידוע כי: $z_1 + z_2 = -4$. מה היא סטיית התקן?

8) בדקו את ההכנסה החודשית של תושבים בעיר מסוימת ומצאו כי היא מתפלגת נורמלית.
ידוע כי לציון תקן z_1 מתאימה הכנסה של 7000 ₪ וכי לציון תקן z_2 מתאימה הכנסה של 12000 ₪. נתון כי: $\frac{z_2}{z_1} = -4$.

א. מהי ההכנסה הממוצעת החודשית בעיר זו?

ב. האם אחת מן ההכנסות נמצאת מתחת להכנסה החודשית?

ג. ידוע כי ההכנסה החודשית שנמצאת מתחת לממוצע היא במרחק של 1.25 סטיות תקן מן הממוצע.
(1) מהי סטיית התקן של ההכנסה החודשית בעיר?
(2) מהו ערכו של ציון התקן השני?

9) ניר ניגש למבחני כניסה לאוניברסיטה: במתמטיקה ובפיזיקה.
הציונים של המבחנים התפלגו נורמלית.
הציון הממוצע במבחן במתמטיקה הוא 72 וסטיית התקן היא 5.
הציון הממוצע במבחן בפיזיקה הוא 67 וסטיית התקן היא 4.
ניר קיבל 79 במתמטיקה ו-74 בפיזיקה.
באיזה משני המבחנים הדרוג של ניר היה גבוה יותר בהשוואה לשאר הנבחנים?

10) שירן ניגשה למבחני כניסה לאוניברסיטה: במתמטיקה ובאנגלית.
הציונים של המבחנים התפלגו נורמלית.
הציון הממוצע במבחן במתמטיקה הוא 69 וסטיית התקן היא 6.
הציון הממוצע במבחן באנגלית הוא 74 וסטיית התקן היא 5.
שירן קיבלה 72 במתמטיקה ו-79 באנגלית.
באיזה משני המבחנים הדרוג של שירן היה גבוה יותר בהשוואה לשאר הנבחנים?

11) במדינה מסוימת נערכו שני מבחנים בידיעת השפה המקומית.
הציונים בכל אחד מהמבחנים התפלגו נורמלית.
ממוצע הנקודות במבחן א' הוא 77 וסטיית התקן 7 נקודות.
ממוצע הנקודות במבחן ב' הוא 73 וסטיית התקן 9 נקודות.

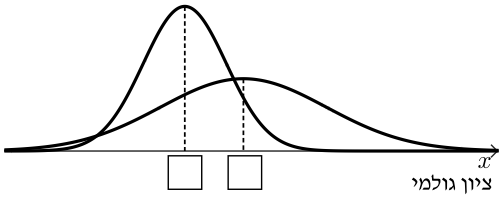
א. שרון ניגשה לשתי הבחינות וקיבלה בשתיהן אותו ציון: 83.
באיזה מבחן הצליחה שרון יותר ביחס לשאר התלמידים שנבחנו?

ב. גם אורטל ניגשה לשתי הבחינות ובשתיהן קיבלה אותו ציון: 91.
באיזה מבחן הצליחה אורטל יותר ביחס לשאר התלמידים שנבחנו?

ג. רעות, שלומדת ביחד עם שרון ואורטל ניגשה גם לשתי הבחינות
ובשתיהן קיבלה אותו ציון: 95.
באיזה מבחן הצליחה רעות יותר ביחס לשאר התלמידים שנבחנו?

לפניכם שני גרפים של התפלגות נורמלית המתאימים לתוצאות של כל אחת מהבחינות.

ד. (1) קבעו לאיזו בחינה מתאים כל גרף מבין I ו-II.
(2) השלימו את הערכים על ציר ה- x.



ה. הוסיפו את הציון של שרון למערכת הצירים
במקום המתאים, והסבירו מה ניתן להסיק
לגבי היחס בין השטחים הכלואים בין כל גרף
וציר ה- x עד לציון זה.

ו. חזרו על סעיף ה' עבור הציון של אורטל.

ז. חזרו על סעיף ה' עבור הציון של רעות.

12) לקראת בחינת הבגרות בבית הספר "השושנה" נערך מבחן מסכם.
נופר ונועה נבחנו במבחן. ציון התקן של נופר הוא 1.2 וציון התקן של נועה הוא 0.8-.

א. האם הציון שקיבלה נופר הוא מעל או מתחת לממוצע?
הציון שקיבלה נופר הוא 88 והציון שקיבלה נועה 68.

ב. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של ציוני כל התלמידים במבחן המסכם.
ידוע כי ציוני המבחן מתפלגים נורמלית.

ג. אורטל קיבלה ציון 88 במבחן המסכם.
האם מספר התלמידים שקיבלו ציון גבוה משל אורטל שווה למספר התלמידים שקיבלו
ציון נמוך משל נועה? הסבירו.

ד. ציון עובר במבחן המסכם הוא 60.
מספר התלמידים שקיבלו ציון נמוך מזה של עדי שווה למספר התלמידים שקיבלו ציון
גבוה מזה של נופר. האם עדי עברה את המבחן?

ה. במבחן מועד ב' קיבלה עדי ציון 62. ידוע כי הציונים במבחן זה מתפלגים נורמלית,
עם ממוצע 70 וסטיית תקן 16.
האם הישגה של עדי במבחן מועד ב', בהשוואה לשאר הנבחנים, טוב יותר או פחות
מהישגה במבחן הראשון? נמקו את תשובתכם.

13) מועצת רואי החשבון הארצית עורכת מבחני הסמכה מדי שנה במטרה להסמיך מועמדים למקצוע ראיית חשבון. למבחן שנערך בשנת 2023 ניגשו רוני ויובל וקיבלו ציוני תקן: רוני: 1.1, ויובל: 0.4-.

ידוע כי ציוני המבחן מתפלגים נורמלית. הציון שקיבל רוני הוא 80 והציון שקיבל יובל הוא 65.

א. האם הציון שקיבל יובל הוא מעל או מתחת לממוצע?

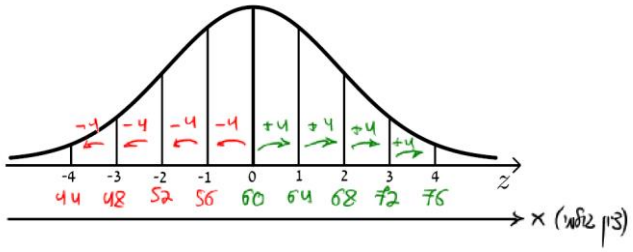
ב. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של ציוני כל המועמדים שניגשו לבחינה זו.

ג. שיר קיבלה ציון 73. האם מספר המועמדים שקיבלו ציון הגבוה משל שיר שווה למספר המועמדים שקיבלו ציון הנמוך ממנה? הסבירו.

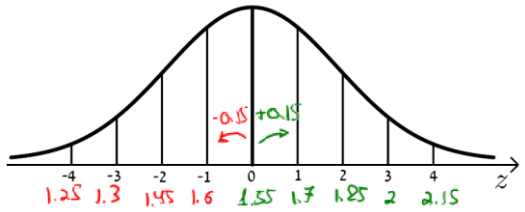
ד. המועצה החליטה כי כל המועמדים שקיבלו ציוני תקן הקטנים מ-(1.5-) לא זכאים לעבור את ההסמכה ועליהם לעשות מבחן חוזר.
האם אייל, שקיבל ציון 55, צריך לעשות מבחן חוזר?

תשובות סופיות:

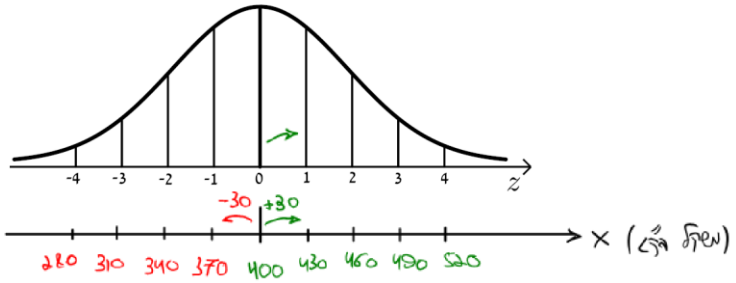
1) א.



ב.



ג.



2) א. נזיז את העקום 2 יחידות שמאלה ונחלק פי 2.

ב. נזיז את העקום 25 יחידות שמאלה ונחלק פי 5.

ג. נזיז את העקום 10 יחידות ימינה ונחלק פי 7.

ד. נזיז את העקום 5 יחידות ימינה.

ה. נזיז את העקום 4.5 יחידות שמאלה ונחלק פי 0.5.

ו. נזיז את העקום $3\frac{1}{3}$ יחידות שמאלה ונחלק פי $\frac{1}{3}$.

3) א. $z = 0.6$ ב. $z = -0.4$

4) א. $z = 0.6$ ב. $z = -0.8$

ג. (1) 83 גרם ג. (2) 80.9 גרם ג. (3) 78.05 גרם ג. (4) 76.4 גרם

ד. חטיף 5 מתאים.

5) א. $\bar{x} = 11.8$ ס"מ ב. $z = 1.8$ ג. $z = -0.8$

6) $\bar{x} = 67.6$

7) א. $\bar{x} = 62.5$ ב. שליליים ג. $S = 6$

8) א. $\bar{x} = 11000$ ב. כן ג. (1) 3200 ש"ח $= S$ ג. (2) $z = 0.3125$

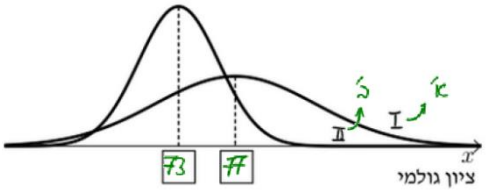
9) במבחן בפיזיקה

10) במבחן באנגלית

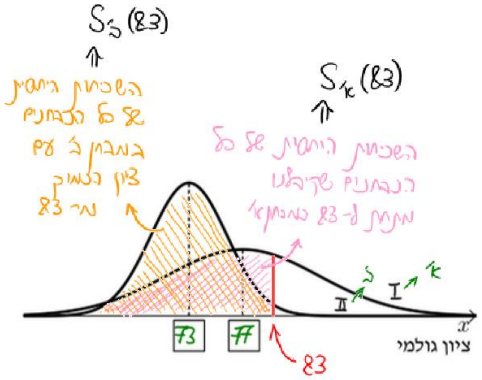
11) א. במבחן ב' ב. במידה שווה ג. במבחן א'

ד. (1) גרף 1 – מבחן א', גרף 2 – מבחן ב'

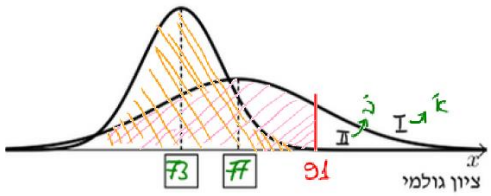
ד. (2)



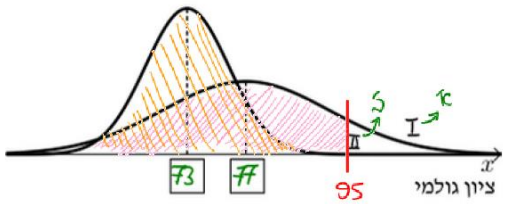
ה.



ו.



ז.



12) א. מעל הממוצע ב. $\bar{x} = 76$, $S = 10$ ג. לא ד. כן ה. עדי הצליחה יותר במועד ב'.

13) א. מתחת לממוצע ב. $\bar{x} = 69$, $S = 10$ ג. לא ד. לא.

טבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית:

סיכום כללי:

טבלת ההתפלגות הנורמלית סטנדרטית (0,1):

בעזרת הטבלה נוכל למצוא את השטח הכלוא בין גרף ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לבין ציר ה- z.

מה השטח נתון לנו?

השטח שמצאנו הוא **השכיחות היחסית** של כל ציוני התקן הנמצאים מתחת לציון התקן אותו בחרנו. אנו נתייחס לשטח הזה גם בתור **ההסתברות לקבל ציון תקן נמוך** מהערך שלנו.

סימון:

את הערכים שהטבלה נותנת נסמן ב- Φ.
נניח וציון תקן z_x מתאים לציון גולמי x, אז ההסתברות לקבל ערך הנמוך מ- z_x תסומן: $P(z<z_x)$ והיא שווה ל- $\Phi(z_x)$, כלומר: $P(z<z_x)=\Phi(z_x)$

מציאת הסתברות מתוך טבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית (0,1):

- אם נרצה למצוא את ההסתברות להיות **מעל** לציון תקן מסוים, נחשב את ההסתברות המתאימה מן הטבלה ונשלים אותה ל-1 (מאורע משלים): $P(z>z_x)=1-P(z<z_x)$.
- כדי למצוא את ציון התקן z_x המתאים להסתברות כלשהי שעבורה כל הערכים נמוכים ממנו, נתחיל במציאת הערך המתאים לו ביותר בטבלת ההתפלגות הסטנדרטית.
  לאחר מכן נמצא את הציון הגולמי x.
  אם נרצה למצוא ציון תקן z_x המתאים להסתברות כלשהי שעבורה כל הערכים גבוהים ממנו, נמצא תחילה את ההסתברות עבור הערכים הנמוכים ממנו ואז נשלים את ההסתברות ל-1.

בעמוד הבא מופיעה טבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית (0,1) כפי שנלמדת ומוסברת בסרטוני הוידאו באתר גול:

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0046	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0135	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0227	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0350	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0550	0.0540	0.0530	0.0520	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0670	0.0650	0.0640	0.0630	0.0620	0.0610	0.0590	0.0580	0.0570	0.0560
-1.4	0.0810	0.0790	0.0780	0.0760	0.0750	0.0740	0.0720	0.0710	0.0690	0.0680
-1.3	0.0970	0.0950	0.0930	0.0920	0.0900	0.0890	0.0870	0.0850	0.0840	0.0820
-1.2	0.1150	0.1130	0.1110	0.1090	0.1070	0.1060	0.1040	0.1020	0.1000	0.0980
-1.1	0.1360	0.1340	0.1310	0.1290	0.1270	0.1250	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1590	0.1560	0.1540	0.1520	0.1490	0.1470	0.1450	0.1420	0.1400	0.1380
-0.9	0.1840	0.1810	0.1790	0.1760	0.1740	0.1710	0.1680	0.1660	0.1630	0.1610
-0.8	0.2120	0.2090	0.2060	0.2030	0.2000	0.1980	0.1950	0.1920	0.1890	0.1870
-0.7	0.2420	0.2390	0.2360	0.2330	0.2300	0.2270	0.2240	0.2210	0.2180	0.2150
-0.6	0.2740	0.2710	0.2680	0.2640	0.2610	0.2580	0.2550	0.2510	0.2480	0.2450
-0.5	0.3080	0.3050	0.3010	0.2980	0.2950	0.2910	0.2880	0.2840	0.2810	0.2780
-0.4	0.3450	0.3410	0.3370	0.3340	0.3300	0.3260	0.3230	0.3190	0.3160	0.3120
-0.3	0.3820	0.3780	0.3750	0.3710	0.3670	0.3630	0.3590	0.3560	0.3520	0.3480
-0.2	0.4210	0.4170	0.4130	0.4090	0.4050	0.4010	0.3970	0.3940	0.3900	0.3860
-0.1	0.4600	0.4560	0.4520	0.4480	0.4440	0.4400	0.4360	0.4320	0.4290	0.4250
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4800	0.4760	0.4720	0.4680	0.4640
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5200	0.5240	0.5280	0.5320	0.5360
0.1	0.5400	0.5440	0.5480	0.5520	0.5560	0.5600	0.5640	0.5680	0.5710	0.5750
0.2	0.5790	0.5830	0.5870	0.5910	0.5950	0.5990	0.6030	0.6060	0.6100	0.6140
0.3	0.6180	0.6220	0.6250	0.6290	0.6330	0.6370	0.6410	0.6440	0.6480	0.6520
0.4	0.6550	0.6590	0.6630	0.6660	0.6700	0.6740	0.6770	0.6810	0.6840	0.6880
0.5	0.6920	0.6950	0.6990	0.7020	0.7050	0.7090	0.7120	0.7160	0.7190	0.7220
0.6	0.7260	0.7290	0.7320	0.7360	0.7390	0.7420	0.7450	0.7490	0.7520	0.7550
0.7	0.7580	0.7610	0.7640	0.7670	0.7700	0.7730	0.7760	0.7790	0.7820	0.7850
0.8	0.7880	0.7910	0.7940	0.7970	0.8000	0.8020	0.8050	0.8080	0.8110	0.8130
0.9	0.8160	0.8190	0.8210	0.8240	0.8260	0.8290	0.8320	0.8340	0.8370	0.8390
1.0	0.8410	0.8440	0.8460	0.8480	0.8510	0.8530	0.8550	0.8580	0.8600	0.8620
1.1	0.8640	0.8660	0.8690	0.8710	0.8730	0.8750	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8850	0.8870	0.8890	0.8910	0.8930	0.8940	0.8960	0.8980	0.9000	0.9020
1.3	0.9030	0.9050	0.9070	0.9080	0.9100	0.9110	0.9130	0.9150	0.9160	0.9180
1.4	0.9190	0.9210	0.9220	0.9240	0.9250	0.9260	0.9280	0.9290	0.9310	0.9320
1.5	0.9330	0.9350	0.9360	0.9370	0.9380	0.9390	0.9410	0.9420	0.9430	0.9440
1.6	0.9450	0.9460	0.9470	0.9480	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9650	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9954	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

שאלות:

1) מצאו בטבלת ההתפלגות הסטנדרטית המצטברת את גודל השטח הנמצא משמאל לציון התקן הנתון:

א.	$z=1.23$	ב.	$z=1.86$	ג.	$z=0.25$	ד.	$z=0.33$
ה.	$z=-0.66$	ו.	$z=-1$	ז.	$z=-1.5$	ח.	$z=-1.26$
ט.	$z=2.23$	י.	$z=-2.23$				

2) היעזרו בטבלת ההתפלגות הסטנדרטית המצטברת וחשבו את:

א.	$P(z<1.45)$	ב.	$P(z<1.45)$	ג.	$P(z<2.01)$
ד.	$P(z<-0.24)$	ה.	$P(z<2.89)$		

3) מצאו בטבלת ההתפלגות הסטנדרטית המצטברת את גודל השטח הנמצא מימין לציון התקן הנתון:

א.	$z=1.23$	ב.	$z=1.86$	ג.	$z=0.25$	ד.	$z=0.33$
ה.	$z=-0.66$	ו.	$z=-1$	ז.	$z=-1.5$	ח.	$z=-1.26$
ט.	$z=2.23$	י.	$z=-2.23$				

4) ציוני בחינות בית ספר גדול מתפלגים נורמלית.
הציון הממוצע הוא 70 וסטיית התקן היא 4.

א. מהו חציון הציונים של הבחינה? נמקו.
ב. מה הסיכוי לבחור תלמיד שציונו גדול מ-70?
ג. מה הסיכוי לבחור תלמיד שציונו גדול מ-75?
ד. מה הסיכוי לבחור תלמיד שציונו גדול מ-81?
ה. מה הסיכוי לבחור תלמיד שציונו קטן מ-65?
ו. מה הסיכוי לבחור תלמיד שציונו קטן מ-61?
ז. תלמיד נחשב למצטיין אם קיבל ציון הגדול מ-77.
מה הוא אחוז התלמידים המצטיינים בבחינה?
ח. מה הסיכוי לבחור תלמיד שציונו הוא בין 68 ל-73?

5) אורך החיים של נורת חשמל מתפלג נורמלית עם ממוצע של 900 שעות וסטיית תקן של 50 שעות.

א. מה הוא אחוז הנורות שדולקות פחות מ-862 שעות?

ב. מה אחוז הנורות שדולקות מעל ל-960 שעות?

ג. מה ההסתברות שנורה תדלוק מעל ל-960 שעות?

ד. מה ההסתברות שנורה תדלוק בין 862 שעות ל-960 שעות?

6) משקלן של ביצים במשק מסוים מתפלג נורמלית עם ממוצע של 34 גרם לביצה.
ידוע כי 23% מהביצים שוקלות מעל ל-38.625 גרם.

א. מהי סטיית התקן של התפלגות משקל הביצים במשק?

ב. מה היא השכיחות היחסית של הביצים במשק שמשקלן בין 32 גרם ל-40 גרם?

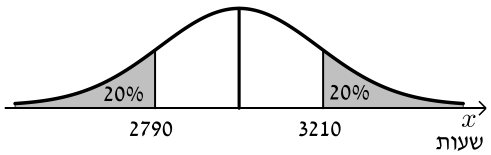
7) המחירים של נעלי ספורט מתפלגים נורמלית.
שרון קנתה זוג נעלי ספורט ומתברר כי 61.8% מנעלי הספורט זולים מהם.

א. מצאו את ציון התקן של מחיר נעלי הספורט ששרון בחרה.

ב. ידוע כי שרון שילמה על זוג הנעלים 466 ₪ וכי המחיר הממוצע של נעלי ספורט הוא 460 ₪. מהי סטיית התקן?

ג. שני, אחותה של שרון, בחרה זוג נעלי ספורט איכותיות במיוחד ש-2.87% מנעלי הספורט יקרות מהן. מה הוא המחיר ששני שילמה בעבור זוג נעלי הספורט שרכשה?

8) אורך החיים בשעות של מכונות כביסה היוצאות ממפעל מסוים מתפלג נורמלית ומתואר לפי הגרף הבא:



א. מה הוא אורך החיים הממוצע של מכונת הכביסה בשעות?

ב. מהי סטיית התקן של התפלגות אורך החיים של מכונת הכביסה בשעות?

ג. ידוע כי מכונת כביסה מסוימת פעלה במשך 3500 שעות.

(1) מה הוא אחוז מכונות הכביסה שעשויות להתקלקל לפני מכונת הכביסה הזו?

(2) מה הוא אחוז מכונות הכביסה שעשויות להחזיק יותר זמן מאשר מכונת כביסה זו?

תשובות סופיות:

1) א. 0.891 ב. 0.9685 ג. 0.599 ד. 0.629
ה. 0.255 ו. 0.159 ז. 0.067 ח. 0.104
ט. 0.9871 י. 0.0129.

2) א. 0.926 ב. 0.074 ג. 0.9778
ד. 0.405 ה. 0.9981.

3) א. 0.109 ב. 0.0314 ג. 0.401 ד. 0.371
ה. 0.745 ו. 0.841 ז. 0.933 ח. 0.896
ט. 0.0129 י. 0.9871.

4) א. 70 ב. $\frac{1}{2}$ ג. 0.106 ד. 0.003 ה. 0.106 ו. 0.0122
ז. 4% ח. 0.465.

5) א. 22.4% ב. 11.5% ג. 0.115 ד. 0.661.

6) 6.25 גרם = S ב. 0.457.

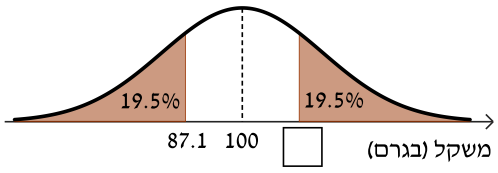
7) א. 0.3 = z ב. 20 ₪ = s ג. 498 ₪.

8) א. 3000 שעות = $\bar{x}$ ב. 250 שעות = S ג. (1) 97.73% ג. (2) 2.27%.

שאלות מסכמות:

שאלות:

1) משקלם של תפוזים מתפלג נורמלית.



א. היעזרו בנתונים שבסרטוט וקבעו מהו המשקל החסר בסרטוט ומהי סטיית התקן של משקל התפוזים.

משדה חקלאי נאספו 8000 תפוזים.

5.5% מהתפוזים הגדולים ביותר נחשבים איכותיים במיוחד בשל גודלם.

ב. (1) מצאו את מספר התפוזים האיכותיים ביותר.

(2) מה משקלו המינימלי של תפוז שיכול להיחשב איכותי במיוחד?

חקלאים הצליחו להגדיל את משקלם של התפוזים ב-24%.

ג. מהו הממוצע החדש ומהי סטיית התקן החדשה של משקל התפוזים לאחר ההגדלה?

ד. איזה מבין המשפטים הבאים אינו נכון? נמקו.

(1) אחוז התפוזים שנחשבים לאיכותיים במיוחד בשל גודלם (5.5%) נשאר זהה גם לאחר ההגדלה של משקלם.

(2) המשקל המינימלי של תפוז שיכול להיחשב איכותי במיוחד נשאר זהה גם לאחר ההגדלה של משקל התפוזים.

(3) המשקל המינימלי של תפוז שנחשב איכותי במיוחד לפני ההגדלה, גדל ב-24% לאחר ההגדלה של משקל התפוזים.

2) משקל בורקס בבית מאפה גדול מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 גרם ליחידה וסטיית תקן של 8 גרם. בית המאפה מתמחר את הבורקסים לפי משקלם באופן הבא:

1. בורקסים עם משקל הגדול מ-50 גרם יימכרו במחיר של 55 ₪ לקילוגרם.
2. בורקסים עם משקל בין 34 גרם ל-50 גרם יימכרו במחיר של 48 ₪ לקילוגרם.
3. בורקסים עם משקל הקטן מ-34 גרם אינם מיועדים למכירה.

א. (1) מהו אחוז הבורקסים שאינם מיועדים למכירה?

(2) מהו אחוז הבורקסים שנמכרים לפי 55 ₪ לקילוגרם?

משקל קרואסון בבית המאפה מתפלג נורמלית עם סטיית תקן זהה לזו של הבורקס.

ידוע כי $\frac{33}{100}$ ממשקל הקרואסונים בבית המאפה נמוך מ-40 גרם.

ב. מהו המשקל השכיח של קרואסון?

בית המאפה החליט להוסיף תוספת מילוי מדויקת של 6.48 גרם לכל הקרואסונים.

לאחר מדידה מחדש של משקל הקרואסונים הוחלט כי קרואסונים שמשקלם נמצא במרחק הגדול מ-1.2 סטיות תקן מהמשקל הממוצע לא יימכרו.

ג. (1) מהו טווח המשקל של קרואסון הנחשב תקין למכירה?

(2) איזה אחוז מהקרואסונים שבית המאפה הכין יימכרו?

בית המאפה הכין 2000 קרואסונים בסך הכל.

ד. (1) בהנחה כי המחיר ליחידת קרואסון הוא 2 ₪, כמה כסף הכניס בית המאפה ממכירת הקרואסונים?

(2) בהנחה כי המחיר הוא 35 ₪ לקילוגרם, כמה כסף הכניס בית המאפה ממכירת הקרואסונים?

3) משקלו של קואלה בוגר המתגורר **במזרח** אוסטרליה מתפלג נורמלית עם משקל ממוצע של 12 ק"ג. ידוע כי 96.78% מהקואלות במזרח אוסטרליה שוקלים פחות מ-19.4 ק"ג.

א. מצאו את סטיית התקן של משקל הקואלות במזרח אוסטרליה.

משקלה של קוקו הקואלה גבוה ממשקלם של 10% מהקואלות במזרח אוסטרליה.

ב. מצאו את משקלה של קוקו הקואלה.

בינקי הקואלה נולד **במערב** אוסטרליה ומשקלו זהה למשקלה של קוקו.

משקל הקואלות במערב אוסטרליה מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 6.5 ק"ג.

המשקל של קוקו ובינקי מתאים לציון תקן זהה בהתפלגויות המתאימות.

ג. מצאו את המשקל הממוצע של הקואלות במערב אוסטרליה.

4) מפעל אריזה מקבל משלוחים של גזרים מדי יום וממיין אותם על-פי אורכם.
האורכים של גזרים מתפלג נורמלית עם ממוצע של 14 ס"מ וסטיית תקן של 5 ס"מ.
חלוקת הגזרים מתבססת על אורכם לפי הקטגוריות הבאות:
1. גזרים שאורכם קטן מ-11.7 ס"מ נארזים בקופסאות שימורים קטנות.
2. גזרים שאורכם גדול מ-11.7 ס"מ אך קטן מ-17.3 ס"מ נארזים בשקיות שומרות טריות.
3. גזרים שאורכם גדול מ-17.3 ס"מ נתרמים לעמותות שונות.

א. מה הוא אחוז הגזרים שנארזים בשקיות שומרות טריות?

יצרן הפלסטיק שעובד עם המפעל ומספק לו את שקיות האריזה, שינה את מידות השקיות.
כעת ניתן לארוז גזרים בשקיות לפי הכללים הבאים:
- רבע מן הגזרים הקצרים ביותר אשר מיועדים לאריזה בשקיות, ייארזו בשקית במידה S.
- יתר הגזרים אשר מיועדים לאריזה בשקיות, ייארזו בשקיות במידה L.

ב. (1) מה הוא אחוז הגזרים שנארזו בשקיות במידה S מכלל הגזרים?

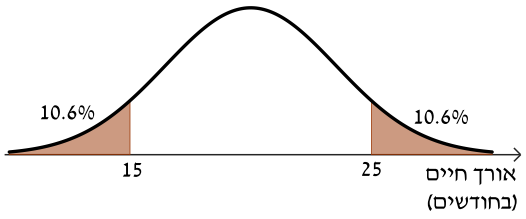
(2) מהו אורכו של גזר הגדול ביותר מבין הגזרים שנארזים בשקיות במידה S?

קייטרינג מקומי קיבל מספר שקיות אריזה ומספר קופסאות שימורים מהמפעל.
בבדיקה שערכו בקייטרינג מתברר כי אורכי הגזרים מתפלגים נורמלית וכעת:
- 50% מהגזרים קצרים מ-12 ס"מ.
- 23% מהגזרים ארוכים מ-15.7 ס"מ.

ג. (1) מהו האורך הממוצע של גזר בקייטרינג?

(2) מהי סטיית התקן של אורכי הגזרים בקייטרינג?

5) חברת אלקטרוניקה מייצרת טאבלטים שאורך חייהם מתפלג נורמלית.
בגרף שלפניכם מוצגת התפלגות אורך החיים (בחודשים) של טאבלט טיפוסי מתוצרת החברה, עם חלק מהנתונים המספריים.



א. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של אורך חיי הטאבלטים.

טאבלט מוגדר כפגום אם אורך חייו נמצא בין 4.75% הנמוכים ביותר בהתפלגות.

ב. מהו אורך החיים המרבי (בחודשים) של טאבלט שעדיין נחשב פגום?

החברה מייצרת 6,000 טאבלטים בחודש.

ג. על סמך הגרף, קבעו כמה מהטאבלטים המיוצרים בחודש יפעלו למשך יותר מ-22 חודשים.

החברה פיתחה דגם חדש של טאבלטים המצויד בסוללה בטכנולוגיה מתקדמת, המאריכה את חיי המכשיר פי 1.6.

ד. (1) חשבו את אורך החיים הממוצע ואת סטיית התקן של הדגם החדש.

(2) מהו אחוז הטאבלטים בדגם החדש שאורך חייהם קצר מ-16 חודשים?

תשובות סופיות:

1) א. 112.9 גרם, 15 גרם = S

ב. (1) 440 תפוזים

ב. (2) 124 גרם

ג. 124 גרם = $\bar{x}$, 18.6 גרם = S

ד. משפט 2 אינו נכון.

2) א. (1) 22.7%

א. (2) 10.6%

ב. 43.52 גרם = $\bar{x}$

ג. (1) $[40.4 : 59.6]$ גרם

ג. (2) 77%

ד. (1) 3080 ₪

ד. (2) 2695 ₪.

3) א. 4 ק"ג

ב. 6.88 ק"ג

ג. 15.2 ק"ג = $\bar{x}$

4) א. 42.2%

ב. (1) 10.55%

ב. (2) 13.1 ס"מ

ג. (1) 12 ס"מ

ג. (2) 5 ס"מ.

5) א. 20 = $\bar{x}$, 4 = S

ב. 13.32 חודשים

ג. 1848 טאבלטים

ד. (1) 32 = $\bar{x}$, 6.4 חודשים = S

ד. (2) 0.62%.

שאלון 471

רגרסיה ליניארית

תוכן העניינים:

רגרסיה ליניארית 586

הגדרות ומושגים בסיסיים: 587

סיכום כללי: 587

שאלות: 588

תשובות סופיות: 592

עיקרון מקדם המתאם: 593

סיכום כללי: 593

שאלות: 593

תשובות סופיות: 594

קווי ממוצעים ומכפלות ההפרשים: 595

סיכום כללי: 595

שאלות: 596

תשובות סופיות: 598

נוסחת מקדם המתאם: 599

סיכום כללי: 599

שאלות: 600

תשובות סופיות: 603

קו הרגרסיה: 604

סיכום כללי: 604

שאלות: 605

תשובות סופיות: 609

טרנספורמציות של קו הרגרסיה: 610

סיכום כללי: 610

שאלות: 611

תשובות סופיות: 614

הגדרות ומושגים בסיסיים:

סיכום כללי:

הגדרה:

דיאגרמת פיזור היא ייצוג גרפי במערכת צירים xy המציגה קבוצת נקודות, כאשר כל נקודה מייצגת תצפית בודדת על זוג משתנים. המשתנה הראשון מיוצג על ציר ה-x, והמשתנה השני מיוצג על ציר ה-y.
כל נקודה בגרף מבטאת את הערכים שנמדדו לאותה תצפית בשני המשתנים.
מטרת הדיאגרמה היא לאפשר זיהוי חזותי של קשרים, מגמות ודפוסים סטטיסטיים בין שני המשתנים.

קשר חיובי: כש-x עולה, ה-y גם עולה.

קשר שלילי: כש-x עולה, ה-y יורד.

קשר מושלם: הנקודות בגרף יוצרות קו ישר מדויק לחלוטין, ללא שום סטיות.
כל שינוי ב-x גורם לשינוי צפוי ומדויק ב-y.

אי-קיום קשר: אין שום דפוס או קשר בין המשתנים x ו-y.
הנקודות בגרף מפוזרות באופן אקראי.

ענן תצפיות: הצורה הכללית שיוצרות כל הנקודות יחדיו כשמסתכלים על דיאגרמת פיזור בצורה כללית. אפשר להתייחס לענן כאל מעטפה שעוטפת את כל הנקודות.

חוזק של קשר ליניארי:
החוזק של קשר ליניארי בדיאגרמת פיזור מתבטא במידת הקרבה של הנקודות לקו ישר. ככל שפיזור הנקודות הולך ומתקרב לצורת ישר עולה או ישר יורד, נאמר כי עוצמת הקשר גדולה יותר. מצד שני, ככל שהנקודות הולכות ומתרחקות מישר עולה או ישר יורד, נאמר כי עוצמת הקשר חלשה יותר.

שאלות:

1) לפניכם 4 דיאגרמות פיזור שונות.

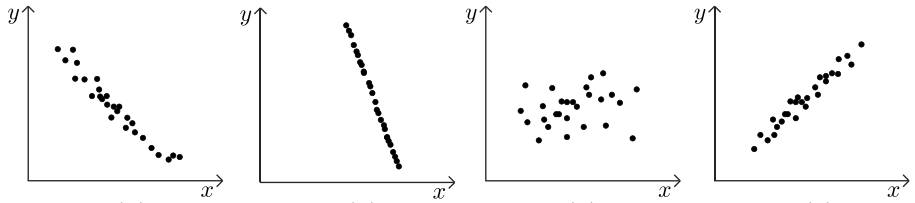
התאימו לכל דיאגרמה תיאור אפשרי ונמקו את בחירתכם:

א. מספר החיסורים של תלמידים במהלך השנה אל מול הציון הסופי שלהם בבחינת הבגרות במתמטיקה.

ב. מספר הנפשות במשפחה אל מול ההוצאה החודשית הממוצעת שלהם על מזון.

ג. מחיר את 1 ק"ג עגבניות אל מול מספר הקילוגרמים שניתן לקנות ב-100 ₪.

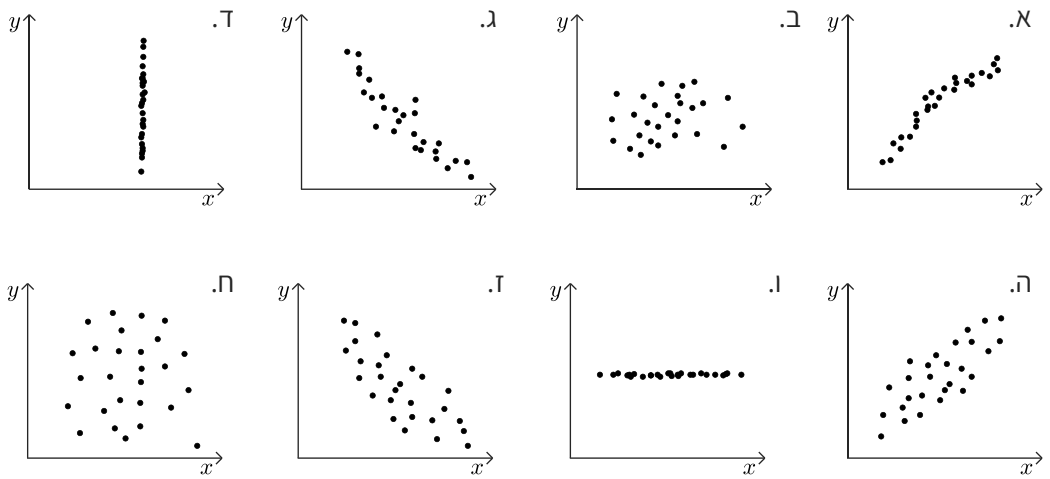
ד. מספר שעות צפייה היומית באפליקציית TikTok אל מול הגובה של המשתמש.



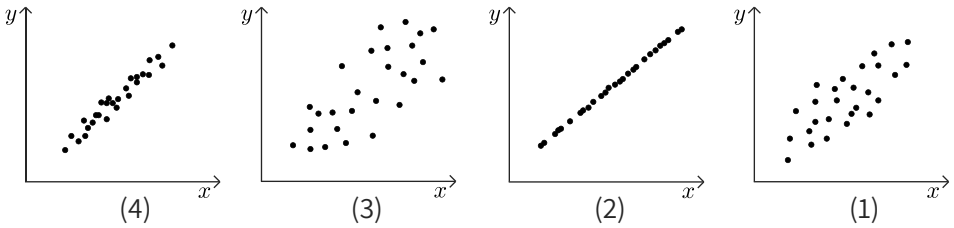
2) התבוננו בדיאגרמות הפיזור שלפניכם וציינו באילו מהן קיים קשר בין x ו-y.

סדרו את דיאגרמות הפיזור המתארות קשר חיובי לפי עוצמת הקשר – מהחלש לחזק.

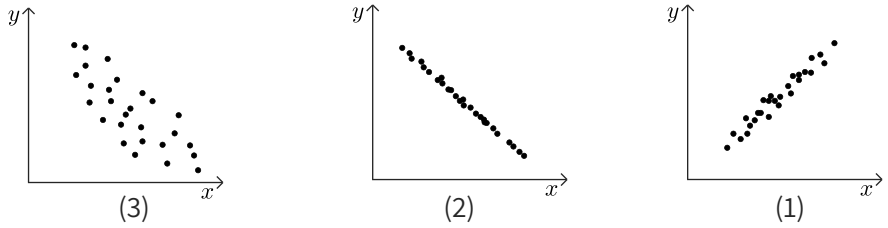
סדרו את דיאגרמות הפיזור המתארות קשר שלילי לפי עוצמת הקשר – מהחלש לחזק.



3) דרגו את דיאגרמות הפיזור הבאות מהדיאגרמה שבה הקשר החזק ביותר לדיאגרמה שבה הקשר החלש ביותר.



4) לפניכם 3 דיאגרמות פיזור. קבעו אלו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו אינם נכונים. נמקו.



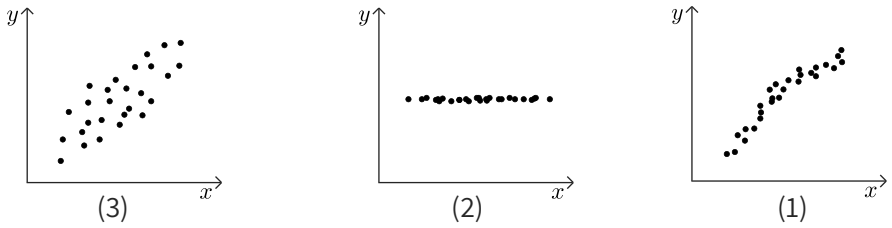
א. בדיאגרמה (1), ככל שערכי ה-x גדלים, כך גם ערכי ה-y גדלים.

ב. בדיאגרמה (2) הקשר הסטטיסטי חזק יותר מאשר בדיאגרמה (3).

ג. כל הדיאגרמות מתארות קשר חיובי.

ד. אחת מהדיאגרמות מתארת קשר מושלם.

5) לפניכם 3 דיאגרמות פיזור. קבעו אלו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו אינם נכונים. נמקו.



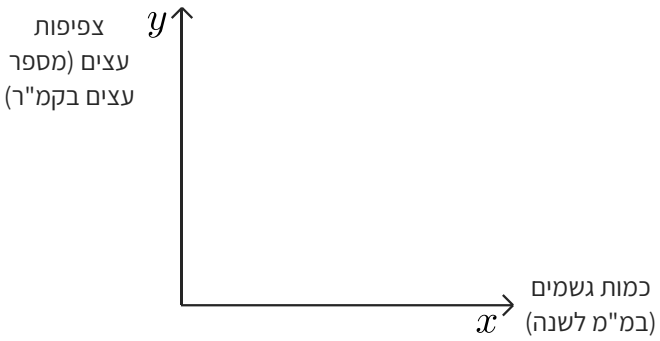
א. בדיאגרמה (2), ככל שערכי x קטנים יותר, כך ערכי y גדולים יותר.

ב. דיאגרמות (1) ו-(3) מתארות את אותו סוג הקשר הסטטיסטי.

ג. כל הדיאגרמות מתארות קשר חיובי.

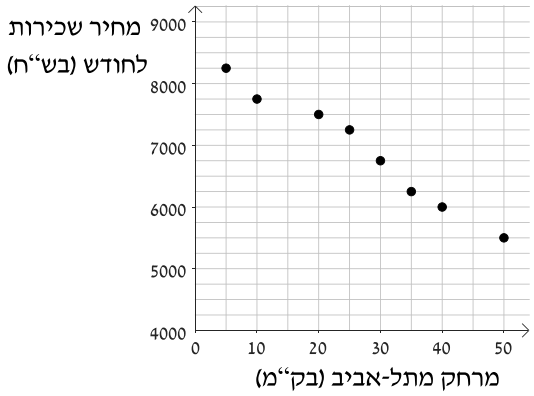
ד. אחת מהדיאגרמות מתארת קשר מושלם.

6) במחקר אקולוגי שנערך ב-6 אזורי יער שונים בישראל, נבדק הקשר בין כמות הגשמים השנתית לצפיפות העצים באזור. הטבלה הבאה מתארת את ממצאי תוצאות המחקר.
השלימו את דיאגרמת הפיזור לפי הערכים הנתונים בטבלה.



כמות גשמים (במ"מ לשנה)	צפיפות עצים (מספר עצים בקמ"ר)
280	185
630	520
420	310
350	240
560	445
490	375

7) במחקר כלכלי שנערך ב-6 ערים שונות בישראל, נבדק הקשר בין מחיר השכירות הממוצע לבין מרחק מתל אביב. לפניכם דיאגרמת פיזור מתאימה - היעזרו בה ומלאו את הטבלה:



מרחק מתל-אביב (בק"מ)	מחיר שכירות לחודש (ב-₪)

8) במחקר תזונתי שנערך במרכז רפואי ילדים, נבדק הקשר בין שעות השינה הלילי לבין רמת הריכוז בבוקר אצל תלמידי כיתה ו', כאשר רמת ריכוז 0 היא הנמוכה ביותר ו-100 היא הגבוהה ביותר.

תוצאות המחקר:

חוקרים בדקו 8 ילדים במשך שבוע אחד וקיבלו את התוצאות הבאות:

- שרה ישנה 7 שעות ורמת הריכוז שלה הייתה 65 נקודות.
- דני ישן 11 שעות וקיבל 90 נקודות ריכוז.
- מיכל ישנה 6 שעות עם 55 נקודות ריכוז.
- תום ישן 9 שעות וקיבל 80 נקודות ריכוז.
- נועה ישנה 8 שעות עם 70 נקודות ריכוז.
- יוסי ישן 10 שעות וקיבל 85 נקודות ריכוז.
- ליה ישנה 5 שעות ורמת הריכוז שלה הייתה 45 נקודות ריכוז.
- אלון ישן 12 שעות וקיבל 95 נקודות ריכוז.

א. ארגנו את הנתונים בטבלה מסודרת עם שתי עמודות: שעות שינה ורמת ריכוז.

ב. ציירו דיאגרמת פיזור מתאימה.

ג. האם סדר הנתונים בטבלה ישפיע על צורת הדיאגרמה? נמקו.

ד. איזה סוג קשר ניתן לזהות בין שעות השינה לרמת הריכוז? נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. דיאגרמה 4 ב. דיאגרמה 1 ג. דיאגרמה 3 ד. דיאגרמה 2.

2) קשר חיובי מהחלש לחזק: ה', א' קשר שלילי מהחלש לחזק: ז', ג'.

3) 3, 1, 4, 2 (כאשר 3 החלש ביותר).

4) א. נכון ב. נכון ג. לא נכון ד. לא נכון.

5) א. לא נכון ב. נכון ג. לא נכון ד. לא נכון.

6) ראו פתרון בסרטון הוידאו.

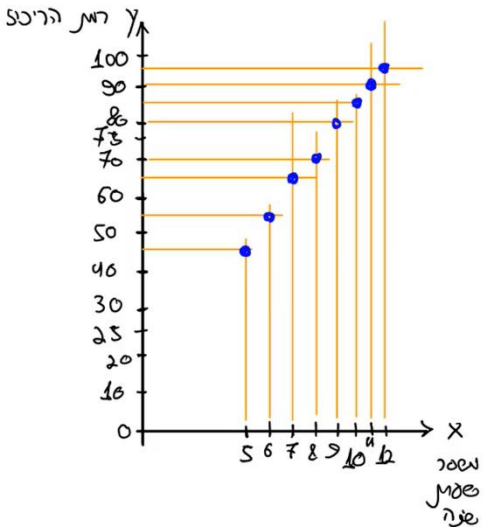
7) להלן טבלה:

מחיר שכירות לחודש (ב-₪)	מרחק מתל-אביב (בק"מ)
8250	5
7750	10
7500	20
7250	25
6750	30
6250	35
6000	40
5500	50

8) א. להלן טבלה:

שעות שינה	רמת ריכוז
4	65
7	90
6	55
9	80
8	70
10	85
5	45
12	95

ב. להלן דיאגרמת פיזור:



ג. לא, אין חשיבות לסדר הטבלה. ד. כן, קשר חיובי.

עיקרון מקדם המתאם:

סיכום כללי:

מקדם פירסון r: (מקדם המתאם)

מדד טהור (חסר יחידות) המאפשר להעריך את סוג הקשר הליניארי (חיובי או שלילי) ועוצמתו.
מקדם פירסון יימצא בתחום: $-1 \le r \le 1$ כאשר:
- עבור $r = 1$ מתקבל קשר ליניארי חיובי מושלם.
- עבור $0 < r < 1$ מתקבל קשר ליניארי חיובי, כאשר ככל ש-r גדול יותר כך עוצמת הקשר גדלה.
- עבור $r = 0$ אין קשר ליניארי כלל.
- עבור $-1 < r < 0$ מתקבל קשר ליניארי שלילי, כאשר ככל ש-r קטן יותר כך עוצמת הקשר גדלה.
- עבור $r = -1$ מתקבל קשר ליניארי שלילי מושלם.

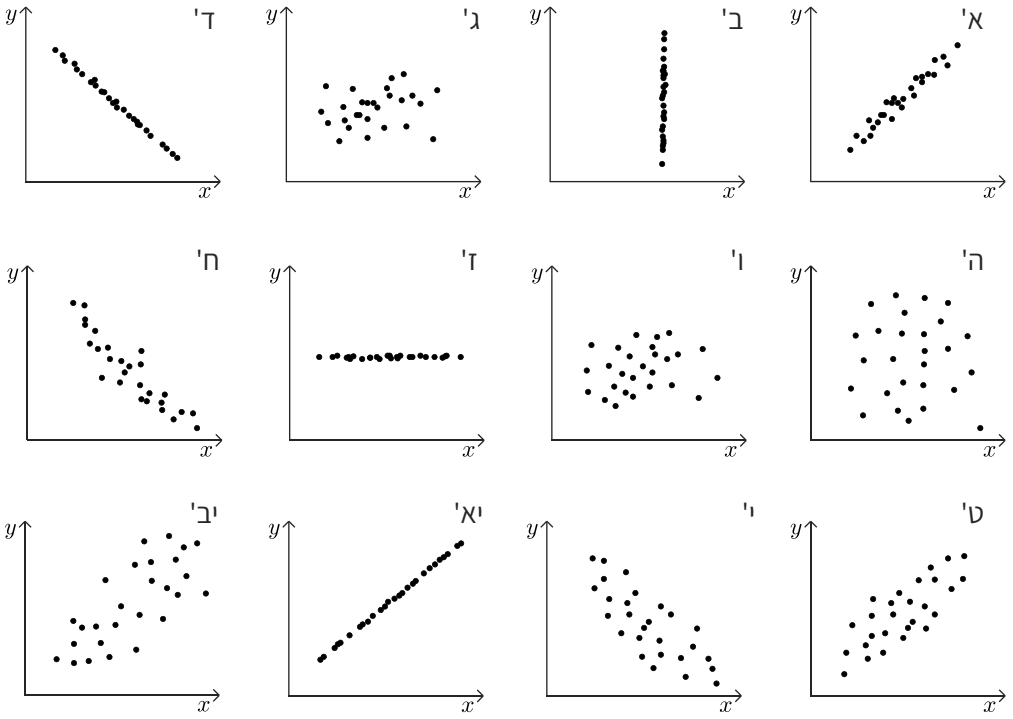
הערה: אם לא קיים קשר ליניארי אז r לא מוגדר.

שאלות:

1) קבעו מהו מקדם המתאם הנכון ביותר עבור כל אחת מדיאגרמות הפיזור הבאות:

(1) $r = 1$ (2) $0 < r < 1$ (3) $r = 0$

(4) $-1 < r < 0$ (5) $r = -1$ (6) r לא מוגדר



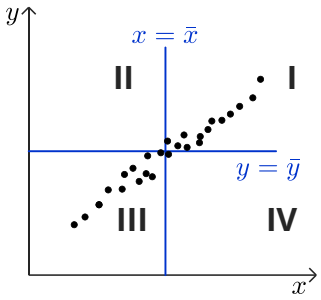
תשובות סופיות:

1) גרף א' - (2) גרף ב' - (6) גרף ג' - (3) גרף ד' - (4)
גרף ה' - (3) גרף ו' - (3) גרף ז' - (3) גרף ח' - (4)
גרף ט' - (2) גרף י' - (4) גרף יא' - (1) גרף יב' - (2)

קווי ממוצעים ומכפלות ההפרשים:

סיכום כללי:

הגדרה:



קווים המאונכים לצירים ומתאימים לערכי הממוצעים של כל משתנה.
הקווים $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$ הם קווי הממוצעים.
קווי הממוצעים מחלקים את המישור ל-4 אזורים: I, II, III, IV.

הפרשים מן הממוצעים ומכפלת ההפרשים:

ההפרש במשתנה x של תצפית (x_i,y_i) מן הממוצע $\bar{x}$ הוא: $x_i-\bar{x}$
וההפרש במשתנה y שלה מן הממוצע $\bar{y}$ הוא $y_i-\bar{y}$.
מכפלת ההפרשים של התצפית מוגדרת: $(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$.

סיכום:

כאשר נתונה דיאגרמת פיזור ובה N תצפיות (x_i,y_i), נגדיר את סכום מכפלות ההפרשים של כל נקודה באופן הבא:

$$(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+(x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y})+(x_3-\bar{x})(y_3-\bar{y})+\ldots+(x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})$$

- אם הסכום המתקבל הוא חיובי אז הקשר הוא ליניארי חיובי.
- אם הסכום המתקבל הוא שלילי אז הקשר הוא ליניארי שלילי.
- ככל שהערך המוחלט של התוצאה גדול יותר כך עוצמת הקשר חזקה יותר.

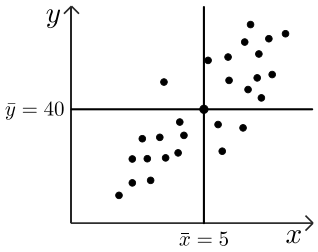
קשר ליניארי חיובי: קשר חיובי הוא כזה שבו סכום מכפלות ההפרשים הוא חיובי.

קשר ליניארי שלילי: קשר חיובי הוא כזה שבו סכום מכפלות ההפרשים הוא שלילי.

אי-קיום קשר: כאשר סכום מכפלות ההפרשים הוא אפס נאמר כי לא קיים קשר בין המשתנים.
גם כאשר נסכום את מכפלות ההפרשים ונקבל מספר השואף לאפס נאמר כי אין קשר.

שאלות:

1) בדיאגרמת הפיזור שלפניכם מופיעים קווי הממוצעים.

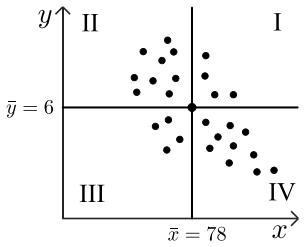


א. האם הקשר בין המשתנים הוא חיובי? נמקו.

ב. מהי עוצמת הקשר בין המשתנים
(חלשה, בינונית, חזקה, מושלמת)?

ג. לפניכם מספר תצפיות.
קבעו לגבי כל אחת מהן האם הוספה של תצפית זו תגדיל
או תקטין את עוצמת הקשר. נמקו.
(1) הנקודה (6,6).
(2) הנקודה (7,54).
(3) הנקודה (2,42).

2) בדיאגרמת הפיזור שלפניכם מופיעים קווי הממוצעים.



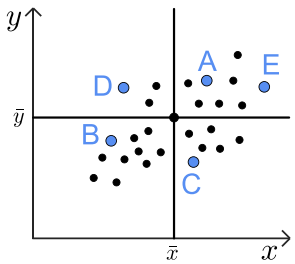
א. האם הקשר בין המשתנים הוא שלילי? נמקו.

ב. מהי עוצמת הקשר בין המשתנים
(חלשה, בינונית, חזקה, מושלמת)?

ג. מסירים את אחת התצפיות ובכך מגדילים את עוצמת הקשר.
באילו אזורים נמצאת התצפית שהוסרה?

ד. מוסיפים תצפית כך שעוצמת הקשר גדלה.
לאילו אזורים יש להוסיף את תצפית זו?

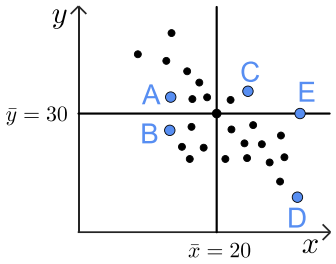
3) לפניכם דיאגרמת פיזור ועליה מסומנים קווי הממוצעים
ו-5 נקודות באותיות A, B, C, D ו-E.



א. השלימו:
(1) ערך ה-x בנקודה A <u>גדול / קטן</u> מ-$\bar{x}$.
(2) ערך ה-y בנקודה A <u>גדול / קטן</u> מ-$\bar{y}$.
(3) ערך ה-x בנקודה B <u>גדול / קטן</u> מ-$\bar{x}$.
(4) ערך ה-y בנקודה B <u>גדול / קטן</u> מ-$\bar{y}$.
(5) ערך ה-x בנקודה C <u>גדול / קטן</u> מ-$\bar{x}$.
(6) ערך ה-y בנקודה C <u>גדול / קטן</u> מ-$\bar{y}$.

ב. האם הנקודות D ו-E תתרומנה (כל אחת מהן) ערך חיובי, ערך שלילי או אפס
למונה של נוסחת מקדם המתאם? נמקו.

4) לפניכם דיאגרמת פיזור ובה מסמנים 5 נקודות: A, B, C, D ו-E.



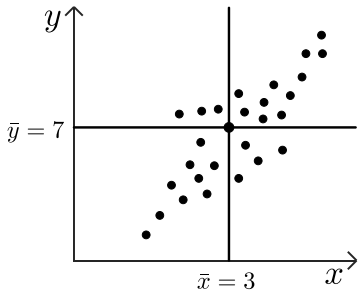
א. קבעו לגבי כל נקודה האם היא תתרום ערך:
חיובי / שלילי / אפס כאשר היא תוצב במונה
של נוסחת מקדם המתאם.

ב. נתונות שיעורי הנקודות הבאות:
$(12,12)$, $(30,20)$, $(30,40)$, $(20,24)$
חשבו עבור כל נקודה מה יהיה הערך שיתקבל עבורה כאשר תוצב בביטוי: $(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})$.

ג. קבעו איזו נקודה תתרום את הערך הגדול ביותר למונה של נוסחת מקדם המתאם r.

ד. **בונוס:**
הנקודות A ו-B נמצאות באותו המרחק מן הממוצע $\bar{y}$ - הנקודה A מעל ל- $\bar{y}$
והנקודה B מתחת לממוצע $\bar{y}$. שתי הנקודות נמצאות באותו המרחק משמאל ל- $\bar{x}$.
אורטל טוענת כי כאשר נציב כל נקודה בביטוי $(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})$ נקבל מספרים נגדיים.
אושר טוענת כי שני הערכים יהיו שווים זה לזה. קבעו מי מהבנות צודקת. נמקו.

5) לפניכם דיאגרמת פיזור ועליה מסומנים קווי הממוצעים.



א. הוסיפו נקודה כך שתתרום ערך חיובי למונה של נוסחת מקדם המתאם.

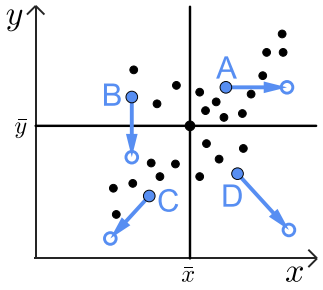
ב. הוסיפו נקודה כך שתתרום ערך שלילי למונה של נוסחת מקדם המתאם.

ג. הוסיפו נקודה כך שלא תתרום למונה של נוסחת מקדם המתאם.

ד. הוסיפו נקודה כך שתתרום ערך חיובי למונה של נוסחת מקדם המתאם
ותהיה רחוקה לפחות ב-2 יחידות מכל ממוצע.

ה. הוסיפו נקודה כך שתתרום ערך שלילי למונה של נוסחת מקדם המתאם
ותהיה רחוקה לפחות ב-2 יחידות מכל ממוצע.

6) לפניכם דיאגרמת פיזור ומסמנים עליה 4 נקודות: A, B, C ו-D.
מבדיקה שנעשתה ע"י מכון חיצוני התברר כי כל אחת מ-4 הנקודות הנ"ל נמדדה בתנאים שגויים ויש לתקן אותה.
לאחר התיקון, כל נקודה זזה למיקום חדש כמתואר ע"י החיצים.
(כל נקודה זזה עד לקצה החץ – העיגול הלבן).



א. עבור כל נקודה, קבעו האם מכפלת ההפרשים $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ שינתה סימן.

ב. קבעו לגבי כל נקודה האם הערך המעודכן שלה מחזק או מחליש את הקשר. נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. קשר חיובי ב. עוצמה בינונית ג. (1) תקטין ג. (2) תגדיל ג. (3) תקטין.

2) א. קשר שלילי ב. עוצמה בינונית ג. אזורים 1 ו-3 ד. אזורים 2 ו-4.

3) א. (1) גדול א. (2) גדול א. (3) קטן א. (4) קטן א. (5) גדול א. (6) קטן.
ב. הנקודה D - תתרום ערך שלילי, הנקודה E - תתרום ערך חיובי.

4) א. הנקודות B, C - ערכים חיוביים, הנקודות D, A - ערכיים שליליים, הנקודה E - ערך אפס.
ב. $(20,24)$: 0, $(30,40)$: 100, $(30,20)$: -100, $(12,12)$: 144.
ג. $(12,12)$ ד. אורטל צודקת.

5) א. $(4,8)$ או $(2,6)$ ב. $(2,8)$ או $(4,6)$ ג. $(3,17)$ או $(23,7)$.
ד. $(6,10)$ או $\left(\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$ ה. $\left(\frac{1}{2},10\right)$ או $\left(6,1\frac{1}{2}\right)$.

6) א. נקודה A - לא תשנה סימן, נקודה B - תשנה סימן, נקודה C - לא תשנה סימן, נקודה D - לא תשנה סימן.
ב. נקודה A - מחליש, נקודה B - מחזק, נקודה C - מחזק, נקודה D - מחליש.

נוסחת מקדם המתאם:

סיכום כללי:

כאשר נחלק את מכפלת המרחקים במספר התצפיות נקבל:

$$\frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+\ldots+(x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})}{N}$$

כאשר נחלק בנוסף בסטיות התקן של כל משתנה על מנת לבטל את התלות ביחידות המדידה נקבל את הנוסחה המלאה למקדם המתאם:

$$r=\frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+\ldots+(x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})}{N\cdot S_x\cdot S_y}$$

בדף הנוסחאות הנוסחה מופיעה בצורה הבאה:

$$r=\frac{1}{N\cdot S_x\cdot S_y}\left[(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+\ldots+(x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})\right]$$

השפעת הוספה של נקודה על מקדם המתאם:

סוג הקשר	אזורים להוספת נקודה	
	אזורים I או III	אזורים II או IV
קשר חיובי ($r>0$)	הגדלת r	הקטנת r
קשר שלילי ($r<0$)	הקטנת r בערכו המוחלט	הגדלת r בערכו המוחלט

שאלות:

1) לפניכם טבלת נתונים של שני משתנים x ו-y.
מצאו את הממוצע של כל אחד מהמשתנים.

y	x
59	9
43	4
50	5
65	14
38	3

2) לפניכם טבלת נתונים של שני משתנים x ו-y.
הממוצע של כל אחד מהמשתנים ידוע.
מצאו את סטיית התקן של כל אחד מהמשתנים.

y	x
16	3
21	8
17	6
22	11
14	2
$\bar{y}=18$	$\bar{x}=6$

3) מצאו את הממוצע ואת סטיית התקן של כל אחד מהמשתנים x ו-y בטבלה שלפניכם:

y	x
8	16
19	5
33	7
54	3
46	9

4) מהו הערך החסר עבור כל משתנה בטבלה הבאה?

y	x
6	4
60	15
y	6
11	x
35	8
$\bar{y}=28$	$\bar{x}=7$

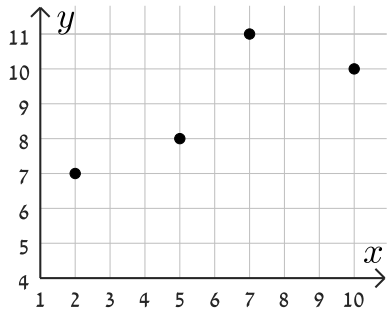
5) לפניכם טבלת נתונים עבור שני משתנים x ו-y.
חשבו את מקדם המתאם של הנתונים.

y	x
16	5
33	8
13	2
18	3
30	7
$\bar{y}=22$	$\bar{x}=5$
$S_y=7.975$	$S_x=2.28$

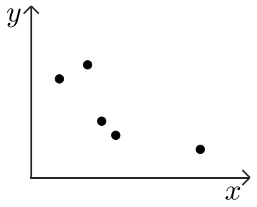
6) לפניכם טבלת נתונים עבור שני משתנים x ו-y.
חשבו את מקדם המתאם של הנתונים.

y	x
190	43
240	22
112	68
150	56
198	31
$\bar{y}=178$	$\bar{x}=44$
$S_y=$ ____	$S_x=$ ___

7) מצאו את מקדם המתאם של דיאגרמת הפיזור הבאה:



8) בחברת הייטק מובילה נערכו 5 מחזורי גיוס לעובדים חדשים במהלך שנת 2025. בכל מחזור השתתף מספר שונה של מועמדים, וכל המשתתפים עברו סדרת מבחני התאמה מקצועיים וקיבלו ציון מסכם. לאחר מכן חושב הציון הממוצע של כל מחזור גיוס. בדיאגרמת הפיזור הבאה, ציר ה-x מייצג את מספר המשתתפים במחזור הגיוס, וציר ה-y מייצג את הציון הממוצע של אותו מחזור. כל נקודה מייצגת מחזור גיוס אחד.



מספר משתתפים (x)	ציון ממוצע (y)
70	80
110	50
80	55
60	75
75	60

א. התבוננו בדיאגרמת הפיזור ושערו אלו מבין ערכי ה-r הבאים יכול להתאים לתיאור הנתונים.

(1) $r=0.8$ (2) $r=-0.8$ (3) $r=0.5$ (4) $r=-0.5$

(5) $r=1$ (6) $r=-1$ (7) $r=0$ (8) r לא מוגדר.

ב. חשבו את מקדם המתאם.

ג. לקראת סוף השנה החליטו לבנות מחזור גיוס נוסף, השישי, ובו מספר המשתתפים הוא 40 והציון הממוצע שחושב במחזור זה הוא 70.

קבעו לגבי כל טענה האם היא נכונה או שגויה ונמקו.

(1) ממוצע הציונים נשאר זהה.

(2) ממוצע המשתתפים בסך מחזורי הגיוס גדל.

(3) סטיית התקן של ממוצע הציונים בוודאות תשתנה.

(4) עוצמת הקשר תקטן.

(5) מקדם המתאם יגדל.

תשובות סופיות:

1) $\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 51$.

2) $S_x = 3.286$, $S_y = 3.033$.

3) $\bar{x} = 8$, $\bar{y} = 32$, $S_x = 4.47$, $S_y = 16.88$.

4) $x = 2$, $y = 28$.

5) 0.891.

6) -0.982.

7) $r = 0.813$.

8) א. $r = -0.8$ ב. $r = -0.8$ ג. (1) לא נכונה ג. (2) לא נכונה

ג. (3) נכונה. ג. (4) לא נכונה ג. (5) לא נכונה.

קו הרגרסיה:

סיכום כללי:

נקודת הממוצעים - הגדרה:

נקודת הממוצעים היא נקודת החיתוך בין הישרים $x=\bar{x}$ ו- $y=\bar{y}$. על כן שיעוריה הם: $(\bar{x},\bar{y})$.

ישר הרגרסיה / ישר הניבוי:

ישר הרגרסיה הוא הקו הישר שעובר דרך ענן התצפיות בדיאגרמת הפיזור בצורה הטובה ביותר, כלומר הוא הקו שהכי קרוב לכל הנקודות יחדיו.

בעזרת ישר הרגרסיה ניתן לדעת:

- כיוון הקשר (חיובי / שלילי) בהתאם לשיפוע הישר.
- עוצמת הקשר – ככל שהתצפיות קרובות יותר לישר כך הקשר חזק יותר.
- ניבוי ערכים מהמשתנה x למשתנה y.

ההבדל שבין ערך מנובא לתצפית:

תצפית מייצגת ערך אמיתי שנמדד עבור זוג המשתנים (x,y) בעוד שערך מנובא הוא חיזוי של ערך עבור y המחושב בעזרת ישר הרגרסיה. קל לזכור זאת באופן הבא:

- **תצפית** – מה שקרה באמת (המציאות).
- **ערך מנובא** – מה שישר הרגרסיה חוזה (התחזית).

כדי למצוא משוואת ישר יש צורך בנקודה ושיפוע:

- נקודת הממוצעים תמיד תימצא על ישר הרגרסיה $(\bar{x},\bar{y})$.
- שיפוע הישר יחושב באופן הבא: $m=r\cdot\frac{S_y}{S_x}$.

נכתוב משוואת ישר לפי הנוסחה: $y-y_1=m(x-x_1)$.

מסקנה:

כאשר: S_y גדל $\Leftarrow$ m גדֵל (יחס ישר)

כאשר: S_x גדל $\Leftarrow$ m קטֵן (יחס הפוך)

שאלות:

1) מצאו את ישר הרגרסיה המייצג את הקשר שבין המשתנים x ו-y בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $r=0.88\ ,\ \bar{y}=45\ ,\ \bar{x}=15\ ,\ S_y=10\ ,\ S_x=20$.

ב. $r=-0.65\ ,\ \bar{y}=30\ ,\ \bar{x}=20\ ,\ S_y=45\ ,\ S_x=15$.

2) צוות מחקר רפואי רצה לבדוק את הקשר בין משקל גוף לבין זמן ההחלמה בקבוצת חולים שקיבלו טיפול ניסיוני חדש. לשם כך נמדד משקל הגוף של כל משתתף בק"ג (x המשתנה) ומשך ימי ההחלמה עד לשחרור מבית החולים (y המשתנה). מתוצאות המדידות התקבל כי סטיית התקן של המשקל גדולה מסטיית התקן של ימי ההחלמה ($S_x > S_y$) ומקדם המתאם בין שני המשתנים הוא 0.75.

א. (1) הביעו באמצעות S_x ו- S_y את שיפוע ישר הרגרסיה.

(2) האם ניתן לומר כי שיפוע ישר הרגרסיה גדול מ-1, שווה ל-1 או קטן מ-1? נמקו.

ב. קבעו מי מבין הישרים הבאים יכול להיות ישר הרגרסיה המתאים לנתוני השאלה:

(1) הישר: $y=-\frac{1}{4}x-8$.

(2) הישר: $y=\frac{1}{4}x-8$.

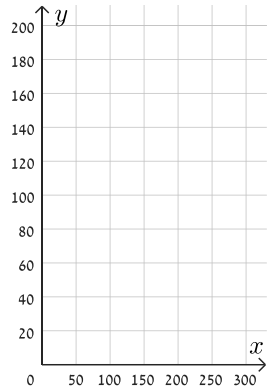
(3) הישר: $y=4x-\frac{1}{8}$.

ג. עבור ישר הרגרסיה שבחרתם בסעיף הקודם, מצאו את הקשר שבין S_x ו- S_y.

ד. נתון כי המשקל הממוצע הוא 64 ק"ג אך מספר ימי ההחלמה הממוצע אינו ידוע. מצאו את מספר ימי ההחלמה הממוצע המתאים לנתוני השאלה.

3) רשת מזנוני משקאות פתחה דוכן משקאות חדש בקניון מרכזי, וכדי להבין את הקשר בין תנועת הלקוחות למכירות, ערכה הרשת מעקב יומי במשך 4 ימים שונים. בכל יום נמדד מספר המבקרים שעברו ליד הדוכן (ציר ה-x) ומספר המשקאות שנמכרו באותו יום (ציר ה-y).

מספר מבקרים (x)	מספר משקאות (y)
150	80
250	180
50	40
200	100



א. סמנו את המדידות בדיאגרמת הפיזור שלפניכם.

ב. מצאו את הערכים הממוצעים של x ושל y.

ג. מצאו את סטיות התקן של x ושל y.

ד. מצאו את מקדם המתאם של הנתונים.

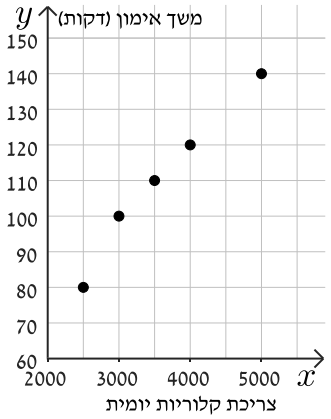
ה. מצאו את ישר הרגרסיה המתאים למחקר והוסיפו אותו לדיאגרמת הפיזור.

ו. (1) מה יהיה הערך המנובא למספר המשקאות שיימכרו ביום שבו יהיו 130 מבקרים וביום שבו יהיו 220 מבקרים?

(2) האם ייתכן כי ביום מסוים שבו 130 מבקרים יעברו ליד הדוכן יימכרו 100 משקאות?

(3) האם ייתכן כי ביום מסוים שבו 130 מבקרים יעברו ליד הדוכן יימכרו 140 משקאות?

4) בדקו קבוצה של מספר ספורטאים המתאמנים לקראת תחרות ארצית בהרמת משקל כבד. במסגרת המחקר רצו לבחון את הקשר שבין מספר הקלוריות היומיות שצורך כל ספורטאי (המשתנה x) לבין משך זמן האימון שלו ביום זה (המשתנה y). ביום מסוים מדדו את מספר הקלוריות ואת משך האימון של 5 ספורטאים שונים וקיבלו את התוצאות הבאות:



ידוע כי ישר הרגרסיה המתאים לנתוני השאלה הוא: $y = 0.02297x + b$

א. (1) מצאו את נקודת הממוצעים.

(2) מצאו את b.

ב. (1) האם מכיוון ששיפוע ישר הרגרסיה: $m = 0.02297$, שואף ל-0, ניתן להסיק כי מקדם המתאם שואף ל-0 גם הוא? נמקו.

(2) האם מקדם המתאם המתאים לנתוני השאלה הוא חיובי או שלילי?

ג. ידוע כי: $S_x = \sqrt{740000}$, $S_y = 20$, מבלי לחשב באופן ישיר מהדיאגרמה, מצאו את מקדם המתאם.

ד. לצוות המחקר מצטרף ספורטאי שישי. ידוע כי הצריכה הקלורית היומית שלו שווה לממוצע צריכת הקלוריות של 5 הספורטאים הקודמים, ומשך האימון שלו (בדקות) שווה לממוצע משך האימון של 5 הספורטאים הקודמים.

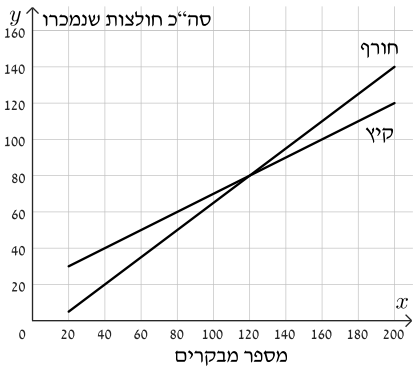
(1) האם מקדם המתאם החדש (עם 6 ספורטאים) יהיה גדול יותר / קטן יותר / לא ישתנה?

(2) האם שיפוע ישר הרגרסיה החדש יהיה גדול יותר / קטן יותר / לא ישתנה?

5) רוצים לבדוק את הקשר שבין מספר מכירות החולצות בחנות בגדים מסוימת לבין מספר המבקרים היומי בחנות. במסגרת המחקר בחרו 4 ימים אקראיים במשך אחד מחודשי הקיץ ובו רשמו את מספר המבקרים בכל יום (המשתנה x) ואת מספר החולצות שנמכרו בכל יום (המשתנה y). התקבל ישר הרגרסיה הבא: $y = 0.5x + 20$.

הנהלת החנות החליטה לחזור על המחקר באחד מחודשי החורף, בו בחרו 4 ימים אקראיים וחזרו על הניסוי. ישר הרגרסיה שהתקבל עבור החודש החורפי הוא: $y = 0.75x - 10$.

שני הישרים מופיעים במערכת הצירים הבאה:



א. (1) כמה חולצות צפויות להימכר בחודש הקיץ ביום שבו ישנם 120 מבקרים בחנות?

(2) כמה חולצות צפויות להימכר בחודש החורף ביום שבו ישנם 120 מבקרים בחנות?

ב. האם זה נכון להגיד שביום שבו הגיעו 120 מבקרים לחנות ניתן לדעת בוודאות כמה חולצות תימכרנה? נמקו את תשובתכם.

ג. בחודש הקיץ מדדו יום נוסף בו נכנסו לחנות 120 מבקרים.

ביום זה נמכרו בסה"כ 140 חולצות.

(1) האם מספר החולצות שנמכר ביום זה הוא אפשרי? הגיוני? נמקו.

(2) בהסתמך על ישר הרגרסיה של חודש הקיץ בלבד,

האם ניתן לקבוע אם קווי הממוצעים של המשתנים x ו-y ישתנו? אם כן – כיצד?

ד. לפניכם טבלת מדידות של 4 הימים בחודש הקיץ, כאשר חלק מנתוני מכירות החולצות נמחקו. בהנחה שקווי הממוצעים לא השתנו עקב הוספת המדידה של היום החמישי.

מספר מבקרים	סה"כ מכירות חולצות
70	65
180	?
x	?
90	?

(1) מצאו את x.

(2) מקדם המתאם החדש (של חמשת המדידות) הוא: 0.8. מצאו את S_y.

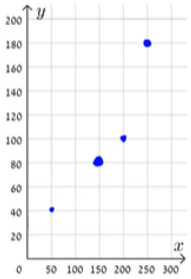
תשובות סופיות:

1) א. $y = 0.44x + 38.4$ ב. $y = -1.95x + 69$.

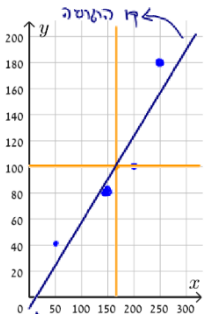
2) א. (1) $m = 0.75\frac{S_y}{S_x}$ א. (2) קטן מ-1 ב. הישר $y = \frac{1}{4}x - 8$.

ג. $3 \cdot S_y = S_x$ ד. $\bar{x} = 8$.

3) א. להלן דיאגרמת פיזור: ב. $\bar{x} = 162.5$, $\bar{y} = 100$ ג. $S_x = 73.95$, $S_y = 51$.



ד. $r = 0.928$ ה. קו הרגרסיה: $y = 0.64x - 4$, להלן דיאגרמת פיזור:



ו. (1) 130 מבקרים: 79.2, 220 מבקרים: 136.8

ו. (2) ייתכן ו. (3) ייתכן.

4) א. (1) $(3600,110)$ א. (2) $b = 27.308$ ב. (1) לא ב. (2) חיובי.

ג. $r = 0.988$ ד. (1) לא ישתנה ד. (2) לא ישתנה.

5) א. (1) 80 חולצות א. (2) 80 חולצות ב. לא ניתן לדעת.

ג. (1) אפשרי ג. (2) $\bar{y}$ יגדל, לא ניתן לדעת לגבי $\bar{x}$.

ד. (1) $x = 140$ ד. (2) $S_y = 24.04$.

טרנספורמציות של קו הרגרסיה:

סיכום כללי:

בהוספה או הסרה של ערך קבוע:

- הממוצע $\bar{y}$ ישתנה בערך שהוספנו או הפחתנו והממוצע $\bar{x}$ לא ישתנה.
- סטיות התקן לא מושפעות משינוי זה כלל.
- מקדם המתאם ושיפוע ישר הרגרסיה לא מושפעים משינוי זה כלל.
- ישר הרגרסיה יעלה או ירד בערך שהוספנו או הפחתנו בהתאמה.

בהכפלה או חילוק של ערך קבוע:

- הממוצע $\bar{y}$ ישתנה פי הערך שהכפלנו או חילקנו בו, והממוצע $\bar{x}$ לא ישתנה.
- סטיית התקן S_y תגדל/תקטן פי הערך שהכפלנו או חילקנו בו.
- מקדם המתאם לא משתנה ערך הכפלה או חילוק בקבוע.
- שיפוע ישר הרגרסיה יגדל/יקטן פי הערך שהכפלנו או חילקנו בו.
- ישר הרגרסיה יעלה או ירד לפי השינויים.

כאשר יש להוסיף או להוריד אחוז מסוים, נתייחס לשינוי במדדים הסטטיסטיים בדיוק כמו שהתייחסנו להכפלה ולחילוק בקבוע.

	$\bar{x}$	S_x	$\bar{y}$	S_y	r	m
הוספה או חיסור של k לכל ערך y (k חיובי)	לא משתנה	לא משתנה	גדל או קטן ב-k	לא משתנה	לא משתנה	לא משתנה
הכפלה או חלוקה פי k לכל ערכי y	לא משתנה	לא משתנה	גדל או קטן פי k	גדל או קטן פי k	לא משתנה	גדל או קטן פי k
הגדלה או הפחתה ב-p אחוזים לכל ערכי y	לא משתנה	לא משתנה	מוכפל פי $\frac{100 \pm p}{100}$	מוכפל פי $\frac{100 \pm p}{100}$	לא משתנה	מוכפל פי $\frac{100 \pm p}{100}$

שאלות:

1) במחקר שנערך התקבלו הנתונים הבאים: $r=0.9$, $\bar{y}=30$, $\bar{x}=7$, $S_y=45$, $S_x=135$.

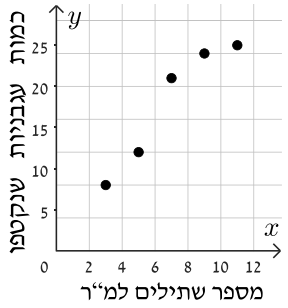
א. מצאו את ישר הרגרסיה המייצג את הקשר שבין המשתנים x ו-y.

ב. מוסיפים 10 לערכי ה-y של כל המדידות.
מצאו את משוואת ישר הרגרסיה החדשה.

ג. מחלקים את ערכי ה-y של כל המדידות ב-3.
(1) כיצד ישתנה מקדם המתאם r?
(2) כיצד ישתנה שיפוע ישר הרגרסיה m?

2) במכון חקלאי לטכנולוגיות חממות נערך מחקר לבדיקת השפעת צפיפות השתילה על התפוקה. החוקרים בדקו בחמש חלקות זהות בחממה כיצד כמות שתילי העגבניות שנשתלו במטר ריבועי (ציר ה-x) משפיעה על כמות העגבניות שנקטפו מאותו מטר ריבועי בסוף העונה (ציר ה-y).
בדיאגרמת הפיזור הבאה, כל נקודה מייצגת חלקה אחת בחממה.

מספר שתילים למ"ר (x)	כמות עגבניות שנקטפו (y)
3	8
5	12
7	21
9	24
11	25



א. (1) מצאו את הממוצע של כמות העגבניות שנקטפו בסוף העונה.
(2) מצאו את סטיית התקן של כמות העגבניות שנקטפו בסוף העונה.
במכון חישבו ומצאו כי ממוצע השתילים למטר ריבועי הוא 7 וכי סטיית התקן של השתילים למטר ריבועי היא $\sqrt{8}$.

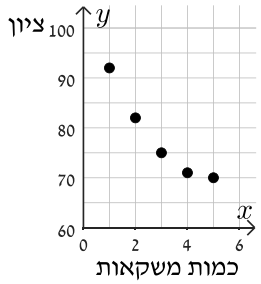
ב. מצאו את מקדם המתאם r בין שני המשתנים.

ג. מצאו את ישר הרגרסיה המתאים לתוצאות המחקר.

ד. מהו הניבוי לכמות העגבניות שייקטפו ממטר ריבועי שבו שתלו 17 שתילים?

ה. עקב תנאי חום קיצוניים, בכל מטר ריבועי התקלקלו 3 עגבניות.
קבעו בעבור כל אחד מן המדדים (1) ו-(3) שלפניכם האם הערך שלו גדל, קטן או שאינו משתנה.
נמקו את קביעתכם.
(1) הממוצע של המשתנה x.
(2) סטיית התקן של המשתנה y.
(3) מקדם המתאם r.

3) במחקר תזונתי שנערך במרכז רפואי נבדקה השפעת צריכת משקאות ממותקים על ביצועים קוגניטיביים. החוקרים בדקו בקרב 5 קבוצות של תלמידי תיכון כיצד כמות המשקאות הממותקים הנצרכת ביום (ציר ה-x) משפיעה על הציון במבחן ריכוז וקשב סטנדרטי (ציר ה-y). בדיאגרמת הפיזור הבאה, כל נקודה מייצגת קבוצה אחת של תלמידים.



א. (1) על בסיס הדיאגרמה האם ניתן לשער את סוג הקשר? אם כן מהו?

(2) היעזרו בדיאגרמת הפיזור ומצאו את $\bar{x}$.

(3) נתון כי: $\bar{y} = 78$. כמה נקודות נמצאות באזורים המתאימים לסוג הקשר וכמה נמצאות באזורים שאינם מתאימים לסוג הקשר? נמקו.

ידוע כי: $S_x = \sqrt{2}$ ו- $S_y = \sqrt{66.8}$ וכי סכום מכפלות ההפרשים הוא 55-.

ב. מצאו את מקדם המתאם של המחקר.

ג. (1) כתבו את קו הרגרסיה המתאים לנתוני השאלה.

(2) מה הוא הציון המנובא המתאים לצריכה של 7 משקאות ממותקים ביום?

הוסיפו מבחן לבדיקת הריכוז עם רמת קושי נמוכה יותר, וכל התוצאות במבחן החדש יצאו גדולות ב-4 נקודות ביחס למבחן המקורי.

ד. (1) האם שיפוע קו הרגרסיה מושפע משינוי זה? אם כן – כיצד? אם לא – נמקו.

(2) האם הערך המנובא המתאים לצריכה של 7 משקאות ממותקים ביום ישתנה? אם כן, מצאו את הערך המנובא החדש.

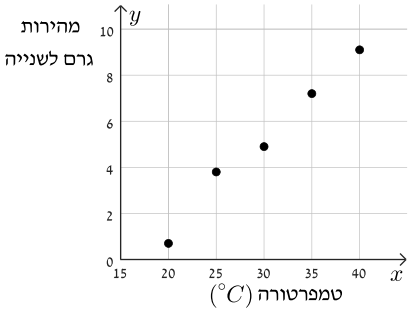
כדי להשוות את תוצאות המחקר למחקר מקביל שהתקיים במרכז רפואי אחר, יש לבצע התאמה של סולם הציונים. במחקר המקביל השתמשו במבחן ריכוז ששיטת הניקוד שלו שונה, ולכן כדי להשוות את התוצאות יש לחלק כל ציון שהתקבל במחקר שלנו ב-2.

ה. (1) האם S_x ו- S_y במחקר המקביל יישארו קבועים או שהם ישתנו? אם כן כיצד?

(2) האם מקדם המתאם של המחקר החדש ישתנה ביחס למקדם המתאם של המחקר המקורי? אם כן מה, יהיה ערכו החדש? אם לא – נמקו.

4) במעבדה להנדסה כימית נערך מחקר לבדיקת השפעת הטמפרטורה על מהירות תגובה כימית. החוקרים חיממו תמיסה כימית לטמפרטורות שונות (המשתנה x) ומדדו את מהירות התגובה בגרמים לשנייה (המשתנה y). בדיאגרמת הפיזור הבאה, כל נקודה מייצגת ניסוי אחד עם טמפרטורה ספציפית.

טמפרטורה ב- °C (x)	מהירות בגרם לשנייה (y)
20	0.7
30	4.9
40	9.1
25	3.8
35	7.2



א. (1) האם ייתכן כי $r < 0$? נמקו.

(2) האם אחת מהנקודות הבאות יכולה להיות נקודת הממוצעים של הדיאגרמה?

I. $(50,9.1)$ II. $(30,5.14)$ III. $(30,0.7)$

ב. חשבו את נקודת הממוצעים.

ג. ידוע כי: $S_x = \sqrt{50}$ וכי $S_y = 2.88$.

מהו מקדם המתאם של המחקר?

ד. כתבו את ישר הרגרסיה המתאים לנתוני השאלה.

ה. כאשר הוסיפו מרכיב חדש לתמיסה קיבלו כי מהירות התגובה גדלה ב-60%.

(1) האם מקדם המתאם ישתנה לאור הוספת המרכיב החדש? נמקו.

(2) האם ישר הרגרסיה ישתנה? אם כן – מצאו את משוואתו, אם לא - נמקו.

תשובות סופיות:

1) א. $y=0.3x+27.9$ ב. $y=0.3x+37.9$ ג. (1) r נשאר קבוע ג. (2) m יקטן פי 3.

2) א. (1) $\bar{y}=18$ א. (2) $S_y=6.78$ ב. $r=0.96$ ג. $y=2.3x+1.9$.

ד. 41 עגבניות ה. (1) לא משתנה ה. (2) לא משתנה ה. (3) לא משתנה.

3) א. (1) כן, קשר שלילי א. (2) $\bar{x}=3$.

א. (3) כל הנקודות תורמות לסוג הקשר למעט $(3,75)$ ב. $r=-0.9516$.

ג. (1) $y=-5.5x+94.5$ ג. (2) 56 ד. (1) לא ישתנה.

ד. (2) 60 ה. (1) S_x נשאר קבוע, S_y יקטן פי 2 ה. (2) לא ישתנה.

4) א. (1) לא ייתכן א. (2) נקודה II ב. $(\bar{x},\bar{y})=(30,5.14)$.

ג. $r=0.992$ ד. $y=0.404x-6.98$.

ה. (1) לא ישתנה ה. (2) כן, $y=0.6464x-11.168$.