

# תוכן העניינים:

2	אלגברה
2	סדרה הנדסית
2	נוסחת האיבר הכללי :
2	סיכום כללי :
3	שאלות :
4	תשובות סופיות :
5	מציאת האיבר הראשון :
5	סיכום כללי :
5	שאלות :
5	תשובות סופיות :
6	מציאת מנת הסדרה :
6	סיכום כללי :
6	שאלות :
8	תשובות סופיות :
9	שתי משוואות עם שני נעלמים :
9	סיכום כללי :
9	שאלות :
9	תשובות סופיות :
10	סכום סדרה הנדסית :
10	סיכום כללי :
10	שאלות :
10	תשובות סופיות :
11	שאלות מילוליות שונות בסדרה הנדסית :
11	סיכום כללי :
11	שאלות :
13	תשובות סופיות :

# אלגברה

## סדרה הנדסית

### נוסחת האיבר הכללי:

סיכום כללי:

הגדרה:

סדרה הנדסית היא סדרה שבה כל איבר מתקבל ע"י כפל בקבוע של האיבר שלפניו. לגודל הקבוע קוראים בשם **מנת הסדרה** ומסמנים אותה ב- $q$ .

דוגמאות לסדרות הנדסיות:

- $q = \frac{6}{2} = 3$  ו- $a_1 = 2$  בסדרה זו 2 , 6 , 18 , 54 , ....
- $q = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$  ו- $a_1 = 96$  בסדרה זו 96 , 24 , 12 , 3 , ....
- $q = \frac{-3}{1} = -3$  ו- $a_1 = 1$  בסדרה זו 1 , -3 , 9 , -27 , ....

סיווג סדרות הנדסיות לפי מנת הסדרה:

ניתן לאפיין סדרה הנדסית לפי  $q$  באופן הבא:

- אם  $q > 1$  אז הסדרה היא **עולה**.
  - אם  $0 < q < 1$  אז הסדרה היא **יורדת**.
  - אם  $q < 0$  אז הסדרה מחליפה סימנים:
    - כאשר  $-1 < q < 0$  הסדרה מחליפה סימנים וקטנה – מתכנסת.
    - כאשר  $q < -1$  הסדרה מחליפה סימנים וגדלה בערכה המוחלט.
- במקרה שבו  $q < 0$  (מנת הסדרה שלילית) אומרים כי הסדרה **אינה עולה ואינה יורדת**. ניסוח אחר: הסדרה **מתנדנדת**.

**נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית:**

נתונה סדרה הנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה  $q$ .

האיבר הכללי בסדרה  $a_n$  (איבר העומד במקום ה- $n$  בסדרה) יחושב לפי:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ .

**שאלות:**

**שאלות יסודיות:**

(1) כתוב את מנת הסדרה והשלם את האיברים בסדרות ההנדסיות הבאות:

א.  $1, 3, 9, \dots$

ב.  $2, 4, \dots$

ג.  $\dots, 6, 18, 54, \dots$

ד.  $\dots, \dots, \dots, 128, 512, 2048, \dots$

(2) מצא את מנת הסדרה בכל אחת מהסדרות ההנדסיות הבאות וקבע האם הסדרה היא עולה, יורדת או מתנדנדת (אינה עולה ואינה יורדת):

א.  $2, 10, 50, \dots$

ב.  $3, 30, 300, \dots$

ג.  $625, 125, 25, \dots$

ד.  $40, 20, 10, \dots$

ה.  $7, 7, 7, \dots$

ו.  $4, -4, 4, -4, \dots$

ז.  $3, -6, 12, -24, \dots$

ח.  $-162, 54, -18, 6, \dots$

(3) נתונה סדרה הנדסית:  $2, 6, 18, \dots$

א. מהם האיבר הראשון ומנת הסדרה?

ב. מצא את האיבר החמישי בסדרה ואת האיבר השמיני בסדרה.

(4) נתונה סדרה הנדסית:  $5, 10, 20, \dots$

א. מהם האיבר הראשון ומנת הסדרה?

ב. מצא את האיבר השישי בסדרה ואת האיבר העשירי בסדרה.

(5) נתונה סדרה הנדסית:  $1024, 512, 256, \dots$

א. מהם האיבר הראשון ומנת הסדרה?

ב. מצא את האיבר הרביעי בסדרה ואת האיבר ה-11 בסדרה.

- 6) נתונה סדרה הנדסית:  $5, -15, 45, -135, \dots$
- א. מהם האיבר הראשון ומנת הסדרה?  
 ב. מצא את האיבר השישי בסדרה ואת האיבר התשיעי בסדרה.

### תשובות סופיות:

- 1) א.  $1, 3, 9, 27, 81, 243$   
 ב.  $2, 4, 8, 16, 32, 64$   
 ג.  $2, 6, 18, 54, 162, 486$   
 ד.  $2, 8, 32, 128, 512, 2048$
- 2) א. עולה. ב. עולה. ג. יורדת. ד. יורדת. ה. קבועה.  
 ו. מתנדנדת. ז. מתנדנדת. ח. מתנדנדת.  
 (\* שימו לב: מתנדנדת = אינה עולה ואינה יורדת).
- 3) א.  $a_1 = 2, q = 3$       ב.  $a_5 = 162, a_8 = 4374$
- 4) א.  $a_1 = 5, q = 2$       ב.  $a_6 = 160, a_{10} = 2560$
- 5) א.  $a_1 = 1024, q = \frac{1}{2}$       ב.  $a_4 = 128, a_{11} = 1$
- 6) א.  $a_1 = 5, q = -3$       ב.  $a_6 = -1215, a_9 = 32805$

## מציאת האיבר הראשון:

### סיכום כללי:

כדי למצוא את האיבר הראשון מנוסחת האיבר הכללי:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , יש לדעת את מנת הסדרה  $q$  וערכו של איבר כלשהו  $a_n$  הנמצא במיקום ה- $n$  בסדרה.

### שאלות:

- (1) מצא את האיבר הראשון בסדרות ההנדסיות הבאות:
- א.  $a_4 = 250, q = 5$       ב.  $a_8 = 729, q = -3$
- ג.  $a_5 = -2, q = \frac{1}{3}$       ד.  $a_4 = 4, q = -\frac{1}{6}$
- (2) בסדרה הנדסית שמנתה היא 3 ידוע כי  $a_3 = 45$ . מצא את האיבר הראשון.
- (3) נתונה סדרה הנדסית שבה:  $a_9 = 768, q = 2$ . מצא את האיבר הראשון ואת  $a_{11}$ .
- (4) מצא את האיבר השמיני בסדרה הנדסית שבה  $q = 3$  ו- $a_5 = 324$ .

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $a_1 = 2$       ב.  $a_1 = -\frac{1}{3}$       ג.  $a_1 = -162$       ד.  $a_1 = -864$
- (2)  $a_1 = 5$
- (3)  $a_1 = 3, a_{11} = 3072$
- (4)  $a_8 = 8748$

## מציאת מנת הסדרה:

### סיכום כללי:

כדי למצוא את מנת הסדרה מנוסחת האיבר הכללי:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , יש לדעת את ערכו של האיבר הראשון  $a_1$  וערכו של איבר נוסף  $a_n$  הנמצא במיקום ה- $n$  בסדרה.

נבצע בידוד ע"י הוצאת שורש מסדר  $n$ :  $q = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}$  ונקבל את מנת הסדרה.

### הערה:

אם השורש הוא מסדר זוגי אז יתכנו שני פתרונות אפשריים. לכן חשוב להקפיד על קריאה של טקסט השאלה בכדי לבחור את הפתרון הרצוי!

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות ע"י הוצאת שורש מסדר מתאים:

א.  $q^2 = 64$       ב.  $q^3 = 64$

ג.  $q^4 = 81$       ד.  $q^5 = 32$

ה.  $q^5 = -32$       ו.  $q^5 = -243$

ז.  $q^5 = 243$       ח.  $q^6 = -64$

ט.  $q^7 = -128$       י.  $q^8 = 256$

יא.  $q^2 = \frac{1}{100}$       יב.  $q^3 = -\frac{1}{27}$

יג.  $q^4 = \frac{16}{81}$       יד.  $q^5 = -0.03125$

(2) בסדרה הנדסית נתון  $a_1 = 2$  ו- $a_3 = 18$ . מצא את מנת הסדרה (הבחן בין שני מקרים).

(3) נתונה סדרה הנדסית עולה שבה  $a_1 = 5$  ו- $a_3 = 80$ . מצא את מנתה.

4) מצא את מנת הסדרות ההנדסיות הבאות :

ב.  $a_1 = 2, a_6 = 2048$

א.  $a_1 = 3, a_4 = -24$

ד.  $a_1 = \frac{3}{2}, a_8 = -192$

ג.  $a_1 = 128, a_4 = \frac{1}{4}$

5) בסדרה הנדסית שאינה עולה ואינה יורדת ידוע כי האיבר הראשון הוא 1 וכי האיבר השביעי הוא 729. מצא את מנת הסדרה.

6) מהי מנתה של סדרה הנדסית שבה  $a_1 = \frac{1}{5}$  ו-  $a_5 = 125$  אם :

א. ידוע כי הסדרה עולה.

ב. ידוע כי הסדרה אינה עולה ואינה יורדת.

7) האיבר השביעי של סדרה הנדסית יורדת הוא 23.

מצא את מנתה אם ידוע כי האיבר הראשון הוא  $a_1 = 1472$ .

8) יש להכניס שלושה מספרים בין המספרים 10 ו-2560 כך שתתקבל סדרה הנדסית.

א. מצא את מנת הסדרה (הבחן בין שני מקרים אפשריים).

ב. כתוב את האיברים המתקבלים בכל מקרה ותאר את אופי הסדרה (עולה / יורדת / אינה עולה ואינה יורדת).

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $q = \pm 8$     ב.  $q = 4$     ג.  $q = \pm 3$     ד.  $q = 2$     ה.  $q = -2$   
 ו.  $q = -3$     ז.  $q = 3$     ח. אין פתרון. ט.  $q = -2$     י.  $q = \pm 2$   
 יא.  $q = \pm \frac{1}{10} = \pm 0.1$     יב.  $q = -\frac{1}{3}$     יג.  $q = \pm \frac{2}{3}$     יד.  $q = -\frac{1}{2}$   
 (2)  $q = 3$  או  $q = -3$   
 (3)  $q = 4$   
 (4) א.  $q = -2$     ב.  $q = 4$     ג.  $q = \frac{1}{8}$     ד.  $q = -2$   
 (5)  $q = -3$   
 (6) א.  $q = 5$     ב.  $q = -5$   
 (7)  $q = \frac{1}{2}$   
 (8) א.  $q = 4$  או  $q = -4$

ב. עבור  $q = 4$  נקבל: 10, 40, 160, 640, 2560 - הסדרה עולה.

עבור  $q = -4$  נקבל: 10, -40, 160, -640, 2560 - הסדרה אינה עולה ואינה יורדת.



## שתי משוואות עם שני נעלמים:

### סיכום כללי:

בנושא זה נפתור מערכת של שתי משוואות במטרה למצוא את  $a_1$  ואת  $q$ .

### שאלות:

- (1) בסדרה הנדסית האיבר השני הוא 4 והאיבר החמישי הוא 256. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
- (2) בסדרה הנדסית האיבר הרביעי הוא 24 והאיבר השמיני הוא 384.  
א. מצא את האיבר הראשון ומנת הסדרה אם ידוע כי הסדרה עולה.  
ב. כיצד תשתנה תוצאתך אם הסדרה אינה עולה ואינה יורדת?
- (3) לפניך סדרות הנדסיות שבהם נתונים שני איברים.  
מצא את האיבר הראשון ומנת הסדרה בכל מקרה.  
אם יש יותר מאפשרות אחת, כתוב את כולן.
- א.  $a_2 = 12, a_7 = 2916$   
ב.  $a_3 = 20, a_6 = 160$
- ג.  $a_5 = 0.8, a_7 = 0.032$   
ד.  $a_4 = 162, a_{10} = \frac{2}{9}$
- (4) נתונה סדרה הנדסית שבה  $a_2 = 14$  ו- $a_5 = 4802$ . מצא את  $q$  ואת  $a_6$ .

### תשובות סופיות:

- (1)  $a_1 = 1, q = 4$
- (2) א.  $a_1 = 3, q = 2$   
ב.  $a_1 = -3, q = -2$
- (3) א.  $a_1 = 4, q = 3$   
ב.  $a_1 = 5, q = 2$   
ג.  $a_1 = 500, q = 0.2$  או  $a_1 = 500, q = -0.2$   
ד.  $a_1 = 4374, q = \frac{1}{3}$  או  $a_1 = -4374, q = -\frac{1}{3}$
- (4)  $a_6 = 33614, q = 7$

## סכום סדרה הנדסית:

### סיכום כללי:

נוסחה למציאת סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה הנדסית  $a_1, a_2, a_3, \dots$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{שמנתה } q \text{ היא:}$$

### שאלות:

- (1) חשב את הסכומים של הסדרות ההנדסיות הבאות:
  - א. סכום 5 האיברים הראשונים של הסדרה:  $1, 3, 9, \dots$
  - ב. סכום 7 האיברים הראשונים של הסדרה:  $2, 8, 32, \dots$
  - ג. סכום 6 האיברים הראשונים של הסדרה:  $180, 90, 45, \dots$
  - ד. סכום 8 האיברים הראשונים של הסדרה:  $4, -12, 36, \dots$
- (2) בסדרה הנדסית האיבר הראשון הוא 3 ומנתה 2. מה הוא סכום 10 האיברים הראשונים בסדרה?
- (3) נתונה סדרה הנדסית שבה האיבר השלישי הוא 18- והאיבר החמישי הוא 162- .
  - א. מה הוא סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה אם ידוע כי כל איבריה הם שליליים?
  - ב. מה הוא סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה אם ידוע כי היא אינה עולה ואינה יורדת?

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $S_5 = 121$     ב.  $S_7 = 10922$     ג.  $S_6 = 354.375$     ד.  $S_8 = -6560$
- (2)  $S_{10} = -3069$
- (3) א.  $S_5 = -242$     ב.  $S_5 = -122$

## שאלות מילוליות שונות בסדרה הנדסית:

### סיכום כללי:

בנושא זה נתרגל את עקרונות הסדרה ההנדסית בבעיות מילוליות שונות המתארות תחרישים מחיי היומיום.

### שאלות:

- (1) מיטל לומדת למבחן במתמטיקה. ביום הראשון פתרה מיטל 3 תרגילים ובכל יום נוסף פתרה פי 2 תרגילים יותר מאשר ביום הקודם. כמה תרגילים פתרה מיטל ביום השישי?
- (2) רעות קוראת ספר במשך 5 ימים. ביום הראשון קראה רעות 2 עמודים ובכל יום קראה רעות פי 3 עמודים יותר מאשר ביום הקודם. כמה עמודים בספר?
- (3) אוטובוס עובר בכל שעה 0.8 מהדרך שעבר בשעה הקודמת. בשעה הראשונה לנסיעתו עבר האוטובוס מרחק של 50 ק"מ.
  - א. מה המרחק שיעבור האוטובוס בשעה הרביעית לנסיעתו?
  - ב. מה המרחק הכולל שעבר האוטובוס במשך 4 שעות של נסיעה?
- (4) במושב מסוים ישנם 5 כיכרות עגולים בזה אחר זה. קוטר הכיכר הראשונה הוא 8 מטרים, והקוטר של כל כיכר שאחריה גדול פי 1.5 מהכיכר שלפניה.
  - א. האם היקפי הכיכרות הם סדרה הנדסית?
  - אם כן, רשום את האיבר הראשון של הסדרה ואת מנתה. אם לא – הסבר.
  - ב. האם שטחי הכיכרות הם סדרה הנדסית?
  - אם כן, רשום את האיבר הראשון של הסדרה ואת מנתה. אם לא – הסבר.
- (5) רץ למרחקים ארוכים עובר בכל שעה  $\frac{2}{3}$  מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. בשעה הרביעית עבר 320 מטרים.
  - א. איזה מרחק עבר בשעה הראשונה?
  - ב. איזה מרחק עבר בכל 4 השעות?

6) ספורטאי הלך 6 שעות רצופות. בכל שעה עבר מרחק השווה ל- $\frac{4}{5}$  מהמרחק

שעבר בשעה הקודמת. בשעה השלישית הוא עבר 2,000 מטר.

א. חשב את המרחק שעבר הספורטאי בשעה הראשונה.

ב. חשב את כל המרחק שעבר הספורטאי במשך 6 שעות.

7) ההיקפים של ריבועים מהווים סדרה הנדסית עולה.

בסדרה ישנם 8 ריבועים.

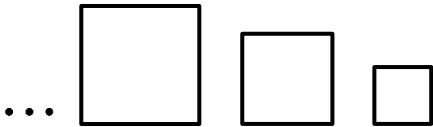
אורך הצלע של הריבוע הראשון הוא 3 ס"מ,

ואורך הצלע של הריבוע השני הוא 6 ס"מ.

א. מהו ההיקף של הריבוע השלישי בסדרה?

ב. מהי הצלע של הריבוע האחרון בסדרה?

ג. מהו סכום ההיקפים של שמונת הריבועים?



8) ההיקפים של משולשים שווי-צלעות מהווים סדרה הנדסית עולה.

בסדרה ישנם 6 משולשים.

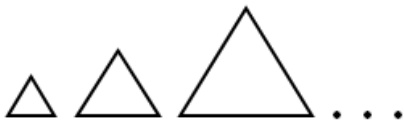
אורך הצלע של המשולש הראשון הוא 2 ס"מ,

ואורך הצלע של המשולש השני הוא 8 ס"מ.

א. מהו ההיקף של המשולש השלישי בסדרה?

ב. מהי הצלע של המשולש האחרון בסדרה?

ג. מהו סכום ההיקפים של ששת המשולשים?



9) כאשר מסדרים את המשכורות של 4 עובדים בסדר עולה (מהמשכורת הנמוכה

אל המשכורת הגבוהה), מקבלים סדרה הנדסית. המשכורת הנמוכה ביותר

היא 5,000 ₪, והמשכורת הגבוהה ביותר היא 10,985 ₪.

א. חשב את מנת הסדרה ההנדסית.

ב. חשב את סכום המשכורות של ארבעת העובדים.

ג. חשב את הממוצע של ארבעת משכורות העובדים.

10) כאשר מסדרים את המשכורות של 5 עובדים בסדר עולה

(מהמשכורת הנמוכה אל המשכורת הגבוהה), מקבלים סדרה הנדסית.

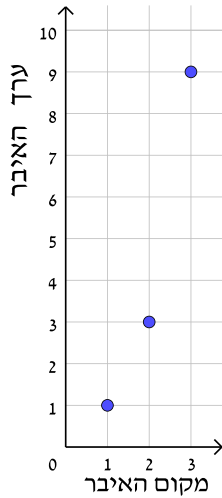
המשכורת הנמוכה ביותר היא 6,000 ₪, והמשכורת הגבוהה ביותר

היא 8,784.60 ₪.

א. חשב את מנת הסדרה ההנדסית.

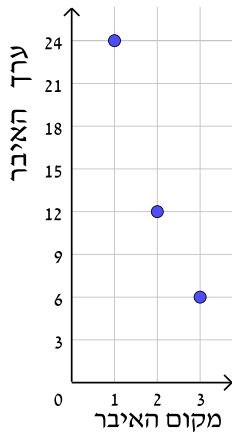
ב. חשב את סכום המשכורות של חמשת העובדים.

ג. חשב את הממוצע של חמשת משכורות העובדים.



11) בגרף שלפניך מתוארת סדרה הנדסית:

- א. מצא על-פי הגרף את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה.  
 ב. חשב את סכום עשרת האיברים הראשונים של הסדרה.



12) בגרף שלפניך מתוארת סדרה הנדסית:

- א. מצא על-פי הגרף את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה.  
 ב. חשב את סכום שמונת האיברים הראשונים של הסדרה.

### תשובות סופיות:

- (1) 96 תרגילים.  
 (2) 242 עמודים.  
 (3) א. 25.6 ק"מ. ב. 147.6 ק"מ.  
 (4) א. כן,  $a_1 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ ,  $q = 1.5$ . ב. כן,  $a_1 = 16\pi$ ,  $q = 2.25$ .  
 (5) א. 1080 מטרים. ב. 2600 מטרים.  
 (6) א. 3125 מטרים. ב. 11529 מטרים.  
 (7) א. 48 ס"מ. ב. 384 ס"מ. ג. 3060 ס"מ.  
 (8) א. 96 ס"מ. ב. 2048 ס"מ. ג. 8190 ס"מ.  
 (9) א.  $q = 1.3$ . ב. 30935 ₪. ג. 7733.75 ₪.  
 (10) א.  $q = 1.1$ . ב. 36630.6 ₪. ג. 7326.12 ₪.  
 (11) א.  $a_1 = 1$ ,  $q = 3$ . ב.  $S_{10} = 29524$ .  
 (12) א.  $a_1 = 24$ ,  $q = \frac{1}{2}$ . ב.  $S_8 = 47.8125$ .