שאלון 571

נושאים נוספים בפונקצית הפולינום

תוכן העניינים:

הוכחת אי-שוויונות: 2

שאלות: 2

נגזרת של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי: 3

שאלות: 3

תשובות סופיות: 4

חקירה של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי: 5

שאלות: 5

תשובות סופיות: 6

הקשר שבין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ופונקציה קדומה: 7

סיכום כללי: 7

שאלות: 8

תשובות סופיות: 11

הוכחת אי-שוויונות:

שאלות:

1) הוכיחו כי לכל $0 \le x \le 7$ מתקיים אי השוויון: $-21 \le -x^2+10x-21 \le 4$.

2) פתרו את אי-השוויונות הבאים:

א. $-2x^2+8x \le 8$

ב. $x^4-18x^2+32 \ge -49$

ג. $-3x^4+8x^3-6x^2 \le 0$

3) הוכיחו כי לכל x גרף הפונקציה: $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+5$ נמצא כולו מעל ציר ה-x.

נגזרת של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי:

שאלות:

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו את ערך הנגזרת בנקודות הבאות:

א. הפונקציה: $f(x)=5(3x+1)^3$ בנקודה שבה: $x=0$.

ב. הפונקציה: $f(x)=\frac{(2x+5)^5}{2}$ בנקודה שבה: $x=-1$.

ג. הפונקציה: $f(x)=(x^2+3)^3$ בנקודה שבה: $x=2$.

ד. הפונקציה: $f(x)=\frac{(x-x^3)^4}{4}$ בנקודה שבה: $x=0$.

ה. הפונקציה: $f(x)=(8x^4-1)^7$ בנקודה שבה: $x=-\frac{1}{2}$.

ו. הפונקציה: $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^4+4x^2+4\right)^4$ בנקודה שבה: $x=1$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x^2+x+1)^5$.

העבירו משיק בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו נקודה על גרף הפונקציה בה המשיק לפונקציה מקביל לישר $y=-5$.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=(-2x+2)^6$.

א. עבור איזו נקודה על הפונקציה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 12?

ב. מצאו את משוואת המשיק.

ג. מצאו נקודה על גרף הפונקציה שהמשיק העובר בנקודה זו מקביל לציר ה-x.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(2x-7)^3$.

א. לגרף הפונקציה $f(x)$ מעבירים שני משיקים שהשיפוע שלהם הוא 3,

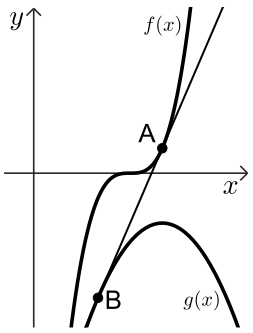
מצאו את משוואות המשיקים.

נתונה פונקציה נוספת: $g(x)=2(x-8)^3$. המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=5$,

מקביל למשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה A שנמצאת ברביע הרביעי.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=(2x-3)^3$.



א. מצאו את הנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון, בה המשיק לגרף מאונך לישר $x+6y=0$.

ב. המשיק ל-$f(x)$ בנקודה A, משיק לפונקציה: $g(x)=-3x^2+12x-14$ בנקודה B (ראו סרטוט). מצאו את שיעורי הנקודה B.

תשובות סופיות:

1) א. 45 ב. 405 ג. 588 ד. 0 ה. $-\frac{7}{16}$ ו. $\frac{323433}{16}$

2) א. $y=5x+1$ ב. $\left(-\frac{1}{2},\frac{243}{1024}\right)$.

3) א. $(1.5,1)$ ב. $y=12x-17$ ג. $(1,0)$.

4) א. $y=3x-\frac{21}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=3x-\frac{21}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ב. $A(5,-54)$.

5) א. $A(2,1)$ ב. $B(1,-5)$.

חקירה של פונקציה מורכבת עם מעריך טבעי:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(x^2-10x+16\right)^2$.

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי k הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה פעמיים?

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(x^2+9\right)^2-36x^2$ המוגדרת לכל x.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)$. בהסתמך על סעיפים קודמים:

ג. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ד. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

ה. בחרו בתשובה הנכונה:

(1) לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)$ יש אותם תחומי עליה וירידה.

(2) לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)$ יש אותן נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

(3) לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)$ יש אותם תחומי חיוביות ושליליות.

(4) לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)$ יש אותן נקודות קיצון.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(x^2-4x-12\right)^2$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתון שהפונקציה $g(x)=f(x+b)$ היא פונקציה זוגית.

(1) מצאו את b.

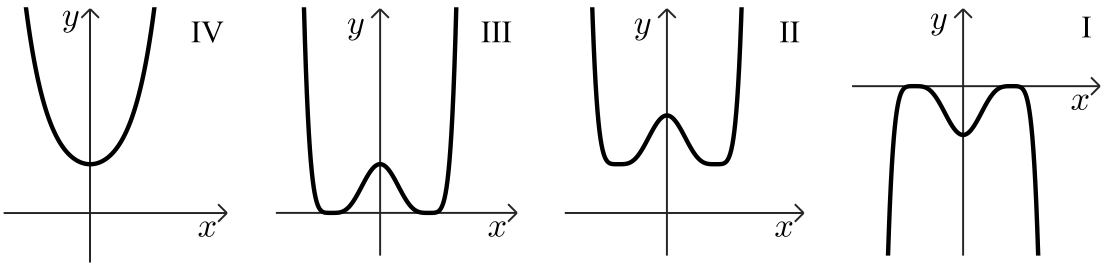
(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x^2-a)^4$, $a<0$.

א. הביעו באמצעות a את נקודות החיתוך עם הצירים (אם קיימות).

ב. הביעו באמצעות a את נקודות הקיצון ואת סוגן.

ג. בחרו מבין סקיצות I-IV את הסקיצה המתאימה ביותר לתיאור גרף הפונקציה $f(x)$. נמקו את בחירתכם.



ד. נתון כי שיפוע גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-1$ הוא 8, מצאו את a.

תשובות סופיות:

1) א. $\min(8,0)$, $\max(6,81)$, $\min(2,0)$ ב. $(0,256)$, $(8,0)$, $(2,0)$

ג. ראו סקיצה בסרטון הוידאו. ד. $k=0$ או $k>81$.

2) א. $(0,81)$ ב. $\min(3,0)$, $\max(0,81)$, $\min(-3,0)$

ג. $(0,-81)$ ד. $\max(3,0)$, $\min(0,-81)$, $\max(-3,0)$

ה. טענה (2).

3) א. $(-2,0)$, $(6,0)$ ב. $\min(6,0)$, $\max(2,256)$, $\min(-2,0)$

ג. ראו סרטוט בסרטון הוידאו. ד. (1) $b=2$

ד. (2) $\min(4,0)$, $\max(0,256)$, $\min(-4,0)$.

4) א. $(0,a^4)$ ב. $\min(0,a^4)$ ג. IV ד. $a=2$.

הקשר שבין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ופונקציה קדומה:

סיכום כללי:

חוקים כלליים עבור נגזרת ראשונה:

- כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית ולהיפך.
- כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית ולהיפך.
- כאשר ל-$f(x)$ יש קיצון, $f'(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה-x) ולהיפך.

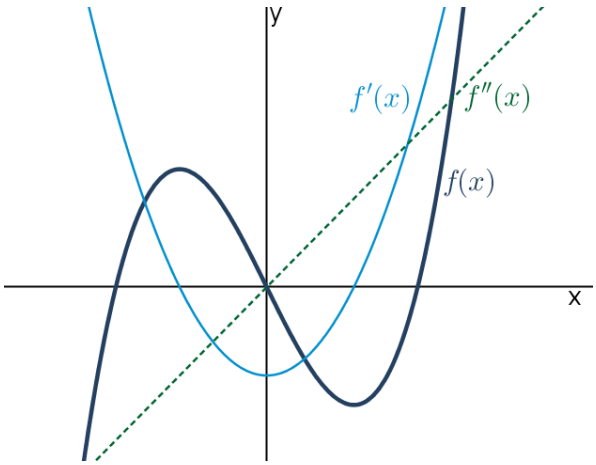
חוקים כלליים עבור נגזרת שנייה:

- כאשר $f'(x)$ עולה אז $f''(x)$ חיובית ו-$f(x)$ קעורה כלפי מעלה.
- כאשר $f'(x)$ יורדת אז $f''(x)$ שלילית ו-$f(x)$ קעורה כלפי מטה.
- כאשר ל-$f'(x)$ יש קיצון, אז $f''(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה-x) ולהיפך.

דוגמא עבור הפונקציה: $f(x)=x^3-12x$.

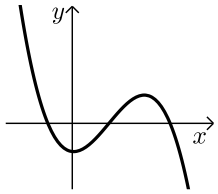
- נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=3x^2-12$.
- הנגזרת השנייה היא: $f''(x)=6x$.

ניתן לראות את החוקים האמורים לעיל באיור הנ"ל:

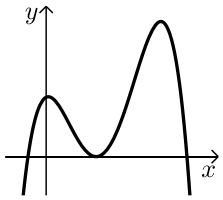


שאלות:

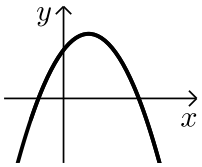
1) נתון גרף של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת.
נמק את שיקוליך בסרטוט.



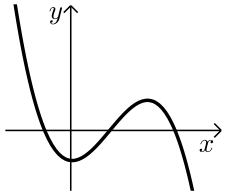
2) נתון גרף של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת.
נמק את שיקוליך בסרטוט.



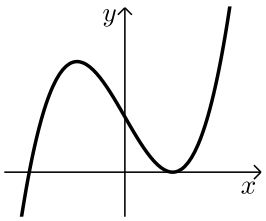
3) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
אם ידוע שהיא עובדת בראשית הצירים.
נמק את שיקוליך בסרטוט.



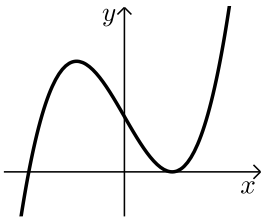
4) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
אם ידוע שהיא עובדת בראשית הצירים.
נמק את שיקוליך בסרטוט.



5) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
אם נתון: $f(0)=0$.
נמק את שיקוליך בשרטוט.

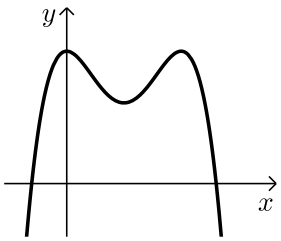


6) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה
ואת גרף הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0)=0$.
נמק את שיקוליך בשרטוט.



7) נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה ואת גרף הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0)=0$.

נמק את שיקוליך בשרטוט.



8) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2-6x+5$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הנגזרת $f'(x)$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הנגזרת $f'(x)$.

10) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת.

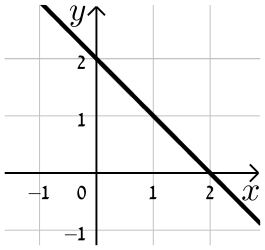
הערך המקסימלי שלה מתקבל בנקודה שבה: $x=2$.

א. מהו סימן הנגזרת עבור: $x<2$?

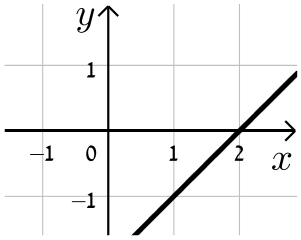
ב. מהו סימן הנגזרת עבור: $x>2$?

ג. איזה מבין הגרפים הנ"ל יכול לתאר את גרף הנגזרת?

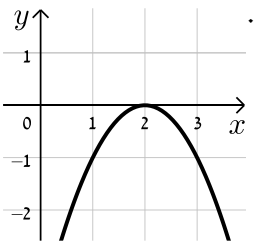
i.



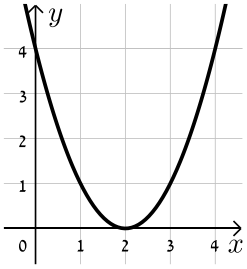
ii.



iii.



iv.

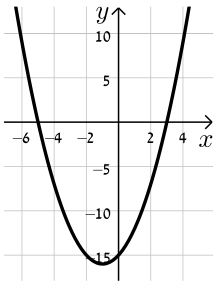


11) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-15x$.

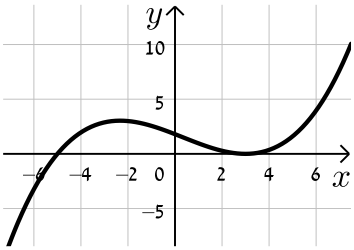
א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. איזה מבין הגרפים הבאים מתאר סקיצה של הנגזרת $f'(x)$? נמק.

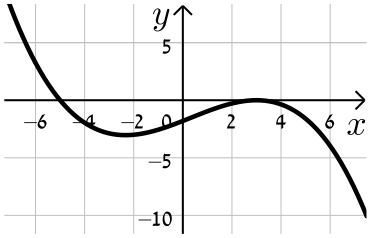
i.



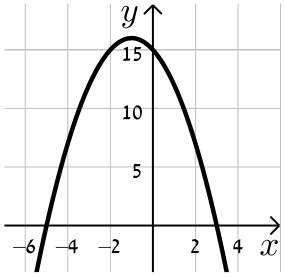
ii.



iii.



iv.



12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-4x^3$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט באמצעות נתונים אלו את הגרף של נגזרת הפונקציה.

13) ענה על הסעיפים הבאים:

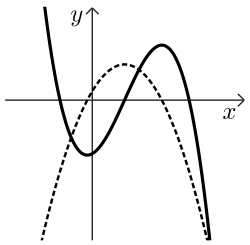
א. סרטט את גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$, של $f(x)$, אם ידוע כי ל-$f(x)$ יש שתי נקודות קיצון: מקסימום כאשר: $x=-1$ ומינימום כאשר: $x=3$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)$ ולה 3 נקודות קיצון: מקסימום כאשר: $x=0,5$ ומינימום כאשר: $x=2$. סרטט את גרף הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

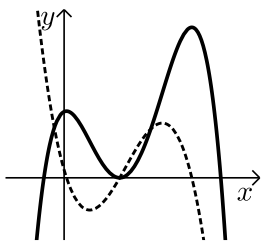
ג. סרטט את גרף הנגזרת $f'(x)$, של $f(x)$, אם ידוע כי היא יורדת לכל x והנגזרת שלה מתאפסת בנקודה שבה: $x=3$.

תשובות סופיות:

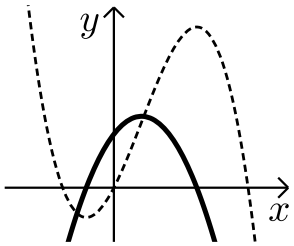
(1



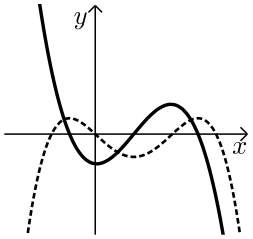
(2



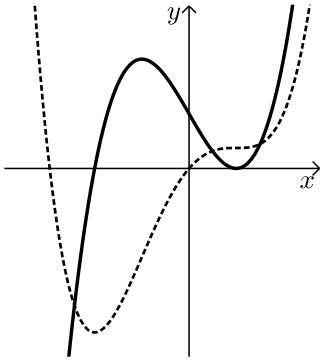
(3



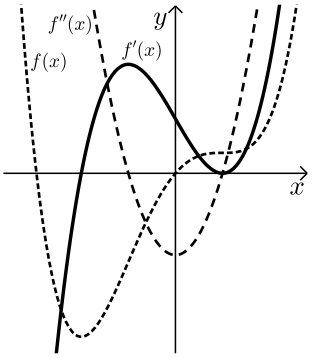
(4



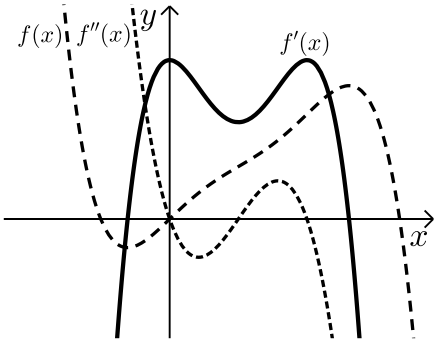
(5



(6

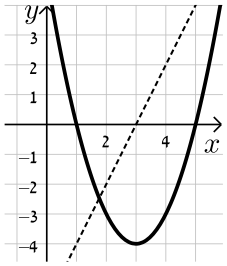


(7



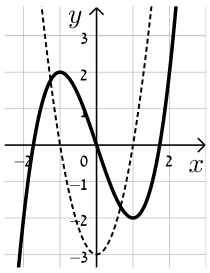
8) א. i. $(5,0)$, $(1,0)$, $(0,5)$ ii. $\min(3,-4)$.

ב.



9) א. i. $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$ ii. $\max(-1,2)$, $\min(1,-2)$.

ב.

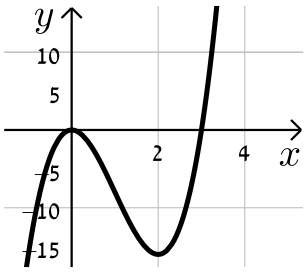


10) א. $f'(x)>0$. ב. $f'(x)<0$. ג. 1.

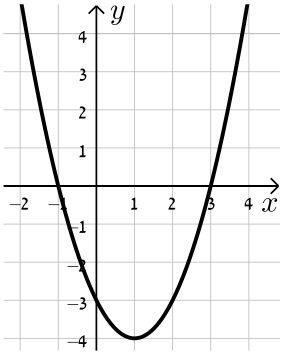
11) א. עולה: $x>3$, $x<-5$, יורדת: $-5<x<3$. ב. 1.

12) א. עולה: $x>3$ יורדת: $0<x<3$, $x<0$.

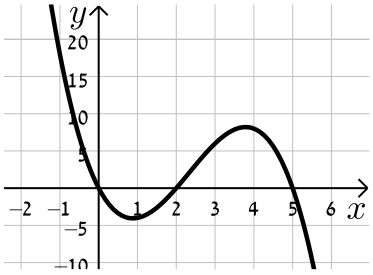
ב.



13) א.



ב.



ג.

