שאלון 571

מבוא לפונקצית הפולינום

תוכן העניינים:

הפולינום: 3
סיכום כללי: 3
שאלות: 4
תשובות סופיות: 5
פירוק פולינום: 6
סיכום כללי: 6
שאלות: 6
תשובות סופיות: 6
נקודות האפס של פולינום: 7
סיכום כללי: 7
שאלות: 7
תשובות סופיות: 8
חיוביות ושליליות של פולינום: 9
סיכום כללי: 9
שאלות: 9
תשובות סופיות: 10
התנהגות באינסוף: 11
סיכום כללי: 11
שאלות: 13
תשובות סופיות: 13
סרטוט גרף פונקצית הפולינום: 14
סיכום כללי: 14
שאלות: 15
תשובות סופיות: 17
תחומי חיוביות ושליליות מתוך גרף הפולינום: 18
סיכום כללי: 18
שאלות: 18
תשובות סופיות: 19

סיכום פונקצית הפולינום: 20
סיכום כללי: 20
שאלות: 21
תשובות סופיות: 23

הפולינום:

סיכום כללי:

פונקציית פולינום ממעלה n מוגדרת כך: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

כאשר $a_n\neq 0$ ו- n מספר טבעי או 0.

x הוא המשתנה של הפולינום.

$a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n$ נקראים מקדמי הפולינום, והם מספרים קבועים.

לשם נוחות ניתן גם לכתוב את פונקציית הפולינום בסדר הפוך:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

n נקרא המעלה של הפולינום.

- **כאשר $n=0$ מתקבל פולינום ממעלה 0.**
  פולינום כזה נקרא גם פונקציה קבועה.
  זו למעשה משוואת קו ישר, המקביל לציר ה- x.
- **כאשר $n=1$ מתקבל פולינום ממעלה ראשונה.**
  פולינום כזה נקרא גם פונקציית קו ישר.
  זו למעשה משוואת קו ישר, שאינו מקביל לציר ה- x.
- **כאשר $n=2$ מתקבל פולינום ממעלה שנייה.**
  פולינום כזה נקרא גם פונקציה ריבועית.
  זוהי פונקציה שהגרף שלה הוא פרבולה.
- **כאשר $n=3$ מתקבל פולינום ממעלה שלישית. וכן הלאה.**
  מקרה מיוחד: הפונקציה $f(x)=0$ היא פולינום ללא מעלה.

שאלות:

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים - סדרו את הפולינום בסדר חזקות יורד וקבעו מה מעלת הפולינום.

א. $f(x)=3x^2-5x^5+2x+7-x^3$

ב. $g(x)=4x+2x^3-1$

ג. $h(x)=x^4-3+2x$

ד. $p(x)=\frac{1}{2}x^3-2x+5x^2-\frac{1}{4}$

ה. $m(x)=\sqrt{3}x^4-2x+\sqrt{2}-x^2$

2) לפניכם רשימה של פולינומים:

א. בחרו מתוך הרשימה את הפולינומים המייצגים קווים ישרים ושרטטו סקיצה מתאימה
(אין חובה לשרטט בתוך מערכת צירים)

ב. בחרו מתוך הרשימה את הפולינומים המייצגים פרבולות ושרטטו סקיצה מתאימה
(אין חובה לשרטט בתוך מערכת צירים)

(1) $f(x)=x^2-3x^4+5$

(2) $g(x)=4x$

(3) $h(x)=x^3-1+2x$

(4) $p(x)=x^2-5x+6$

(5) $m(x)=-3x+4$

(6) $q(x)=-1$

(7) $n(x)=5x^5+4x^4+3x^3+1$

(8) $r(x)=-x^2+9$

(9) $t(x)=x^6-2x^3-8$

תשובות סופיות:

1) א. $f(x)=-5x^5-x^3+3x^2+2x+7$

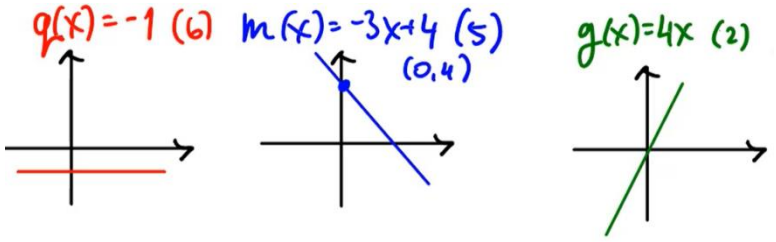
ב. $g(x)=2x^3+4x-1$

ג. $h(x)=x^4+2x-3$

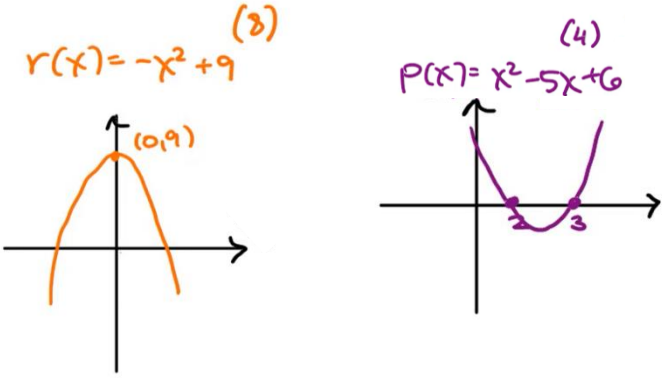
ד. $p(x)=\frac{1}{2}x^3+5x^2-2x-\frac{1}{4}$

ה. $m(x)=\sqrt{3}x^4-x^2-2x+\sqrt{2}$.

2) א. פונקציות: (2), (5), (6)



ב. פונקציות: (4), (8)



פירוק פולינום:

סיכום כללי:

נוסחאות כפל מקוצר:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

פירוק טרינום:

$$ax^2 + bx + c = a(x-d_1)(x-d_2)$$

שאלות:

3) פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים:

א. $f(x) = 3x^3 - 6x^2$

ב. $g(x) = x^2 - 81$

ג. $h(x) = 5x^2 + 10x + 5$

ד. $p(x) = x^2 - 4x + 3$

ה. $m(x) = 6x^2 + 5x + 1$

ו. $q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

תשובות סופיות:

3) א. $f(x) = 3x^2(x-2)$

ב. $g(x) = (x+9)(x-9)$

ג. $h(x) = 5(x+1)^2$

ד. $p(x) = (x-3)(x-1)$

ה. $m(x) = (2x+1)(3x+1)$

ו. $q(x) = (x-3)(x-1)$

נקודות האפס של פולינום:

סיכום כללי:

המשוואה $f(x)=0$ נקראת משוואת הפולינום $f(x)$.

הפתרונות של המשוואה נקראים נקודות האפס או נקודות האיפוס של הפולינום $f(x)$.

נקודות אלה הן למעשה נקודות החיתוך של **גרף** הפולינום עם ציר ה- x.

שאלות:

4) לפניכם פולינום המפורק לגורמים.

רשמו מתחת לכל אחד מהסוגריים את הריבוי המתאים להם.

$$y=5(x-1)^2(x^2+3)^5(x-4)(x+1)^2$$

5) מצאו את כל נקודות האפס של כל אחד מהפולינומים הבאים:

א. $y=(2x-1)^3(3x^2+1)(x+4)$

ב. $y=(x-2)(3x+5)^2(\sqrt{2}-x)^2$

ג. $y=(x^2+1)(x^2+x+1)$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים, פרקו את הפולינום לגורמים

ומצאו את כל נקודות האפס של הפולינום:

א. $f(x)=-2x^4+5x^3-3x^2$

ב. $g(x)=8x^4-x^2$

ג. $h(x)=x^4-2x^2-8$

7) כל אחד מהפולינומים שלפניכם מוצג בשני אופנים - בסדר חזקות יורד ובאמצעות פירוק לגורמים לינאריים וגורמים ריבועיים שאינם פריקים. עבור כל אחד מהפולינומים:

(1) $f(x)=x^4-2x^3+10x^2-18x+9=(x-1)^2(x^2+9)$

(2) $g(x)=x^5-3x^4+2x^3-6x^2+x-3=(x^2+1)^2(x-3)$

א. קבעו מהי מעלת הפולינום.

ב. סמנו בצבע צהוב את הריבוי של כל אחד מהסוגריים.

ג. סמנו קו אדום מתחת לגורמים שאינם פריקים.

ד. האם ניתן לדעת מה מעלת הפולינום באמצעות התבוננות בפירוק הפולינום לגורמים?

ה. קבעו את מספר נקודות האפס של כל אחד מן הפולינומים.

תשובות סופיות:

4) $(x+1):2$, $(x-4):1$, $(x^2+3):5$, $(x-1):2$

5) א. $(-4,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ב. $(2,0)$, $\left(-\frac{5}{3},0\right)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$ ג. אין נקודות אפס.

6) א. $f(x)=x^2(x-1.5)(x-1)$, $(1,0)$, $(1.5,0)$, $(0,0)$

ב. $g(x)=x^2(8x^2-1)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{8}},0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{8}},0\right)$, $(0,0)$

ג. $h(x)=(x^2-4)(x^2+2)$, $(-2,0)$, $(2,0)$

7) (1) א. 4 ב. $(x-1):2$, $(x^2+9):1$ ג. (x^2+9) ד. ניתן לדעת

ה. נקודה אחת.

(2) א. 5 ב. $(x-3):1$, $(x^2+1):2$ ג. (x^2+1) ד. ניתן לדעת

ה. נקודה אחת.

חיוביות ושליליות של פולינום:

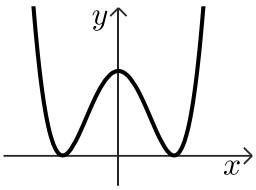
סיכום כללי:

כדי למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של פונקצית פולינום נבצע:

- מציאת נקודות האפס של הפונקציה.
- קביעת סימן הפונקציה בכל תחום שבין שתי נקודות אפס.

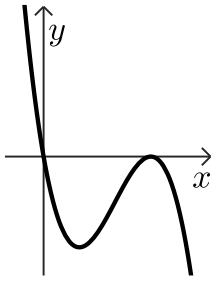
שאלות:

8) לפניכם גרף של פונקצית פולינום הבאה: $f(x)=(x+3)^2(x-3)^2$.



היעזרו בסרטוט וקבעו מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפולינום.

9) לפניכם גרף פונקצית הפולינום הבאה: $f(x)=-x^3+6x^2-9x$.

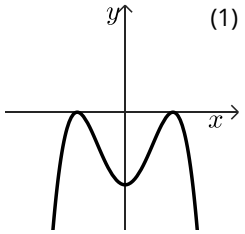


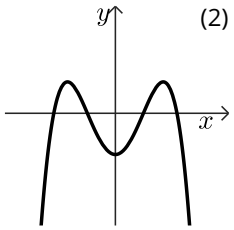
א. פרקו את הפולינום לגורמים.

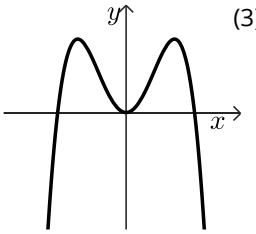
ב. מצאו את נקודות האפס של הפולינום.

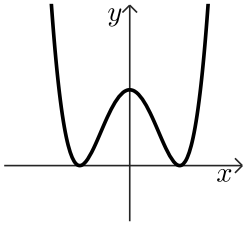
ג. היעזרו בגרף ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפולינום.

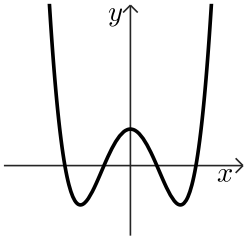
10) לפניכם גרפים של פונקציות פולינום שונות (1)-(6), התאימו בין כל גרף ותחומי החיוביות שלו.

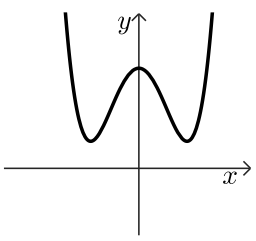
(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


א. כל x.

ב. אף x.

ג. $x \neq 3, x \neq -3$.

ד. $3 > x > 1, -1 > x > -3$.

ה. $3 < x, -1 < x < 1, x < -3$.

ו. $3 > x > 0, 0 > x > -3$.

תשובות סופיות:

8) חיוביות: $3 < x, -3 < x < 3, x < -3$. שליליות: אף x.

9) א. $f(x) = -x(x-3)^2$ ב. $(3,0)$, $(0,0)$.

ג. חיוביות: $x < 0$. שליליות: $3 < x, 0 < x < 3$.

10) (1) אף x (2) $3 > x > 1, -1 > x > -3$ (3) $3 > x > 0, 0 > x > -3$.

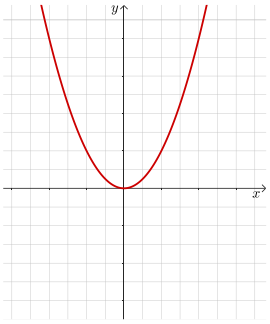
(4) $x \neq 3, x \neq -3$ (5) $3 < x, -1 < x < 1, x < -3$ (6) כל x.

התנהגות באינסוף:

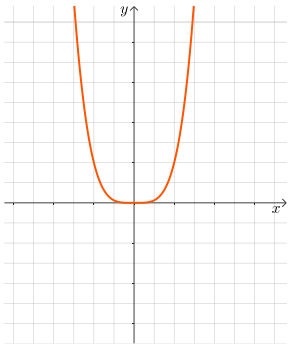
סיכום כללי:

הפונקציה $f(x)=x^n$ כאשר n זוגי:

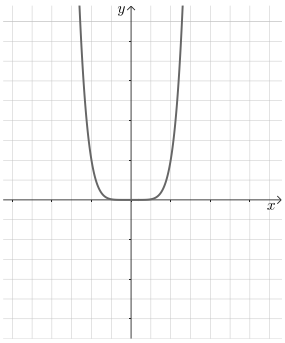
$f(x)=x^2$



$f(x)=x^4$

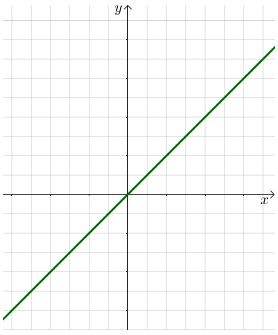


$f(x)=x^6$

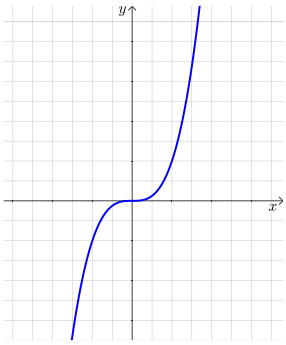


הפונקציה $f(x)=x^n$ כאשר n אי-זוגי:

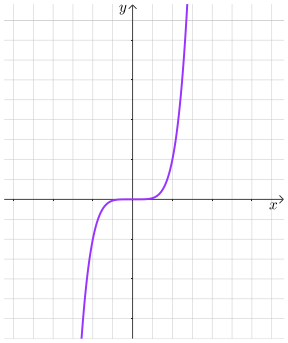
$f(x)=x$



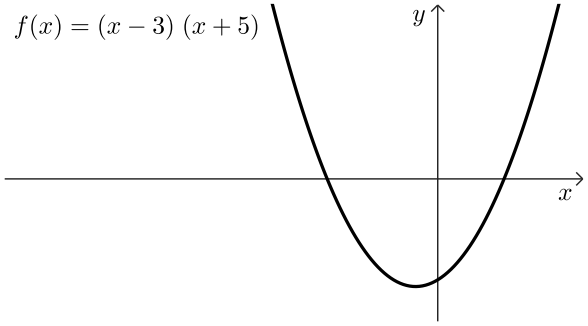
$f(x)=x^3$

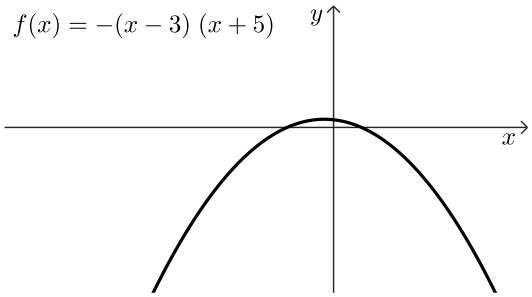


$f(x)=x^5$

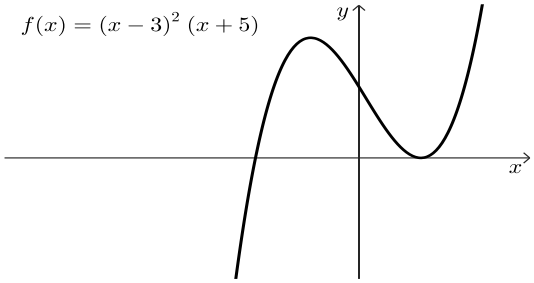


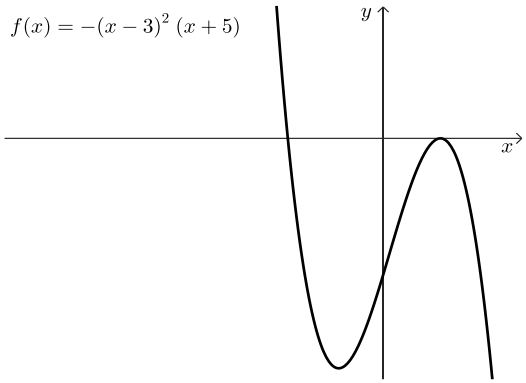
מעלה זוגית





מעלה אי-זוגית





גרף פולינום – התנהגות באינסוף:

- גרף של פולינום **ממעלה זוגית** n, שבו המקדם של x^n חיובי, מתחיל **מלמעלה**, כלומר מאינסוף (רביע II) ומסתיים **למעלה**, כלומר באינסוף (רביע I).
(אם המקדם של x^n שלילי, הגרף יתהפך: יתחיל מלמטה ויסתיים למטה)
- גרף של פולינום **ממעלה אי-זוגית** n, שבו המקדם של x^n חיובי, מתחיל **מלמטה**, כלומר ממינוס אינסוף (רביע III) ומסתיים **למעלה**, כלומר באינסוף (רביע I).
(אם המקדם של x^n שלילי, הגרף יתהפך: יתחיל מלמעלה ויסתיים למטה)

שאלות:

11) לפניכם רשימה של פולינומים:

i. $f(x)=x(x-3)(x+3)$

ii. $f(x)=-(x^2-9)(x^2-4)$

iii. $f(x)=x^2(6-x)^2(8-x)$

iv. $f(x)=x(3x-4)^3$

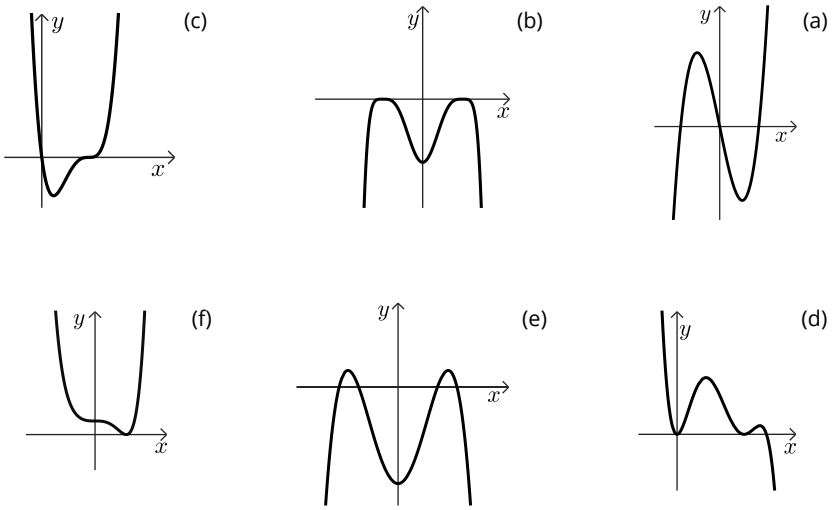
v. $f(x)=(x^3-8)^2$

vi. $f(x)=-(2x^2-1)^4$

א. (1) עבור כל פולינום, קבעו מה מעלת הפולינום.

(2) קבעו את סימן המקדם של החזקה המובילה.

ב. התאימו לכל פולינום מסעיף א' סקיצה מתאימה מתוך הגרפים שלפניכם:



תשובות סופיות:

11) i. מעלה 3, חיובי, גרף a.

ii. מעלה 4, שלילי, גרף e.

iii. מעלה 5, שלילי, גרף d.

iv. מעלה 4, חיובי, גרף c.

v. מעלה 6, חיובי, גרף f.

vi. מעלה 8, שלילי, גרף b.

סרטוט גרף פונקצית הפולינום:

סיכום כללי:

על מנת לשרטט גרף של פונקציית פולינום נמצא:

1) את נקודות האפס של הפולינום
2) את מעלת הפולינום
3) את סימן המקדם של המעלה הגבוהה ביותר בפולינום
4) את הריבוי של כל ביטוי במכפלת הסוגריים המייצגת את הפולינום (זוגי/אי-זוגי/גדול מ-1)

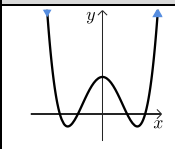
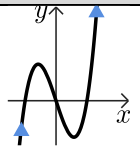
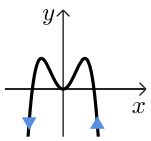
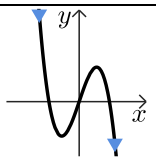
סיכום - שרטוט גרף פולינום ע"פ ריבוי השורשים והתנהגות באינסוף:

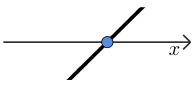
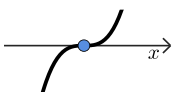
- קובעים אם דרגת הפולינום (החזקה הגבוהה ביותר) היא זוגית\אי זוגית
- קובעים את סימן המקדם של החזקה הגבוה ביותר (חיובי\שלילי)

- מפרקים את הפולינום לגורמים
- מוצאים את שורשי הפולינום (נקודות האפס)
- קובעים את הריבוי של כל שורש

משרטטים את גרף הפונקציה בקצוות ע"פ הטבלה

משרטטים את גרף הפונקציה סביב נקודות האפס ע"פ הטבלה

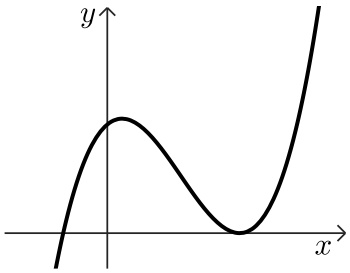
	דרגת פולינום זוגית	דרגת פולינום אי זוגית
מקדם החזקה הגבוהה חיובי		
מקדם החזקה הגבוהה שלילי		

	התנהגות סביב השורש	צורת הגרף
ריבוי שורש 1	גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x	
ריבוי שורש זוגי	גרף הפונקציה משיק לציר ה-x	
ריבועי שורש אי-זוגי (גדול מ-1)	גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x עם פיתול	

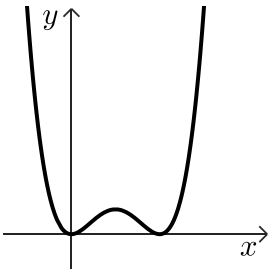
שאלות:

12) לפניכם זוגות של גרפים ופולינומים.
עבור כל אחד מהפולינומים, קבעו האם הגרף מייצג את הפולינום.
אם לא – תקנו את הסרטוט כך שיתאים.

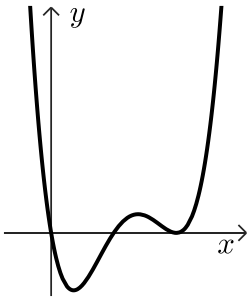
א. הפונקציה: $f(x)=(x+3)^2(x+1)$.



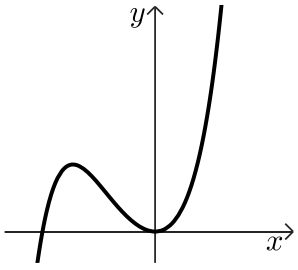
ב. הפונקציה: $f(x)=x^2(x-2)^2$.



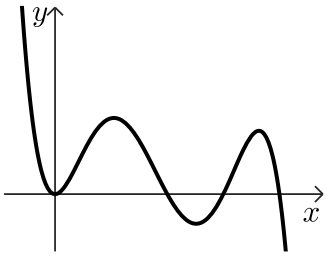
ג. הפונקציה: $f(x)=x^2(x-1)(x-2)^2$.



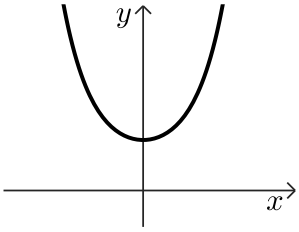
ד. הפונקציה: $f(x)=x^2(x^2+1)(1-x)$.



ה. הפונקציה: $f(x)=(4-x)(3-x)(2-x)x^2$.



ו. הפונקציה: $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2)^2$.



13) סרטטו סרטוט סכמתי עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(2x+1)(x+1)(x+3)$

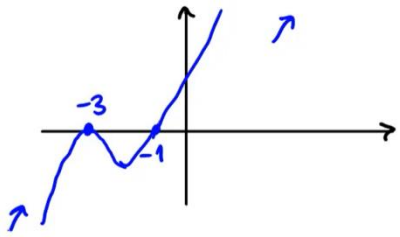
ב. $f(x)=x(4-3x)^3(3+4x)(1-x)^2$

ג. $f(x)=x^4(x+4)^2(2x+1)^2$

ד. $f(x)=(3x^2+4)(x+2)^2(8+x)(10-x)$

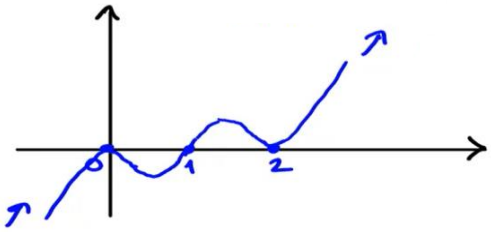
תשובות סופיות:

12) א. הגרף לא מתאים. להלן הגרף המתוקן:

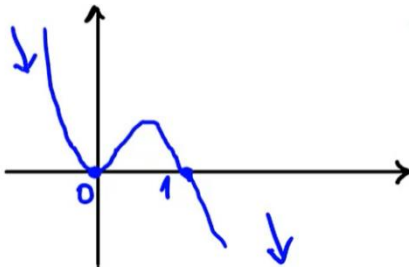


ב. הגרף מתאים.

ג. הגרף לא מתאים. להלן הגרף המתוקן:

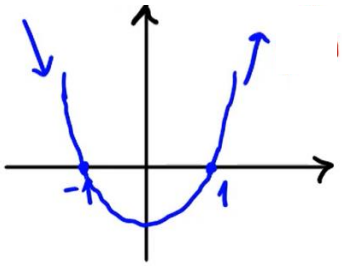


ד. הגרף לא מתאים. להלן הגרף המתוקן:

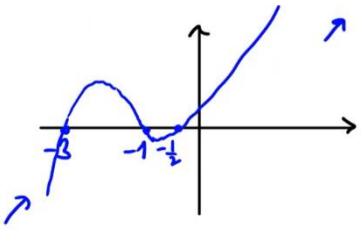


ה. הגרף מתאים

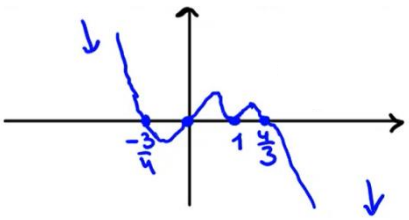
ו. הגרף לא מתאים. להלן הגרף המתוקן:



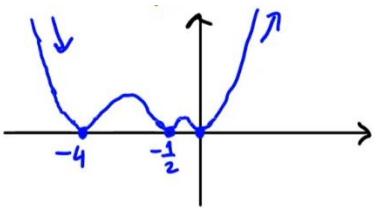
13) א.



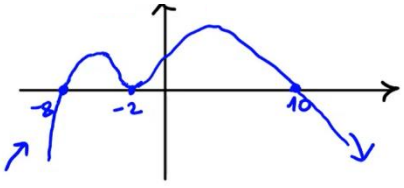
ב.



ג.



ד.



תחומי חיוביות ושליליות מתוך גרף הפולינום:

סיכום כללי:

כדי למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של פולינום מתוך גרף הפונקציה,
יש להתייחס לגורמים הבאים:

- נקודות האפס – יש למצוא את כל נקודות האפס של הפונקציה.
- מעלת הפולינום – נתייחס לשאיפה של פולינום ממעלה זוגית או אי-זוגית באינסוף (לשני הכיוונים).
- סימן המקדם של מעלת הפולינום – יסייע לקבוע את כיוון השאיפה לאינסוף.
- ריבוי הביטויים – שורש מריבוי זוגי לא ישנה את סימן הפונקציה
בעוד ששורש מריבוי אי-זוגי ישנה את סימן הפונקציה לפניו ואחריו.

שאלות:

14) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(2x+1)(x+1)(x+3)$

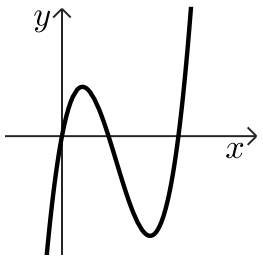
ב. $f(x)=x(4-3x)^3(3+4x)(1-x)^2$

ג. $f(x)=x^4(x+4)^2(2x+1)^2$

ד. $f(x)=(3x^2+4)(x+2)^2(8+x)(10-x)$

15) פתרו את אי-השוויון הבא: $x^3-7x^2+10x\le 0$.

היעזרו בסרטוט סכמתי של גרף הפולינום: $f(x)=x^3-7x^2+10x$.



תשובות סופיות:

14) א. חיובית: $x>-\frac{1}{2}$, $-3<x<-1$, שלילית: $-1<x<-\frac{1}{2}$, $x<-3$.

ב. חיובית: $1<x<\frac{4}{3}$, $0<x<1$, $x<-\frac{3}{4}$, שלילית: $x>\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{4}<x<0$.

ג. חיובית: 0 , $-\frac{1}{2}$, $x\neq -4$, שלילית: אף x.

ד. חיובית: $-2<x<10$, $-8<x<-2$, שלילית: $x>10$, $x<-8$.

15) $5\geq x\geq 2$, $x\leq 0$.

סיכום פונקצית הפולינום:

סיכום כללי:

- מספר הפתרונות של משוואת הפולינום $f(x)=0$ הוא מספר הנקודות המשותפות שיש לפולינום $f(x)$ עם ציר ה- x, כאשר הפתרונות הם שיעורי ה- x של נקודות משותפות אלה.
- גרף של פולינום **ממעלה זוגית** n, שבו המקדם של x^n חיובי, מתחיל **מלמעלה**, כלומר מאינסוף (רביע II) ומסתיים **למעלה**, כלומר באינסוף (רביע I).
(אם המקדם של x^n שלילי, הגרף יתהפך: יתחיל מלמטה ויסתיים למטה)
- גרף של פולינום **ממעלה אי-זוגית** n, שבו המקדם של x^n חיובי, מתחיל **מלמטה**, כלומר ממינוס אינסוף (רביע III) ומסתיים **למעלה**, כלומר באינסוף (רביע I).
(אם המקדם של x^n שלילי, הגרף יתהפך: יתחיל מלמעלה ויסתיים למטה)
- כאשר הפולינום מפורק למכפלות של ביטויים:
  - עבור ביטוי עם ריבוי **אי-זוגי** תתקבל נקודת **חיתוך** של ציר ה- x, כאשר אם הריבוי גדול מ-1 תתקבל נקודת פיתול בגרף.
  - עבור ביטוי עם ריבוי **זוגי** תתקבל נקודת **השקה** עם ציר ה- x.
- בין כל שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x (חיתוך = החלפת סימן) תהיה נקודת קיצון.
- כל נקודת השקה לציר ה- x היא נקודת קיצון.

שאלות:

16) לפניכם הפולינום: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או שאינה נכונה.
נמקו או הביאו דוגמה נגדית.

א. אם n זוגי אז גרף הפולינום בהכרח עובר ברביע השני.

ב. אם a_n שלילי אז גרף הפולינום בהכרח עובר ברביע הרביעי.

ג. אם n אי זוגי אז ייתכן ש $f(x)\le 0$ לכל x.

ד. אם n זוגי אז ייתכן שהפולינום $f(x)$ חיובי לכל x.

ה. עבור n נתון, לפונקציה יש בדיוק n נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

ו. עבור n נתון, ניתן לדעת את המספר המרבי של נקודות הקיצון של הפולינום.

17) כתבו דוגמה לביטוי אלגברי וסרטטו סרטוט סכמתי של פולינום בהתאם למאפיינים הבאים:

א. (1) פולינום ממעלה זוגית שיש לו נקודת פיתול על ציר ה- x.

(2) האם קיים פולינום כזה שלא עובר ברביע השני? אם כן – הדגימו. אם לא – נמקו.

ב. (1) פולינום ממעלה אי זוגית שיש לו שתי נקודות קיצון ונקודת פיתול אחת על ציר ה- x.

(2) האם ייתכן פולינום כזה שיש לו יותר מ־3 נקודות חיתוך עם ציר x?
אם כן – הדגימו. אם לא – נמקו.

ג. (1) פולינום שמתחיל במינוס באינסוף ומסתיים באינסוף ונקודות האפס שלו הן: $(1,0)$, $(0,0)$, $(-4,0)$.

(2) האם ייתכן פולינום כזה ממעלה זוגית?

(3) גיא טוען שקיים ביטוי אלגברי שונה מהביטוי שכתבתם בסעיף ג (1), שהסרטוט שלו מעט שונה מהסרטוט שלכם. האם גיא צודק?
אם כן – רשמו ביטוי אלגברי מתאים וסרטטו גרף מתאים. אם לא – נמקו.

18) לפניכם 2 פולינומים: $f(x)=x^2(x+4)(x-4)$, $g(x)=x^2(x+4)(4-x)$.

שי טען שלשני הפולינומים אותה המעלה ואותן נקודות חיתוך עם ציר x ולכן הם זהים זה לזה.
האם שי צודק? נמקו.

19) לפניכם 2 פולינומים: $f(x)=x(x+6)^2(x-1)$, $g(x)=x^3(x+6)^2(x-1)$.

א. קבעו נכון / לא נכון:

(1) לשני הפולינומים מעלה זהה.

(2) לשני הפולינומים אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

(3) לשני הפולינומים אותו מספר של נקודות קיצון.

(4) לשני הפולינומים אותו מספר של נקודות פיתול על ציר ה- x.

(5) עבור ערכי x מאוד גדולים, שני הפולינומים שואפים ל- ∞.

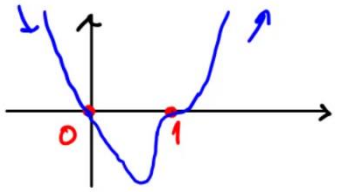
ב. סרטטו גרפים עבור שני הפולינומים.

תשובות סופיות:

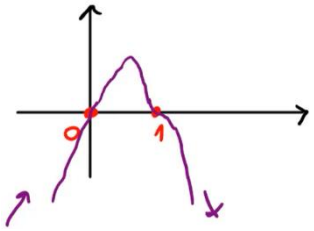
16) נכון: ב, ד, ו.

לא נכון: א, ג, ה.

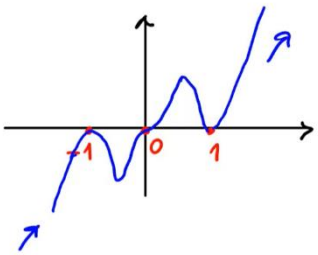
17) א. (1) $f(x)=x(x-1)^3$



א. (2) $f(x)=-x(x-1)^3$.

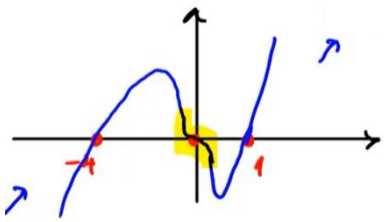


ב. (1) $f(x)=x^3(x-1)^2(x+1)^2$



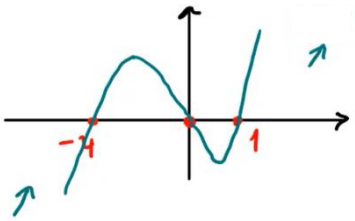
ב. (2) לא ייתכן.

ג. (1) $f(x)=x^3(x+4)(x-1)$



ג. (2) לא ייתכן.

ג. (3) $f(x)=x(x+4)(x-1)$



18) שי לא צודק, ניתן לראות שבאינסוף התנהגות שתי הפונקציות שונה.

19) א. נכון: (2), (3), (5)

לא נכון: (1), (4)

ב.

