שאלון 571

חקירת פונקצית שורש

תוכן העניינים:

חישוב ערך נגזרת בנקודה עם פונקצית שורש: 3

שאלות: 3

תשובות סופיות: 3

מציאת פרמטרים עם פונקצית שורש: 4

שאלות: 4

תשובות סופיות: 4

הבעה באמצעות פרמטרים עם פונקצית שורש: 5

שאלות: 5

תשובות סופיות: 6

מציאת תחום הגדרה: 7

סיכום כללי: 7

שאלות: 7

תשובות סופיות: 7

חקירת פונקצית שורש: 8

סיכום כללי: 8

שאלות: 11

תשובות סופיות: 15

חקירת פונקצית שורש עם קיצון מוחלט: 18

שאלות: 18

תשובות סופיות: 19

חקירת פונקצית שורש עם פרמטרים: 20

שאלות: 20

תשובות סופיות: 22

הוכחת אי-שוויונות: 24

שאלות: 24

תשובות סופיות: 24

שאלות קצרות: 25
שאלות: 25
תשובות סופיות: 26
שאלות מסכמות: 27
שאלות: 27
תשובות סופיות: 30

חישוב ערך נגזרת בנקודה עם פונקצית שורש:

שאלות:

1) מצאו את ערך הנגזרת של הפונקציה: $f(x)=3\sqrt{x^2+1}+2x$ עבור: $x=3\ ,\ x=1\ ,\ x=0$.

2) מצאו את ערך הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^3-x^2-8x+12}$ עבור: $x=2\ ,\ x=-2\ ,\ x=0$.

3) מצאו את ערך הנגזרת של הפונקציה $f(x)=2\sqrt{x^4+4x+6}+2$ עבור: $x=-1\ ,\ x=-3\ ,\ x=0$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x}$ מצאו את הערכים של x עבורם מתקיים: $f'(x)=\frac{1}{3}$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}+2$.
מצאו את הערכים של x עבורם מתקיים: $f'(x)=1$.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x^2+2x+4}$.
מצאו את הערכים של x עבורם מתקיים: $f'(x)=1$.

5) נתונות הפונקציות: $f(x)=2\sqrt{x-3}$ ו- $g(x)=x+5$.
מצאו עבור איזה ערך של x מתקיים: $g'(x)=f'(x)$.

תשובות סופיות:

1) $f'(3)=\frac{9\sqrt{10}}{10}+2\approx 4.846\ ,\ f'(1)=\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\approx 4.121\ ,\ f'(0)=2$

2) $f'(2)=\varnothing\ ,\ f'(-2)=1\ ,\ f'(0)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx -1.155$

3) $f'(-3)=\frac{-104\sqrt{3}}{1.5}\approx -12.009\ ,\ f'(-1)=0\ ,\ f'(0)=\frac{2\sqrt{6}}{3}\approx 1.633$

4) א. $x=9$ ב. $x=3\frac{1}{4}$ ג. $x=0$

5) $x=4$

מציאת פרמטרים עם פונקצית שורש:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $g(x)=2\sqrt{x}+c$.

נתון כי שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה $x=4$ הוא $\frac{1}{2}$.

א. האם ניתן למצוא את ערך הפרמטר c?

ב. אם התשובה היא כן – מצאו אותו. אם לא – הסבירו למה.

2) נתונה הפונקציה: $g(x)=\sqrt{x^2+4x+a}+c$.

נתון כי שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה $x=-4$ הוא 1-.

א. מצאו את הערך של הפרמטר a.

ב. האם ניתן למצוא את ערך הפרמטר c?

אם התשובה היא כן – מצאו אותו. אם לא – הסבירו למה.

3) הישר $y=3$ משיק לפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2-8x+a}$ בנקודה A.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

ב. מצאו את הערך של הפרמטר a.

4) הפונקציות: $f(x)=-\sqrt{x^2+4}$ ו- $g(x)=\sqrt{4-x^2}+c$ משיקות בנקודה A.

מצאו את הערך של הפרמטר c.

תשובות סופיות:

1) לא. ב. יש אינסוף ערכים של c עבורם נקבל את אותה הנגזרת.

2) א. $a=4$ ב. לא. ראו הסבר מהשאלה הקודמת.

3) א. $A(4,3)$ ב. $a=25$.

4) $c=-4$.

הבעה באמצעות פרמטרים עם פונקצית שורש:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=3\sqrt{x}$.

הביעו באמצעות a את השיפוע לגרף הפונקציה בנקודה שעבורה $x=a$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=3\sqrt{x+a^2}$.

הביעו באמצעות a את השיפוע לגרף הפונקציה בנקודה שעבורה $x=0$

ג. נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sqrt{x^2+9}$.

הביעו באמצעות a את השיפוע לגרף הפונקציה בנקודה שעבורה $x=4$.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2a\sqrt{x}$.

הביעו באמצעות a את השיפוע לגרף הפונקציה בנקודה שעבורה $x=1$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2+2a+1}$. a פרמטר המקיים: $a>-1$.

בנקודה $(a,a+1)$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.

א. הראו כי הנקודה הנתונה נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a את שיפוע המשיק.

ג. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sqrt{x}$.

בנקודה $x=4$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.

הביעו באמצעות a את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

בנקודה $x=t$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה $(t>0)$.

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק.

ב. מצאו את t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+5}$.

בנקודה $x=t$ מעבירים משיק לגרף הפונקציה.

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק.

ב. מצאו את t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $\left(0,2\frac{1}{4}\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. $(a\neq 0)\ ,\ f'(a)=\frac{3}{2\sqrt{a}}$ ב. $(a\neq 0)\ ,\ f'(0)=\frac{3}{2|a|}$

ג. $f'(4)=0.8a$ ד. $f'(1)=1+a$.

2) א. הוכחה. ב. $f'(a)=\frac{a}{a+1}$ ג. $y=\frac{a}{a+1}x+\frac{2a+1}{a+1}$.

3) $(0,a)\ ,\ (-4,0)$

4) א. $y=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}x+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ ב. $t=2$.

5) א. $y=\frac{1}{2\sqrt{t+5}}x+\frac{t+10}{2\sqrt{t+5}}$ ב. $t=-1\ ,\ 1.25$.

מציאת תחום הגדרה:

סיכום כללי:

תחום ההגדרה של פונקציה מהצורה: $f(x)=\sqrt{x}$ הוא $x\geq 0$, שכן ביטוי בתוך שורש ריבועי הוא לעולם אי-שלילי.

באופן כללי נאמר כי לכל פונקציה $f(x)=\sqrt{g(x)}$, תחום ההגדרה יקיים תמיד: $g(x)\geq 0$.

שאלות:

1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=2\sqrt{x-3}$

ג. $f(x)=\sqrt{x-4}$

ד. $f(x)=3x\sqrt{1-2x}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$

תשובות סופיות:

1) א. $x\geq 0$ ב. $x\geq 3$ ג. $x\geq 4$ ד. $x\leq \frac{1}{2}$ ה. $x\geq 2\ ,\ x\leq -5$.

חקירת פונקצית שורש:

סיכום כללי:

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

- תחום הגדרה.
- נקודות קיצון.
- תחומי עלייה וירידה.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- סרטוט.

תחום הגדרה של פונקציה:

- כל פולינום מוגדר לכל x.
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k)=0$ וגם: $f(k)\neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x\to k^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

או: $\lim_{x\to k^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.
כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה
(על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.
אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית,
אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y=n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x\to\infty^+}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או: $\lim_{x\to\infty^-}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^m+\dots}{bx^n+\dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m>n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m=n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=\frac{a}{b}$.
- אם $m<n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף).
עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x=\infty$ או $x=-\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}="\frac{1}{\infty}"=0$.
- הגבול: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם: $x\to 0^+$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^+}"=+\infty$.
  - אם: $x\to 0^-$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^-}"=-\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty\cdot\infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty\cdot\infty=\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty+\infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty+\infty=\infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).
- הגבול מהצורה: $\infty-\infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).
במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0,x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x)<0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0,x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x)>0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x)=0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) חקרו את הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{x-1}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

5) חקרו את הפונקציה: $f(x)=2+\sqrt{4-x^2}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

6) חקרו את הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^3+2.5x^2+x}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

7) חקרו את הפונקציה: $f(x)=x^2\sqrt{x^2-4x-5}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

8) חקרו את הפונקציה: $f(x)=\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

9) חקרו את הפונקציה: $f(x)=2x\sqrt{4-x^2}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

10) חקרו את הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x+1}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

11) חקרו את הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-4}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

12) חקרו את הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון (כולל נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עליה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

13) נתונה הפונקציה: $y=3\sqrt{x+2}-3x$.

חקרו את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. נקודות חיתוך עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצאו לאילו ערכים של k חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה:

(1) בשתי נקודות. (2) בנקודה אחת. (3) באף נקודה.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\sqrt{x-1}-4$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכיחו כי $f'(x)\neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. הראו שהפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה אחת בלבד.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ז. על סמך הסעיפים הקודמים, מצאו פתרון למשוואה: $x+2\sqrt{x-1}=1$.
נמקו תשובתכם.

15) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ג. הראו שגרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-x.

ד. הוכיחו כי $f'(x)>0$ מתקיים עבור כל x בתחום ההגדרה.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

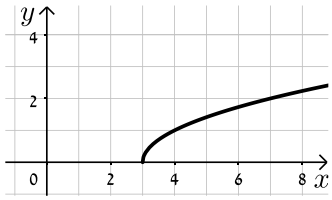
ו. היעזרו בסעיפים הקודמים והוכיחו כי לכל x בתחום ההגדרה
מתקיים: $\sqrt{x-1}\geq\sqrt{x+4}-\sqrt{3}$.

תשובות סופיות:

1) א. $x \geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה

ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה. ד. $(3,0)$

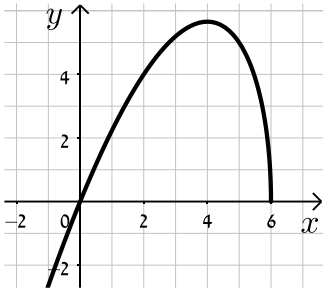
ה. אין. ו. ראו סרטוט בצד:



2) א. $x \geq 1$ ב. $\min(2,-2)$, $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x > 2$, יורדת: $1 < x < 2$. ד. $(1,0),(4,0)$

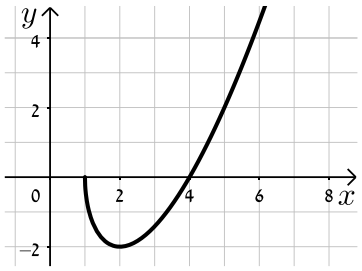
ה. אין. ו. ראו סרטוט בצד.



3) א. $x \leq 6$ ב. $\min(6,0)$, $\max\left(4,4\sqrt{2}\right)$ קצה

ג. עלייה: $x < 4$, ירידה: $4 < x < 6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

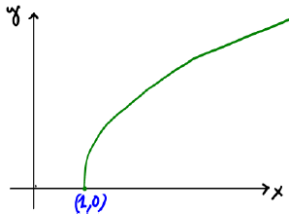
ה. ראו סרטוט בצד.



4) א. $x \geq 1$ ב. $\min(1,0)$ קצה

ג. עלייה: $x > 1$, ירידה: אין.

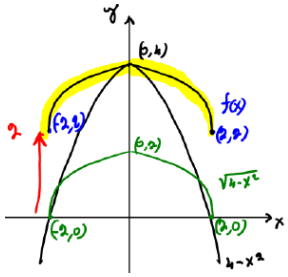
ד. $(1,0)$ ה. ראו סקיצה בצד.



5) א. $-2 \leq x \leq 2$ ב. $\min(-2,2)$ קצה, $\max(0,4)$, $\min(2,2)$ קצה.

ג. עלייה: $-2 < x < 0$, $0 < x < 2$ ירידה: ד. $(0,4)$.

ה. ראו סרטוט בצד (בגרף המסומן במרקר צהוב).



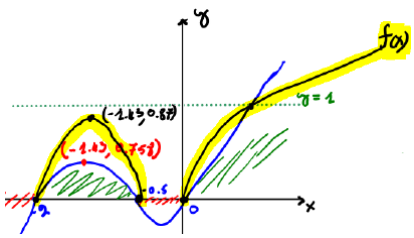
6) א. $x \geq 0$, $-2 \leq x \leq -0.6$

ב. $\max(-1.43,0.87)$, $\min(-2,0)$ קצה, $\min(-0.5,0)$ קצה, $\min(0,0)$ קצה

ג. עלייה: $x > 0$, $-2 < x < -1.43$, ירידה: $-1.43 < x < -0.5$

ד. $(-0.5,0)$, $(0,0)$, $(-2,0)$.

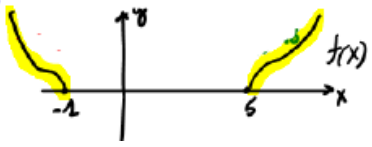
ה. ראו סרטוט בצד.



7) א. $x \le -1 , x \ge 5$ ב. $\min(-1,0)$ קצה , $\min(5,0)$ קצה

ג. עלייה: $x > 5$, ירידה: $x < -1$ ד. $(5,0)$, $(-1,0)$

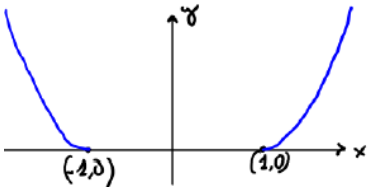
ה. ראו סרטוט בצד.



8) א. $x \le -1 , x \ge 1$ ב. $\min(1,0)$ קצה , $\min(-1,0)$ קצה

ג. עלייה: $x > 1$, ירידה: $x < 1$ ד. $(-1,0)$, $(1,0)$

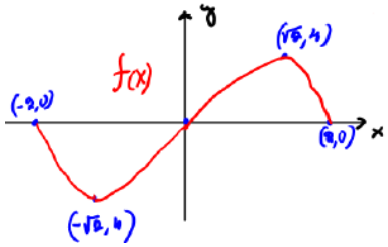
ה. ראו סרטוט בצד.



9) א. $-2 \le x \le 2$ ב. $\min(2,0)$ קצה , $\max(\sqrt{2},4)$, $\min(-\sqrt{2},4)$, $\max(-2,0)$ קצה

ג. עלייה: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, ירידה: $\sqrt{2} < x < 2$, $-2 < x < -\sqrt{2}$

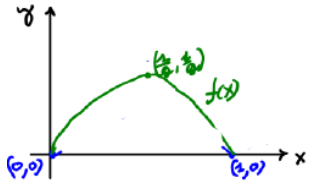
ד. $(2,0)$, $(0,0)$, $(-2,0)$ ה. ראו סרטוט בצד.



10) א. $0 \le x \le 1$ ב. $\max\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\min(0,0)$ קצה, $\min(1,0)$ קצה

ג. עלייה: $0 < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $\frac{1}{2} < x < 1$ ד. $(1,0)$, $(0,0)$

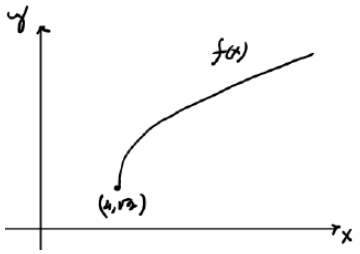
ה. ראו סרטוט בצד.



11) א. $x \ge 4$ ב. $\min\left(4,\sqrt{2}\right)$ קצה

ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: אין. ד. אין.

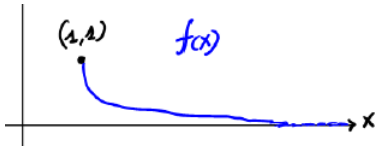
ה. ראו סרטוט בצד.



12) א. $x \ge 1$ ב. $\max(1,1)$ קצה

ג. עלייה: אין, ירידה: $x > 1$ ד. אין.

ה. ראו סרטוט בצד.

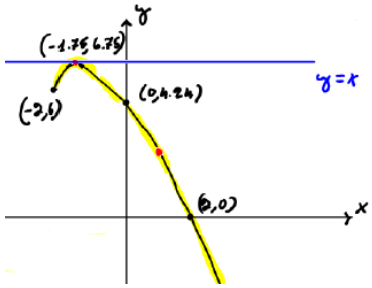


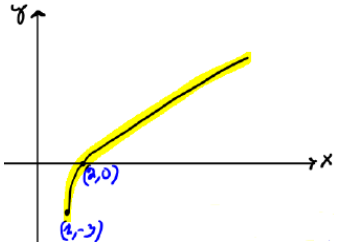
13) א. $x \ge -2$ ב. $\max(-1.75,6.75)$, $\min(-2,6)$ קצה.

ג. $(2,0)$, $\left(0,3\sqrt{2}\right)$ ד. להלן סרטוט:

ה. (1) $6 \le k < 6.75$ ה. (2) $k < 6$, $k = 6.75$

ה. (3) $k > 6.75$

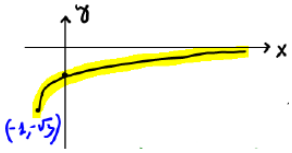




14) א. $x \geq 1$ ב. הוכחה ג. עלייה: $x > 1$, ירידה: אין.

ד. הוכחה ה. ראו סרטוט בצד.

ו. חיוביות: $x > 2$, שליליות: $1 < x < 2$ ז. $x = 1$



15) א. $x \geq -1$ ב. $(0,-1)$ ג. הוכחה.

ד. הוכחה. ה. ראו סרטוט בצד.

ו. הוכחה.

חקירת פונקצית שורש עם קיצון מוחלט:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^3-12x}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבעו את סוגה.

ג. מצאו את נקודות הקיצון שבקצוות של תחום ההגדרה וקבעו את סוגן.

ד. מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה (אם קיימות).

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-12}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה וקבעו את סוגה.

ג. מצאו את נקודות הקיצון שבקצוות של תחום ההגדרה וקבעו את סוגן.

ד. מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{-2x^4+x^2+1}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. מצאו את נקודות הקיצון שבקצוות של תחום ההגדרה וקבעו את סוגן.

ד. מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2-1}+2$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראו שלא קיימת נקודה בתחום ההגדרה עבורה: $f'(x)=0$.

ג. מצאו את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבעו את סוגן.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{x^2-2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראו שלא קיימת נקודה בתחום ההגדרה עבורה: $f'(x)=0$.

ג. מצאו את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה (אם קיימות) וקבעו את סוגן.

תשובות סופיות:

1) א. $-2\sqrt{3} \le x \le 0 \ , \ x \ge 2\sqrt{3}$ ב. $\max(-2,4)$

ג. $\min(2\sqrt{3},0) \ , \ \min(0,0) \ , \ \min(-2\sqrt{3},0)$

ד. מינימום מוחלטים: $\min(2\sqrt{3},0) \ , \ \min(0,0) \ , \ \min(-2\sqrt{3},0)$.

אין מקסימום מוחלט.

2) א. $2 \le x \le 6$ ב. $\max(4,2)$ ג. $\min(2,0) \ , \ \min(6,0)$

ד. $\max(4,2)$ מוחלט, $\min(2,0)$ מוחלט, $\min(6,0)$ מוחלט.

3) א. $-1 \le x \le 1$ ב. $\max\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \ , \ \min(0,1) \ , \ \max\left(-\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

ג. $\min(1,0) \ , \ \min(-1,0)$

ד. $\min(1,0)$ מוחלט, $\min(-1,0)$ מוחלט, $\max\left(-\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ מוחלט, $\max\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ מוחלט.

4) א. $x \ge 1 \ , \ x \le -1$ ב. הוכחה.

ג. $\min(-1,2)$ מוחלט, $\min(1,2)$ מוחלט. אין מקסימום מוחלט.

5) א. $x \ge \sqrt{2} \ , \ x \le -\sqrt{2}$ ב. הוכחה. ג. אין קיצון מוחלט.

חקירת פונקצית שורש עם פרמטרים:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\sqrt{b^2-x^2}$, $(b>0)$.

חקרו לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) לפונקציה $f(x)=x\sqrt{-x^2+a}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=-3$.

א. מצאו את a.

ב. הוכיחו שהפונקציה היא אי זוגית.

ג. חקרו את הפונקציה:

מצאו את תחום ההגדרה , נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של הפונקציה.

ה. פתרו את אי השוויון: $f(x)\geq 0$.

3) לפונקציה: $f(x)=x^2\sqrt{a-x^2}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=4$.

א. מצאו את a.

ב. הוכיחו שהפונקציה היא זוגית.

ג. חקרו את הפונקציה:

מצאו את תחום ההגדרה , נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של הפונקציה.

ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש:

(1) 3 פתרונות (2) 4 פתרונות (3) 2 פתרונות

4) לפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^3-ax}-4$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=-2$.

א. מצאו את a.

ב. חקרו את הפונקציה:

מצאו את תחום ההגדרה , נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים.

ג. סרטטו סקיצה של הפונקציה.

ד. פתרו את המשוואה: $f(x)=0$.

5) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=(a-x)\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x=4$ הוא 2-.

א. מצאו את a.

ב. חקרו את הפונקציה.

מצאו תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה ונקודות חיתוך עם הצירים.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)$. קיבעו את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

6) לפונקציה $f(x)=a\sqrt{x}+bx^2$ יש נקודת קיצון פנימית בנקודה $(1,3)$.

א. מצאו את a ו- b.

ב. חקרו את הפונקציה.

מצאו תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה ונקודות חיתוך עם הצירים.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. פתרו את אי השוויון: $f(x)\geq 0$.

7) לפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}$ יש נקודת קיצון פנימית בנקודה $(3,2)$.

א. מצאו את a ו- b.

ב. חקרו את הפונקציה.

מצאו תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה ונקודות חיתוך עם הצירים.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכים של k למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון.

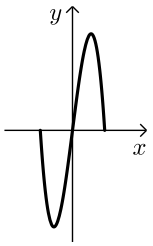
8) לפונקציה: $f(x)=2+3\sqrt{ax-x^2}$ יש נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה עבור $x=10$.

א. מצאו את a.

ב. מצאו את הערך המינימלי ואת הערך המקסימלי של הפונקציה.

תשובות סופיות:

1) א. $-b\le x\le b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-2b^2\right)$, $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}},2b^2\right)$, $\min(-b,0)$ קצה,



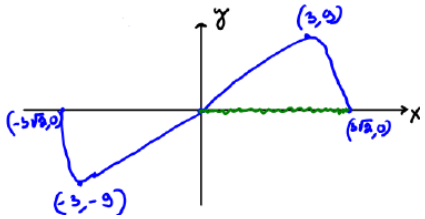
$\min(b,0)$ קצה. ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}}<x<\frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $-b<x<-\frac{b}{\sqrt{2}}$, $\frac{b}{\sqrt{2}}<x<b$.

ה. ראו סרטוט בצד.

2) א. $a=18$. ב. הוכחה. ג. ת.ה. $-3\sqrt{2}\le x\le 3\sqrt{2}$, קיצון: $\max(3,9)$, $\min(-3,-9)$

עלייה: $-3<x<3$, ירידה: $x>3$, $x<-3$, חיתוך עם הצירים: $(\pm 3\sqrt{2},0)$, $(0,0)$.

ד. ראו סרטוט בצד. ה. $0\le x\le 3\sqrt{2}$.



3) א. $a=24$ ב. הוכחה.

ג. ת.ה. $-\sqrt{24}\le x\le\sqrt{24}$, קיצון: $\min\left(-\sqrt{24},0\right)$ קצה,

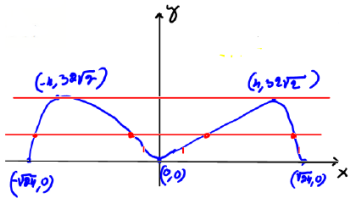
$\min\left(\sqrt{24},0\right)$, $\max\left(-4,32\sqrt{2}\right)$, $\min(0,0)$, $\max\left(4,32\sqrt{2}\right)$ קצה

עלייה: $0<x<4$, $4<x<\sqrt{24}$, ירידה: $-\sqrt{24}<x<-4$, $-4<x<0$

חיתוך עם הצירים: $(\pm\sqrt{24},0)$, $(0,0)$.

ד. ראו סקיצה בצד.

ה. (1) $k=0$, (2) $0<k<32\sqrt{2}$, (3) $k=32\sqrt{2}$.



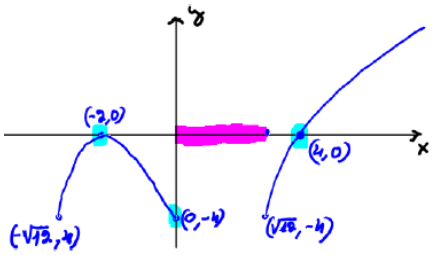
4) א. $a=12$ ב. ת.ה. $x\ge\sqrt{12}$, $-\sqrt{12}\le x\le 0$

קיצון: $\max(-2,0)$, $\min(0,-4)$ קצה, $\min\left(-\sqrt{12},-4\right)$ קצה, $\min\left(\sqrt{12},-4\right)$ קצה.

עלייה: $x>\sqrt{12}$, $-\sqrt{12}<x<-2$, ירידה: $-2<x<0$

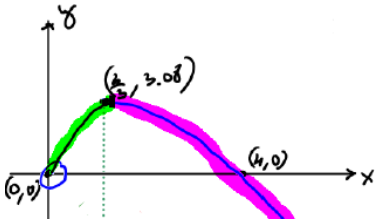
חיתוך עם הצירים: $(4,0)$, $(-2,0)$, $(0,-4)$.

ג. ראו סרטוט בצד. ד. $x=-2,4$.



5) א. $a=4$ ב. ת.ה. $x\geq 0$,

קיצון: $\max\left(\frac{4}{3},3.08\right)$, $\min(0,0)$ קצה, עלייה: $0<x<\frac{4}{3}$, ירידה: $x>\frac{4}{3}$,

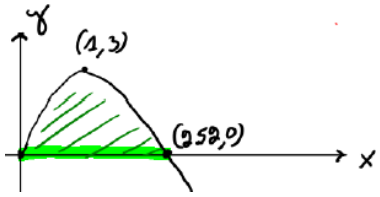


חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(4,0)$ ג. ראו סרטוט בצד.

ד. עלייה: $0<x<4$, ירידה: $x>4$.

6) א. $a=4$, $b=-1$ ב. ת.ה. $x\geq 0$,

קיצון: $\min(0,0)$ קצה, $\max(1,3)$, עלייה: $0<x<1$, ירידה: $x>1$

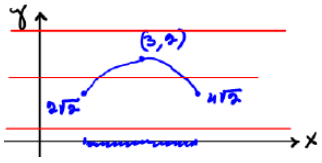


חיתום עם הצירים: $(2.52,0)$, $(0,0)$

ג. ראו סקיצה בצד. ד. $0\leq x\leq 2.52$.

7) א. $a=2$, $b=4$ ב. ת.ה. $2\leq x\leq 4$

קיצון: $\min\left(2,\sqrt{2}\right)$ קצה, $\max(3,2)$, $\min\left(4,\sqrt{2}\right)$ קצה



עלייה: $2<x<3$, ירידה: $3<x<4$, חיתוך עם צירים: אין.

ג. ראו סקיצה בצד. ד. $k>2$, $k<\sqrt{2}$.

8) א. $a=10$ ב. ערך מינימלי: 2, ערך מקסימלי: 17.

הוכחת אי-שוויונות:

שאלות:

1) הוכיחו כי לכל $-8 \le x \le 8$ מתקיים אי השוויון: $-32 \le x\sqrt{64-x^2} \le 32$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אי השוויון הבא: $-x\sqrt{25-x^2} \le 12.5$, מתקיים עבור כל x בתחום ההגדרה.

ב. הוכיחו את אי השוויון הבא לכל x בתחום ההגדרה: $\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x} \ge 2$

ג. הוכיחו את אי השוויון הבא לכל x בתחום ההגדרה: $4\sqrt{x}-2x \le 2$.

ד. הוכיחו את אי השוויון הבא לכל x בתחום ההגדרה: $\sqrt{x^2-8x+25} \ge 3$.

ה. הוכיחו את אי השוויון הבא לכל x בתחום ההגדרה: $\sqrt{-x^2-4x+12} \le 4$.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות קצרות:

שאלות:

1) נתון כי הפונקציה $f(x)$ **גזירה וחיובית** בתחום הגדרתה.

הוכיחו כי בכל נקודה שבה המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ מקביל לציר ה-x,

גם המשיק לגרף הפונקציה $y=\sqrt{f(x)}$ מקביל לציר ה-x.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-4}$, $g(x)=\sqrt{(x+2)\cdot(x-4)}$

(1) מצאו את תחומי ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

(2) האם $f(x)=g(x)$ לכל x בתחום בו שתי הפונקציות מוגדרות?

(3) האם הפונקציות זהות? נמקו.

ב. נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x^2(x+2)}$, $g(x)=x\cdot\sqrt{(x+2)}$

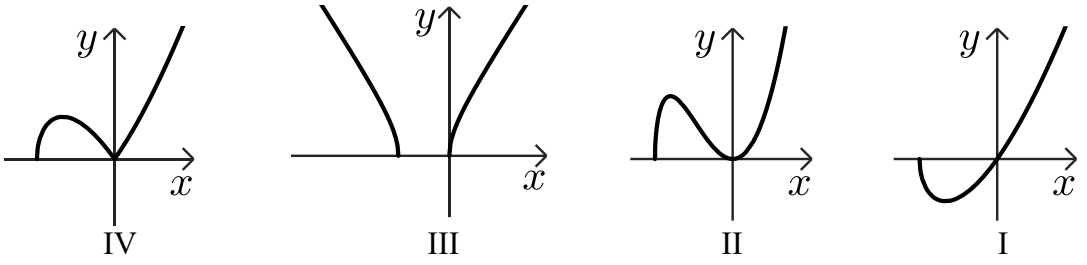
(1) מצאו את תחומי ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

(2) האם $f(x)=g(x)$ לכל x בתחום ההגדרה?

(3) האם הפונקציות זהות? נמקו.

3) לפניכם שלוש פונקציות וארבעה גרפים, לכל אחת מהפונקציות מתאים גרף:

$$t(x)=\sqrt{x\cdot(x+2)}\quad,\quad h(x)=\sqrt{x^2\cdot(x+2)}\quad,\quad g(x)=x\cdot\sqrt{(x+2)}$$



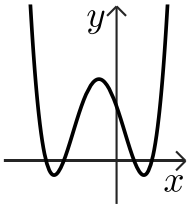
א. התאימו לכל אחת מהפונקציות את הגרף המתאר אותה.

ב. עבור איזה ערך של n (n פרמטר גדול מ-1), הגרף הנותר מתאר את הפונקציה $f(x)=x^n\cdot\sqrt{x+2}$?

ג. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $y=\sqrt{-g(x)}$.

4) בסרטוט שלפניכם מופיע גרף הפונקציה $f(x)$.

א. איזה מהביטויים הבאים מתאים לייצג את גרף הפונקציה? נמקו את תשובתכם.



(1) $f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)(x+4)$

(2) $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(3) $f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

(4) $f(x)=x(x-2)(x+3)(x+4)$

ב. נתונה הפונקציה: $h(x)=f(x-a)$, עבור איזה ערך של a הפונקציה $h(x)$ היא פונקציה זוגית?

ג. נתונה הפונקציה: $g(x)=\sqrt{f(x)}$, מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. (1) $x\geq 4$ א. (2) כן. א. (3) לא.

ב. (1) $x\geq -2$ ב. (2) לא. ב. (3) לא.

3) א. $g(x):I$, $h(x):IV$, $t(x):III$ ב. $n=2$ ג. $-2\leq x\leq 0$.

4) א. ביטוי (3). ב. $a=1$ ג. $x\geq 2$, $-3\leq x\leq 1$, $x\leq -4$.

שאלות מסכמות:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו לאלו ערכי x מתקיים אי השוויון: $f(x)\cdot f'(x)<0$.

מגדירים פונקציה חדשה $g(x)=f(x+a)$ (a פרמטר).

נתון כי הפונקציה $g(x)$ היא **פונקציה זוגית**.

ה. מצאו את a.

ו. מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$.

ז. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ח. לפניכם ארבע פונקציות.

קבעו לגבי כל פונקציה האם הגרף שלה זהה לגרף של הפונקציה $g(x)$.

נמקו את תשובתכם.

I. $|g(x)|$

II. $-|g(x)|$

III. $-g(x)$

IV. $g(-x)$

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\cdot\sqrt{-x+5}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה חדשה: $g(x)=-a\cdot f(x)$ ($a>0$ פרמטר).

ה. עבור כל אחד מההיגדים שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון. נמקו קביעתכם.

I. תחומי העלייה של $g(x)$ זהים לתחומי הירידה של $f(x)$.

II. לפונקציות $g(x)$ ו-$f(x)$ אין נקודות משותפות.

III. תחום ההגדרה של $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של $f(x)$.

ו. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$, הביעו באמצעות a במידת הצורך.

ז. נתון כי המרחק בין נקודת המינימום של $g(x)$ לנקודת המקסימום של $f(x)$ הוא 48. מצאו את a.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x^2+x+a}$ (a פרמטר).

א. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=6$ הוא $\frac{13}{12}$, מצאו את a.

הציבו את $a=-6$ וענו על הסעיפים הבאים:

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ד. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. נתונה הפונקציה: $g(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}$. האם הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ שקולות? נמקו תשובתכם.

ז. נתונה פונקציה נוספת: $h(x)=f(x+c)$. עבור אילו ערכי c הפונקציה $h(x)$ עוברת בראשית הצירים?

4) בסרטוט שלפניכם מופיע גרף הנגזרת $f'(x)$, החותך את הצירים בנקודות $(1,0)$ ו- $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

א. מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון: $f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}$ (a ו- b פרמטרים).

(1) מצאו את a ו- b.

(2) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x-t)$. מה צריך להיות הערך של t כך ש- $g(x)$ תהיה פונקציה זוגית?

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=a-a\cdot\sqrt{-x^2+8x+9}$ (a פרמטר).

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הישר $y=-12$ משיק לגרף הפונקציה.

מצאו את a.

הציבו את a וענו על הסעיפים הבאים:

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ה. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ז. נתונה הפונקציה: $g(x)=2\cdot f(x)+k$.

מצאו עבור אלו ערכים של k מתקיים:

(1) גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x.

(2) גרף הפונקציה $g(x)$ לא יחתוך את ציר ה- x.

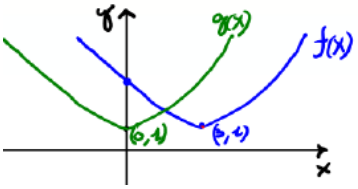
(3) למשוואה $g(x)=0$ יש שני פתרונות.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. $\min(3,1)$ ג. ראו סרטוט בצד.

ד. $x<3$ ה. $a=3$ ו. $\min(0,1)$

ז. ראו סרטוט בצד. ח. I. כן. II. לא. III. לא. IV. כן.

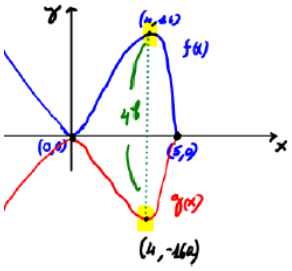


2) א. $x\le 5$ ב. $\max(4,16)$, $\min(0,0)$, $\min(5,0)$ קצה.

ג. עלייה: $0<x<4$, $4<x<5$ ירידה: $x<0$

ד. ראו סרטוט בצד. ה. I. נכון. II. לא נכון III. נכון.

ו. $\min(4,-16)$ ז. $a=2$.

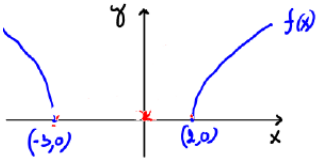


3) א. $a=-6$ ב. $x\ge 2$, $x\le -3$

ג. $\min(2,0)$ קצה, $\min(-3,0)$ קצה

ד. חיובית: $x>2$, $x<-3$, שלילית: אין.

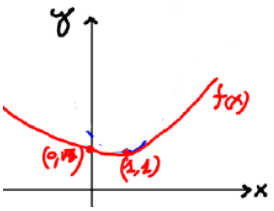
ה. ראו סרטוט בצד. ו. לא. ז. $c=2,-3$.



4) א. $\min: x=1$ ב. עלייה: $x>1$, ירידה: $x<1$ ג. (1) $a=-2$, $b=2$

ג. (2) כל x ג. (3) אין. ד. ראו סרטוט בצד.

ה. $t=-1$.



5) א. $-1\le x\le 3$ ב. $a=3$

ג. $\max(9,3)$ קצה, $\min(4,-12)$, $\max(-1,3)$ קצה.

ד. עלייה: $4<x<9$, ירידה: $-1<x<4$.

ה. $(0,-6)$. ו. ראו סרטוט בצד.

ז. (1) $k=24$ ז. (2) $k<-6$, $k>24$ ז. (3) $-6\le k<24$

