שאלון 571

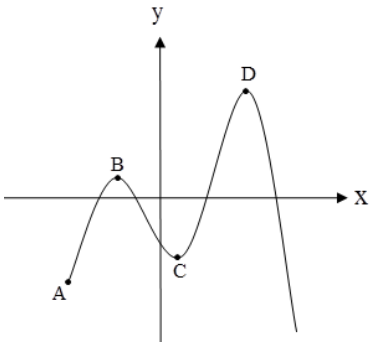
חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים:

נקודות קיצון של פונקציות:.....2
סיכום כללי:.....2
שאלות:.....3
תשובות סופיות: 5
תחומי עלייה וירידה:.....6
שאלות:.....6
תשובות סופיות: 8
חקירת פונקציה פולינומית:.....9
שאלות:.....9
תשובות סופיות: 13
נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת ואינה קיצון: 15
שאלות:.....15
תשובות סופיות: 17
חקירות עם פונקציה זוגית ואי-זוגית: 18
סיכום כללי:.....18
שאלות:.....18
תשובות סופיות: 22
מינימום ומקסימום בתחום סגור:.....24
שאלות:.....24
תשובות סופיות: 25
תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול:.....26
סיכום כללי:.....26
שאלות:.....26
תשובות סופיות: 26

נקודות קיצון של פונקציות:

סיכום כללי:



נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y.
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

4) לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$.

מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^3+x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.

מצא את הקבוע a.

6) לפונקציה: $f(x)=Ax^3+Bx^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2,3)$.

מצא את ערכי הפרמטרים B,A.

7) לפונקציה: $f(x)=Ax^3+Bx^2-4x$ יש נקודת קיצון ב- $x=-1$ ו- $x=4$.

מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.

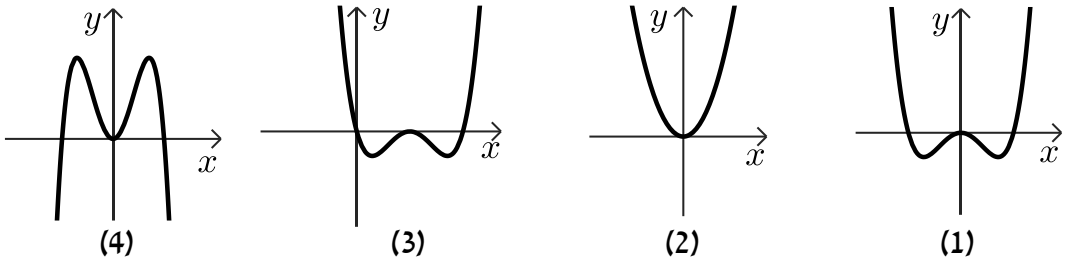
8) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^3+bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.

מצא את הפרמטרים a , b.

9) נתונה המשפחה של פונקציות: $f(x)=x^4-ax^2$, a פרמטר.

א. אילו מבין הגרפים (4)-(1) יכולים להתאים לגרף של הפונקציה $f(x)$?
(תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה).

ב. עבור אילו ערכי a יתקבל גרף עם 3 נקודות קיצון?



10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2$. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)+2$. רשמו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

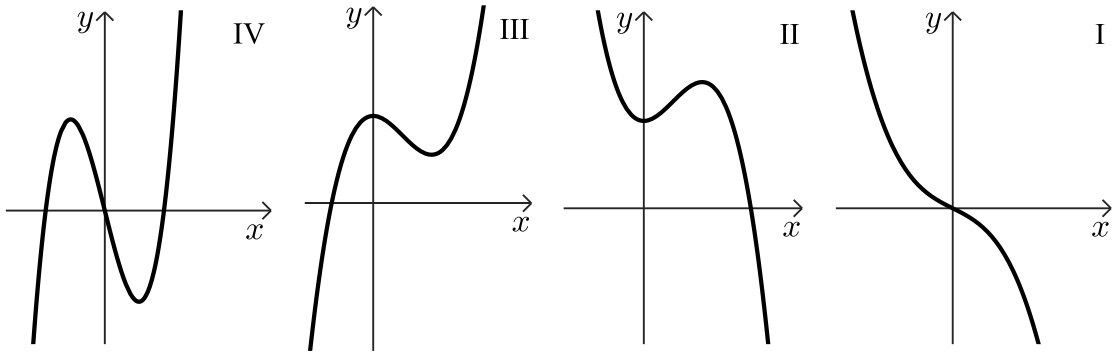
ג. נתונה הפונקציה: $h(x)=f(x)+c$. מה צריך להיות הערך של c על מנת שהפונקציה $h(x)$ תשיק לציר ה-x בנקודת המינימום שלה?

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+3$, $a>0$.

א. הביעו את שיעורי נקודות הקיצון באמצעות a וקבעו את סוגן.

ב. אלו מבין הגרפים I-IV יכולים לתאר את גרף הפונקציה $f(x)$?

ג. עבור אלו ערכים של a, נקודת המינימום משיקה לציר ה-x?



12) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^2+bx+6$, (a ו-b פרמטרים).

הנקודה $(2,2)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו-b .

תשובות סופיות:

1) א. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$, $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

2) א. $\max(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$, $x<-\sqrt{5}$.

3) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

4) $a=3$.

5) $a=-\frac{2}{3}$.

6) $A=-1$, $B=3$.

7) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$, $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$, $B=-\frac{3}{2}$, $A=\frac{1}{3}$.

8) $a=-4$, $b=6$.

9) א. גרף (1). ב. $a>0$.

10) א. $\min\left(4,-10\frac{2}{3}\right)$, $\max(0,0)$ ב. $\min\left(4,-8\frac{2}{3}\right)$, $\max(0,2)$ ג. $c=10\frac{2}{3}$.

11) א. $\max(0,3)$, $\min\left(2,3-\frac{4a}{3}\right)$ ב. גרף III. ג. $a=2.25$.

12) $a=1$, $b=-4$.

תחומי עלייה וירידה:

שאלות:

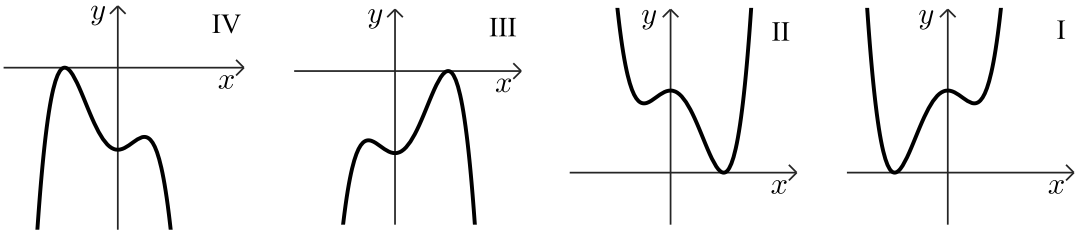
1) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x^4-2x^3-3x^2+2$.

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. אחד מבין הגרפים I-IV הוא גרף של הפונקציה $f(x)$.

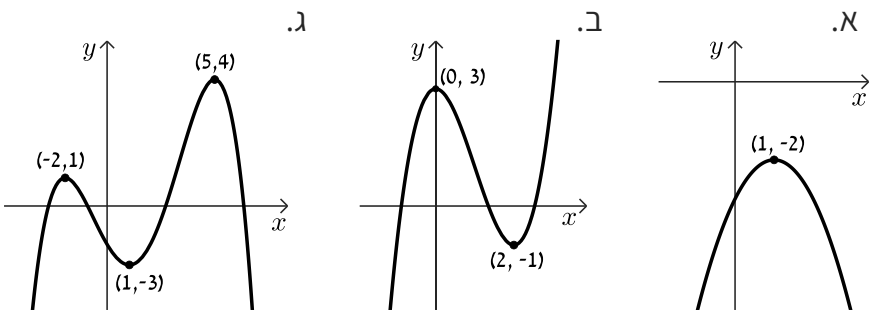
זהו את הגרף המתאים ונמקו את תשובותיכם.



2) בכל אחד מהגרפים שלפניך מסומנות נקודות הקיצון של הפונקציה.

היעזרו בסרטוט ורשמו את ערכי x שעבורם הפונקציה עולה

ואת ערכי x שעבורם הפונקציה יורדת.



3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

א. $f(x)=-x^3+12x^2$

ב. $f(x)=2x^3-15x^2+24x+4$

ג. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+3x^3+7x^2+7$

ד. $f(x)=x^4-32x-9$

4) עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, קבעו האם הפונקציה עולה לכל x או יורדת לכל x.
הוכיחו קביעתכם.

א. $f(x)=x^3+4x+5$

ב. $f(x)=-5x+2$

ג. $f(x)=-4x^3+x^2-7x+5$

ד. $f(x)=5x^5+x^3$

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=-x^3+3x^2-3x+1$.

א. לפניכם מספר טענות, עבור כל טענה קיבעו אם היא נכונה או לא. נמקו קביעתכם.

(1) הנגזרת אי-חיובית לכל ערך של x ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל ערך של x.

(2) הנגזרת יורדת לכל ערך של x ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל ערך של x.

(3) הנגזרת אי-חיובית לכל ערך של x ולכן הפונקציה $f(x)$ שלילית לכל ערך של x.

(4) הנגזרת חיובית לכל ערך של x ולכן הפונקציה $f(x)$ עולה לכל ערך של x.

ב. חשבו את: $f(1)$.

ג. על פי הסעיפים הקודמים קבעו מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+5$.

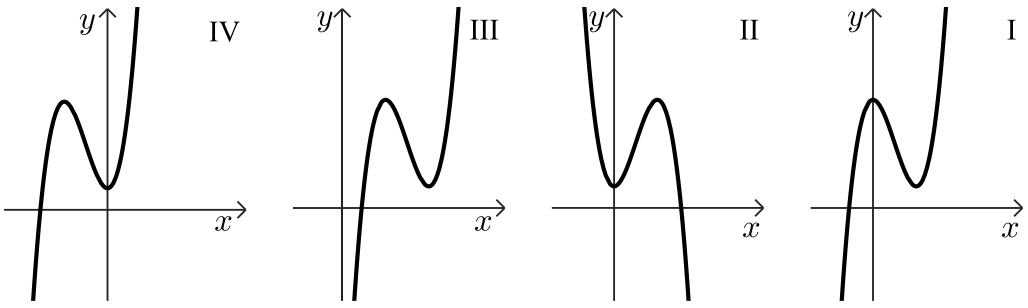
א. האם המשיק בנקודה $x=0$: עולה / יורד / קבוע?

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x+2)$.

בחרו מי מבין הגרפים I-IV שלפניכם יכול לתאר את גרף הפונקציה $g(x)$.



תשובות סופיות:

1) א. $\min\left(-\frac{1}{2},1.69\right)$, $\max(0,2)$, $\min(1,0)$

ב. עולה: $x>1$, $-\frac{1}{2}<x<0$, יורדת: $0<x<1$, $x<-\frac{1}{2}$. ג. גרף II.

2) א. עולה: $x<1$, יורדת: $x>1$ ב. עולה: $x>2$, $x<0$, יורדת: $0<x<2$

ג. עולה: $1<x<5$, $x<-2$, יורדת: $x>5$, $-2<x<1$.

3) א. $\max(8,256)$, $\min(0,0)$, עולה: $0<x<8$, יורדת: $x>8$, $x<0$.

ב. $\max(1,15)$, $\min(4,-12)$, עולה: $x>4$, $x<1$, יורדת: $1<x<4$.

ג. $\min(0,7)$, $\max(-2,15)$, $\min(-7,-78.75$, עולה: $x>0$, $-7<x<-2$,

יורדת: $-2<x<0$, $x<-7$.

ד. $\min(2,-57)$, עולה: $x>2$, יורדת: $x<2$.

4) א. עולה לכל x. ב. יורדת לכל x. ג. יורדת לכל x. ד. עולה לכל x.

5) א. (1) נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה (4) לא נכונה.

ב. $f(1)=0$ ג. חיובית: $x<1$, שלילית: $x>1$.

6) א. קבוע. ב. $\min(2,1)$, $\max(0,5)$ ג. עולה: $x>2$, $x<0$, יורדת: $0<x<2$.

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-10x^2+9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y, סרטוט.

6) נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ (d פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את d.

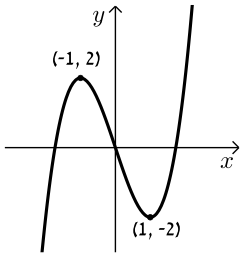
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7) לפניך גרף הפונקציה: $f(x)=x^3-3x$:



א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$.

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$.

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$.

ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד.

ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות.

ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.

ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$.

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקיבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ד. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבעו אם נכון או לא נכון. נמקו קביעתכם.

(1) הנקודה $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) שיעור ה-x של נקודת האפס של הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום: $0<x<2$.

(3) לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

(4) הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)-20$.

לפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-x.

ה. מצאו עבור אילו ערכי k למשוואה $f(x)=k$ יהיה פתרון אחד.

ו. הגדירו פונקציה נוספת: $h(x)=2\cdot f(x)$.

על סמך הסעיפים הקודמים, מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ וקבעו את סוגן.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-2x^2-8$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

(1) שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

(2) שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

(3) תחומי העלייה והירידה.

(4) תחומי החיוביות והשליליות.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מגדירים פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)+k$.

ד. מה צריכים להיות ערכי k עבורם גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה-x.

ה. מגדירים פונקציה נוספת: $h(x)=-f(x)$.

ו. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ז. היעזרו בסעיפים הקודמים וקבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא, נמקו קביעתכם.

(1) הישר $y=8$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.

(2) הישר $y=-8$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ ב-3 נקודות.

(3) לגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו-$f(x)$ אין נקודות חיתוך.

10) לגרף הפונקציה: $y=x^3-ax^2+36x$ יש נקודת קיצון ב- $x=2$.

א. חשבו את a.

ב. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. היעזרו בגרף ורשמו את ערכי ה-x שעבורם הפונקציה שלילית.

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3+ax^2+45x$, a פרמטר.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 24.

א. מצאו את a.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

(1) שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.

(2) שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

(3) תחומי העלייה והירידה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=4.5$. נמקו את תשובותיכם.

ה. מצאו עבור אליו ערכי k יהיו למשוואה $f(x)=k$ שני פתרונות. נמקו.

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-ax^2$, a פרמטר.

ישר המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$ מקביל לציר ה-x.

א. מצאו את a.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)+bx^2$.

ג. הוכיחו כי: $g'(2)=4b$.

ד. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה בה $x=2$ הוא 12-, מצאו את b.

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=-x^3+15x^2-63x+a$. a פרמטר.

א. הביעו באמצעות a את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ב. נתון כי שיעור ה-y של נקודת המקסימום של הפונקציה הוא 0, מצאו את a.

ג. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המינימום שלה.

ד. הראו שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x היא $(1,0)$.

ה. עבור איזה ערך של k יש למשוואה $f(x)=k$ שני פתרונות?

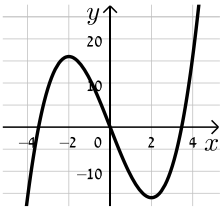
תשובות סופיות:

1) א. כל x ב. $\min(2,-16)$, $\max(-2,16)$

ג. עלייה: $x>2$, $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$

ד. $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$.

ה. ראה גרף בצד.



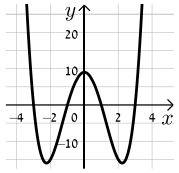
2) א. כל x

ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$, ירידה: $x<-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm3,0)$, $(\pm1,0)$, $(0,9)$.

ה. ראה גרף בצד.



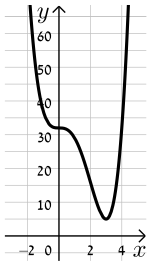
3) א. כל x

ב. $\min(3,5)$

ג. תחומי עלייה: $x>3$, תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$.

ה. ראה גרף בצד.

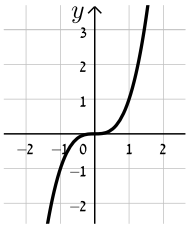


4) א. כל x ב. אין.

ג. עולה לכל x

ד. $(0,0)$.

ה. ראה גרף בצד.



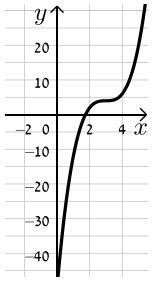
5) א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל x.

נקודות קיצון: אין. תחומי עלייה: כל x.

תחומי ירידה: אין.

נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$.

ראה גרף בצד.



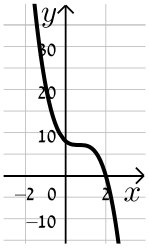
6) א. $d=8$

ב. לא

ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. $(0,8)$.

ה. להלן גרף:



7) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k<-2\ ,\ k>2$

ה. $k=\pm 2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

8) א. $\min(2,-15)\ ,\ \max(-1,12)$ ב. עולה: $x>2\ ,\ x<-1$, יורדת: $-1<x<2$

ג. $(0,5)$ ד. (1), (3) לא נכונות. (2), (4) נכונות.

ה. $k>12\ ,\ k<-15$ ו. $\min(2,-30)\ ,\ \max(-1,24)$.

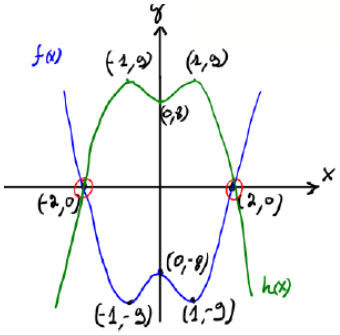
9) א. (1) $(-2,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (0,-8)$ א. (2) $\min(-1,-9)\ ,\ \min(1,-9)\ ,\ \max(0,-8)$

א. (3) עולה: $x>1\ ,\ -1<x<0$, יורדת: $0<x<1\ ,\ x<-1$

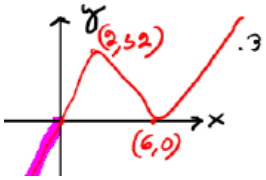
א. (4) חיובית: $x>2\ ,\ x<-2$, שלילית: $-2<x<2$. ב. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

ג. $k=8,9$ ד. ראו סקיצה בצד.

ה. (1) נכונה. (2), (3) לא נכונות.



10) א. $a=12$ ב. $\min(6,0)\ ,\ \max(2,32)$



ג. $(6,0)\ ,\ (0,0)$

ה. $x<0$.

11) א. $a=-12$

ב. (1) $(0,0)$ ב. (2) $\min(5,50)\ ,\ \max(3,54)$

ב. (3) עולה: $x>5\ ,\ x<3$, יורדת: $3<x<5$ ג. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

ד. פתרון אחד. ה. $k=50,54$.

12) א. $a=3$ ב. $\min(2,-4)\ ,\ \max(0,0)$ ד. $b=-3$.

13) א. $\min(3,a-81)\ ,\ \max(7,a-49)$ ב. $a=49$ ג. $y=-32$ ה. $k=0,-32$.

נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת ואינה קיצון:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+3x+3$.

הוכיחו כי הפונקציה עולה לכל ערך של x.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+4$.

א. מצאו את הנקודות על הגרף שבהן $f'(x)=0$.

ב. קבעו עבור כל אחת מהנקודות שמצאת בסעיף א' האם היא מינימום או מקסימום או שאינה נקודת קיצון.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x^5-5x^3$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את הנקודות החשודות לקיצון של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וסווגו אותן.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=3x^5+5x^3$.

ו. מצאו את תחומי העלייה והירידה (אם יש) של הפונקציה $g(x)$.

ז. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

(1) שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

(2) שיעור נקודת הקיצון ואת סוגה.

אם מצאתם נקודת פיתול - ציינו אותה.

(3) תחומי העלייה והירידה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

אם מצאתם נקודת פיתול - התייחסו אליה בסרטוט.

ג. מצאו עבור אילו ערכי p למשוואה $f(x)=p$ אין פתרונות. נמקו.

הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x+1)+2$.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=ax^4+bx^3-6x^2$. a ו-b פרמטרים.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ היא $y=-1$.

א. מצאו את a ו-b.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

(1) שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.

(2) שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.

(3) תחומי העלייה והירידה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו באיזה תחום הפונקציה שלילית ועולה.

ה. כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=-2$?

הגדירו פונקציה חדשה $g(x)=|f(x)+1|$.

ו. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ ואת סוגן.

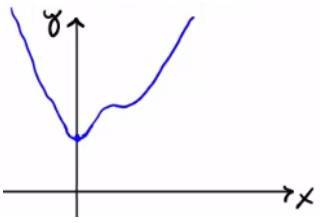
ז. סרטטו סקיצה של הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) א. $(1,5)$, $(0,4)$ ב. $\min(0,4)$, $(1,5)$ פיתול.

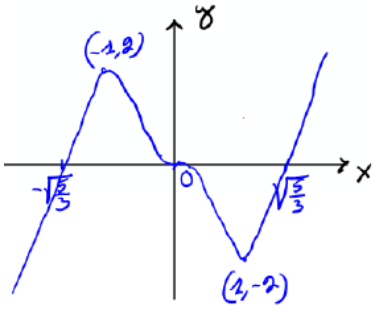
ג. עולה: $x>0$, יורדת: $x<0$ ד. $y=5$ ה. להלן סקיצה:

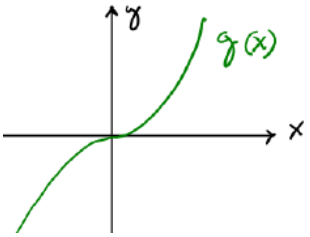


3) א. $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},0\right)$, $(0,0)$

ג. $\max(1,-2)$, $\min(-1,2)$, $(0,0)$ פיתול. ד. עולה: $x>1$, $x<-1$, יורדת: $-1<x<1$

ה. להלן סקיצה: ו. עולה לכל x ז. להלן סקיצה:





4) א. (1) $(0,0)$ א. (2) $\min(0,0)$ א. (3) עולה: $x>0$, יורדת: $x<0$.

ב. ראו סקיצה בסרטון הוידאו. ג. $p<0$ ד. $\min(-1,2)$.

ה. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

5) א. $a=-3$, $b=8$ ב. (1) $(0,0)$ ב. (2) $\max(0,0)$, $(1,-1)$ פיתול

ב. (3) עולה: $x<0$, יורדת: $x>0$ ג. ראו סקיצה בסרטון הוידאו.

ד. $x<0$ ה. 2. ו. $\min\left(-\frac{1}{3},0\right)$, $\min(1,0)$, $\max(0,1)$.

חקירות עם פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.

פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$ ב. $f(x)=3x^2$

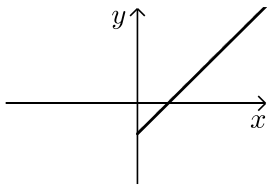
ג. $f(x)=2x^3$ ד. $f(x)=x^3-2x^2$

ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$ ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

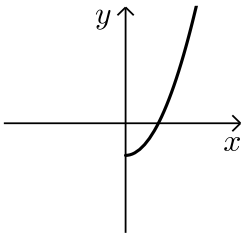
2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

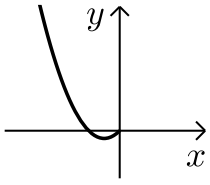
א.



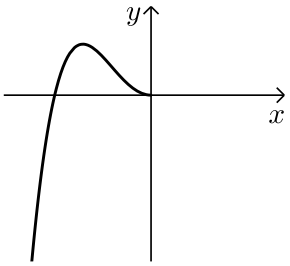
ב.



ג.



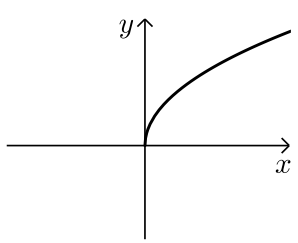
ד.



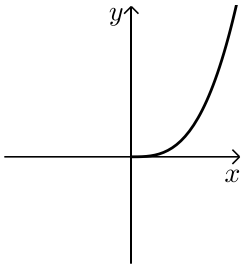
3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

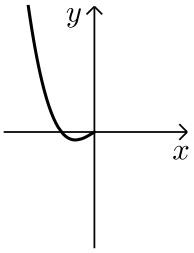
א.



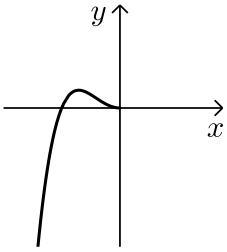
ב.



ג.



ד.



4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:

תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?

נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, a פרמטר.

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$, b פרמטר.

ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן

(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?

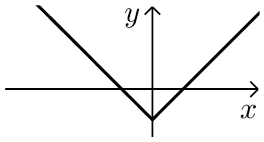
נמק ע"י חישוב מתאים.

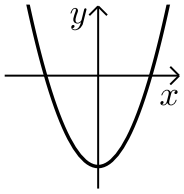
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

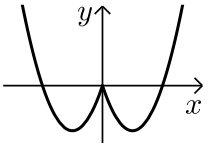
תשובות סופיות:

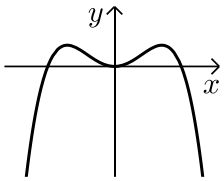
1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

2) להלן הגרפים:

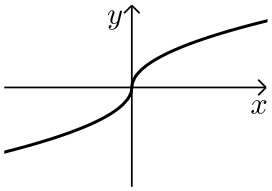
א.


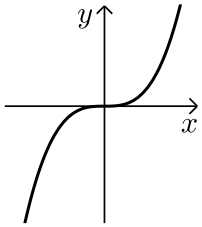
ב.


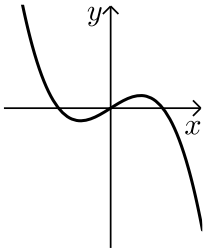
ג.


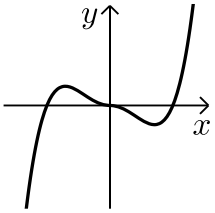
ד.


3) להלן הגרפים:

א.


ב.


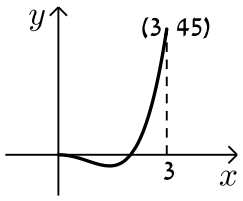
ג.


ד.


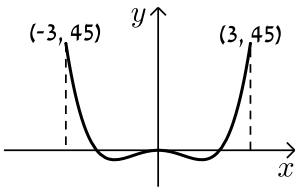
4) א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,

$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ג:



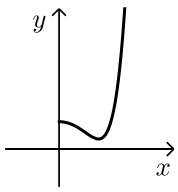
5) א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה-y: $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

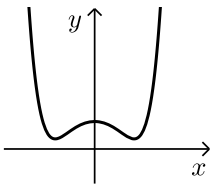
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$, ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף א:

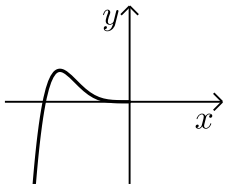


סרטוט עבור סעיף ג:

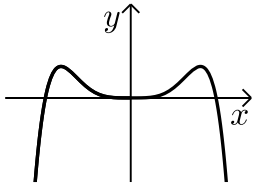


6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(-1.225,0)$,
נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

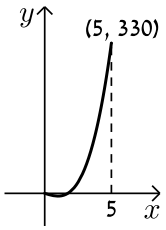


סרטוט עבור סעיף ד:

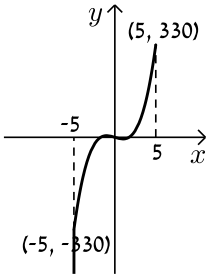


7) א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(\sqrt{3},0)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

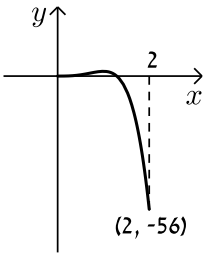


סרטוט עבור סעיף ג:

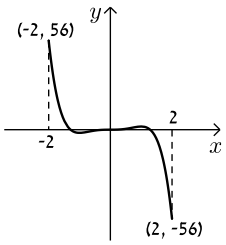


8) א. $b=0$ ב. i $0\le x\le 2$, ii. $(0,0),(1.29,0)$, iii. $\min(2,-56)$ קצה, $\max(1,2)$,
$\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$ ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:

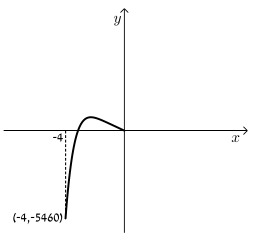


סרטוט עבור סעיף ד:

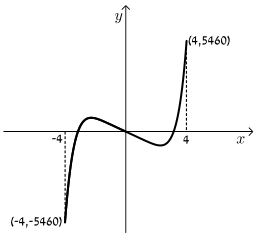


9) א. i $-4\le x\le 0$, ii. $(-1,0),(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$, יורדת: $-0.723<x<0$
ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ד:



מינימום ומקסימום בתחום סגור:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=-x^2+6x+4$ בתחום: $[0,8]$.

ב. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=2x^2+12x-3$ בתחום: $[-8,2]$.

ג. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=3x-16$ בתחום: $[1,5]$.

ד. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=2x^3+12x-5$ בתחום: $[-6,-1]$.

ה. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=3x^3-9x^2-216x$ בתחום: $[-7,12]$.

ו. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{6}x^6-6$ בתחום: $[0,3]$.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-8x^2$.

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ב. מגבילים את הפונקציה $f(x)$ בתחום $-3\le x\le 1$. לפניכם מספר טענות המתייחסות לפונקציה **לאחר שהוגבלה בתחום חסום**. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה:

(1) שתי נקודות הקיצון של הפונקציה בקצות התחום הן נקודות מקסימום.

(2) לפונקציה יש שלוש נקודות קיצון פנימיות.

(3) ערך הפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט גדול ב-25 מערכה בנקודת המינימום המוחלט.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-9x^2+24x-16$ בתחום: $0\le x\le 6$.

א. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.

ב. הסבירו מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בשתי נקודות.

ג. הסבירו מדוע הישר $y=4$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

תשובות סופיות:

1) א. $\min(8,-12)$ מוחלט, $\max(3,13)$ מוחלט.

ב. $\min(-3,-21)$ מוחלט, $\max(-8,29)$ מוחלט, $\max(2,29)$ מוחלט.

ג. $\min(1,-13)$ מוחלט, $\max(5,-1)$ מוחלט.

ד. $\min(-6,-509)$ מוחלט, $\max(-1,-19)$ מוחלט.

ה. $\min(6,-972)$ מוחלט, $\max(12,1296)$ מוחלט.

ו. $\min(0,-6)$ מוחלט, $\max(3,115.5)$ מוחלט.

2) א. $\min(-2,-16)$, $\min(2,-16)$, $\max(0,0)$

ב. (1), (2) לא נכונות. (3) נכונה.

3) א. ערך גדול ביותר: 20, ערך קטן ביותר: 16-.

ב. ראו הסבר בסרטון הוידאו. ג. ראו הסבר בסרטון הוידאו.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול:

סיכום כללי:

תחומי קעירות:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0,x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה. כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x)<0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0,x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x)>0$.

נקודת פיתול:

- נקודת פיתול היא כזו שהפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x)=0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

1) מצאו את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x)=x^4-6x^3+12x^2$.

2) מצאו את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x)=x(x-2)^3$.

תשובות סופיות:

1) $(1,7),(2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$ או $x<1$, קעירות כלפי מטה: $1<x<2$.

2) קיצון: $\min\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$, פיתול: $(1,-1),(2,0)$.