

שאלון 471

האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים:

1	האינטגרל המסוים וחישובי שטחים
2	האינטגרל המסוים:
2	סיכום כללי:
2	שאלות:
3	תשובות סופיות:
4	חישובי שטחים:
4	סיכום כללי:
4	חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים):
5	שאלות:
11	תשובות סופיות:
12	חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:
12	שאלות:
15	תשובות סופיות:

האינטגרל המסוים:

סיכום כללי:

האינטגרל המסוים:

נתונה פונקציה $f(x)$ ולה פונקציה קדומה $F(x)$, כלומר: $F(x) = \int f(x) dx = F(x) + c$.
נגדיר את האינטגרל המסוים בעזרת הסימון הבא: $\int_a^b f(x) dx$.

כאשר:

- a – הגבול התחתון של האינטגרל (ה-'רצפה').
- b – הגבול העליון של האינטגרל (ה-'תקרה').

נחשב את ערכו של האינטגרל המסוים בעזרת הפונקציה הקדומה של $f(x)$ באופן הבא:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

שאלות:

(1) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $\int_{-4}^{-1} x^2(x-3) dx$

ד. $\int_{-1}^1 3(2x-1)^5 dx$

ו. $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3} dx$

א. $\int_2^5 (x^2 + 5x) dx$

ג. $\int_{-3}^3 (x^3 + 4x) dx$

ה. $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2} dx$

(2) לפניכם האינטגרל הבא: $\int_1^a (4x-7) dx$.

מצאו עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

(3) לפניכם האינטגרל הבא: $\int_a^2 (x - 3x^2) dx$

א. כתבו ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- a .

ב. מצאו עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$.

תשובות סופיות:

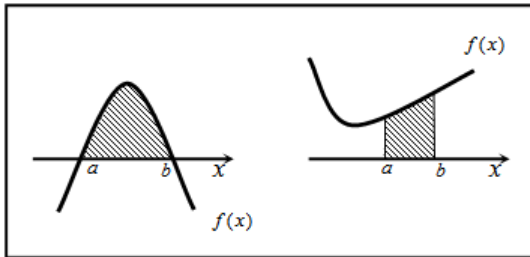
(1) א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1 ו. $\frac{9}{32}$

(2) $a = 2, 1.5$

(3) א. $a^3 - \frac{1}{2}a^2 - 6$ ב. $a = 0, 1, -\frac{1}{2}$

סיכום כללי:

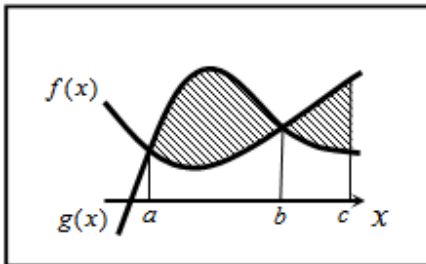
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים):



- שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :

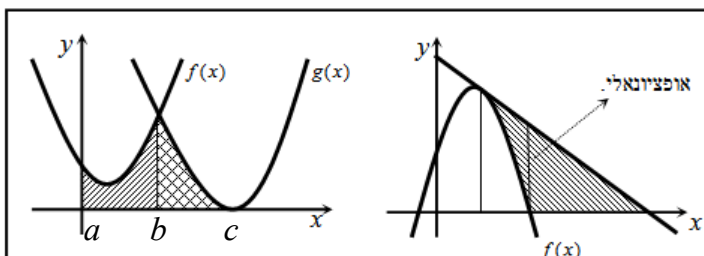
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- שטח הכלוא בין שני גרפים כך שגרף אחד כולו מעל השני:



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ S_2 &= \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \\ S &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

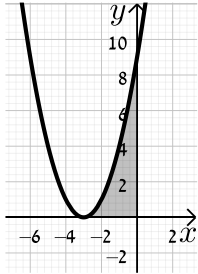
- שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

שאלות:

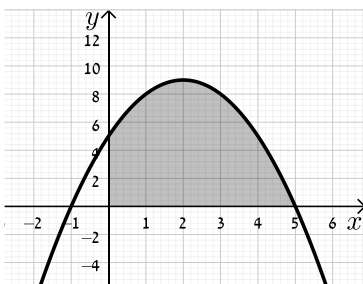
חישובי שטחים יסודיים:



(1) נתונה הפונקציה: $y = (x+3)^2$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

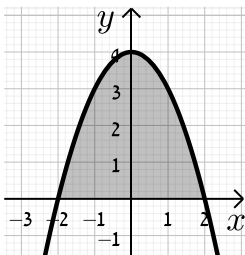
ב. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה לצירים.



(2) נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 4x + 5$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

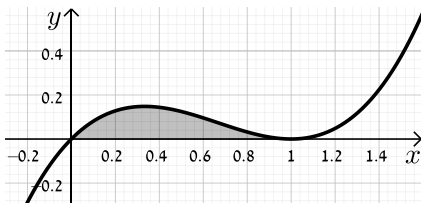
ב. מצאו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y .



(3) נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 4$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

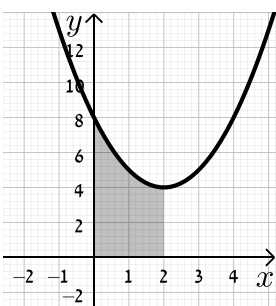
ב. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה לציר ה- x .



(4) מצאו את השטח המוגבל תחת

הפונקציה: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

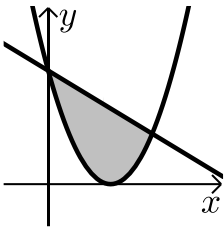
וציר ה- x כמתואר באיור:



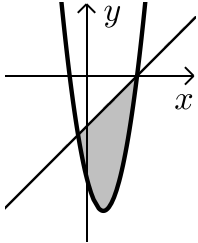
(5) נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 4x + 8$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים וקודקוד הפרבולה.

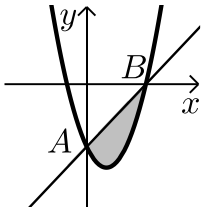
שטח הכלוא בין שתי פונקציות:



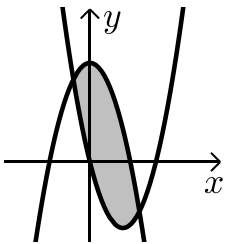
- (6)** נתונות הפונקציות: $y = -x + 9$; $y = (x-3)^2$
חשבו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



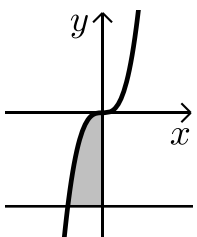
- (7)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 - 4x - 12$; $g(x) = x - 6$
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



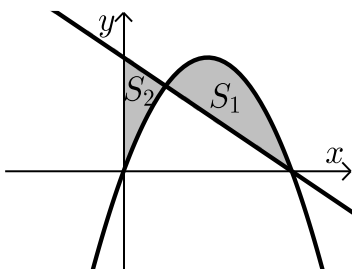
- (8)** נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 - 6x - 9$
א. מצאו נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים (נסמן ב-A ו-B).
ב. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AB.



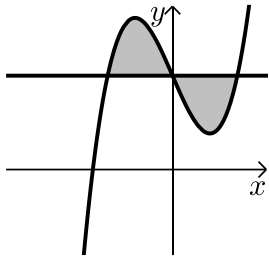
- (9)** חשבו את השטח המוגבל בין גרפים של הפונקציות: $y = x^2 - 4x$; $y = -x^2 + 6$



- (10)** נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3$
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר $y = -8$ וציר ה- y כמתואר באיור.



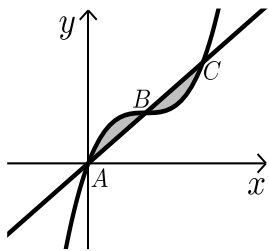
- (11)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = -x^2 + 4x$; $g(x) = -x + 4$
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב- S_1 ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה- y ב- S_2 כמתואר באיור.
א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציות.
ב. חשבו את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



(12) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x + 5$ והישר $y = 5$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשבו את השטח המוגבל ביניהן.

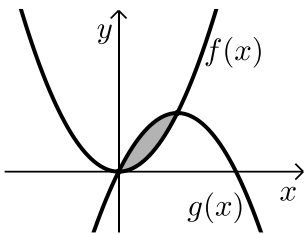


(13) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

הישר AC חותך את גרף הפונקציה

בנקודות הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.

חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

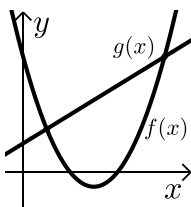


(14) הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = -x^2 + 2x$

נחתכות ב-2 נקודות.

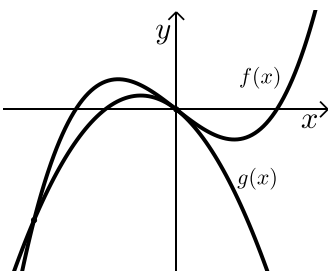
א. מצאו את נקודות החיתוך.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



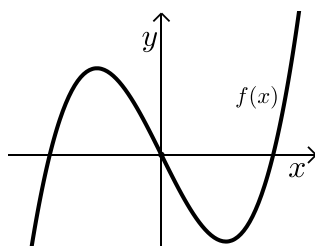
(15) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ו- $g(x) = x + 2$.

מצאו את השטח המוגבל בין הגרפים והצירים.



(16) חשבו את גודל השטח הכלוא בין

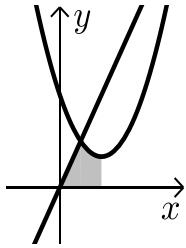
הפונקציות: $f(x) = 2x^3 - x$, $g(x) = -2x^2 - x$.



(17) חשבו את גודל השטח הכלוא בין

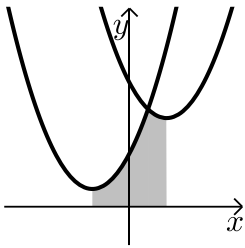
הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x$ וציר ה- x .

חישובי שטחים מורכבים:



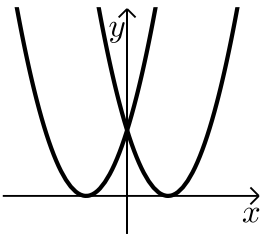
(18) הפונקציות המתוארות בשרטוט הן: $y = 3x$; $y = x^2 - 4x + 6$.

- מצאו את קודקוד הפרבולה.
- מצאו נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשמאל לקודקוד הפרבולה.
- חשבו את השטח המסומן שבשרטוט.



(19) נתונות הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 14$, $y = x^2 + 4x + 6$.

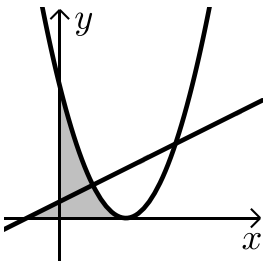
- מצאו את שיעורי ה- x של קודקודי הפרבולות.
- חשבו את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
- חשבו את השטח המסומן בשרטוט.



(20) נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-3)^2$ ו- $g(x) = (x+3)^2$

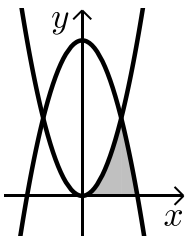
כמתואר באיור:

חשבו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x .



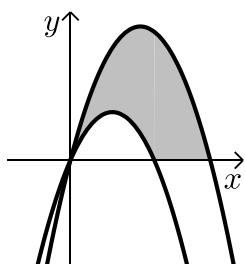
(21) נתונות שתי הפונקציות: $y = (x-2)^2$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

- מצאו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x .
- מצאו את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y .



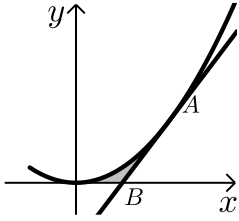
(22) נתונות הפונקציות: $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

חשבו את השטח המוגבל על ידי שתי הפונקציות וציר ה- x ברביע הראשון.



(23) נתונות הפרבולות הבאות: $f(x) = -x^2 + 5x$, $g(x) = -x^2 + 3x$.

חשבו את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x .

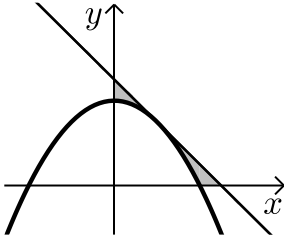


(24) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה $A(1, 2)$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B .

חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



(25) נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 4$.

בנקודה $(1, 3)$ העבירו משיק.

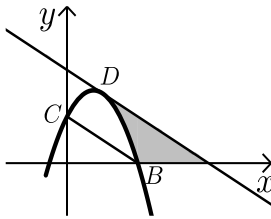
א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- y .

ג. חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

(26) משוואת הפרבולה היא: $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

הנקודות $B(2, 0)$, $C(0, 2)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה עם הצירים.



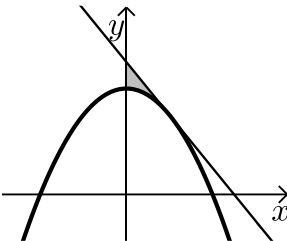
המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC .

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x .

ג. מצאו את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y .

שאלות עם פרמטר:



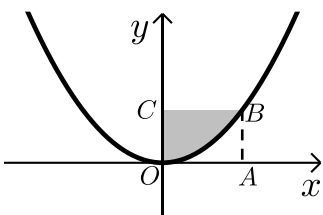
(27) נתונה הפרבולה: $y = ax^2 + 8$.

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה

שבה $x = 2$ הוא -2 .

א. חשבו את a .

ב. חשבו את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר ה- y .



(28) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y = ax^2$ (a פרמטר).

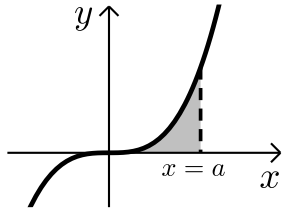
המרובע $ABCO$ הוא ריבוע.

הקודקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

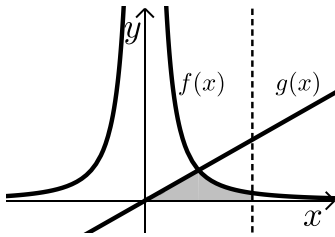
מצאו את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בשרטוט.

(29) נתונה הפונקציה: $y = x^3$.



- מעבירים אנך לציר ה- x : $x = a$ (a פרמטר חיובי)
 כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- x .
 א. הבע באמצעות a את השטח האפור בציור.
 ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל- a^2 .

חישובי אינטגרלים עם פונקצית מנה:



(30) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$.

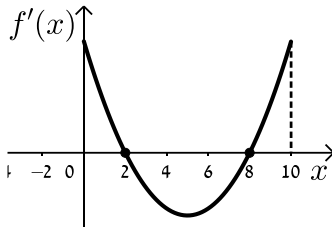
- חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
 הישר $x = 2$ וציר ה- x .

תשובות סופיות:

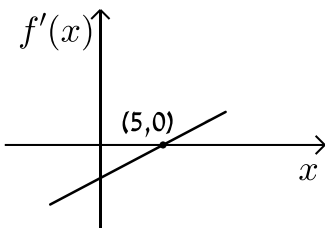
- (1) א. $(-3,0)$ ב. 9 יח"ש
- (2) א. $(5,0)$, $(-1,0)$ ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש
- (3) א. $(-2,0)$, $(2,0)$ ב. $10\frac{2}{3}$ יח"ש
- (4) $\frac{1}{12}$ יח"ש
- (5) $10\frac{2}{3}$ יח"ש
- (6) $20\frac{5}{6}$ יח"ש
- (7) $57\frac{1}{6}$ יח"ש
- (8) $10\frac{2}{3}$ יח"ש
- (9) $21\frac{1}{3}$ יח"ש
- (10) 12 יח"ש
- (11) א. $(4,0)$, $(1,3)$ ב. $2\frac{5}{11}$
- (12) א. $(2,5)$, $(0,5)$, $(-2,5)$ ב. 8 יח"ש
- (13) 0.5 יח"ש
- (14) א. $(1,1)$, $(0,0)$ ב. $\frac{1}{3}$ יח"ש
- (15) $3\frac{5}{6}$ יח"ש
- (16) $\frac{1}{6}$ יח"ש
- (17) 8 יח"ש
- (18) א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש
- (19) א. $x = \pm 2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש
- (20) 18 יח"ש
- (21) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש
- (22) 4.418 יח"ש
- (23) $16\frac{1}{3}$ יח"ש
- (24) $\frac{1}{6}$ יח"ש
- (25) א. $y = -2x + 5$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{7}{12}$ יח"ש
- (26) א. $y = -x + 4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש
- (27) א. $a = -\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש
- (28) $2\frac{2}{3}$, $a = \frac{1}{2}$ יח"ש
- (29) א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a = 2$
- (30) 1 יח"ש

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

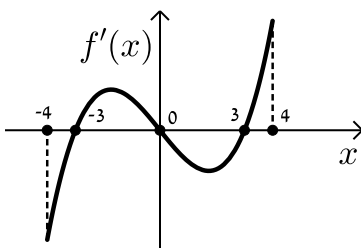
שאלות:



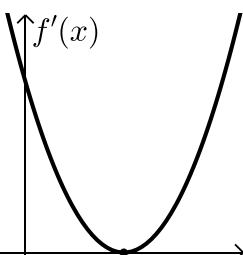
- (1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.
 בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.
 א. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם:
 $f(0) = -4$, $f(2) = 6$, $f(5) = 0$ וכן: $f(10) > 0$.
 ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים
 ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x = 2$.



- (2) לפניכם הגרף של הפונקציה $f'(x)$.
 הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד
 והיא $(5, 0)$.
 א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ היא
 חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.
 ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ של $y = -2$.
 ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y
 כאשר $y = 8$.
 ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

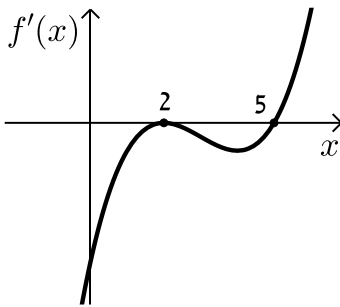


- (3) בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.
 א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
 ב. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f(x)$
 וקבעו את סוגן.
 ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3) = f(3) = m$.
 סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות m).
 ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x ברביעים השני והרביעי הוא 16 יח"ש.
 מצאו את m .



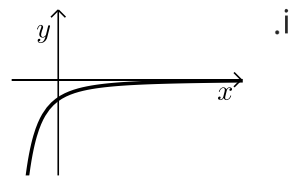
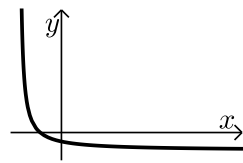
- (4) הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא:

- א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.



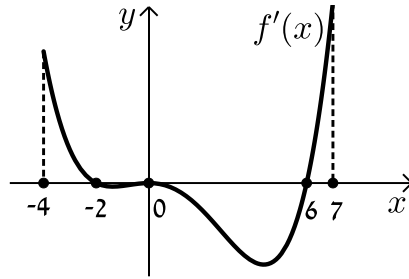
- (5) באיור שלפניכם מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$. ידוע כי הנקודות $B(2,2)$, $A(5,-4.75)$ ו- $C(0,14)$ נמצאות על $f(x)$.
 א. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
 ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ד. חשבו את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בתחום $0 \leq x \leq 5$.

- (6) באיורים שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



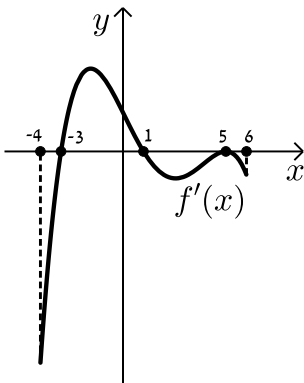
- א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.
 ב. נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$. מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

(7) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



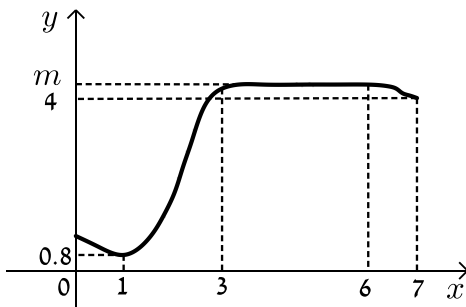
- א. סרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$
 לפי הנתונים: $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
 ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

(8) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



- א. סרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 6$ עבור
 הנתונים: $f(-3) = -356\frac{2}{5}$, $f(1) = 36\frac{2}{15}$, $f(5) = -83\frac{1}{3}$.
 ב. חשבו את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת
 וציר ה- x בתחום: $-3 \leq x \leq 5$.

(9) בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < 7$:



- הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים
 על הצירים וענה על השאלות הבאות:
 א. מצאו עבור אילו ערכים של x השונים
 מ-6 מתקיים:
 (1) $f'(x) > 0$
 (2) $f'(x) = 0$
 (3) $f'(x) < 0$
 ב. נתון כי: $\int_3^6 m dx = 15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה- y .
 מצאו את $f(5)$.
 ג. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 < x < 3$.
 ד. מצאו את השטח המוגבל בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$
 וציר ה- x בתחום $1 < x < 3$.

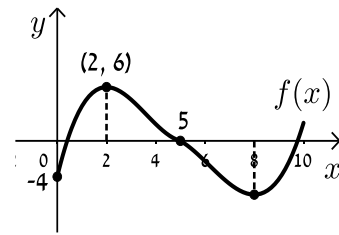
תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות של השאלות הבאות מופיעות בסוף התשובות.

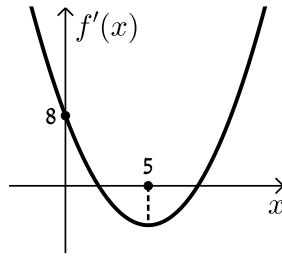
- (1) ב. 10 יח"ש.
- (2) א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$. ג. $\min(5, -2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.
- (3) א. עולה: $3 < x \leq 4$, $-3 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 3$, $-4 \leq x < -3$. ב. $x_{\min} = 3$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = -3$. ג. הוכחה ד. $m = -8$.
- (4) א. לא. הנקודה $(3, 0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה. ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.
- (5) א. $\min(5, -4.75)$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$. ג. הוכחה ד. 18.75 יח"ש.
- (6) א. א. $f'(x)$: I, $f(x)$: II. ב. 1 יח"ש.
- (7) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (8) א. הוכחה ב. 512 יח"ש.
- (9) א. (1). $f'(x) > 0$: $1 < x < 3$. א. (2). $f'(x) = 0$: $x = 1$, $3 \leq x < 6$. א. (3). $f'(x) < 0$: $6 < x < 7$, $0 < x < 1$. ב. $f(5) = 5$, $m = 5$. ד. 4.2 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

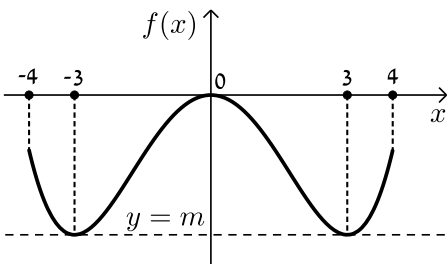
(1)



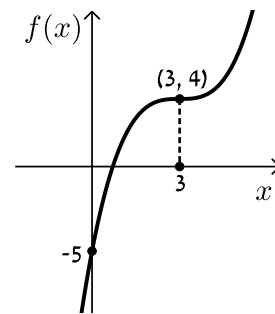
(2)



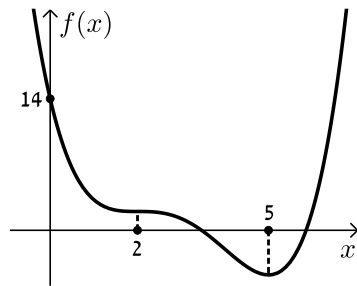
(3)



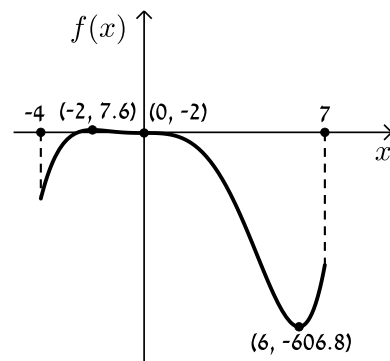
(4)



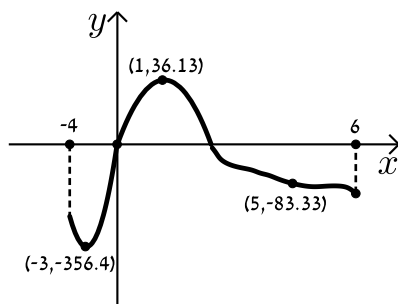
(5)



(7)



(8)



(9)

