

שאלון 471

אנליזה של פונקצית מנה

תוכן העניינים:

1 אנליזה של פונקצית מנה.....1

3.....	תחום ההגדרה של פונקצית מנה:
3.....	סיכום כללי:
3.....	שאלות:
4.....	תשובות סופיות:
5.....	הנגזרת של פונקצית מנה:
5.....	סיכום כללי:
5.....	שאלות:
7.....	תשובות סופיות:
9.....	שיפוע משיק ומשוואת משיק:
9.....	סיכום כללי:
9.....	שאלות:
11.....	תשובות סופיות:
12.....	תחומי עלייה וירידה ונקודות קיצון:
12.....	שאלות:
13.....	תשובות סופיות:
14.....	אסימפטוטה אנכית:
14.....	סיכום כללי:
14.....	שאלות:
14.....	תשובות סופיות:
15.....	אסימפטוטה אופקית:
15.....	סיכום כללי:
16.....	שאלות:
18.....	תשובות סופיות:
19.....	חקירה מלאה:
19.....	שאלות:
21.....	תשובות סופיות:

22	שאלות מסכמות ברוח בגרויות:
22	שאלות:
23	תשובות סופיות:
24	הקשר שבין גרף הנגזרת לפונקציה:
24	שאלות:
26	תשובות סופיות:

תחום ההגדרה של פונקצית מנה:

סיכום כללי:

מציאת תחום ההגדרה של פונקצית מנה:

כאשר פונקציה מורכבת ממנה של שני ביטויים: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, נדרוש כי הביטוי שבמכנה לא יתאפס.
כלומר: $g(x) \neq 0$.

שאלות:

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x-3}{x-6} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{8}{x^2-8x+12} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{4-x}{(x+2)(x-7)} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^2+5}{(x+5)^2} \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{2}{x-6} + \frac{x}{2x+4} \quad \text{ז.}$$

(2) לאילו מהפונקציות הבאות תחום ההגדרה הוא: $x \neq -5$?

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-25} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+5}{x-1} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{-5}{x^2+25} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x+5)^2} \quad \text{ד.}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 + ax + 24}$ הוא $x \neq 6$. מצאו את a .

(4) נתון שהפונקציה: $f(x) = \frac{2-x}{x^2 + x + a}$ אינה מוגדרת בנקודה שבה $x = -3$.
א. מצאו את a .
ב. מהי נקודת אי ההגדרה הנוספת של הפונקציה?

(5) הפונקציה: $y = \frac{5x}{12x - a}$ אינה מוגדרת כאשר $x = \frac{1}{2}$. מצאו את הערך של a .

(6) הפונקציה: $y = \frac{3-x}{(3-bx)^2}$ מוגדרת עבור $x \neq 6$. מצאו את הערך של b .

(7) הראו כי הפונקציה: $f(x) = \frac{8-3x}{x^2 - 6x + 10}$ מוגדרת לכל x .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \neq 6$ ב. $x \neq \pm 2$ ג. $x \neq 2, 6$ ד. כל x ה. $x \neq -5$
- (2) ו. $x \neq -2, 7$ ז. $x \neq -2, 6$
- (3) פונקציה ד. $a = -10$
- (4) א. $a = -6$ ב. $x = 2$
- (5) $a = 6$
- (6) $b = \frac{1}{2}$
- (7) ראו הוכחה בסרטון הוידאו.

הנגזרת של פונקצית מנה:

סיכום כללי:

גזירה של פונקצית מנה:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{כלל הגזירה של פונקצית מנה:}$$

כללים לנגזרות מיידיות:

• נגזרת מיידיית 1: $\left(\frac{a}{x} \right)' = -\frac{a}{x^2}$, כאשר a הוא מספר כלשהו.

• נגזרת מיידיית 2: $\left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$, $f(x) \neq 0$.

שאלות:

(1) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

א. $y = \frac{x+2}{3-x}$	ב. $y = \frac{x^2}{x+5}$
ג. $y = \frac{2}{4x-1}$	ד. $y = \frac{2x}{x+4}$
ה. $y = \frac{5x-3}{2x+7}$	ו. $y = \frac{2x+3}{x}$

(2) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$
ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$
ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

(3) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1-x}{-2x^2+3} \quad .א$$

$$y = \frac{x^2-3}{x+3} + 3 \quad .ב$$

$$y = \frac{2x^2}{x^2+5} - \frac{4}{x^2+5} \quad .ג$$

(4) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+6} + 3 \quad .א$$

$$y = \frac{x^2+2x+5}{x^2-6x+9} \quad .ב$$

$$y = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3} \quad .ג$$

(5) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{6}{x} - \frac{x}{6} + 6 \quad .א$$

$$f(x) = 2x^2 - \frac{7}{x} - 12 \quad .ב$$

(6) מצאו תחום הגדרה וגזרו את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{1}{6-x} \quad .א$$

$$f(x) = \frac{1}{4x-3} \quad .ב$$

$$f(x) = \frac{4}{x-7} \quad .ג$$

$$f(x) = \frac{5}{2x-9} \quad .ד$$

$$f(x) = \frac{2}{3x-9} + \frac{2}{x} \quad .ה$$

תשובות סופיות:

1) א. ת.ה. $x \neq 3$, נגזרת: $y' = \frac{5}{(3-x)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq -5$, נגזרת: $y' = \frac{x^2 + 10x}{(x+5)^2}$

ג. ת.ה. $x \neq \frac{1}{4}$, נגזרת: $y' = \frac{-8}{(4x-1)^2}$

ד. ת.ה. $x \neq -4$, נגזרת: $y' = \frac{8}{(x+4)^2}$

ה. ת.ה. $x \neq -3.5$, נגזרת: $y' = \frac{41}{(2x+7)^2}$

ו. ת.ה. $x \neq 0$, נגזרת: $y' = \frac{-3}{x^2}$

2) א. ת.ה. $x \neq -\frac{1}{2}$, נגזרת: $y' = \frac{5}{(1+2x)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq 2.4$, נגזרת: $y' = \frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x-12)^2}$

ג. ת.ה. כל x , נגזרת: $y' = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$

3) א. ת.ה. $x \neq \pm 1.22$, נגזרת: $y' = \frac{-2x^2 + 4x - 3}{(-2x^2 + 3)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq -3$, נגזרת: $y' = \frac{x^2 + 6x + 3}{(x+3)^2}$

ג. ת.ה. כל x , נגזרת: $y' = \frac{28x}{(x^2+5)^2}$

4) א. ת.ה. כל x , נגזרת: $y' = \frac{-4x^2 + 16x}{(x^2 - 3x + 6)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq 3$, נגזרת: $y' = \frac{-8x^2 + 8x + 48}{(x^2 - 6x + 9)^2}$

ג. ת.ה. $x \neq 1, 3$, נגזרת: $y' = \frac{-8x^2 - 2x + 28}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

(5) א. ת.ה. $x \neq 0$, נגזרת: $y' = -\frac{6}{x^2} - \frac{1}{6}$

ב. ת.ה. $x \neq 0$, נגזרת: $y' = 4x + \frac{7}{x^2}$

(6) א. ת.ה. $x \neq 6$, נגזרת: $y' = \frac{1}{(6-x)^2}$

ב. ת.ה. $x \neq \frac{3}{4}$, נגזרת: $y' = -\frac{4}{(4x-3)^2}$

ג. ת.ה. $x \neq 7$, נגזרת: $y' = -\frac{4}{(x-7)^2}$

ד. ת.ה. $x \neq 4.5$, נגזרת: $y' = -\frac{10}{(2x-9)^2}$

ה. ת.ה. $x \neq 0, 3$, נגזרת: $y' = \frac{-6}{(3x-9)^2} - \frac{2}{x^2}$

שיפוע משיק ומשוואת משיק:

סיכום כללי:

נתונה פונקציה $f(x)$ אז:

- נגזרת של פונקציה בנקודה מסוימת $A(x_1, y_1)$ תיתן את שיפוע הפונקציה או שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו.
- נכתוב את משוואת המשיק ע"י שימוש בנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$ כאשר: $m = f'(x_1)$.

שאלות:

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה הנתונה העובר בנקודה המופיעה לידה:

א. $x = 1, y = \frac{x+3}{x-2}$

ב. $x = -3, y = \frac{x-1}{(x+4)^2}$

ג. $x = 3, y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} - 2$

(2) מצאו שתי נקודות על גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-4}{x-6}$,

בהן שיפוע המשיק לגרף הוא: $m = -3.5$.

(3) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x+a}{x+4}$ בנקודה שבה $x = -1$ הוא 1.

א. מצאו את הערך של a .

ב. הציבו $a = -5$ ומצאו את שיעורי נקודת ההשקה.

ג. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודה שבה $x = -1$.

(4) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2 + bx}{x - 2}$, b הוא פרמטר.

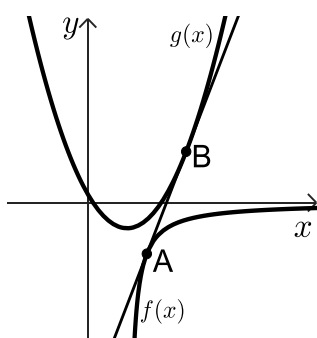
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא -9.
מצאו את הערך של b ואת שיעורי נקודת ההשקה.

(5) באילו נקודות על גרף הפונקציה: $y = \frac{6}{x} - \frac{x}{3}$, המשיק לגרף הפונקציה יוצר זווית של 45° עם ציר ה- x ?

(6) מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$, המאונכים לישר $y = 8x - 3$.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

- מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת האפס שלה.
 - האם קיים משיק נוסף לגרף הפונקציה המקביל למשיק שמצאתם בסעיף א'?
- אם כן, מהי נקודת ההשקה שלו?



(8) לפניכם ישר המשיק בנקודה A לגרף הפונקציה: $f(x) = -\frac{9}{x-2}$.

שיעור ה- y של הנקודה A הוא -9.

בסרטוט מופיע רק החלק של גרף הפונקציה $f(x)$ הנדרש בשאלה.

- מצאו את שיעורי ה- x של הנקודה A.
- מצאו את משוואת המשיק.
- נתון שהישר המשיק בנקודה B לפרבולה: $g(x) = 1.5x^2 - 6x + 1.5$.
מצאו את שיעורי הנקודה B.

(9) לפניכם שתי פונקציות: $f(x) = \frac{x^2 - a}{x - 1}$, $g(x) = x^2 - 6x + 8$, a הוא פרמטר.

נתון: $f'(0) = g'(5)$.

- מצאו את הפרמטר a .
- מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 2$.
- האם המשיק שמצאתם בסעיף ב' משיק גם לגרף הפונקציה $g(x)$? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) א. $y = -5x + 4$ ב. $y = 9x + 23$ ג. $y = -3x + 11$

(2) $(4, -4)$, $(8, 10)$

(3) א. $a = -5$ ב. $(-1, -2)$ ג. $y = x - 1$

(4) $b = 3$, $(1, -4)$

(5) $(3, 1)$, $(-3, -1)$

(6) $y = -\frac{1}{8}x + 1$, $y = -\frac{1}{8}x - 1$

(7) א. $y = -x + 2$ ב. $(4, 2)$

(8) א. $A(3, -9)$ ב. $y = 9x - 36$ ג. $B(5, 9)$

(9) א. $a = 4$ ב. $y = 4x - 8$ ג. לא

תחומי העלייה והירידה ונקודות קיצון:

שאלות:

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את:

(1) תחומי העלייה והירידה.

(2) נקודות הקיצון וקביעת סוגן.

א. $y = -5x - \frac{5}{x}$

ב. $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$

ג. $y = \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-5}$

ד. $y = x^3 + \frac{48}{x}$

ה. $y = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$

ו. $y = \frac{-3x}{(x-1)^2}$

ז. $y = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 6}$

ח. $y = \frac{16 - x^2}{9 - x^2}$

(2) לפונקציה: $f(x) = \frac{x+a}{8+x^2}$ (המוגדרת לכל x) יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = 2$.

א. מצאו את a ואת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{x+1} + x + 1$

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלו).

תשובות סופיות:

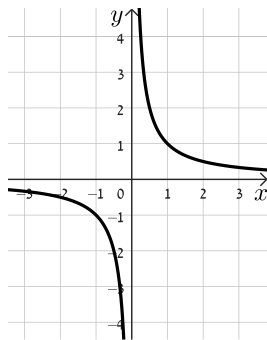
- (1)** א. (1) עלייה: $0 < x < 1$, $-1 < x < 0$ ירידה: $x < -1$, $x > 1$
 א. (2) $\max(1, -10)$, $\min(-1, 10)$
 ב. (1) עלייה: אף x , ירידה: $x \neq 0$
 ב. (2) אין נקודות קיצון.
 ג. (1) עלייה: $5 < x < 12$, $2\frac{2}{3} < x < 5$, ירידה: $x > 12$, $-2 < x < 2\frac{2}{3}$, $x < -2$
 ג. (2) $\max\left(12, \frac{1}{7}\right)$, $\min\left(2\frac{2}{3}, 1.285\right)$
 ד. (1) עלייה: $x < -2$, $x > 2$, ירידה: $-2 < x < 0$, $0 < x < 2$
 ד. (2) $\max(-2, -32)$, $\min(2, 32)$
 ה. (1) עלייה: $1 < x < 2$, $x < 1$, ירידה: $2 < x < 3$, $x > 3$
 ה. (2) $\max(2, -2)$
 ו. (1) עלייה: $x < -1$, $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 1$
 ו. (2) $\max\left(-1, \frac{3}{4}\right)$
 ז. (1) עלייה: $x > 2$, $x < -3$, ירידה: $-3 < x < 2$
 ז. (2) $\max\left(-3, \frac{5}{3}\right)$, $\min(2, 0)$
(2) א. $a = 1, f(x) = \frac{x+1}{8+x^2}$
 ב. $\max\left(2, \frac{1}{4}\right)$, $\min\left(-4, \frac{1}{8}\right)$
 ג. עלייה: $-4 < x < 2$, ירידה: $x < -4$, $x > 2$
(3) עלייה: $x > -1$, $x < -1$, ירידה: אף x .

אסימפטוטה אנכית:

סיכום כללי:

מסקנות מבדיקת שאיפה של פונקציה מנה:

- ככל שערכי x **שואפים ל-0 מימין**, ערכי הפונקציה **שואפים לפלוס אינסוף** $(+\infty)$
- ככל שערכי x **שואפים ל-0 משמאל**, ערכי הפונקציה **שואפים למינוס אינסוף** $(-\infty)$



אסימפטוטה אנכית:

ישר מהצורה: $x = x_0$ המאונך לציר ה- x ייקרא אסימפטוטה אנכית של $f(x)$ אם עבור ערכי x המתקרבים ל- x_0 , ערכי הפונקציה $f(x)$ שואפים לפלוס או מינוס אינסוף.

שאלות:

(1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האנכית עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$

א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$

ד. $f(x) = \frac{5x^2 + 4x}{x^2 - 1}$

ג. $f(x) = \frac{2x}{x - 3}$

ו. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 8}$

ה. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x}$

ז. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 4}$

תשובות סופיות:

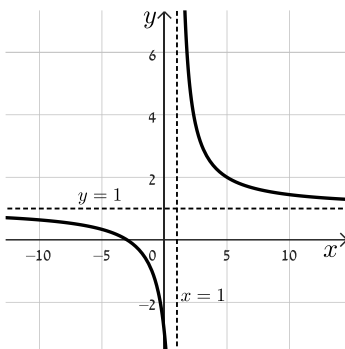
- (1) א. אין ב. אין ג. $x = 3$ ד. $x = 1, x = -1$
 ה. $x = 0, x = 4$ ו. $x = -2, x = 4$ ז. אין.

אסימפטוטה אופקית:

סיכום כללי:

מסקנה מבדיקת שאיפה של פונקצית מנה:

- ככל שערכי x שואפים לפלוס אינסוף $(+\infty)$, ערכי הפונקציה שואפים ל-1.
- ככל שערכי x שואפים למינוס אינסוף $(-\infty)$, ערכי הפונקציה שואפים ל-1.



אסימפטוטה אופקית:

ישר מהצורה: $y = y_0$ הוא אסימפטוטה של פונקציה $f(x)$ אם עבור ערכי x ההולכים וגדלים לפלוס אינסוף או למינוס אינסוף, ערכי הפונקציה מתקרבים לישר.

דרכים למציאת אסימפטוטה אופקית:

נתונה פונקצית מנה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר: $g(x) \neq 0$.

- אם מעלת הפולינום $f(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $g(x)$ אז: $y = 0$.

דוגמה: $y = \frac{x+2}{x^2+1}$

- אם מעלת הפולינום $f(x)$ שווה למעלת הפולינום $g(x)$ אז האסימפטוטה האופקית שווה ליחס המקדמים של ה- x עם החזקה הגבוהה ביותר.

דוגמה: $y = \frac{4x^2-1}{x^2+x+2}$

- אם מעלת הפולינום $f(x)$ גדול ממעלת הפולינום $g(x)$

אז אין אסימפטוטה אופקית.

דוגמה: $y = \frac{x^2-x-2}{2x-1}$

שאלות:

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות האופקיות והאנכיות עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

$y = \frac{2x}{1-5x}$.ג.	$y = \frac{x}{x-8}$.ב.	$y = \frac{4}{x}$.א.
$y = -\frac{3}{x^2}$.ו.	$y = \frac{3x^2}{1-4x}$.ה.	$y = \frac{x^2}{x+10}$.ד.
$y = \frac{x-2}{x^2-8x}$.ז.	$y = \frac{2x^2}{x^2+5}$.ח.	$y = \frac{7x}{x^2+7}$.ז.
$y = \frac{6x}{(x+3)(x-5)}$.י.	$y = \frac{7}{x^2-10x+21}$.י.	
$y = -\frac{8x^2}{1-4x^2}$.יג.	$y = \frac{x^2-1}{49-x^2}$.יב.	
	$y = -\frac{x^2-25}{(x-3)^2}$.יד.	

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות האופקיות והאנכיות עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

$y = x - 5 + \frac{4}{x}$.ב.	$y = \frac{8}{x} + 2$.א.
$y = 1 + \frac{20}{x} + \frac{100}{x^2}$.ד.	$y = \frac{14}{x^2} - 2$.ג.
$y = 9 - \frac{x^2+2}{x^2}$.ו.	$y = 3 + \frac{x^2-67}{x^2+1}$.ה.
$y = 1 - \frac{5}{(5-x)^2}$.ח.	$y = \frac{3-x}{(5x-6)^2} + 3$.ז.

(3) נתון כי לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אנכית $x = 3$ ואסימפטוטה אופקית $y = 1$.

איזה מהביטויים שלפניכם יכול לייצג את הפונקציה $f(x)$?

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-9}$.ב.	$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-3}$.א.
$f(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$.ד.	$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+9}$.ג.

(4) נתונות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{25 + x^2} \quad (3) \quad g(x) = \frac{64 + x^2}{64 - x^2} \quad (2) \quad h(x) = \frac{25 - x^2}{36 - x^2} \quad (1)$$

לכל אחת מן הפונקציות קיימות אסימפטוטות אנכיות, אופקיות, או שתיהן.

- קבעו לאלו פונקציות יש אסימפטוטות אנכיות, ומצאו אותן.
- קבעו לאלו פונקציות יש אסימפטוטות אופקיות, ומצאו אותן.
- דני טוען כי קיימת פונקציה אחת מבין הפונקציות הנתונות בשאלה אשר חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה. האם דני צודק? נמקו בעזרת חישוב מתאים.
- האם נכון לומר כי תמיד כאשר לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית, היא לא תחתוך אותה? נמקו מילולית, אין צורך בחישובים.

$$(5) \text{ לפונקציה } y = \frac{3x^2 + 7}{x^2 - 8} + a \text{ יש אסימפטוטה אופקית } y = 4.$$

מצאו את ערך הפרמטר a .

$$(6) \text{ לפונקציה } y = 6 - \frac{4 + bx^2}{3 - 2x^2} \text{ יש אסימפטוטה אופקית } y = 2.$$

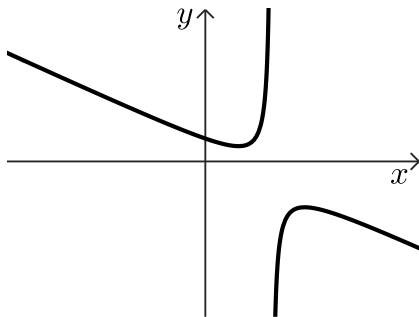
מצאו את ערך הפרמטר b .

$$(7) \text{ הישר } x = 1 \text{ הוא אסימפטוטה של הפונקציה: } f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + ax + 3}.$$

- מצאו את הערך של a .
- (1) האם קיימת לפונקציה אסימפטוטה אנכית נוספת?
אם לא – נמקו, אם כן – מצאו אותה.
- (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.
- באיזו נקודה חותך גרף הפונקציה את האסימפטוטה האופקית שלו?

חקירה מלאה:

שאלות:



(1) לפניכם גרף הפונקציה: $y = \frac{x^2 - 6x + 12}{12 - 3x}$.

מצאו עבור פונקציה זו:

- תחום הגדרה.
- משוואת האסימפטוטה האנכית.
- שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- y .
- שיעורי נקודות המינימום והמקסימום.
- תחומי העלייה והירידה.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 16}{4x}$.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הראו כי הפונקציה אי זוגית.
- מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים.
- מצאו את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- הסבירו מדוע גרף הפונקציה לא חותך את הצירים.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- עבור אילו ערכי k אין פתרונות למשוואה $f(x) = k$?
- נתונה הפונקציה $g(x) = f(x+2)$. מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה?

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ זוגית.
- ה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ו. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ז. סרטטו את גרף הפונקציה.
- ח. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = f(x) + k$.
- האם הפונקציה $g(x)$ זוגית? נמקו.
- ט. ידוע שלפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y = -5$.
- מצאו את k .

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + x + 1}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.
- ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלו).
- ד. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ה. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ו. סרטטו את גרף הפונקציה.
- ז. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = -3f(x)$.
- (1) מהי האסימפטוטה האופקית של $g(x)$?
- (2) הוסיפו לסרטוט את הפונקציה $g(x)$ בקו מקווקו.

תשובות סופיות:

(1) א. $x \neq 4$ ב. $x = 4$ ג. $(0,1)$ ד. $\max(6,-2), \min\left(2,\frac{2}{3}\right)$

ה. עלייה: $4 < x < 6$, $2 < x < 4$, ירידה: $x < 2$, $x > 6$.

(2) א. $x \neq 0$ ב. הוכחה. ג. $x = 0$ ד. $\max(-4,-2), \min(4,2)$

עלייה: $x < -4$, $x > 4$, ירידה: $-4 < x < 0$, $0 < x < 4$

ה. אין חיתוך עם הצירים. ו. להלן סקיצה:

ז. $-2 < k < 2$ ח. $x = -2$

(3) א. כל x . ב. $y = 1$ ג. $(2,0), (-2,0), (0,-2)$

ד. הוכחה. ה. $\min(0,-2)$

ו. עלייה: $x > 0$, ירידה: $x < 0$ ז. להלן סקיצה:

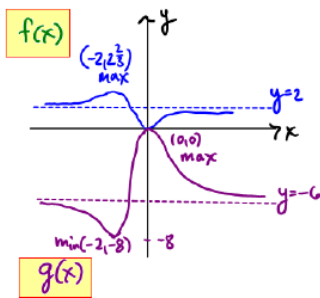
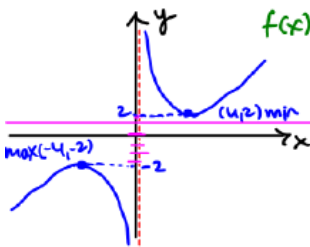
ח. $g(x)$ זוגית. ט. $k = -6$

(4) א. כל x . ב. $y = 2$

ג. $(0,0)$ ד. $\max\left(-2,\frac{8}{3}\right), \min(0,0)$

ה. עלייה: $x > 0$, $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 0$ ו. להלן סרטוט:

ז. (1). $y = -6$ ז. (2) ראו תוספת בסקיצה להלן.



שאלות מסכמות ברוח בגרויות:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{-x^2 + 6x - 8}$

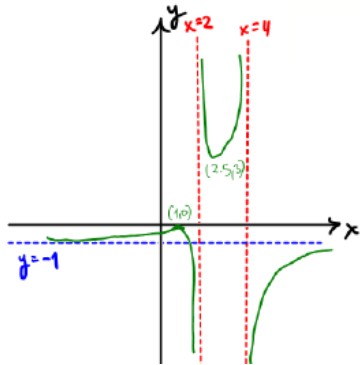
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. (2) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
- ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f(x)$.
- ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ו. הגדירו פונקציה חדשה $g(x) = f(x) + k$ מה צריך להיות ערכו של k על מנת שגרף הפונקציה $g(x)$ ישיק לישר $y = 5$ (מצאו את שני הפתרונות).
- ז. הגדירו פונקציה חדשה $h(x) = f(x+1)$ אביחי טוען שהאסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$ זהות לאלו של הפונקציה $f(x)$. האם אביחי צודק?

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x - b}{x + 2} + 1$. b הוא פרמטר.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה $(0, -2)$. מצאו את b .
- ג. הציבו את הערך של b שמצאתם בסעיף ב בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ז.
- ד. מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- ה. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
- ו. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ז. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ח. הסבירו מדוע אין פתרון למשוואה: $4 = \frac{3x - 6}{x + 2} + 1$.

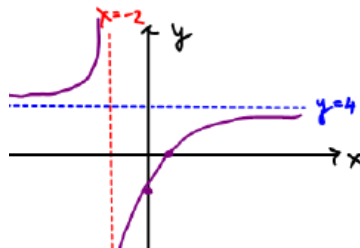
תשובות סופיות:

(1) א. $x \neq 2, 4$. ב. $x = 2, 4, y = -1$. ג. $x = 2, 4, y = -1$. ד. להלן סקיצה:



ה. $k = 2, 5$. ו. אביחי טועה.

(2) א. $x \neq -2$. ב. $b = 6$. ג. $y = 4, x = -2$. ד. $(1, 0)$. ה. עלייה: $x < -2, x > 2$, יורדת: אף x . ו. להלן סקיצה:



ז. ראו הסבר בפתרון.

הוידאו באתר.

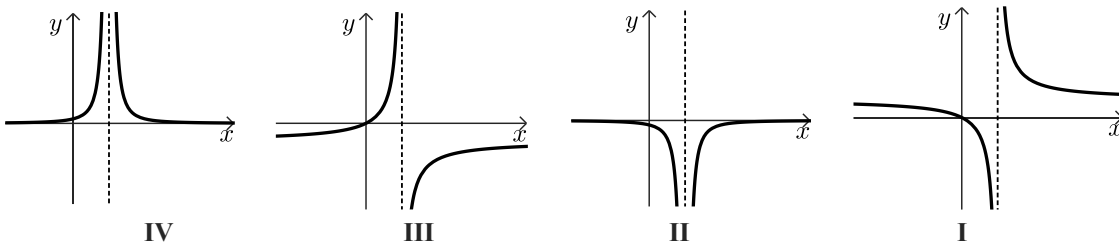
הקשר שבין גרף הנגזרת לפונקציה:

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-4}$

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

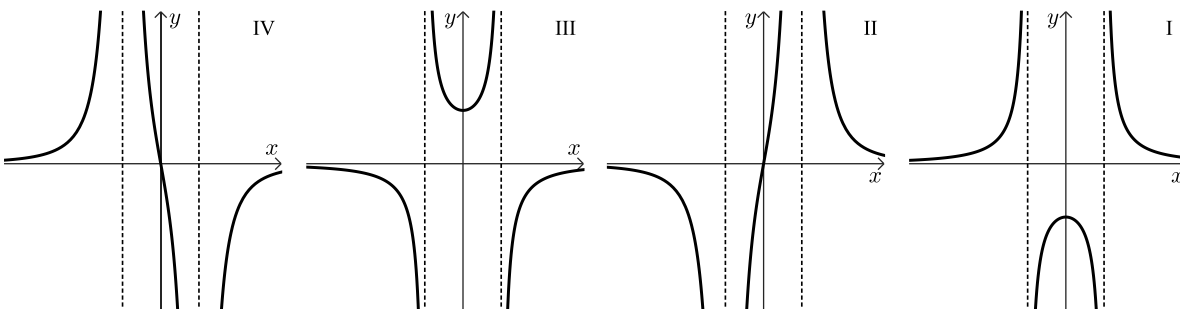
אחד מן הגרפים IV-I מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו.



(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{4x^2 - 1}$

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

אחד מן הגרפים IV-I מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו.



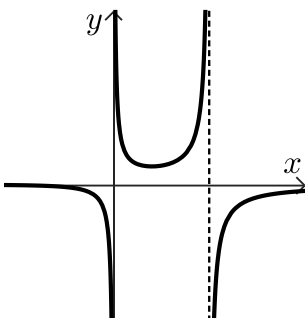
(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+4}{5x-x^2}$ כמתואר באיור.

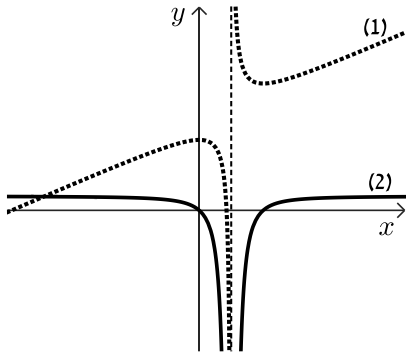
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום, ששיעור ה- y שלה הוא 1.

הגדירו פונקציה חדשה $g(x)$ כך שפונקציית הנגזרת

שלה מקיימת: $g'(x) = f(x) - 1$.

קבעו האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון. נמקו.





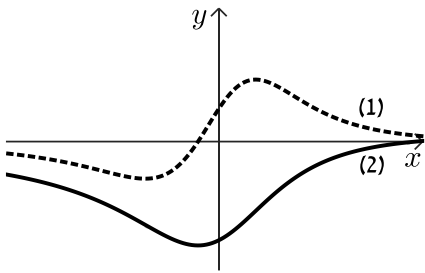
(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x-1} + 5$.

באיור שלפניכם מופיעים הגרפים של שתי פונקציות:

הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

לשתי הפונקציות אותו תחום ההגדרה.

קבעו איזה מבין שני הגרפים (1)-(2) מתאים לפונקציה $f(x)$.



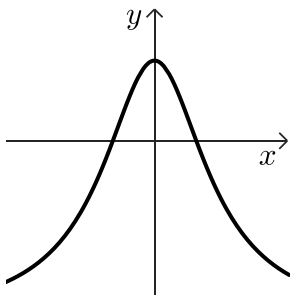
(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-3}{x^2+2}$.

באיור שלפניכם מופיעים הגרפים של שתי פונקציות:

הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת, $f'(x)$.

לשתי הפונקציות אותו תחום ההגדרה.

קבעו איזה מבין שני הגרפים (1)-(2) מתאים לפונקציה $f(x)$.



(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{17-x^2}{x^2+9} - 1$ (הפונקציה מוגדרת לכל x).

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$

(הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו תחום הגדרה).

(1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן.

(3) מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודות: $x=2$, $x=3$.

תשובות סופיות:

- (1) גרף II.
- (2) גרף IV.
- (3) אין לה נקודת קיצון.
- (4) גרף (1).
- (5) גרף (2).
- (6) א. $(2,0)$, $(-2,0)$ ב. חיובית: $-2 < x < 2$, שלילית: $x < -2$, $x > 2$.
 ג. (1) עלייה: $-2 < x < 2$, ירידה: $x < -2$, $x > 2$.
 ג. (2) $x = \pm 2$ ג. (3) עבור: $x = 2 : m = 0$, עבור: $x = 3 : m = -\frac{5}{9}$.