מתמטיקה

שאלון 581

מבחני בגרות משנים קודמות

הקדמה כללית:

ספרי התרגילים של גול הינם פרי של שנות ניסיון רבות בהוראת חומרי הלימוד ובהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

ניתן למצוא את הפתרונות מלאים בוידאו באתר הבגרויות של גול לכל השאלות שבספר זה. הפתרונות מלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותנו היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

בהצלחה!

צוות האתר גול

תוכן העניינים:

שאלון 581 7

בגרויות משנים קודמות 7

בגרות 2021 מועד חורף א׳ : 7

תשובות סופיות: 11

בגרות 2021 מועד חורף נבצרים : 12

תשובות סופיות: 16

בגרות 2021 מועד חורף ב׳ : 17

תשובות סופיות: 21

בגרות 2021 מועד קיץ א׳ : 22

תשובות סופיות: 27

בגרות 2021 מועד קיץ שומר חומות : 29

תשובות סופיות: 33

בגרות 2021 מועד קיץ ב׳ : 34

תשובות סופיות: 39

בגרות 2022 מועד חורף : 40

תשובות סופיות: 44

בגרות 2022 מועד חורף נבצרים : 45

תשובות סופיות: 49

בגרות 2022 מועד קיץ א׳ : 50

תשובות סופיות: 55

בגרות 2022 מועד קיץ ב׳ : 56

תשובות סופיות: 61

בגרות 2023 מועד חורף : 62

תשובות סופיות: 67

מיקוד קיץ 2023 לבגרויות משנים קודמות:

שנה	מועד	שאלה	מיקוד	הערות למיקוד
2021	חורף א	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7	סעיף ג ירד	אינטגרל בטריגונומטריה
		8		
2021	חורף נבצרים	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7	סעיף ו ירד	אינטגרל בטריגונומטריה
		8		
2021	חורף ב	1		
		2		
		3		
		4	סעיף ד ירד	
		5		
		6	סעיף ג ירד	אינטגרל בטריגונומטריה
		7		
		8		
2021	קיץ מועד א	1		
		2		
		3		
		4	סעיף ג ירד	
		5		
		6		
		7		
		8		
2021	קיץ מועד שומר חומות	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		

2021	קיץ מועד ב	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2022	חורף	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2022	חורף נבצרים	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2022	קיץ מועד א	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2022	קיץ מועד ב	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		

2023	חורף	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		

שאלון 581

בגרויות משנים קודמות

בגרות 2021 מועד חורף א':

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) שני שליחים, אייל וברק, יצאו בשעה 8:00 זה לקראת זה כדי למסור חבילה.
אייל יצא מעיר A וברק יצא מעיר B.
לאחר שאייל עבר $\frac{1}{6}$ מן הדרך לכיוון עיר B, הוא גילה כי שכח את החבילה בעיר A.
הוא חזר לעיר A, אסף את החבילה, ומייד יצא שוב לכיוון עיר B.
אייל נסע כל הזמן במהירות קבועה.
ברק נסע גם הוא במהירות קבועה, הגבוהה ב-20% ממהירות הנסיעה של אייל.
ברק ואייל נפגשו בנקודה הנמצאת 75 ק"מ מעיר A.

א. מצא את אורך הדרך שבין שתי הערים.

אייל וברק נסעו בכבישים בין-עירוניים, שמהירות הנסיעה המותרת בהם היא מ-50 עד 110 קמ"ש. גם אייל וגם ברק נסעו במהירות מותרת.

ב. (1) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 9:40? נמק.
(2) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה 10:00? נמק.

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q. נתון: $0<a_1$, $0<q<1$.
b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שהמנה שלה היא r.
נתון: $b_1=a_6$. הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n=\frac{a_{n+5}}{b_n}$.

א. הסבר מדוע כל איברי הסדרות a_n, b_n ו-c_n הם חיוביים.
ב. הוכח כי c_n היא סדרה הנדסית, ומצא את c_1.
ג. (1) הסבר מדוע המנה של הסדרה c_n גדולה מ-0 וקטנה מ-1.
(2) נתון: סכום הסדרה c_n הוא $\frac{6}{5}$, $\frac{b_2}{a_8}=18$.
מצא את q ואת r.

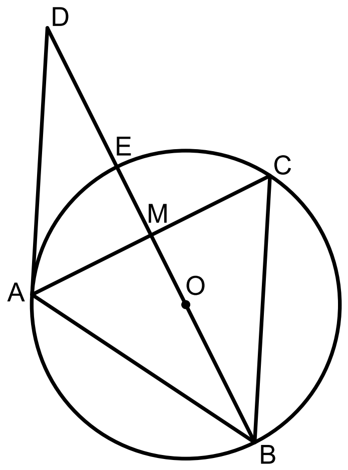
3) ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיה שיער מתולתל היא x.
ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיו עיניים חומות היא $2x$.
ההסתברות שעיניו של ילד שנולד במשפחת לוי יהיו חומות, אם ידוע ששיערו מתולתל קטנה פי 1.5 מן ההסתברות ששיערו לא יהיה מתולתל אם ידוע שעיניו חומות.
יונתן הוא אחד הילדים במשפחת לוי.

א. (1) הראה שההסתברות שעיניו של יונתן הן חומות ושיערו מתולתל היא $\frac{1}{2}x$.
(2) מצא את ההסתברות ששיערו של יונתן הוא מתולתל אם ידוע שעיניו חומות.

ב. (1) הבע באמצעות x את ההסתברות ששיערו של יונתן אינו מתולתל וגם עיניו אינן חומות.
(2) נתון: $x = 0.2$.
במשפחת לוי נולדו ארבעה ילדים בדיוק.
מהי ההסתברות שלפחות לשלושה מארבעת הילדים במשפחת לוי יש שיער מתולתל ועיניים חומות?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) הישר AD משיק למעגל בנקודה A.
הנקודה B נמצאת על המעגל כך שהקטע BD עובר דרך מרכז המעגל, O, וחותך את המעגל בנקודה נוספת, E.
הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש- $AD \parallel BC$.
הישרים BD ו-AC חותכים זה את זה בנקודה M (ראה ציור).



א. הוכח: $AB = AC$.
נתון: AE חוצה את הזווית MAD.
ב. הוכח: $BM \perp AC$.
ג. הוכח כי אורך הקטע AE שווה לרדיוס המעגל.
ד. הוכח כי ABCD הוא מעוין.

5) ABC הוא משולש קהה זווית $(\measuredangle BAC > 90°)$.

נתון: $AB + AC = 4a$ (a הוא פרמטר), $AB : AC = 3:5$,

שטח המשולש ABC הוא $\frac{15\sqrt{3}}{16}a^2$.

א. (1) חשב את גודל הזווית BAC.

(2) חשב את גודלי הזוויות ABC ו-ACB.

במעגל החוסם את המשולש ABC אפשר לחסום מחומש משוכלל ששטחו הוא 100.

ב. חשב את a.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = 6x(x^3 - 1)^3$, המוגדרת לכל x.

ענה על הסעיפים א-ג. אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) בעבור אילו ערכים של k הישר $y = k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה המשוואה: $6x(x^3 - 1)^3 = m$. m הוא פרמטר.

הסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$, וקבע בעבור אילו ערכי m למשוואה הנתונה יש בדיוק שני פתרונות חיוביים שונים, ובעבור אילו ערכי m יש לה פתרון אחד שלילי ופתרון אחד חיובי. נמק את תשובותיך.

ג. היעזר בסרטוט וקבע אם קיים $a > 0$ שבעבורו האינטגרל $\int_0^a f(x)dx$ מקבל ערך מינימלי. אם כן, מהו ערכו של a זה? נמק את תשובתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin^2 x-1$, המוגדרת לכל x .

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{\cos 2x(1-\sin x)}{\sin x-1}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) בעבור אילו ערכים של x : $f(x)=g(x)$? נמק.

(3) האם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות? נמק.

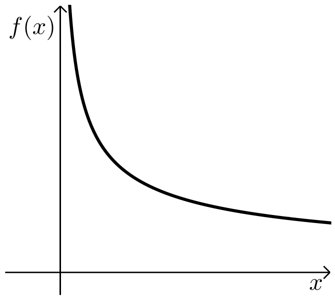
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה: $h(x)=-f(x)+b$ (b הוא פרמטר), שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. נתון: $\int_{-\pi}^{0} h(x)dx=\dfrac{3\pi}{2}$.

מצא את ערכו של הפרמטר b .

8) בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$, שתחום הגדרתה הוא $x>0$.

מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה $f(x)$, הנקודה A היא הקרובה ביותר לראשית הצירים, O.



א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A.

(2) האם הישר AO מאונך לישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A? נמק.

נתונה הפונקציה: $g(x)=-f(-x)$, המוגדרת בתחום $x<0$.

ענה על סעיף ב בעבור התחום $-4 \le x \le -1$.

ב. (1) מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון, מה הם שיעורי הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים?

(2) מצא את שיעורי הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים, מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.

תשובות סופיות:

1) א. 275 קי״מ. ב. (1). לא. ב. (2). כן.

2) א. הוכחה. ב. (1). הוכחה, $c_1=1$. ב. (2). $q=\frac{1}{3}$, $r=2$.

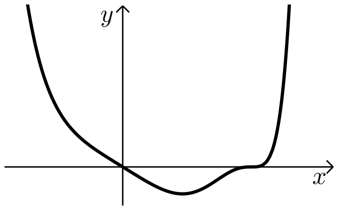
3) א. (1). הוכחה. א. (2). $\frac{1}{4}$. ב. (1). $1-2\frac{1}{2}x$. ב. (2). 0.0037.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

5) א. (1). $\sphericalangle BAC=120°$. א. (2). $\sphericalangle ACB=21.79°, \sphericalangle ABC=38.21°$. ב. $a=3.21$.

6) א. (1). $(0,0)$, $(1,0)$. א. (2). מינימום $(0.464,-2.03)$.

א. (3). להלן סרטוט:



א. (4). $k=0$ או $k=-2.03$.

ב. שתי פתרונות חיוביים: $-2.03<m<0$, פיתרון אחד שלילי ואחד חיובי: $m>0$.

ג. $a=1$.

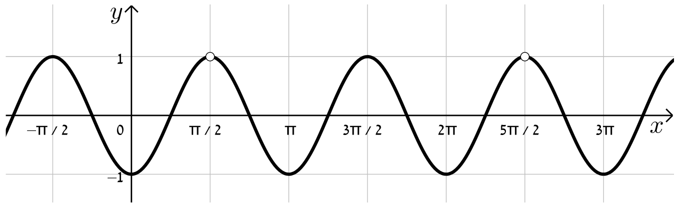
7) א. (1). הוכחה. א. (2). $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$, $\left(\frac{1}{4}\pi,0\right)$, $\left(-\frac{1}{4}\pi,0\right)$, $\left(-\frac{3}{4}\pi,0\right)$, $(0,-1)$.

א. (3). $(\pi,-1)$ מינימום, $\left(\frac{1}{2}\pi,1\right)$ מקסימום, $(0,-1)$ מינימום, $\left(-\frac{1}{2}\pi,1\right)$ מקסימום, $(-\pi,-1)$ מינימום.

ב. (1). $-\pi\le x\le\pi$, $x\ne\frac{1}{2}\pi$.

ב. (2). $-\pi\le x\le\pi$, $x\ne\frac{1}{2}\pi$. ב. (3) לא.

ב. (4) להלן סרטוט:



ג. $b=1\frac{1}{2}$.

8) א. (1). $A\left(2,2\sqrt{2}\right)$. א. (2). כן. ב. (1). $\left(-2,-2\sqrt{2}\right)$. ב. (2). $(-4,-2)$.

בגרות 2021 מועד חורף נבצרים:

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) יואב ואודי רכבו על אופניים מיישוב A ליישוב B, באותה הדרך.
יואב יצא מיישוב A וכעבור 3 שעות הגיע ליישוב B.
זמן מה לאחר יציאתו של יואב מיישוב A, יצא גם אודי מיישוב A והגיע ליישוב B רבע שעה לפני יואב. יואב ואודי נפגשו בדרך ליישוב B כעבור שעה וחצי מרגע יציאתו של אודי מיישוב A. מהירות הרכיבה של יואב ומהירות הרכיבה של אודי היו קבועות.

א. מצא כמה זמן עבר מרגע יציאתו של יואב מיישוב A ועד רגע יציאתו של אודי מיישוב A (מצא את שתי האפשרויות).

ב. נתון: יואב ואודי נפגשו במרחק 12 ק"מ מיישוב B.
מהירות הרכיבה של אודי גדולה מ-20 קמ"ש.
מצא מהי מהירות הרכיבה של יואב ומהי מהירות הרכיבה של אודי.

2) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$.
סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 4.
מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,
ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$.
סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא 2.4-.

א. מצא את האיבר הראשון ואת המנה של הסדרה a_n (הסדרה המקורית).

מן האיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\dfrac{a_2}{a_1^2}, \dfrac{a_3}{a_2^2}, \dfrac{a_4}{a_3^2}, \dots, \dfrac{a_{n+1}}{a_n^2}, \dots$.

נסמן את הסדרה השלישית ב- c_n .

ב. הוכח כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית, מצא את המנה שלה ואת c_1 .

ג. נתון כי הסכום: $c_{k+1}+c_{k+2}+\dots+c_{3k}$ גדול פי 4096 מסכום $2k$ האיברים הראשונים בסדרה c_n . מצא את k .

3) בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות.
נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי מוזיקה גדול פי 1.5 ממספר הלקוחות שאינם צופים בהם. $\frac{2}{3}$ מן הלקוחות שצופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.
40% מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.
בוחרים באקראי לקוח מן הלקוחות של החברה.

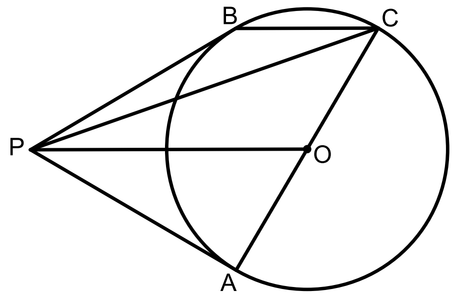
א. מהי ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה גם בערוצי ספורט וגם בערוצי מוזיקה?

ב. נמצא שהלקוח שנבחר צופה בערוצי מוזיקה או בערוצי ספורט.
מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי מוזיקה?

ג. מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, בחרו באקראי 4 לקוחות.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם צופים בערוצי מוזיקה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) הנקודות A ו-B נמצאות על מעגל שמרכזו O.
המשיקים למעגל בנקודות A ו-B נפגשים בנקודה P.
ההמשך של AO חותך את המעגל בנקודה C (ראה סרטוט).



א. הוכח: $PO \parallel BC$.

נסמן: $k = \frac{PO}{BC}$.

ב. הבע באמצעות k את היחס בין שטח המשולש PBC ובין שטח המשולש OPC.

ג. נסמן ב- S את שטח המשולש PAO.
הבע באמצעות S ו- k את שטח המרובע PACB.

5) ABCD הוא טרפז חסום במעגל $(AB \parallel DC)$.

נתון: $AB = a$, $CD = b$ $(a < b)$, $\sphericalangle BCD = 60°$.

א. הבע את האורך של שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו- b.

נתון: $a = 6$, אורך האלכסון BD הוא $6\sqrt{7}$.

ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.
(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.
(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{x^2-16}}$, $a\neq 0$ הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ענה על הסעיפים ב-ד בעבור $a>0$.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ המוגדרת בתחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$. נתון: $a=1$.

ו. (1) מצא את תחום השליליות של הפונקציה $g(x)$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x=5$, הישר $x=6$ וציר ה-x .

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-4$.

ענה על סעיפים א-ה בעבור התחום $-\frac{3\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה-x .

ב. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה: $g(x)=-f(-x)+b$. b הוא פרמטר.
נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה-x . מצא את b .

ו. מצא בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x .

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=1-\frac{2}{x+1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,
ואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- x .

הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הישר $y=\frac{1}{2}x$ בנקודה B.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

נתון: $t<-1$.

מצא את הערך של t שבעבורו האורך של הקטע AB הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $t=\frac{3}{4}$ או $t=\frac{1}{2}$. ב. יואב: 16 קמ"ש, אודי: 24 קמ"ש.

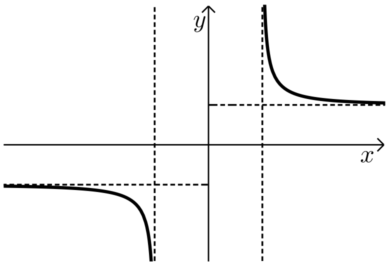
2) א. $a_1=12$, $q=\frac{1}{4}$. ב. $q_c=4$, $c_1=\frac{1}{48}$. ג. $k=6$.

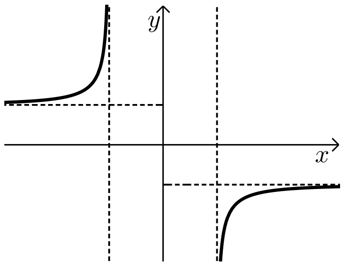
3) א. $p=\frac{1}{2}$. ב. $p=\frac{5}{17}$. ג. 0.5248.

4) א. הוכחה. ב. $\frac{1}{k}$. ג. $\frac{2k+1}{k}S$.

5) א. $b-a$. ב. $b=18$. ג. (1) $R=9.165$, $R=2\sqrt{21}$.
ג. (2) $AB+CD=AD+BC=24$. ג. (3) $r=3\sqrt{3}$.

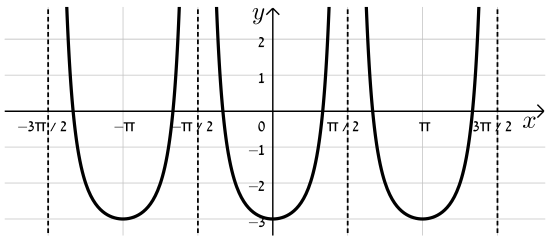
6) א. $x>4$ או $x<-4$ ב. אנכית: $x=4$, $x=-4$. אופקית: $y=a$, $y=-a$.
ג. עלייה: אין. ירידה: $x>4$ או $x<-4$. ד. להלן סרטוט:
ה. להלן סרטוט:

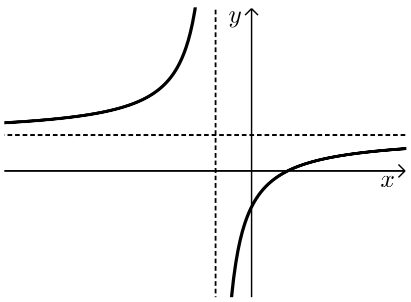




ו. (1) $x>4$. ו. (2) $\frac{22}{45}$.

7) א. (1) $-\frac{3}{2}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}$, $x\neq-\frac{\pi}{2}$.
א. (2) $x=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{-3}{2}\pi$. ב. הוכחה.
ג. $(\pi,-3)$ מינימום, $(0,-3)$ מינימום, $(-\pi,-3)$ מינימום.
ד. להלן סרטוט: ה. $b=-3$. ו. 4.91.





8) א. (1) $x\neq-1$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=1$. א. (3) סרטוט לעיל:
א. (2) עלייה: $-1<x$ או $x<-1$. ירידה: אין. ב. $t=-3$.

בגרות 2021 מועד חורף ב':

ענה על חמש מהשאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, תיבדקנה רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים.
הם רכבו במסלול ישר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B.
לאורך המסלול רכב כל אחד מהם במהירות קבועה.
יואב הגיע לנקודה B, ומייד חזר באותו המסלול לנקודה A.
כאשר היה יואב בדרכו חזרה מ-B ל-A והגיע לאמצע המסלול AB, הגיע דני לנקודה B.

א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.

40 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חזרה מ-B ל-A, נפגשו יואב ודני.

ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.

30 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B, והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב-5 ק"מ מן המרחק של יואב מן הנקודה B.

ג. מצא את אורך המסלול AB.

ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק"מ? מצא שתיים מבין שלוש האפשרויות.

2) הסדרה a_n היא סדרה הנדסית המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $3a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0$.
נתון כי: $a_1 \neq 0$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה a_n.

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ולא מתכנסת** ב- $b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3\ ,...$.
נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ומתכנסת** ב- $c_1\ ,\ c_2\ ,\ c_3\ ,...$.

ב. הסבר מדוע הסדרה $b_1c_1\ ,\ b_2c_2\ ,\ b_3c_3\ ,\ ...$ היא סדרה הנדסית מתכנסת.

נתון: $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\ ,\ ...=15$, $b_1=c_1=m$.

ג. מצא את m (רשום את שתי האפשרויות).

ענה על סעיף ד בעבור ה- m הקטן מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף ג.

ד. נתון: $b_1+b_2+b_3+...+b_k=1705$. מצא את k.

3) בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: **אדום, צהוב, כחול**.
נתון:
ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.
מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.
$\frac{4}{5}$ מן הכדורים האדומים שבכד ו- $\frac{8}{9}$ מן הכדורים הצהובים שבכד **מחוספסים**,
וכל שאר הכדורים שבכד **חלקים**. הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד.
את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם **מחוספסים**?

ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

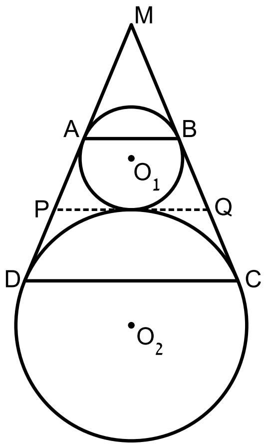
ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).
(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים <u>שונים</u>?
(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים.
מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה בצבע אדום?

ענה על סעיף ג' בעבור כד שבו n כדורים.
נתון: $50 < n < 100$.

ג. מצא את n (את <u>שתי</u> האפשרויות).

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) בציור שלפניך מתוארים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
מרכזי המעגלים הם הנקודות O_1 ו- O_2, והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2
בהתאמה.מן הנקודה M, הנמצאת מחוץ לשני המעגלים, יוצאים
שני ישרים המשיקים למעגל O_1 בנקודות A ו-B, ולמעגל O_2
בנקודות D ו-C, כמתואר בציור.
המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך את
הישרים MD ו-MC בנקודות P ו-Q בהתאמה.



א. הוכח כי המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

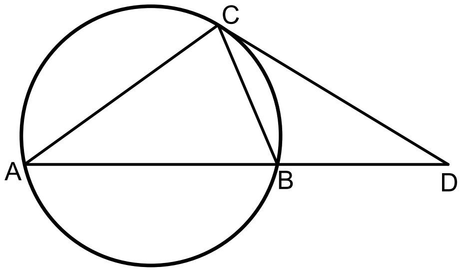
ב. הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז ABCD.

ג. הוכח כי: $\sphericalangle O_1QO_2 = 90°$.

נתון: $R_1 = 4$, $R_2 = 9$.

ד. מצא את PQ.

5) בציור שלפניך מתואר משולש חד-זווית ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R.
המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך הקטע AB בנקודה D.
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא $2R$.
נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$.



א. הבע את BD באמצעות R ו- α.
נתון: $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$.
ב. מצא את α.
נתון: שטח המשולש CBD הוא 27.
ג. מצא את R.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^3(x) \cdot \sin(x)$ בתחום: $0 \le x \le \pi$.
א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
נתונה הפונקציה: $g(x) = a \cdot f(x)$, $a > 0$ הוא פרמטר.
ג. הבע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.
הישר שמצאת בסעיף ג אינו חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה נוספת.
נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר שמצאת בסעיף ג ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$ שווה ל- $\left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right)$.
ד. מצא את a.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$, a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) בעבור אלו ערכים של הפרמטר a אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון? נמק.

(2) במקרים שיש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, הבע באמצעות a את שיעוריה וקבע את סוגה.

ג. סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ לכל אחד מן התחומים i-iii של הפרמטר a שלפניך:

i. $a>0$.

ii. $a<0$.

iii. $a=0$.

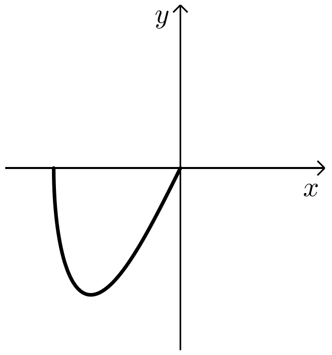
נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x)-b$, b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

ד. (1) מצא את התחום של הפרמטר a . נמק.

(2) הבע את התחום של הפרמטר b באמצעות a . נמק.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{a-x^2}$, $a>0$ הוא פרמטר.



א. (1) הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(3) בסרטוט שלפניך מתואר חלק מגרף הפונקציה $f(x)$.

העתק את הסרטוט למחברת והשלם אותו כך שיתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ כולו.

דרך נקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון מעבירים אנך לציר ה- x .

האנך חותך את ציר ה- x בנקודה B.

ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O, חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, C. דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר ה- x .

האנך חותך את ציר ה- x בנקודה D.

נתון: הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB ו-COD הוא $4\sqrt{2}$.

ב. מצא את a .

תשובות סופיות:

1) א. 1.5. ב. $\frac{5}{6}v$. ג. 10 קמ"ש. ד. 20 דקות, 36 דקות, 44 דקות.

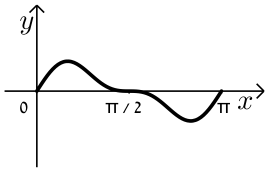
2) א. $q=\frac{1}{3}$, $q=-2$. ב. הוכחה. ג. $m=5$, $m=-5$.
ד. $k=10$.

3) א. $\frac{189}{8,192}$. ב. (1). $\frac{267}{496}$. ב. (2). $\frac{40}{89}$. ג. $n=64$, $n=96$.

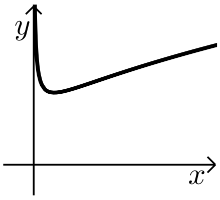
4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. $PQ=12$.

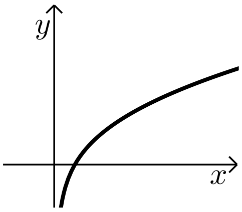
5) א. $2R\sin\alpha\sqrt{5-4\cos\alpha}$. ב. $\alpha=36.34°$. ג. 5.696.

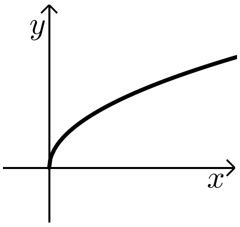
6) א. $(0,0)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ מקסימום, $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{-3\sqrt{3}}{16}\right)$ מינימום, $(\pi,0)$ מקסימום.
ב. להלן סרטוט: ג. $y=ax$. ד. $a=4$.



7) א. $0<x$. ב. (1). $a\le 0$. ב. (2). $(a,2\sqrt{a})$ מינימום.
ג. i. סרטוט: ג. ii. סרטוט: ג. iii. סרטוט:

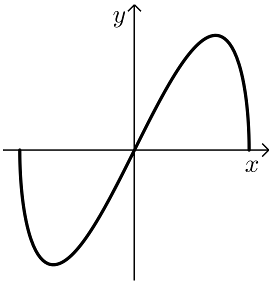






ד. (1). $0<a$. ד. (2). $2\sqrt{a}<b$.

8) א. (1). $-\sqrt{a}\le x\le\sqrt{a}$. א. (2). הוכחה. א. (3). להלן סרטוט:
ב. $a=6$.



בגרות 2021 מועד קיץ א':

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) בבית מלון יש שתי מעליות, מעלית א' ומעלית ב'.
שתי המעליות התחילו לעלות מקומת הקרקע (גובה 0) באותו הזמן.
מעלית א' עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 14 שניות, ולאחר לכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים. מעלית ב' עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 7 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 81 מטרים. מעלית א' הגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים בדיוק באותו זמן שבו הגיעה מעלית ב' לקומה שגובהה 81 מטרים.
לאחר מכן, התחילו שתי המעליות לרדת בדיוק באותו זמן.
מעלית א' ירדה 15 מטרים, ובדרכה עצרה עצירת ביניים, שנמשכה 9 שניות.
בזמן שירדה מעלית א', ירדה מעלית ב' ב-63 מטרים ברציפות, ללא עצירות ביניים.
ידוע כי המהירות של כל אחת מן המעליות בעלייה שווה למהירות של כל אחת מהן בירידה.
כמו כן ידוע כי המעליות נעות במהירויות קבועות.

א. חשב את המהירות של כל אחת משתי המעליות.

מעלית א' הייתה בקומת הקרקע של בית המלון, ואילו מעלית ב' הייתה בקומה הנמצאת מעל קומה שגובהה 42 מטרים. שתי המעליות התחילו לנוע באותו זמן לכיוון הקומה שגובהה 42 מטרים.
מעלית א' עלתה לקומה זו מקומת הקרקע ללא עצירות ביניים.
מעלית ב' ירדה לקומה זו מן הקומה שבה היא הייתה ובדרכה עצרה עצירת ביניים אחת, שנמשכה 6 שניות. שתי המעליות הגיעו לקומה שגובהה 42 מטרים בדיוק באותו זמן.

ב. האם מעלית ב' הייתה בקומה העליונה של בית המלון כאשר היא התחילה לרדת? נמק את תשובתך.

2) נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי,
הוא: $S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$. $p>0$, $k>0$ הם פרמטרים.

א. (1) הבע את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות p , k ו- n , בעבור $n \geq 2$.
(2) הנוסחה שמצאת בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי, הסבר מדוע.
(3) הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית והבע את d , ההפרש של הסדרה, באמצעות k .

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו- c_n . מנת הסדרה b_n שווה ל- d (הפרש הסדרה החשבונית a_n). הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{2}{d}$.

נתון: $a_1 = b_1 = c_1$, $k = 1.5$, $p = 4.5$.

ב. הסבר מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל איברי הסדרה האינסופית c_n הוא $40\frac{1}{3}$.

ג. חשב את m .

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמק את תשובתך.

3) בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים.
בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.
המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.
נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.

כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

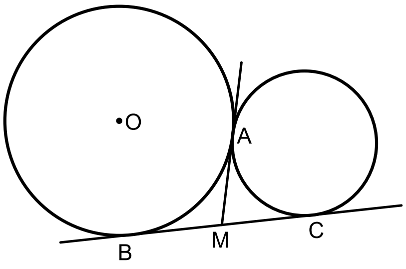
ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה.
מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.
מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראה סרטוט).
הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.
מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.
B ו-C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.
שני המשיקים נחתכים בנקודה M.



א. הוכח כי הזווית $\measuredangle BAC$ ישרה.

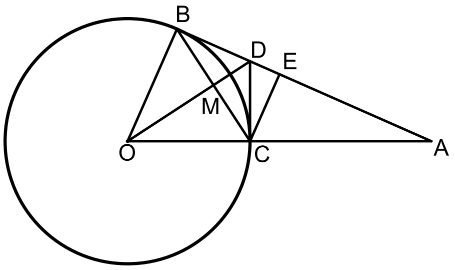
ב. הוכח כי: $4\cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$.

נתון: $AC = 6$, $AB = 8$.

ג. חשב את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O.

ד. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta AMC}}$.

5) DB ו-DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט.
רדיוס המעגל: R.
המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A.
הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.
הקטע CE מאונך ל-AB.
נסמן: $\measuredangle ABC = \alpha$.



א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:
(1) את המרובע OBDC.
(2) את המרובע MDEC.

נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע OBDC.
d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע MDEC.
d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הבע באמצעות α ו-R את d_1, את d_2 ואת d_3.

ג. מצא את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונות הפונקציות: $g(x)=\frac{x}{(x^2-2)^3}$, $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$.

א. ענה על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

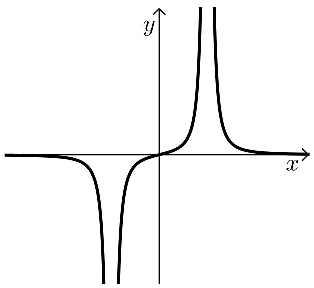
(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$.
קבע איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.



נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת: $h'(x)=f(x)$.

$f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את:

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. נמק את תשובתך.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים: $x=-1$, $x=1$.

נתונה הפונקציה: $k(x)=f(x)+b$, $b\neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?
נמק את תשובתך.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$, $a>0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטא את תשובותיך באמצעות a לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. (1) הוסף לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.

(2) מהו הערך של a ? נמק את תשובתך.

8) במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a .

נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$ (α ברדיאנים).

נסמן: $\sphericalangle ABC=x$ ($0<x<\pi-\alpha$).

א. הבע באמצעות x, a ו- α את היקף המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות α את ערך ה- x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבר מדוע מתקיים המשפט הזה:
מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

תשובות סופיות:

1) א. מעלית א': 3 מטרים בשניה, מעלית ב': 4.5 מטרים בשניה. ב. לא.

2) א. (1). $a_n = 2kn - k - p$. (2). הוכחה. (3). $d = 2k$.

ב. הסבר $\left(q = \frac{2}{3}\right)$. ג. $m = 5$. ד. עולה.

3) א. 0.38. ב. 0.33696. ג. $\frac{351}{1,031} = 0.340446$.

ד. 0.4.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$. ד. $\frac{25}{18}$.

5) א. (1). הוכחה. (2). הוכחה.

ב. $d_1 = \frac{R}{\cos\alpha}$, $d_2 = R\tan\alpha$, $d_3 = \frac{R}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$. ג. $\alpha = 30°$.

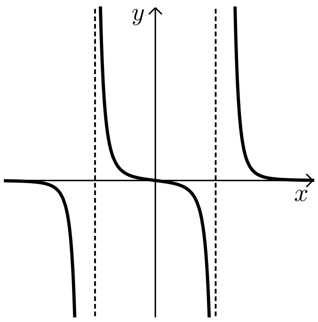
6) א. (1). $f(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$, $g(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$.

(2). $f(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$, $g(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$.

(3). $f(x)$: הוכחה, $g(x)$: הוכחה.

(4). $f(x)$: הוכחה, $g(x)$: הוכחה.

ב. (1). $f(x)$. (2). להלן סרטוט:



ג. עליה: $\sqrt{2} < x$ או $0 < x < \sqrt{2}$, ירידה: $-\sqrt{2} < x < 0$ או $x < -\sqrt{2}$,

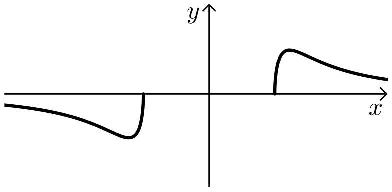
ד. (1). 0. (2). $\frac{1}{2}$. ה. לא זוגית ולא אי זוגית.

7) א. $\sqrt{\frac{4a}{3}} \leq x$ או $x \leq -\sqrt{\frac{4a}{3}}$. ב. הוכחה. ג. (1). $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$.

(2). $\left(\sqrt{2a},\frac{1}{2a}\right)$ מקסימום, $\left(-\sqrt{2a},-\frac{1}{2a}\right)$ מינימום, $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$ מינימום,

$\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$ מקסימום.

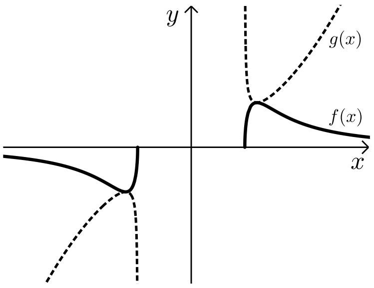
ד. סרטוט:



ה. (1). $x<-\sqrt{\frac{4a}{3}}$ או $\sqrt{\frac{4a}{3}}<x$.

(2). $x=\sqrt{\frac{4a}{3}}$, $x=-\sqrt{\frac{4a}{3}}$.

ו. (1). סרטוט:



(2). $a=\frac{1}{2}$.

8) א. $a+\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin x+\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin(\alpha+x)$.   ב. $\frac{\pi-\alpha}{2}$.   ג. הוכחה.

בגרות 2021 מועד קיץ שומר חומות:

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) ביום ראשון יצא אודי ברכיבה על אופניים ממטולה לכיוון טבריה.
באותה שעה בדיוק יצאה רעות ברכיבה על אופניים מטבריה לכיוון מטולה, ורכבה באותה הדרך. כל אחד מן הרוכבים רכב במהירות קבועה.
כעבור 2 שעות נפגשו שני רוכבי האופניים.
הזמן שנדרש לאודי כדי לעבור את הדרך ממטולה לטבריה גדול ב-54 דקות מן הזמן שנדרש לרעות לעבור דרך זו.

א. מצא את היחס בין מהירות הרכיבה של רעות ובין מהירות הרכיבה של אודי.

ב. מצא כמה זמן נדרש לכל אחד מן הרוכבים כדי לעבור את כל הדרך שבין מטולה ובין טבריה.

ביום שני יצאו 2 רוכבי האופניים יחד מטבריה לכיוון מטולה באותו הזמן.
הם רכבו באותה הדרך ובאותן המהירויות כמו ביום ראשון. רעות הגיעה למטולה ומייד הסתובבה וחזרה לכיוון טבריה.
היא נפגשה עם אודי לאחר שעברה מרחק של 7 ק״מ ממטולה.

ג. מצא את אורך הדרך בין מטולה ובין טבריה.

ד. מצא את המהירות שבה רכב כל אחד משני הרוכבים.

2) נתונה סדרה חשבונית ובה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
איברי הסדרה הם: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_{2n+1}$ והפרש הסדרה הוא d.

א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שווה לאיבר האמצעי בסדרה.

נסמן ב- T את ההפרש בין סכום האיברים ב- n המקומות האחרונים ובין סכום האיברים ב- n המקומות הראשונים.

ב. הבע את T באמצעות d ו- n.

נתון:
- סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים ב- $2n$ המקומות האחרונים.
- סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204.
- $T = 3,468$.

ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

3) בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים.
ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.

א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.

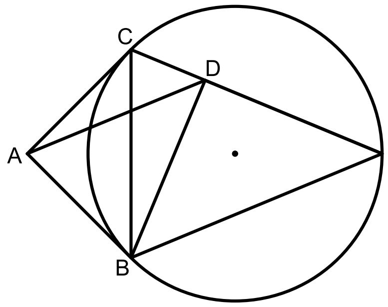
בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים.
לשאר הפרחים יש עלים קטנים.
ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455.

ב. (1) חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.
(2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.

ג. כינרת הכינה זר מ-7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה.
חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) מנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגל בנקודות B ו-C (ראה סרטוט).



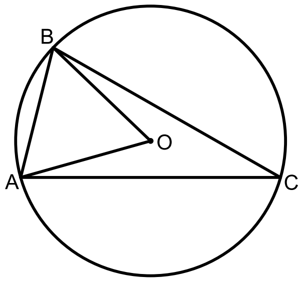
נתון כי: $\sphericalangle CAB = 90°$.
BE ו-CE הם מיתרים במעגל.
המעגל החוסם את המשולש ABC
חותך את המיתר CE בנקודה D.

א. הוכח כי: BD = DE.

ב. הוכח כי: $\Delta ADB \sim \Delta CEB$.

ג. הוכח כי: $S_{\Delta CEB} = 2S_{\Delta ADB}$.

5) משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.



נתון כי: $\sphericalangle BAC = 80°$.
נסמן את הזווית AOB ב- α ואת הצלע AB ב- k.

א. הוכח כי: $\cos\alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

נתון כי: $k = \frac{3}{4}R$.

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC.

נסמן ב- r את רדיוס המעגל החסום במשולש AOB.

ג. חשב את היחס $\frac{R}{r}$.
בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי הנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $f(k)=1$, $t<k$, t הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$\int_t^k (f(x))^2 dx$ או $\int_t^k f(x)dx$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים: $x=-8$ ו-$x=-1$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos(mx)+\cos(2x)$ המוגדרת לכל x .

m הוא פרמטר השונה מאפס.

נתון כי בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{4}$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 2-.

א. הוכח כי m הוא מספר שלם שמתחלק ב-4 ללא שארית.

הצב $m=4$ וענה על סעיפים ב'-ד' שלפניך.

ענה על סעיף ב' בתחום: $0\le x\le\pi$.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

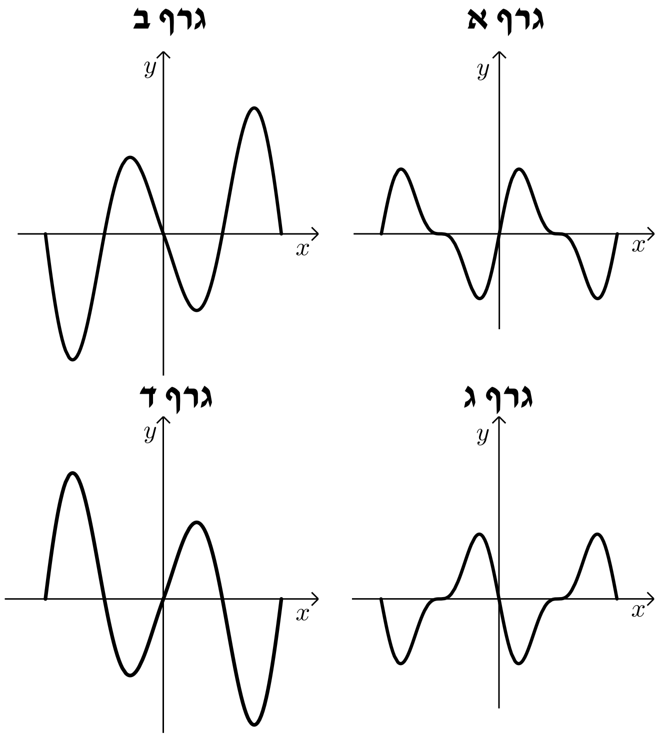
ענה על סעיפים ג'-ד' בתחום: $-\pi\le x\le\pi$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. הסבר של שיקוליך.

נתונה פונקציה $k(x)$ המקיימת: $k'(x)=f(x)$, $k(0)=0$.

ד. אחד מן הגרפים א'-ד' שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$.

היעזר בתשובתך על סעיף ג' וקבע איזה מן הגרפים שלפניך מתאים לגרף הפונקציה $k(x)$. נמק את קביעתך.



8) נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$, $g(x)=\frac{x-3}{x-1}$.

ענה על סעיף א' בעבור <u>כל אחת</u> משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

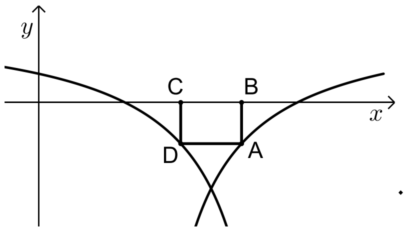
א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$, ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה- x .

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה- x , והצלע הנגדית, AD, מחברת בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין נקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.



ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t .

ג. (1) הבע באמצעות t את אורך הצלע AB.

(2) הוכח ששיעור ה- x של הנקודה D הוא $4-t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן ABCD.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן ABCD הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{5}{4}$. ב. רעות: 3.6 שעות, אודי: 4.5 שעות. ג. 63 ק"מ.
ד. רעות: 17.5 קמ"ש, אודי: 14 קמ"ש.

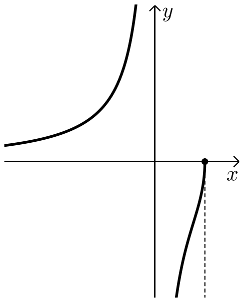
2) א. הוכחה. ב. $T=n(n+1)d$. ג. 67.

3) א. 40%. ב. (1). 35%. (2). $\frac{8}{13}$. ג. 0.9748.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

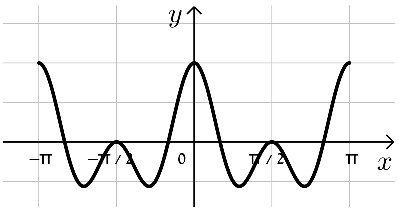
5) א. הוכחה. ב. $0.72R^2$. ג. 3.96.

6) א. (1). $x\le\frac{1}{2}$, $x\ne0$. (2). $\left(\frac{1}{2},0\right)$. (3). $x=0$, $y=0$.
(4). עליה: $0<x<\frac{1}{2}$ או $x<0$, ירידה: אין. ב. סרטוט:



ג. $\int_t^k f(x)dx$ גדול יותר. ד. $\frac{35}{72}$.

7) א. הוכחה. ב. (1). עם x : $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$, עם y : $(0,2)$.
(2). $(0,2)$ מקסימום, $(0.29\pi,-1.12)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ מקסימום, $(0.71\pi,-1.12)$
מינימום, $(\pi,2)$ מקסימום. ג. סרטוט:



ד. גרף א'.

8) א. (1). $f(x):x\ne3$, $g(x):x\ne1$. (2). $f(x):(1,0)$, $\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $g(x):(3,0)$, $(0,3)$.
ב. $2<t<3$. ג. (1). $\frac{3-t}{t-1}$. (2). הוכחה. (3). $\frac{(2t-4)(3-t)}{t-1}$.
ד. $t=2.41$.

בגרות 2021 מועד קיץ ב':

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 25 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) נטע, דניאלה ורוני מתאמנות בהליכה ובריצה במסלול AB שאורכו 40 ק"מ.
בשעה 8:00 יצאה נטע מנקודה A והלכה במהירות של 4 קמ"ש לכיוון נקודה B.
בשעה 9:36 יצאה דניאלה מנקודה B ורצה לכיוון נקודה A. שעתיים לאחר צאתה של נטע, יצאה רוני מנקודה B ורצה במהירות של 12 קמ"ש לכיוון נקודה A. נטע ורוני נפגשו ולאחר מכן המשיכו בדרכן. שעה ו-36 דקות אחרי שנטע ורוני נפגשו, הגיעה דניאלה לנקודה A. המהירות של כל אחת מן המתאמנות היא קבועה באימון כולו.

א. באיזו שעה נפגשו נטע ורוני?

ב. מהי מהירות הריצה של דניאלה? נמק את תשובתך.

ג. האם שלוש המתאמנות נפגשו בנקודה אחת לאורך המסלול? נמק את תשובתך.

כל מתאמנת שמגיעה לקצה המסלול מייד מסתובבת וחוזרת לנקודה שממנה היא יצאה.

ד. באיזה מרחק מן הנקודה B נפגשו נטע ורוני בפעם השנייה? נמק את תשובתך.

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית a_n שאיבריה: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$ והמנה שלה q.

א. הבע באמצעות a_1 ו-q את ערכי הסכומים שלפניך.

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40}$.

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי: $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצא את ערכו של q.

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין-סופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3a_{n+1}$.

ג. מצא את המנה של הסדרה b_n.

בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה: $-\frac{1}{b_1} , \frac{1}{b_2} , -\frac{1}{b_3} , \frac{1}{b_4} , \dots$.

ד. הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1.

נתונה הסדרה: $b_1 , a_1 , \frac{1}{a_1}$.

ה. (1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

3) בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר. 28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

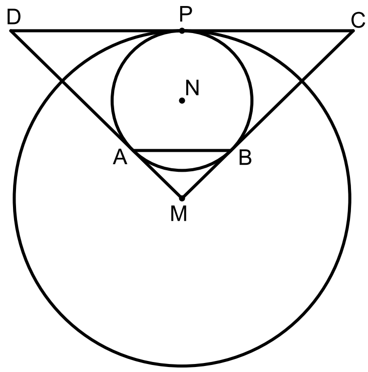
ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42.

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות <u>לא</u> יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים : עומר, גל וליאור.
ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.
(1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.
(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).
מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו-N,
והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.
מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.
מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו-B.
ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים בנקודות C ו-D כמתואר בסרטוט.



א. הוכח כי $AB \perp MN$.

ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.

ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון : $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

ד. (1) מצא את R_1 ואת R_2.
(2) מצא את DC.

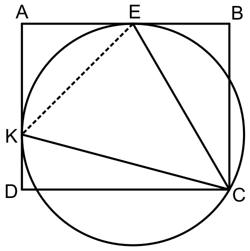
5) המרובע ABCD הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו-AD, משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו-K בהתאמה (ראה סרטוט). הנקודה C נמצאת על המעגל.

א. הוכח: $\sphericalangle KCE = 45°$.

נתון: $\sphericalangle KCD = \alpha$, $0° < \alpha < 45°$.

ב. (1) הבע באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הבע באמצעות R ו- α את האורכים של צלעות המשולש KCE.



ג. הבע באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשב את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות a אם יש צורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $(f(x))^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $(f(x))^2$ וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הצב $a = 2$.

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x=3$ ו-$x=4$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}+3$.

ענה על הסעיפים שלפניך בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

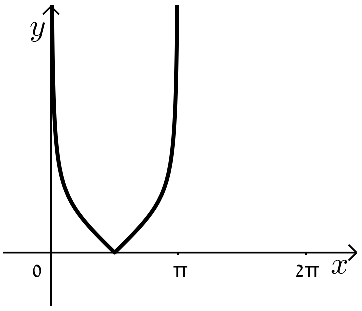
(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

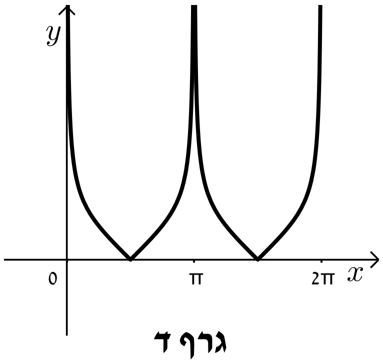
נתונות שתי פונקציות: $k(x)=f(x)-3$, $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$.

ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$. קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות ונמק את קביעותיך.

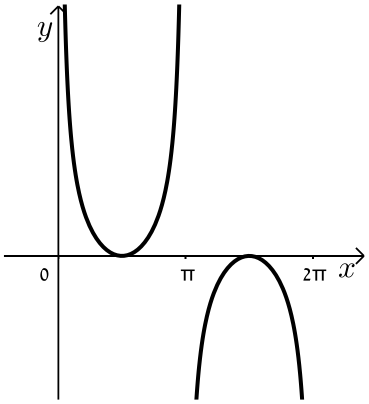
גרף א



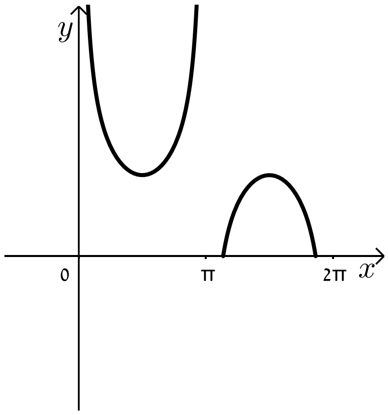
גרף ב



גרף ג

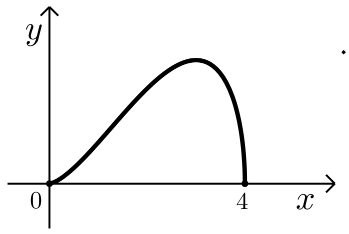


גרף ד



8) בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax^4+bx^3}$.

נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $0\le x\le 4$.



א. (1) הוכח כי $b=-4a$.

(2) לפניך שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה.
קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I. $a>0$, $b<0$.

II. $a<0$, $b>0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ המוגדרת גם היא בתחום: $0\le x\le 4$.

מהנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה- x.

M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x, ו-O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי?
נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה- x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO.

ד. אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $\left(f(x)\right)^2$ <u>אינה</u> יורדת, מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

1) א. $12:00$. ב. 10 קמ״ש. ג. כן. ד. 8 קי״מ.

2) א. (1) $\frac{a_1q\left(q^{40}-1\right)}{q^2-1}$. (2) $\frac{a_1q^3\left(q^{40}-1\right)}{q^4-1}$. ב. $q=3$. ג. $q=3$.

ד. $-\frac{1}{12a_1}$. ה. (1) לא. (2) כן.

3) א. 0.07. ב. 0.3. ג. (1) 0.027. (2) 0.009.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

ד. (1) $R_2=6$, $R_1=14$. (2) $DC=12\sqrt{7}$.

5) א. הוכחה. ב. (1) $\sphericalangle KCE=45^\circ$, $\sphericalangle CEK=90^\circ-\alpha$, $\sphericalangle CKE=45^\circ+\alpha$.

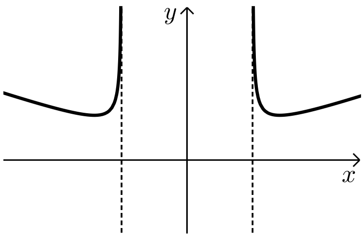
(2) $KE=\sqrt{2}R$, $CK=2R\cos\alpha$, $CE=2R\sin\left(45^\circ+\alpha\right)$.

ג. $\frac{EB}{AE}=2\sin\left(45^\circ+\alpha\right)\cdot\sin\left(45^\circ-\alpha\right)=\sin\left(90^\circ+2\alpha\right)=\cos 2\alpha$.

ד. 22.5°.

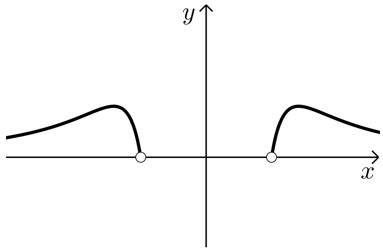
6) א. $a<x$ או $x<-a$. ב. הוכחה. ג. (1) אין. (2) $x=-a$, $x=a$.

(3) $\left(\sqrt{2}a,2a\right)$ מינימום, $\left(-\sqrt{2}a,2a\right)$ מינימום. (4) סרטוט:



ד. $\left(\sqrt{2}a,4a^2\right)$, $\left(-\sqrt{2}a,4a^2\right)$.

ה. סרטוט:



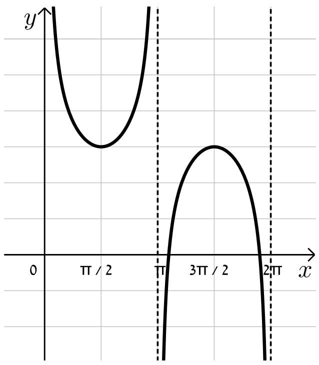
ו. $\frac{71}{1,296}$.

7) א. (1) $x\neq 0$, $0<x<2\pi$. (2) $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$.

(3) עליה: $\pi<x<1.5\pi$ או $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, יורדת: $1.5\pi<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

(4) $\left(\frac{3\pi}{2},3\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ מינימום.

ב. ראה סרטוט בצד:



ג. $k(x)$: גרף ג׳, $g(x)$: גרף א׳.

8) א. (1) הוכחה. (2) II. ב. $x=3.2$. ג. $-41.94a$.

ד. $x=3$.

בגרות 2022 מועד חורף:

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) שלושה שחיינים – איתן, גל ויעקב – מתאמנים בשחייה בבריכה שאורכה 50 מטרים.
כל שחיין מתחיל את שחייתו בתחילת הבריכה, שוחה עד סוף הבריכה, ומייד מסתובב חזרה לתחילת הבריכה. מהירות השחייה של כל אחד מן השחיינים היא קבועה.
ביום א' התחיל כל אחד משלושת השחיינים את שחייתו בזמן אחר.
גל התחיל לשחות 10 שניות אחרי איתן. יעקב התחיל לשחות 15 שניות אחרי איתן.
15 שניות אחרי שהתחיל יעקב לשחות, עברו כל השחיינים את אותו המרחק מתחילת הבריכה, אך עדיין לא הגיעו לסוף הבריכה.
מייד לאחר שהגיע גל לסוף הבריכה, הוא הסתובב והתחיל לשחות חזרה לתחילת הבריכה. בדרכו חזרה, הוא פגש את איתן במרחק של 4 מטרים מסוף הבריכה.

א. חשב את המהירות של כל אחד משלושת השחיינים.

ב. במרחק של כמה מטרים מסוף הבריכה נפגשו איתן ויעקב בפעם השנייה?

ביום ב' התחילו גל ויעקב את שחייתם באותו זמן בתחילת הבריכה, וכל אחד מהם שחה באותה מהירות שבה שחה ביום א'. כשהגיע כל אחד משני השחיינים לסוף הבריכה, הוא הסתובב מייד ושחה לכיוון תחילת הבריכה, וכשהגיע לשם, הסתובב שוב ושחה לכיוון סוף הבריכה, וחוזר חלילה.
שני השחיינים הפסיקו לשחות ברגע שהם נפגשו בתחילת הבריכה.

ג. כמה מטרים שחה יעקב ביום זה?

2) נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots$ והפרשה d.
מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי.
מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם: $b_1 , b_2 , b_3 , \dots$.
איברי הסדרה B מקיימים: $b_n = S_{n+1} - S_n$ לכל n טבעי.

א. (1) האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.

(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמק.

מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1+b_2)(b_1-b_2)+(b_3+b_4)(b_3-b_4)+\dots+(b_{n-1}+b_n)(b_{n-1}-b_n)}{-d} .$$

נתון: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$

$T_5 = -20$.

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי ושלם? נמק.

3) בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה.
ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה. אם הסוכריה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

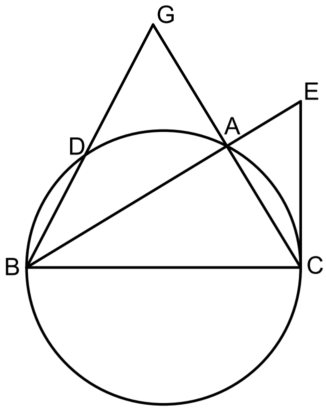
(1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכריה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.
ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.
חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4) משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט).
הצלע BC היא קוטר במעגל.
AG הוא המשך הצלע CA.
הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.
נתון: $GA = AC$.

א. הוכח כי הישר AB חוצה את $\sphericalangle GBC$.

ב. הוכח כי $\Delta GBC \sim \Delta GAD$.

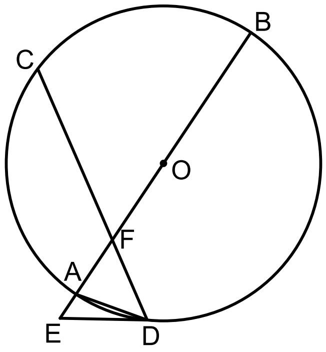
נתון כי: $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

5) AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O.
המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.
המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך
הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט).
נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.



א. הראה כי: $\sphericalangle BAD = 90° - \alpha$.
נתון כי: ED = FD.
ב. הבע באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.
ג. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש AFD.
ד. (1) הבע באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.
(2) נתון כי: $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1+\sqrt{3}$. מצא את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.
א. הבע את תשובותיך באמצעות m אם יש צורך.
(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$.
ב. מצא את הערך של m.
הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת וענה על הסעיפים ג-ה.
ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ה. נתונה הפונקציה: $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.
(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.
(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x.
נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין לאנך). מצא את הערך של k.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x+2\cdot\sqrt{x^2-2x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחום ההגדרה של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקצית הנגזרת $f'(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x . בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

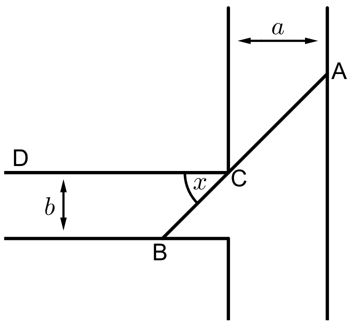
(5) סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקצית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y=4x+c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

8) תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b . הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט).



מהנדסת מתכננת סכר ישר, שיצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית, יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית.

הסכר ייצור זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.

א. הבע באמצעות a , b ו- x את אורך הסכר AB.

נתון כי: $a=2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את b .

תשובות סופיות:

1) א. איתן: 1 מטר לשנייה, גל: 1.5 מטר לשנייה, יעקב: 2 מטר לשנייה.

ב. $6\frac{2}{3}$ מטרים. ג. 400 מטרים.

2) א. (1). כן. (2). לא. ב. הוכחה. ג. $b_1=-5$, $d=\frac{1}{2}$.

ד. 14 איברים.

3) א. (1). 0.366. (2). 0.32787. ב. $1-\left(\frac{2}{5}\right)^n$. ג. 0.0128.

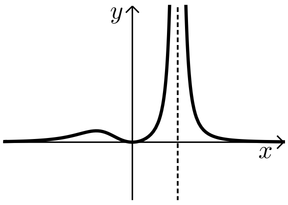
4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $AC=\frac{1}{2}R$. ד. $\frac{16}{15}$.

5) א. הוכחה. ב. 3α. ג. $\frac{R^2\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$.

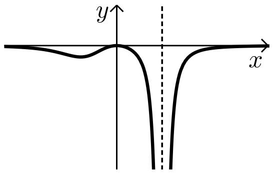
ד. (1). $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$. (2). $15°$.

6) א. (1). $x\neq\sqrt[3]{m}$. (2). $x=\sqrt[3]{m}$, $y=0$. ב. $m=2$.

ג. $\min(0,0)$, $\max\left(-1,\frac{1}{9}\right)$. ד.



ה. (1).

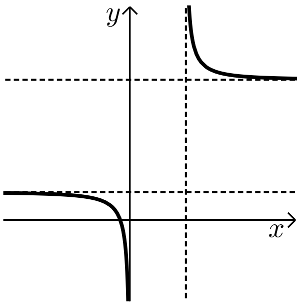


(2). $k=-18$.

7) א. (1). $x\geq 2$ או $x\leq 0$. (2). $x>2$ או $x<0$.

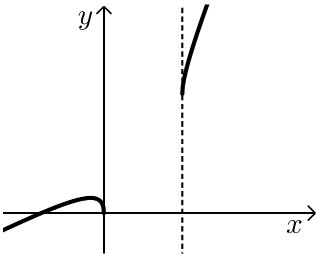
(3). $x=2$, $x=0$, $y=5$, $y=1$. (4). $(-0.342.0)$.

(5).



ב. (1). $\max(-0.342,0.764)$, $\min(2,6)$, $\min(0,0)$.

(2).



ג. לא.

8) א. $AB=\frac{a}{\cos x}+\frac{b}{\sin x}$. ב. $x=38.44°$. ג. $b=1.922$

בגרות 2022 מועד חורף נבצרים:

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) בין הבית של תמר ויואב לבין ביתו של דן יש שביל אופניים. לאורך שביל האופניים, בין שני הבתים, נמצא חדר כושר. המרחק בין חדר הכושר ובין הבית של תמר ויואב הוא 24 ק"מ. תמר יצאה מן הבית בשעה 6:00 ורכבה על אופניים במהירות קבועה לעבר ביתו של דן. בשעה 7:00 יצא יואב גם הוא מן הבית ורכב על אופניו לעבר ביתו של דן במהירות שגבוהה ב-5 קמ"ש ממהירות הרכיבה של תמר. בשעה 7:30 יצא דן מחדר הכושר ורכב על אופניו במהירות קבועה לעבר ביתו. תמר, יואב ודן רכבו שלושתם על אותו שביל אופניים. תמר השיגה את דן וחלפה על פניו בשעה 8:00. יואב ודן הגיעו שניהם לביתו של דן בשעה 9:15.

א. מצא את המהירות של כל אחד משלושת הרוכבים.

ב. מה היה המרחק בין יואב ובין דן כאשר תמר הגיעה לביתו של דן?

2) נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ ומנתה היא q.

כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה: $\frac{1}{a_1} , \frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , ...$ היא סדרה הנדסית? הוכח את תשובתך.

ב. (1) מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

הוכח כי לכל n מתקיים: $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}$.

(2) נתון: $q = 3$, $a_1 = 1$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן

הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}$.

מצא את n.

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$.

נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B.

נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - ... + \frac{1}{a_m}$.

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

3) כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.
כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.
הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא.
נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.
ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. (1) מצא את n.
(2) מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

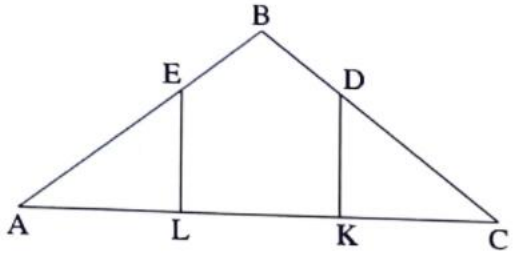
ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמק את תשובתך.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) בציור שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$.
מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K.
מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L.



נתון: $AL = LK = KC$.

א. חשב את: $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו-EK נפגשים בנקודה G.

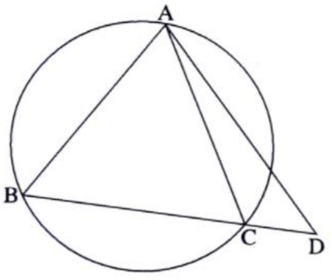
ב. הוכח כי המרובע BDGE הוא דלתון.

נתון: $AC = 45$.
היקף המרובע EDKL הוא 54.

ג. חשב את אורך הקטע BG.

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע BDFE הוא בר-חסימה במעגל? נמק את תשובתך.

5) בציור שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R.
האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D לנקודה A.
נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$.



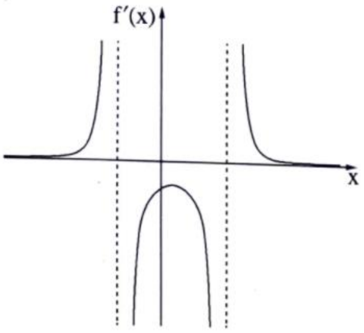
א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD.

ב. הבע את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α .
נסמן ב-m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC.

ג. (1) האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמק את תשובתך.
(2) נתון כי $m = 0.6$. מצא את גודלי זוויות המשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $c < x$, $b < x < c$, $x < b$
וגזירה בכל תחום הגדרתה. בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $y = 0$, $x = b$, $x = c$.
שיעור ה-x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a. a, b ו-c הם פרמטרים.

א. הבע את תשובותיך באמצעות a, b ו-c, אם יש צורך.
(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a,0)$.

ב. סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי: $f(x) = \dfrac{18-36x}{(x^2-x-6)^2}$.

ג. מצא את a, b ו-c.

ד. (1) הראה כי בתחום $b<x<c$ מתקיים: $f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^2 \le 0$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה: $f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^2$,
על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x=0$ ו-$x=2a$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan(x)+\frac{1}{x}$.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור התחום: $0\le x\le \frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה-x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(2.798,0)$ בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x\ne 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית?
הוכח את תשובתך.

ד. (1) הראה כי בתחום: $0\le x\le \frac{3\pi}{2}$ שיעור ה-x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x, וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $-\frac{3\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2}$.

8) חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.
מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.
נסמן ב-x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x.

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

תשובות סופיות:

1) א. תמר – 15 קמ"ש, יואב – 20 קמ"ש, דן – 12 קמ"ש. ב. 2 קי"מ.

2) א. כן. ב. (1). הוכחה. (2). $n=9$ ג. הנוסחה נכונה.

3) א. (1). $n=70$ (2). $\frac{6}{391}$ ב. $\frac{25}{84}$

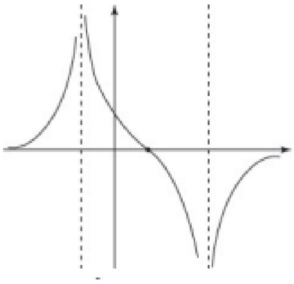
ג. ההסתברות אינה גדולה פי 2.

4) א. $\frac{1}{2}$ ב. הוכחה. ג. 12 ד. כן.

5) א. הוכחה. ב. $R^2\cos^2\alpha\tan 2\alpha$ ג.(1). לא יתכן. (2). $73.22°\ ,\ 33.56°$

6) א. (1). עליה: $x>c$ או $x<b$, ירידה: $b<x<c$.

(2). $\cup$: $x<b$ או $b<x<a$, $\cap$: $a<x<c$ או $c<x$. ב. להלן סרטוט:



ג. $c=3\ ,\ b=-2\ ,\ a=\frac{1}{2}$ ד. (1). הוכחה.

(2). $\frac{1}{12}$

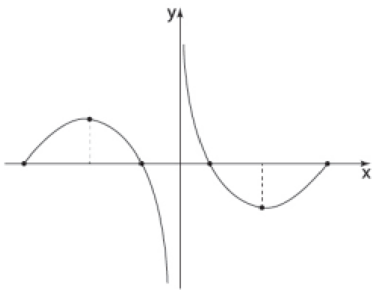
7) א. (1). $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$ (2). $x=\frac{3\pi}{2}\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=0$

ב. תחומי החיוביות של $f(x)$: $2.798<x<\frac{3\pi}{2}$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$,

תחומי השליליות של $f(x)$: $\frac{\pi}{2}<x<2.798$.

ג. $g(x)$ הינה פונקציה אי-זוגית. ד. (1). הוכחה. סוג הקיצור: מינימום.

(2). להלן סרטוט:



8) א. $0<x<\frac{k}{3}$ ב. $0.21k$ ג. הוכחה.

בגרות 2022 מועד קיץ א':

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) מכונית יצאה מבאר שבע לחיפה במהירות קבועה v_1.

באותו הזמן בדיוק יצאה משאית מחיפה לבאר שבע במהירות קבועה v_2.

המרחק בין חיפה לבאר שבע הוא 210 ק"מ.

המשאית נעצרה בצד הדרך עקב תקלה, לפני שחלפה המכונית על פניה.

באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 98 ק"מ.

א. הביעו באמצעות v_1 ו- v_2 את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסיעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרך.

זמן שהיית המשאית בצד הדרך היה גדול פי 1.5 מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מחיפה עד לרגע עצירתה. המשאית יצאה שוב לדרך באותה המהירות, v_2, בדיוק ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.

ב. מצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.

140 דקות לאחר שיצאה המשאית שוב לדרך, היא הגיעה לבאר שבע.

ג. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

2) סדרה I היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ומנתה היא: $9\cdot r^2$.

נתון: $0<r<\frac{1}{3}$. בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ומנתה היא q.

א. (1) הביעו את q באמצעות r.

(2) הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 15.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 $(b_5, b_{10}, b_{15}, \ldots)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

3) נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד.
ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.
נסמן ב- p את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק $(p>0)$.
בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.
נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא $4.5p$.

א. מצאו את הערך של p.

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

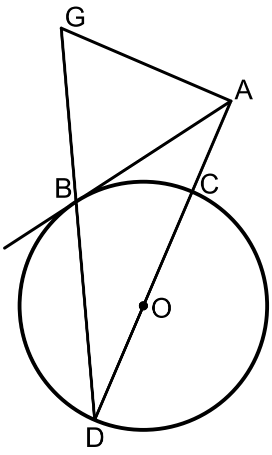
ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב-3 משחקים לפחות.

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.
(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות.
מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.
מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:
הישר AB משיק למעגל בנקודה B,
הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו-D,
והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).
הנקודות: D, B ו-G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.
נסמן: $\sphericalangle ADB=\alpha$.



א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α.

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{BC}$.

נתון: $AC=\frac{1}{2}DC$, $AG=7$.

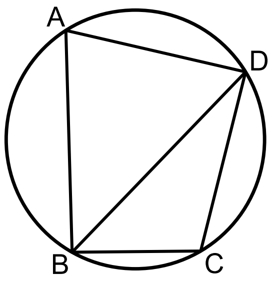
ג. חשבו את R.

נסמן ב-S את שטח המשולש BDC.

ד. (1) הוכיחו: $\Delta ADG\sim\Delta BDC$.
(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

5) מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).

נסמן: $\sphericalangle DAB=\alpha$, α היא זווית חדה.



א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו-R.

נתון: $BC=R$, $CD=R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α .

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב- h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב- h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x+\frac{3}{x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

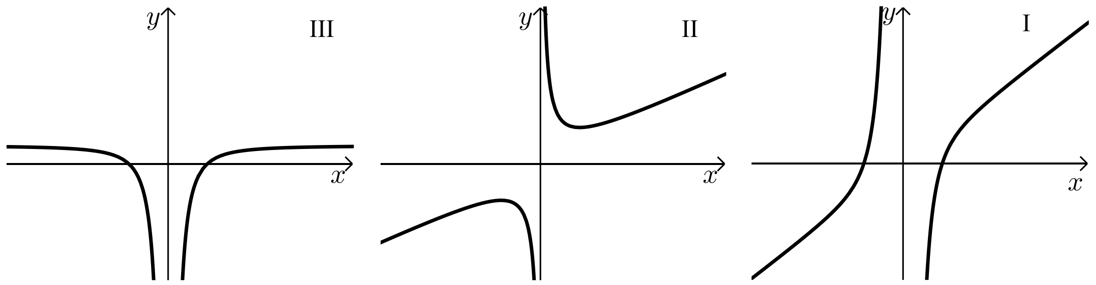
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו-$g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I-III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$.

לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-x.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x

ועל ידי הישרים: $x=\frac{1}{2}$ ו-$x=2$.

ה. נתון: $1<a$ הוא פרמטר. חשבו את: $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)dx$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\int_{1}^{x} f'(t)dt$. נתון כי הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1\le x$.

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$, בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבירו מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה-x.

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. (1) הראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$

מתקיים: $f'(x)=\cos x-\sin x$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) t הוא מספר. מצאו את כל ערכי t שבעבורם יש למשוואה: $f(x)=t$

פתרון יחיד (בתחום: $0\le x\le 2\pi$).

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה-x

ועל ידי שני הישרים: $x=\frac{3}{4}\pi$ ו-$x=\frac{5}{4}\pi$.

8) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-x.

נתון כי שיעור ה-x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה-x של נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x)$. נסמן ב-p את שיעור ה-x של הנקודה A.

p הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות p את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

תשובות סופיות:

1) א. $t=\frac{112}{v_1+v_2}$ ב. 1.4 ג. משאית: 70 קמ"ש, מכונית: 98 קמ"ש.

2) א. (1) $q=3r$ א. (2) הסבר. ב. $q=\frac{1}{3}$ ג. $S=\frac{60}{121}$
ד. 2. ה. הוכחה.

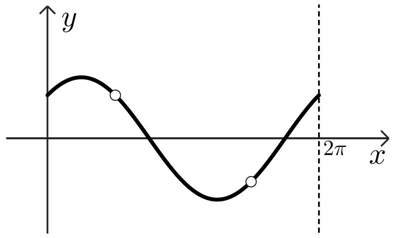
3) א. $p=\frac{1}{6}$ ב. 0.5. ג. 0.125. ד. (1) $\frac{3125}{7776}=0.4188$
ד. (2) $\frac{54}{4651}=0.012$.

4) א. $\sphericalangle BAG=2\alpha$, $\sphericalangle ABG=90°-\alpha$, $\sphericalangle AGB=90°-\alpha$
ב. הוכחה. ג. $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$ ד. (1) הוכחה. ד. (2) $S_{ADG}=3S$.

5) א. $BD=2R\sin\alpha$ ב. $\alpha=75°$ ג. $\sphericalangle ABD=45°$
ד. $\frac{h_1}{h_2}=3+\sqrt{3}\approx 4.732$.

6) א. (1) $x\neq 0$ א. (2) הפונקציה היא אי-זוגית.
א. (3) עולה: $x>1$, $x<-1$, יורדת: $0<x<1$, $-1<x<0$.
ב. $g(x)\to \text{I}$, $f'(x)\to \text{III}$, $f(x)\to \text{II}$
ג. $(1,0)$, $(-1,0)$ ד. $S=20.25$ ה. 0 ו. $\min(1,0)$.

7) א. (1) $\frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, $0\le x<\frac{\pi}{2}$ א. (2) הסבר.
א. (3) $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $(0,1)$ ב. (1) הוכחה.
ב. (2) $\max(2\pi,1)$, $\min\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, $\min(0,1)$
ג. (1) להלן סקיצה: ג. (2) $t=\sqrt{2}$, $t=-\sqrt{2}$, $t=-1$



ד. $S=\sqrt{2}=1.414$.

8) א. (1) $f(x)$: כל x , $g(x)$: $x\ge 0$ א. (2) $(1,1)$, $(0,0)$
ב. $AB^2=p-p^2$ ג. $S_{max}=\frac{128}{3125}=0.04096$ ד. לא.

בגרות 2022 מועד קיץ ב':

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) ארבעה רצים משתתפים במרוץ שליחים במסלול שאורכו 1,440 מטר.
המסלול מחולק ל-4 מקטעים שווים ובתחילת כל מקטע עומד אחד מן הרצים.
כאשר נשמעת יריית הזינוק הרץ הראשון יוצא לדרך.
מייד כשהוא מגיע לסוף המקטע הראשון, הרץ השני יוצא לדרך,
וכך הלאה עד שהרץ הרביעי מגיע לסוף המקטע שלו.
מהירות הרץ השני גדולה פי 1.5 ממהירות הרץ הראשון.
מהירות הרץ השלישי קטנה פי 2 ממהירות הרץ השני,
ומהירות הרץ הרביעי שווה למהירות הרץ השלישי.
המהירות של כל אחד מן הרצים קבועה לאורך המקטע שלו.
ארבעת הרצים השלימו יחד את המסלול כולו בשלוש דקות ו-54 שניות סך הכול.

א. מצאו את מהירות הריצה של כל אחד מן הרצים.

הרץ השלישי והרץ הרביעי התאמנו כדי להגדיל את מהירות הריצה שלהם.
כעבור זמן שוב השתתפו ארבעת הרצים במרוץ שליחים, באותו המסלול.
כל אחד מהם רץ באותו מקטע שבו רץ בפעם הקודמת.
סך זמן הריצה של הרץ השלישי והרץ הרביעי היה גדול פי 1.5 מסך זמן הריצה של שני הרצים הראשונים.
הרץ הראשון והרץ השני רצו באותה המהירות שבה רצו בפעם הקודמת.
הרץ השלישי עבר כל 100 מטר ב-2.5 שניות פחות מן הרץ הרביעי.

ב. (1) מצאו בכמה שניות זמן הריצה של הרץ השלישי קטן מזמן הריצה של הרץ הרביעי.

(2) האם כל אחד משני הרצים האלה, השלישי והרביעי, הגדיל את מהירות הריצה שלו? נמקו את התשובה.

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה: $10{,}935 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 1{,}215$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 5$.

ג. (1) קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k.

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין-סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C.

3) בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר. בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.

בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה, ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $2\frac{2}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה. נסמן ב-p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים
שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר.
מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג. (1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא: $0 < p < \frac{1}{12}$.

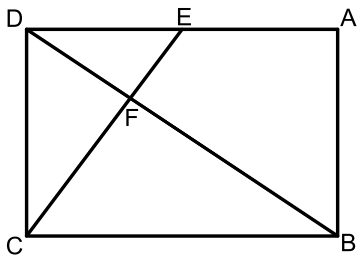
ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p.

ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה?
נמקו את תשובתכם.

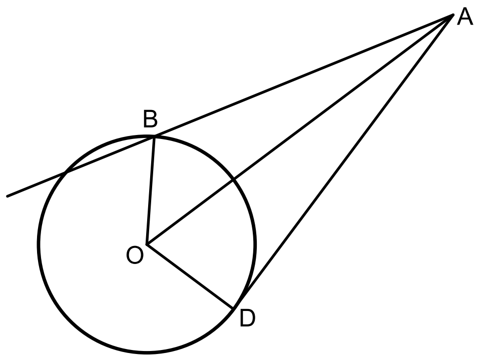
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F.
המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכיחו: $\Delta DAB \sim \Delta BFC$.
נתון: $DE = EA$.
ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.
נסמן את שטח המשולש DEF ב-S.
ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S.
ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.
נסמן: $DE = a$.
ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.
(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.

5) נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.
מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D וישר אחר,
שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.
נסמן: $\measuredangle AOD = \alpha$, $\measuredangle AOB = \beta$.
א. הביעו באמצעות α, β ו-R, אם יש צורך, את:
(1) אורך הקטע AO.
(2) אורך הקטע AB.



נתון: $AB = \sqrt{2}R$.
ב. הוכיחו כי: $\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.
משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.
נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.
ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו-β.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. (1) מצאו את a.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה-y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ גדול משיעור ה-y של נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי: $\int_{-3}^{k} g(x)dx=\int_{-1}^{3} h(x)dx$, $k>-3$.

ד. מצאו את k. הסבירו את התשובה.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)-1$, המוגדרת לכל x.

א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2\le f(x)\le 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום: $-\pi\le x\le\pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-\pi\le x\le\pi$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=f(2x)$, המוגדרת לכל x.

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי: $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(g'(x)-f'(x)\right)dx=S$.

הביעו באמצעות S את: $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}\left(g'(x)-f'(x)\right)dx$. הסבירו את התשובה.

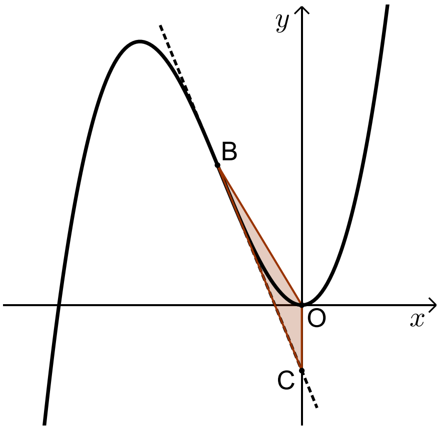
8) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3+4x^2$, המוגדרת לכל x.

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה-y בנקודה C.

נסמן ב-t את שיעור ה-x של הנקודה B.



א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה-x.

ב. מהו תחום הערכים של t?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.

תשובות סופיות:

1) א. רץ ראשון: $6\frac{2}{3}\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, רץ שני: $10\frac{\text{m}}{\text{sec}}$. רץ שלישי ורביעי: $5\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

כאשר $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ = מטר לשנייה.

ב. (1) 9 שניות. ב. (2) השלישי הגדיל את מהירותו, הרביעי לא הגדיל.

2) א. הוכחה. ב. $q=3$, $q=-3$ ג. (1) עולה ג. (2) $k=4$.

ד. הוכחה. ה. $S_C=-\frac{3}{20}$.

3) א. $\frac{3}{11}$ ב. $\frac{216}{1331}$ ג. (1) $1-12p$ ג. (2) הוכחה.

ד. $p=\frac{1}{20}$ ה. תלויים.

4) א. הוכחה. ב. 0.5. ג. $S_{BFC}=4S$, $S_{DFC}=2S$

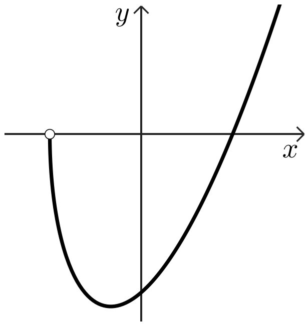
ד. $\sqrt{1.5}$ ה. (1) $\sqrt{6}\cdot a$ ה. (2) $\sqrt{3}\cdot a$.

5) א. (1) $AO=\frac{R}{\cos\alpha}$ א. (2) $AB=R\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}$

ב. הוכחה. ג. $\alpha=58.05^\circ$, $\beta=47.13^\circ$.

6) א. $x>-a$ ב. (1) $a=3$ ב. (2) $(3,0)$, $(0,-3\sqrt{3})$

ב. (3) $\min(-1,-4\sqrt{2})$ ב. (4) להלן סקיצה:

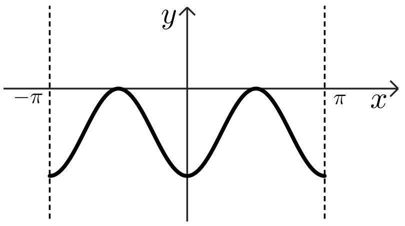


ג. (1) $g(x): x>-5$, $h(x): x>-3$

ג. (2) שווה לו. ד. $k=1$.

7) א. זוגית. ב. הוכחה.

ג. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,-2)$. ד. להלן סקיצה:



ה. $\min\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $\min(0,-2)$, $\max\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{2},-2\right)$

ו. $-S$.

8) א. $y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2$ ב. $-2<t<0$ ג. $S_{OBC}=\frac{27}{16}$.

בגרות 2023 מועד חורף:

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) לאורך גדת נהר יש שלוש תחנות:
תחנה A, תחנה B ותחנה C - שנמצאת בנקודה מסוימת בין תחנה A לתחנה B.
הנהר זורם מכיוון תחנה A לכיוון תחנה B במהירות קבועה.
שתי סירות, סירה I וסירה II, יצאו בשעה 9:30 מנקודה C ושטו לכיוונים הפוכים:
סירה I שטה (נגד הזרם) אל תחנה A, וסירה II שטה (עם הזרם) אל תחנה B.
מיד לאחר שכל אחת מהסירות הגיעה לתחנה המתאימה, היא הסתובבה ושטה בכיוון ההפוך.
נתון כי המהירות של כל אחת מהסירות במים עומדים היא קבועה.
המהירות של סירה I, כאשר היא שטה עם הזרם, היתה גדולה פי 2 ממהירותה כאשר היא שטה נגד הזרם.
המהירות של סירה II, כאשר היא שטה עם הזרם, היתה גדולה פי 6.5 ממהירותה של **סירה I** כאשר היא שטה נגד הזרם. נסמן ב- x את מהירות הזרם בנהר.

א. הביעו באמצעות x את המהירות של סירה I במים עומדים ואת המהירות של סירה II במים עומדים.

סירה I הגיעה לתחנה A לאחר 2 שעות מרגע היציאה לדרך, ומיד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה B.
סירה II הגיעה לתחנה B לאחר 7 שעות מרגע היציאה לדרך, ומיד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה A.

ב. (1) באיזו שעה נפגשו הסירות?
(2) האם הסירות נפגשו בין תחנה A לתחנה C או בין תחנה B לתחנה C? נמקו את תשובתכם.

הסירות נפגשו במרחק של 90 ק"מ מתחנה C.

ג. מהי מהירות הזרם בנהר?

2) נתונה סדרה הנדסית אינסופית A, שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.
בונים סדרה חדשה B, שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע לכל אחד מההיגדים (1)-(2) שלהלן, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת - בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת - בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{4}{7}$.

ג. מצאו את q.

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+...+\frac{b_n}{a_n}=\frac{3367}{1024}$.

ד. מצאו את n.

3) בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.
בארגז א' יש a פירות: 6 תפוחים והשאר אגסים.
בארגז ב' יש b פירות: 11 תפוחים והשאר אגסים.
מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'.
אם יצא תפוח - מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס - מחזירים אותו לארגז א'.
לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

א. הביעו באמצעות a ו- b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.

ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.

ב. מצאו את a ו- b.

ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.

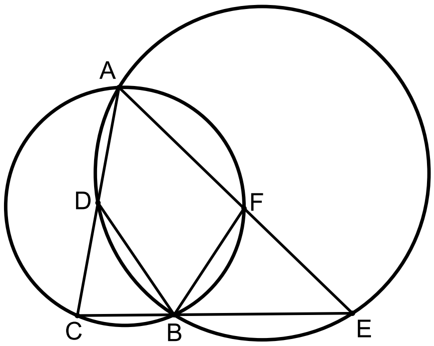
מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר, שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

ד. מצאו את ההסתברות שב-4 מהפעמים בדיוק יצא תפוח <u>או</u> שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

ה. ידוע שב-4 מהפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר בזה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).
המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.
המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.
הקטע CE עובר דרך הנקודה B.



א. הוכיחו כי $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.

נתון: $DC = FE$.

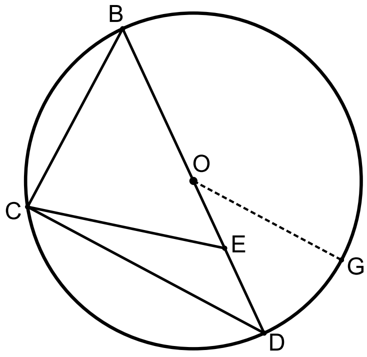
ב. הוכיחו כי $\Delta BFE \cong \Delta BCD$.

ג. (1) הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.

ד. הוכיחו כי $\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE$.

5) משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.
הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD, כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).
נסמן $CD = k$, $\sphericalangle CDB = \alpha$.



א. הביעו את $\cos\alpha$ באמצעות k ו-R.

ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 + R^2}$.

נתון: $BC = EC$.

ג. חשבו את α.

מעבירים רדיוס OG, המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

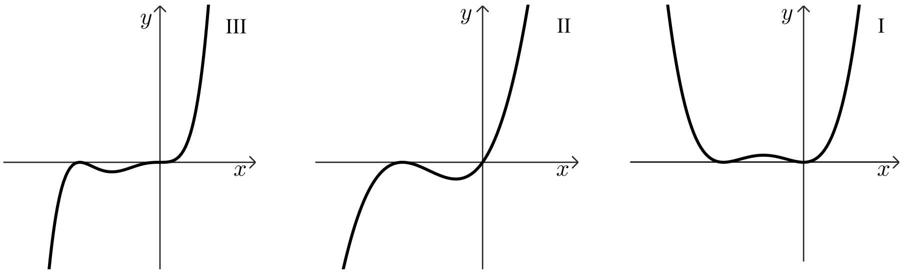
6) נתונה הפונקציה $f(x)=x^n\cdot(x+1)^2$, כאשר $n>1$ מספר טבעי, והפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

ג. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
הביעו את תשובתכם באמצעות n , אם יש צורך.
הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מהגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n>1$ ואי-זוגי.



ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n>1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x-6)$, כאשר k הוא פרמטר חיובי.
נסמן ב- A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x .

ה. הביעו באמצעות k ו- A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין ציר ה- x . נמקו.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4\sin(x)}{\cos^2(x)-1}$, בתחום $-2\pi\le x\le 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .

(3) האם הפונקציה $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית?
הוכיחו את תשובתכם.

ב. ענו על סעיפים (1)-(2) שלהלן עבור התחום $0\le x\le 2\pi$.

(1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים
(אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ (בתחום $-2\pi\le x\le 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x ,
בתחום $1.9\le x\le 2.2$.

8) לפניכם שלוש פונקציות, שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)}\ ,\quad h(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}\ ,\quad k(x)=\frac{x^3}{x(x+2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקציה מקיימת את כל התכונות הללו. נמקו.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקציה שקבעתם בסעיף א.

ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ושל האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

נתון כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

נסמן נקודה D על גרף הפונקציה, שעבורה $x=t$, $-1<t<1$.

מהנקודה D מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקציה, כך שנוצר מלבן על ידי הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .

ד. מצאו את ערכו של t , שעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי.
תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

תשובות סופיות:

1) א. $v_{I}=3x\ ,\ v_{II}=12x$ ב. (1) בשעה 21:30 ב. (2) בין תחנה B לתחנה C.
ג. 2.5 קמ״ש.

2) א. הוכחה. ב. (1) נכון. ב. (2) לא נכון. ג. $q=\frac{3}{4}$ ד. $n=6$.

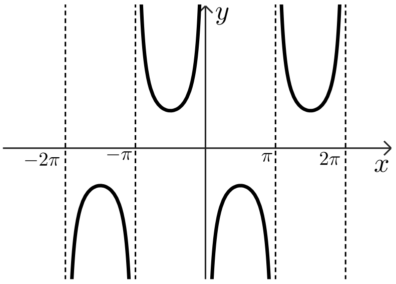
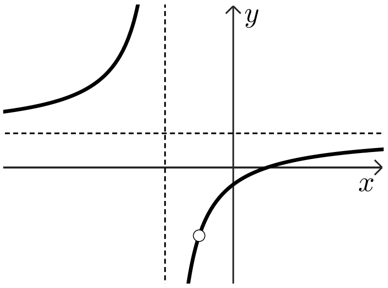
3) א. $\frac{72}{a(b+1)}$ ב. $a=20$ ג. $\frac{7}{13}$ ד. 0.176 ה. 0.2.

4) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

5) א. $\cos\alpha=\frac{k}{2R}$ ב. הוכחה. ג. $\alpha=37.76^\circ$ ד. $\sphericalangle OEG=115.38^\circ$.

6) א. $(0,0)\ ,\ (-1,0)$ ב. עבור n זוגי: תחום חיובית: $x<-1\ ,\ -1<x<0\ ,\ x>0$
(אין תחום שליליות). עבור n אי-זוגי: תחום חיובית: $x>0$, תחום שליליות:
$x<-1\ ,\ -1<x<0$. ג. עבור n זוגי: מינימום: $x=-1,0$, מקסימום: $x=-\frac{n}{n+2}$.
עבור n אי-זוגי: מינימום: $x=-\frac{n}{n+2}$, מקסימום: $x=-1$.
ד. עבור n זוגי: גרף I. עבור $n>1$ אי-זוגי: גרף III. ה. $\frac{A}{k}$.

7) א. (1) $x\neq\pm2\pi\ ,\ x\neq\pm\pi\ ,\ x\neq0$ א. (2) $x=\pm2\pi\ ,\ x=\pm\pi\ ,\ x=0$
א. (3) אי זוגית. ב. (1) אין חיתוך. ב. (2) $\max\left(\frac{\pi}{2},-4\right)\ ,\ \min\left(\frac{3\pi}{2},4\right)$
ג. להלן סקיצה: ד. הוכחה. ה. 0.72.



8) א. $h(x)$ ב. (1) $x=-2\ ,\ y=1$ ב. (2) $(1,0)\ ,\ (0,-0.5)$
ג. להלן סקיצה: ד. $t=-2+\sqrt{3}$.