

מתמטיקה

שאלון 582

מבחני בגרות ובחינות חזרה



הקדמה כללית:

ספרי התרגילים של גול הינם פרי של שנות ניסיון רבות בהוראת חומרי הלימוד ובהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

מבנה ספר הבגרויות של גול:

הספר מורכב מבגרות משנים קודמות. שימו לב, מטרת חוברת הבחינות היא להכין אתכם בצורה הטובה ביותר לבגרות. על מנת להתכונן ברמת הבגרות תוכלו להיעזר בבחינות משנים קודמות.

ניתן למצוא את הפתרונות מלאים בוידאו באתר הבגרויות של גול לכל השאלות שבספר זה. הפתרונות מלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותנו היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

בהצלחה!

צוות האתר גול

תוכן העניינים:

6	שאלון 582
6	בגרות משנים קודמות
6	בגרות 2021 מועד חורף א' :
9	תשובות סופיות :
10	בגרות 2021 מועד חורף נבצרים :
13	תשובות סופיות :
14	בגרות 2021 מועד חורף ב' :
17	תשובות סופיות :
18	בגרות 2021 מועד קיץ א' :
21	תשובות סופיות :
22	בגרות 2021 מועד קיץ שומר חומות :
25	תשובות סופיות :
26	בגרות 2021 מועד קיץ ב' :
29	תשובות סופיות :
30	בגרות 2022 מועד חורף :
33	תשובות סופיות :
34	בגרות 2022 מועד חורף נבצרים :
37	תשובות סופיות :
38	בגרות 2022 מועד קיץ א' :
42	תשובות סופיות :
43	בגרות 2022 מועד קיץ ב' :
47	תשובות סופיות :
48	בגרות 2023 מועד חורף :
52	תשובות סופיות :

מיקוד קיץ 2023 לבגרויות משנים קודמות:

שנה	מועד	שאלה	מיקוד	הערות למיקוד
2021	חורף מועד א	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
2021	חורף נבצרים	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
2021	חורף מועד ב	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
2021	קיץ מועד א	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
2021	קיץ שומר חומות	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
2021	קיץ מועד ב	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
2022	חורף	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
2022	חורף נבצרים	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
2022	קיץ מועד א	1	סעיף ד ירד	
		2		
		3		
		4		
		5		
2022	קיץ מועד ב	1		
		2		
		3		
		4		
		5		

		1	חורף	2023
		2		
		3		
		4		
		5		

שאלון 582

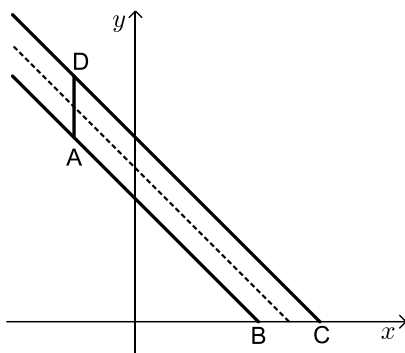
בגרות משנים קודמות

בגרות 2021 מועד חורף א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים



(1) ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).

נתון: המרחק בין בסיסי הטרפז, AB ו-DC, הוא $\sqrt{2}$,
קטע האמצעים של הטרפז ABCD נמצא על
הישר $x + y - 4 = 0$.

א. מצא את משוואות הישרים שבסיסי הטרפז
נמצאים עליהם.

נתון: השוק BC נמצאת על ציר ה- x .

מעבירים פרבולה קנונית $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

כך שהקודקודים A ו-D של הטרפז נמצאים על מדריך הפרבולה,
ומוקד הפרבולה נמצא על הקודקוד B או על הקודקוד C.

ב. (1) מהי משוואת הפרבולה שעבורה הטרפז ABCD הוא הגדול מבין
שני הטרפזים האפשריים? נמק.

(2) מהי משוואת הפרבולה שעבורה ABCD הוא הקטן מבין שני
הטרפזים האפשריים?

ג. מעבירים ישר המקביל לציר ה- x וחותך את שתי הפרבולות שמצאת
בסעיף ב בשתי נקודות, E ו-F. מצא את משוואת המקום הגאומטרי
שעליו מונחים אמצעי הקטעים EF הנוצרים באופן זה.

(2) ABC הוא משולש.

נסמן : $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$.

נתון : $A(0, 2, -1)$, $B(-3, 2, 2)$,

הנקודה $D(-2, 3, 1)$ נמצאת על הקטע BC כך ש- $\vec{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה C והוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

(2) מצא את משוואת המישור ABC.

הנקודה E נמצאת במישור ABC כך ש-ABEC הוא מלבן. הנקודה M היא מפגש האלכסונים במלבן זה. S היא נקודה כך ש-MS מאונך למישור ABEC.

ב. (1) מצא הצגה פרמטרית לישר MS, והסבר מדוע לכל נקודה S

כזו SABEC היא פירמידה ישרה.

(2) תן דוגמה לשיעורים של נקודה S כמתואר בתת-סעיף ב(1).

בעבור הנקודה S שמצאת, חשב את הזווית SAB.

(3) בעבור הנקודה S שמצאת, האם קיימת נקודה נוספת, P,

כך ש-PABEC היא פירמידה ישרה שבעבורה מתקיים : $\angle SAB = \angle PAB$?

אם כן, מצא את שיעוריה. אם לא, נמק.

(3) נתונה המשוואה : $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$ (z הוא מספר מרוכב).

א. מצא את כל פתרונות המשוואה הנתונה.

פתרונות המשוואה הנתונה מתאימים לקודקודים של מצולע קמור במישור גאוס.

ב. הראה שלכל אחד מקודקודי המצולע קיים קודקוד אחד בדיוק כך

שהישר שמחבר ביניהם עובר דרך ראשית הצירים.

כופלים כל אחד מפתרונות המשוואה הנתונה במספר מרוכב קבוע, w .

ג. הסבר מדוע סכום המספרים שהתקבלו הוא אפס.

נתון : $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

ד. כתוב משוואה שפתרונותיה הם 12 המספרים : פתרונות המשוואה

הנתונה בתחילת השאלה והמספרים שהתקבלו לאחר ההכפלה ב- w .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{-4}{e^{2x} - 4e^x + 3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הסבר מדוע לכל $b < 0$ מתקיים: $\int_{b-3}^b f(x) dx < -4$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{k}{f(x)}$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של

הפונקציה $f(x)$. k הוא פרמטר. נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום.

ג. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור k ? נמק.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3 - 1} + 1$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ (k הוא פרמטר). מצא את k . נמק.

ג. נגדיר: $T(x) = \int_{e^{-1}}^x f(x) dx$, $e^{-1} \leq x < e$.

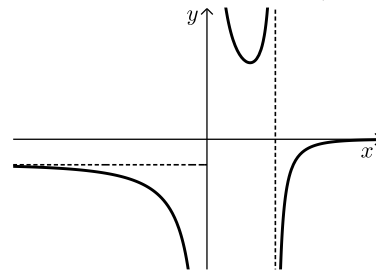
(1) לפיגור שלושה ערכי x , (III-I), בעבור איזה מהם הערך של $T(x)$ הוא הכי גדול? נמק.

$$x = \frac{1}{2} \text{ (I)} \quad x = 1 \text{ (II)} \quad x = 2 \text{ (III)}$$

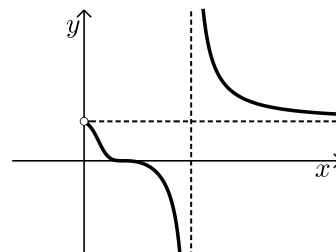
(2) הסבר מדוע בעבור כל $e^{-1} \leq x < e$ מתקיים: $T(x) < 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x + y - 5 = 0$: CD , $x + y - 3 = 0$: AB ב. $y^2 = 20x$.(1) ג. $y^2 = 15x$.(2) ב. $y^2 = 12x$.(2) א. $x + z + 1 = 0$.(2) א. $c(0, 5, -1)$, הוכחה $(AB \perp AC)$.(1) ב. $(-1.5, 3.5, 0.5) + t(1, 0, 1)$.(1) ב. $P(-2, 3.5, 0)$.(3) ב. $\frac{1}{2} \text{cis} 345^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 285^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 225^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 165^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 105^\circ$, $\frac{1}{2} \text{cis} 45^\circ$.(3) ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. $z^{12} + \frac{1}{4096} = 0$.(4) א. $x \neq 0$, $x \neq \ln 3$.(1) א. $y = -\frac{4}{3}$, $y = 0$, $x = \ln 3$, $x = 0$.(2) א. $x < 0$ או $0 < x < \ln 2$.ירידה: עלייה: $\ln 2 < x < \ln 3$ או $\ln 3 < x$.(4) א. $k < 0$.ג. הוכחה. ב. הוכחה. א. $k < 0$.(5) א. להלן סרטוט:



- (5) א. $x \neq e$, $x > 0$.(1) א. $y = 1$, $x = e$.(2) א. $k = 1$.ב. $k = 1$.ג. $k = 1$.(1) ב. $k = 1$.ג. $k = 1$.(2) א. $x > e$ או $0 < x < e$.ירידה: עלייה: $x > e$ או $0 < x < e$.(4) א. $(1, 0)$.(3) א. עלייה: אין. ג. הסבר. א. $k = 1$.(5) א. להלן סרטוט:



בגרות 2021 מועד חורף נבצרים:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

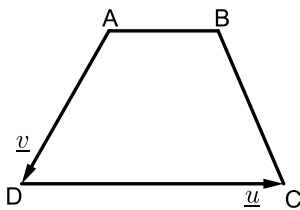
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הן שתי נקודות שונות הנמצאות על הפרבולה $y^2 = 36x$ ברביע הראשון.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר AB הוא $m = \frac{36}{y_2 + y_1}$.

(2) הנקודה $\left(x, 7\frac{1}{2}\right)$ היא אמצע המיתר AB. מצא את m .

ב. נתון: המרחק של כל נקודה על הפרבולה הנתונה מן הישר $x = a$ שווה למרחק של נקודה זו מן הנקודה $(9, 0)$. מרחק הנקודה A מן הישר $x = 0.75a$ הוא 7.
(1) מהו הערך של a ? נמק.
(2) מצא את משוואת הישר AB.



(2) נתון טרפז שווה שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$) (ראה סרטוט). נתון: $\angle DAB = 120^\circ$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{u}$ (t הוא סקלר).

א. (1) הבע את t באמצעות $|\overrightarrow{v}|$ ו- $|\overrightarrow{u}|$.

(2) הבע את הווקטור \overrightarrow{BC} באמצעות \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v} ו- $|\overrightarrow{v}|$.

נתון: $\overrightarrow{u} = (8, 6, -10)$, $\overrightarrow{v} = (-1, y, 0)$.

ב. (1) מצא את שיעור ה- y של הווקטור \overrightarrow{v} (מצא את שני הערכים).

(2) עבור איזה ערך משני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף ב (1),

הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז חסום בו? נמק.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. נתון מספר מרוכב $z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$.

הסבר מדוע מתקיים: $r(\cos(180^\circ + \theta) + i \sin(180^\circ + \theta)) = -z$.

z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. הנקודות המייצגות אותם במישור גאוס נמצאות על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

הנקודות המייצגות את z_1 ו- z_2 נמצאות ברביע הראשון, והנקודה שמייצגת

את z_3 נמצאת ברביע השלישי. נסמן: $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

ב. הוכח כי המנה $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3}$ היא מספר ממשי.

נתון גם כי הנקודות במישור גאוס המייצגות את המספרים z_1 ו- z_3 נמצאות

על מעגל היחידה, ו- $\frac{z_2 + z_3}{z_1 - z_3} = \frac{5}{4}$.

ג. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ד. z_4 הוא הצמוד של z_3 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות במישור

גאוס המייצגות את המספרים z_2, z_3, z_4 .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4e^{\sqrt{x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x) = f(x^2)$, $g(x) = 2 \cdot f'(x)$ בתחום $x > 0$.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, קבע את סוגה,

והראה כי הנקודה הזאת נמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ נפגשים בנקודה אחת בלבד

(הנקודה שמצאת בסעיף ב).

ג. סרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, גרף הפונקציה $h(x)$

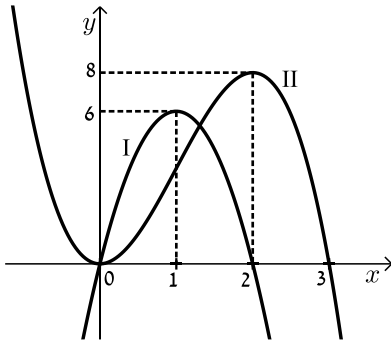
ועל ידי הישר $x = a$, $a > 1$, שווה ל- $e^4 + 4e - 2 \cdot f(a)$.

מצא את הערך של a . תוכל להשאיר \ln בתשובתך.

5) הגרפים I, II שבסרטוט שלפניך מתארים שתי פונקציות המוגדרות בתחום $-1 \leq x \leq 4$. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$, והאחר הוא של פונקצית הנגזרת שלה, $f'(x)$.

א. קבע מי מבין הגרפים I ו-II הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$. נמק. הסתמך על הסרטוט וענה על סעיף ב.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.



(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$

המאונכות לציר ה- x ?

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון

הפנימיות של הפונקציה $g(x)$

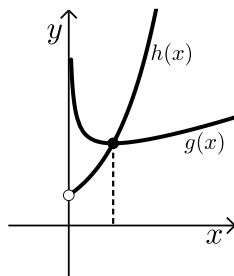
(אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

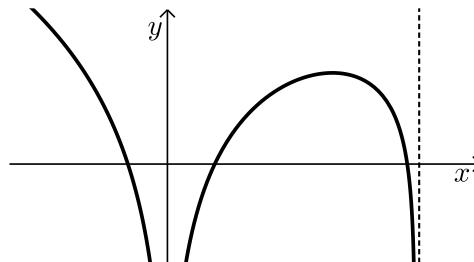
(5) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. הוכחה. א. (2) $m = 2.4$. ב. (1) $a = -9$.
 ב. (2) $y = 2.4x + 2.4$.
 (2) א. (1) $t = 1 - \frac{|v|}{|u|}$. א. (2) $\overline{BC} = \frac{|v|}{|u|}u + v$. ב. (1) $y = -7$, $y = \frac{1}{7}$.
 ב. (2) $y = -7$.
 (3) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $|z_2| = 3.5$.
 ד. $2.25 \sin 2\alpha$.
 (4) א. $0 \leq x$. ב. $(1, 4e)$. ג. להלן סרטוט:
 ד. $a = 4 - \ln 4$.



- (5) א. גרף I - $f'(x)$, גרף II - $f(x)$. ב. (1) $-1 \leq x < 0$, $0 < x < 3$.
 ב. (2) $x = 0$, $x = 3$. ב. (3) $(2, \ln 8)$ מקסימום.
 ב. (4) עלייה: $0 < x < 2$. ירידה: $2 < x < 3$, $-1 < x < 0$.
 ב. (5) להלן סרטוט:



בגרות 2021 מועד חורף ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5.

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, תיבדקנה רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) נתון: נקודה K נמצאת על הפרבולה: $y^2 = 4px$ ($p > 0$).

שיעור ה- y של נקודה K הוא 12.

המרחק בין נקודה K ובין מוקד הפרבולה הוא 20.

א. מצא את p (מצא שתי אפשרויות).

נסמן את הערכים של p שמצאת בסעיף א ב- p_1 ו- p_2 . $p_1 < p_2$.

ישר מן הצורה $y = mx$ ($m \neq 0$) חותך את הפרבולה $y^2 = 4p_1x$ בראשית

הצירים ובנקודה נוספת, A, ואת הפרבולה: $y^2 = 4p_2x$ בראשית הצירים

ובנקודה נוספת, B.

הצב את הערכים p_1 ו- p_2 שמצאת, וענה על סעיפים ב-ג.

ב. הבע את שיעורי נקודה A, ואת שיעורי נקודה B באמצעות m .

בעבור כל ישר $y = mx$ ($m \neq 0$) נסמן ב-M את אמצע הקטע AB הנוצר באופן המתואר.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות הנקודות M האלה (ללא m).

(2) נתונה התיבה ABCDA'B'C'D'.

הנקודה K נמצאת על המקצוע CC'.

הנקודה E היא אמצע המקצוע A'D' (ראה סרטוט).

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CK} = t \cdot \overrightarrow{CC'}$ ($t > 0$ הוא סקלר).

נתון: $\angle EKB = 90^\circ$, $|\underline{u}| = 3\sqrt{2}$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{w}| = 6\sqrt{2}$.

א. מצא את t .

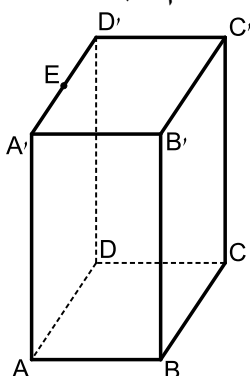
נסמן ב- π את המישור CDA'B'.

ב. (1) הוכח כי הישר BK מאונך למישור π .

(2) הסבר מדוע הישר EK מקביל למישור π .

נתון: $\underline{w} = (2, 2, -8)$, $K(4, 5, -1)$, $B(-1, 0, 1)$.

ג. מצא את משוואת המישור π .



3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה : $z^2 - (1+i)z + 2i + 2 = 0$.

- אחד הפתרונות של המשוואה שפתרת נמצא ברביע הרביעי והוא מיוצג על ידי הנקודה A במישור גאוס. הפתרון השני מיוצג על ידי הנקודה B במישור גאוס. דרך הנקודה B עובר מעגל שמרכזו בראשית הצירים - O. הישר AO חותך את המעגל בנקודות C ו-D. במעגל חסום מצולע משוכלל בעל n צלעות. נתון כי הנקודות B, C, D הן קודקודים של המצולע.
- ב. מהו ה- n האפשרי הקטן ביותר? נמק את תשובתך.
- ג. בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב :
- (1) רשום את המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.
- (2) כתוב משוואה שפתרונותיה הם כל המספרים המרוכבים המתאימים לקודקודי המצולע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4) הפונקציה $g(x)$ מוגדרת וגזירה לכל x .

הגרף שלה חותך את ציר ה- x בראשית הצירים בלבד.

נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן $(1,1)$ ו- $(-1,-1)$ בלבד.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בעבור $x=1$ ו- $x=-1$ בלבד.

ציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $g(x)$ בעבור x שואף לאינסוף ובעבור x שואף למינוס אינסוף.

א. (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) רשום את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$

(פונקציית הנגזרת של $g(x)$).

נתונה הפונקציה : $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

5 נתונה משפחת הפונקציות : $f(x) = ax - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$, $a \neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיפים א-ג בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה : $g(x) = f'(x)$ (נגזרת של הפונקציה $f(x)$) המוגדרת

באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$. נתון : $a > 0$.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x = \frac{2}{a}$

וציר ה- x , והוכח כי השטח אינו תלוי ב- a .

תשובות סופיות:

(1) א. $p = 18$, $p = 2$. ב. $A\left(\frac{8}{m^2}, \frac{8}{m}\right)$, $B\left(\frac{72}{m^2}, \frac{72}{m}\right)$. ג. $y^2 = 40x$.

(2) א. $t = \frac{1}{2}$. ב. (1). הוכחה. ג. (2). הוכחה.

ג. $5x + 5y - 2z - 29 = 0$.

(3) א. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2i$. ב. $n = 8$.

ג. (1). $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-2, 0)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(0, -2)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

ג. (2). $z^8 = 256$.

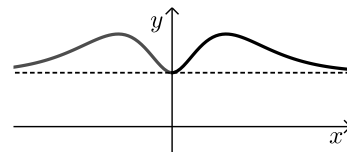
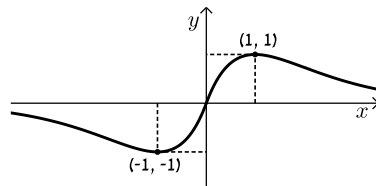
(4) א. (1). סרטוט למטה. א. (2). חיובית: $-1 < x < 1$, שלילית: $x < -1$, $1 < x$.

ב. (1). כל x . ב. (2). $y = 1$.

ב. (3). $(1, e - 1)$ מקסימום, $(0, 1)$ מינימום, $\left(-1, \frac{1}{e} + 1\right)$ מקסימום.

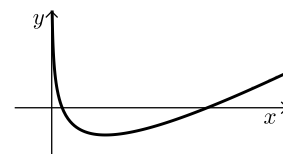
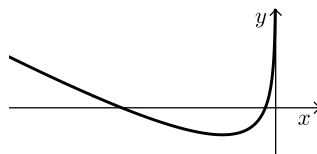
א. (1) להלן סקיצה:

ב. (4). סרטוט:



(5) א. עבור $a > 0$: $x > 0$, ועבור $a < 0$: $x < 0$. ב. $\left(\frac{1}{a}, 1 + \ln a^2\right)$.

ג. סרטוט עבור: $a > 0$: סרטוט עבור: $a < 0$: ד. $1 - \ln 2$.



בגרות 2021 מועד קיץ א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתון פרמטר: $a > 0$.

א. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן

מן הנקודה $(a, 0)$ שווה למרחק שלהן מן הישר: $x = a - 1$.

ב. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן

מן הנקודה $(0, a)$ שווה למרחק שלהן מן הישר: $y = a - 1$.

נתון כי שני המקומות הגאומטריים שמצאת בסעיפים א'-ב' נחתכים בשתי

נקודות. אחת הנקודות היא $(2, 2)$.

ג. (1) מצא את a .

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך האחרת.

מחברים את שתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים עם

הנקודות $(3a, 0)$ ו- $(0, 3a)$ כך שמתקבל מרובע.

ד. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמק.

(2) חשב את שטח המרובע.

(2) נתונה פירמידה מרובעת SABCD שבסיסה ABCD הוא מעוין.

נתון: \overrightarrow{SA} מאונך לבסיס הפירמידה, $\angle BAD = 60^\circ$, $SA = BA$, $\overrightarrow{SE} = t \cdot \overrightarrow{SC}$.

$0 < t < 1$ הוא פרמטר. נסמן: $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

א. הבע את הווקטורים \overrightarrow{EB} ו- \overrightarrow{ED} באמצעות: \underline{t} , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} .

ב. נתון: $t = \frac{1}{2}$.

(1) הוכח כי \overrightarrow{EB} מאונך ל- \overrightarrow{ED} .

(2) הוכח כי האנך מן הנקודה E לבסיס עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים של המעוין.

נתון: $A(0, 0, 0)$, $B(6\sqrt{3}, 6, 0)$ קודקוד D נמצא על ציר ה- y בכיוון החיובי,

שיעור ה- z של הנקודה S גדול מאפס.

ג. חשב את שיעורי הקודקודים S ו-D.

ד. מצא את משוואת המישור SAB.

(3) נתונה המשוואה: $z^4 = -16$ (z הוא מספר מרוכב).

א. פתור את המשוואה.

נתון: פתרונות המשוואה מייצגים קודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. סרטט במערכת הצירים את המצולע שהתקבל.

כופלים ב- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ כל אחד מן המספרים המייצגים את קודקודים המצולע.

ג. מצא את שיעורי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים שהתקבלו בהכפלה.

n הוא מספר טבעי, $11 < n < 17$ ו- c הוא מספר ממשי. כל אחד מן המספרים

המרוכבים שמצאת בסעיפים הקודמים מקיים את המשוואה: $z^n = c$.

ד. מצא את n ואת c .

הנקודות במישור גאוס, המיוצגות על ידי כל הפתרונות של המשוואה: $z^n = c$

שמצאת בסעיף ד', יוצרות מצולע בעל n צלעות.

ה. מצא את שטח המצולע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = 1 + ae^{-2x}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר, $a > 1$.

בטא את תשובותיך באמצעות a לפי הצורך.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש).

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש).

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש).

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק את תשובותך.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים

(אם יש כאלה).

(3) ידוע כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת, המתקבלת כאשר: $x = \frac{\ln(a)}{2}$.

מצא את שיעור ה- y של נקודת הפיתול,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g'(x)$.

(2) סרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$. פרט את שיקוליך.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g'(x)$ ועל ידי

הישרים: $y = \frac{1}{2}$, $x = 0$.

(5) ענה :

א. נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{(x+2)(x-1)}\right)$

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה : $g(x) = \ln(f(x))$

היעזר בתשובותיך על השאלות בסעיף א' וענה על התת-סעיפים (1)-(3) שלפניך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרט את שיקוליך.

ג. בעבור כל x המקיים : $0 < f(x) < 1$, קבע אם המכפלה $f(x) \cdot g(x)$

חיובית. נמק את קביעתך.

תשובות סופיות:

(1) א. $y^2 = 2x - 2a + 1$. ב. $x^2 = 2y - 2a + 1$. ג. $a = \frac{1}{2}$. (2) $(0,0)$.

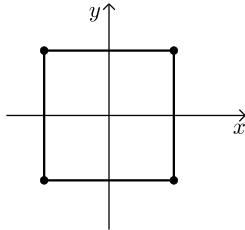
ד. (1) דלתון. (2) 3.

(2) א. $\overrightarrow{ED} = (1-t)\underline{v} - t\underline{u} + (t-1)\underline{w}$, $\overrightarrow{EB} = (1-t)\underline{u} - t\underline{v} + (t-1)\underline{w}$.

ב. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ג. $S(0,0,12)$, $D(0,12,0)$.

ד. $x - \sqrt{3}y = 0$.

(3) א. $2\text{cis}45^\circ$, $2\text{cis}135^\circ$, $2\text{cis}225^\circ$, $2\text{cis}315^\circ$. ב. סרטוט:



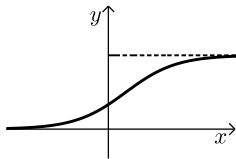
ג. $(0,-2)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(2,0)$.

ד. $c = 65536$, $n = 16$.

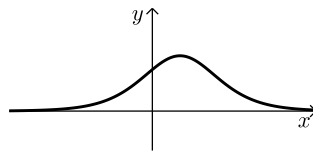
ה. $S = 12.25$.

(4) א. (1) $y = 1$. (2) עליה: אין, ירידה: כל x . (3) $(0,1+a)$.

ב. (1) כל x . (2) $y = 1$, $y = 0$. (3) $y = \frac{1}{2}$: פיתול: סרטוט:



ג. (1) $\left(\frac{\ln a}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (2) סרטוט:



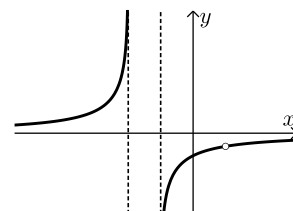
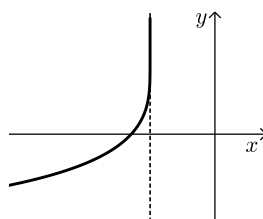
ד. $S = \frac{\ln a}{4} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2}$.

(5) א. (1) $1 < x$ או $-1 < x < 1$ או $x < -2$. (2) $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$.

(3) עליה: $1 < x$ או $-1 < x < 1$ או $x < -2$, ירידה: אין.

(4) סרטוט: ב. (1) $x < -2$. (2) עליה: $x < -2$, ירידה: אין.

(3) סרטוט: ג. לא.



בגרות 2021 מועד קיץ שומר חומות:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) נתון פרמטר a שונה מאפס.

א. הראה כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות שהמרחק שלהן מן

הנקודה $(a, -1)$ שווה למרחק שלהן מן הנקודה $(-a, 1)$ הוא קו ישר.

הבע את משוואת הישר באמצעות a .

נתון הישר: $y = -ax$.

ב. מצא לאלו ערכים של a , הישר הנתון והישר שמצאת בסעיף א' ניצבים זה לזה.

הישר שמצאת בסעיף א' והישר הנתון ניצבים זה לזה ומשיקים לשני מעגלים, M ו-N. מרכזי שני המעגלים מונחים של ציר ה- x , המעגל M נמצא מימין לציר ה- y , והמעגל N נמצא משמאל לציר ה- y . נתון כי המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 6, והרדיוס של המעגל M גדול פי 2 מן הרדיוס של המעגל N.

ג. מצא את המשוואות של המעגלים M ו-N.

נתון הישר: $-x + \sqrt{17}y - 8 = 0$. הישר משיק לשני המעגלים M ו-N.

ד. מצא משוואה של ישר המשיק לשני המעגלים, נוסף על הישרים המשיקים המתוארים בשאלה. נמק את תשובתך.

(2) בסרטוט שלפניך מתוארת מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$, שהבסיס שלה הוא המשולש ABC .

נתון המספר k שבעבורו: $\overrightarrow{AB} = (k-1, k, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (k+1, 0, k-3)$, $\overrightarrow{AA'} = (k-1, k-7, k+1)$.

א. מצא את ערכו של k .

המקצועות AC ו-BC מונחים על הישרים l_{AC} ו- l_{BC} בהתאמה:

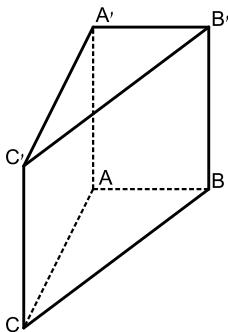
$$l_{AC}: \underline{x} = (8, -1, -1) + t(k+1, 0, k-3)$$

$$l_{BC}: \underline{x} = (4, 0, 2) + m(k, -k, -4)$$

ב. מצא את משוואת המישור $A'B'C'$.

ג. חשב את גודל הזווית $C'A'B'$.

ד. מצא את מרכז המעגל החוסם את המשולש $A'B'C'$. נמק.



(3) נתונה משוואה I: $w^2 - 4iw - 4 + 2i = 0$. הוא מספר מרוכב.

א. פתור את משוואה I.

נתונה משוואה: $z^3 = a + bi$. z הוא מספר מרוכב, a ו- b הם מספרים ממשיים. ידוע כי אחד מפתרונות משוואה זו מתאים לנקודה הנמצאת במישור גאוס על הציר המדומה, בחלקו השלילי.

ב. אחת מן הטענות 1-3 שלפניך נכונה. קבע איזו ונמק את קביעתך.

1. $a = 0, b > 0$.

2. $a < 0, b = 0$.

3. $a \neq 0, b \neq 0$.

נתונה משוואה II: $z^3 = 2(w_1 + w_2)$, w_1 ו- w_2 הם פתרונות של משוואה I.

ג. פתור את משוואה II.

פתרונות משוואה II מייצגים קודקודים של משולש במישור גאוס.

ד. סרטט את המשולש שהתקבל במישור גאוס.

נתון מספר מדומה: $u = di$, d הוא פרמטר ממשי.

מוסיפים את u לכל אחד מן הפתרונות של משוואה II כך שהמספרים שמתקבלים מייצגים משולש חדש.

ה. מצא את הערך של d שבעבורו המעגל החוסם את המשולש החדש עובר דרך ראשית הצירים. מצא שתי אפשרויות.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון הישר: $g(x) = a \cdot x$, a הוא פרמטר.

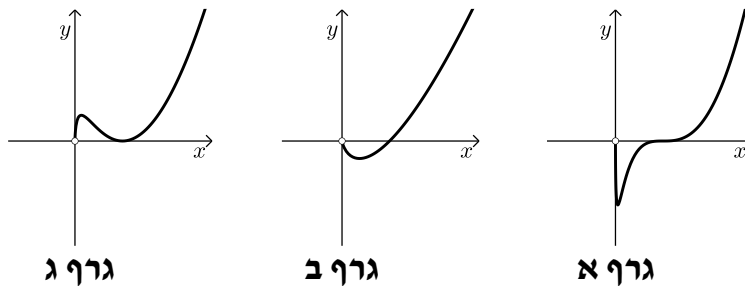
ידוע כי: $g(1) = f(1)$.

ג. (1) מצא את a .

(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $g(x)$.

5) נתונה משפחת הפונקציות : $f(x) = x \cdot (\ln(x))^n$, $n \geq 1$, הוא מספר טבעי.

- א. ענה על הסעיפים שלפניך בעבור n זוגי ובעבור n אי-זוגי.
 אם יש צורך, בטא את תשובותיך באמצעות n .
 (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 (3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 ב. כל אחד מן הגרפים א-ג שלפניך מתאר פונקציה במשפחה.
 קבע איזה גרף יכול להתאים ל- $n=1$, איזה גרף יכול להתאים ל- $n=2$
 ואיזה גרף יכול להתאים ל- $n=3$. נמק את קביעותיך.



נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}$.

- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x .

ועל ידי הישרים : $x = \frac{1}{e}$ ו- $x = \frac{1}{e^2}$.

תשובות סופיות:

(1) א. $y = ax$. ב. $a = \pm 1$. ג. $(x+2)^2 + y^2 = 2$, $(x-4)^2 + y^2 = 8$.

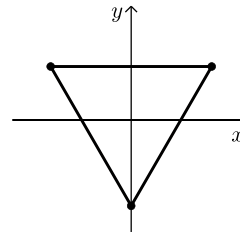
ד. $x + \sqrt{17}y + 8 = 0$.

(2) א. $k = 2$. ב. $x - 5y + 3z - 45 = 0$. ג. 90° . ד. $(5, -5, 5)$.

(3) א. $-1 + 3i$, $1 + i$. ב. טענה I.

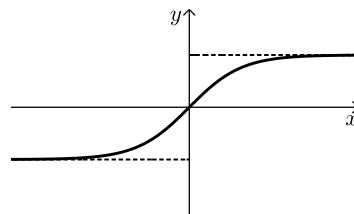
ג. $2\text{cis}270^\circ$, $2\text{cis}150^\circ$, $2\text{cis}30^\circ$ או $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$, $-2i$.

ד. סרטוט: . ה. $d = -2$, $d = 2$.



(4) א. (1). כל x . (2). $y = -1 : x \rightarrow -\infty$, $y = 1 : x \rightarrow \infty$. (3). עליה: כל x , ירידה: אין.

(4). הוכחה. ב. סרטוט: . ג. (1). 0.761 . (2). 0.106 .



(5) א. (1). $x > 0 : g(x)$, $x > 0 : f(x)$.

(2). n אי זוגי: עליה: $x > \frac{1}{e^n}$, ירידה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$.

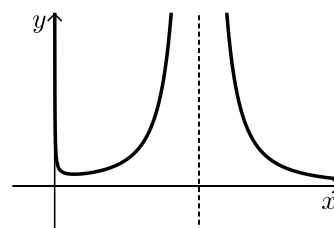
n זוגי: עליה: $0 < x < \frac{1}{e^n}$ או $x > 1$, ירידה: $\frac{1}{e^n} < x < 1$.

(3). n אי זוגי: $\left(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n} \right)$ מקסימום.

n זוגי: $(1, 0)$ מינימום, $\left(\frac{1}{e^n}, \frac{(-n)^n}{e^n} \right)$ מקסימום.

ב. גרף א': $n = 3$, גרף ב': $n = 1$, גרף ג': $n = 2$.

ג. סרטוט: . ד. $\frac{1}{2}$.



בגרות 2021 מועד קיץ ב':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

(1) לפניך משוואת הפרבולה: $y^2 = 2ax$ ומשוואת המעגל: $x^2 + y^2 - 2ax - 2x = 0$.
 a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל.

הבע באמצעות a , אם יש צורך.

דרך שתיים מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל עובר ישר ששיפועו חיובי.

ב. מצא את משוואת הישר. הבע באמצעות a , אם יש צורך.

ממרכז המעגל מעבירים אנך לישר. אורך האנך הוא $2\sqrt{5}$.

ג. (1) הבע באמצעות a את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

(2) מצא את a .

מגדירים מעגל חדש שמרכזו זהה למרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו קטן ב-2 מרדיוס המעגל הנתון.

ד. מצא את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק

מהן למעגל החדש שווה למרחק שלהן מן הישר: $x = -4$.

(2) נתון משולש ABC (ראה סרטוט). הנקודה D היא אמצע הצלע AB.

הנקודה E מחלקת את הצלע AC ביחס של: $AE:EC = 2:1$.

הנקודה F היא מפגש הקטעים BE ו-CD.

נסמן: $\overrightarrow{CA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{v}$.

$\overrightarrow{CF} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BE}$: k ו- t הם מספרים כך ש:

א. מצא את t ואת k .

המשולש ABC נמצא במישור: $4x + 2y + z - 12 = 0$.

מישור זה חותך את ציר ה- x בנקודה A, את ציר ה- y בנקודה C ואת ציר

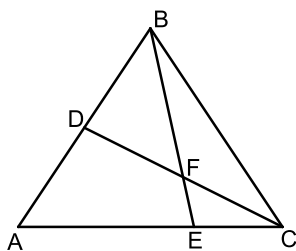
ה- z בנקודה B.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את משוואת המישור AOE.

ד. מצא את נפח הפירמידה FAOE.



(3) נתונה משוואה I: $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. z הוא מספר מורכב.

א. פתור את משוואה I.

פתרונות המשוואה מיוצגים על ידי כל הקודקודים של מצולע במישור גאוס.

ב. מצא את שטח המצולע.

נתונה משוואה II: $(a \cdot z^2 + b)(z + 1) = 0$. z הוא מספר מורכב, a ו- b הם מספרים ממשיים השונים מאפס. ידוע כי שניים מבין הפתרונות של המשוואה הם מספרים מדומים.

ג. הוכח כי: $a \cdot b > 0$.

ד. מצא את פתרונות משוואה II. הבע באמצעות a ו- b , אם יש צורך. ידוע כי הפתרונות המדומים של משוואה II מיוצגים על ידי נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית הצירים והרדיוס שלו גדול פי שניים מן הערך המוחלט של פתרונות משוואה I.

ה. מצא את היחס: $\frac{b}{a}$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{(bx^2 - 2bx)} - 1$. המוגדרת לכל x . $b < 0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות b , אם יש צורך.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נגדיר את הפונקציה: $g(x) = f(x + a)$, a הוא פרמטר.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון על ציר ה- y .

ב. (1) מצא את a , ובטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x ו- b .

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את שיעור ה- x של כל אחת מנקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת $g'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הצב $b = -0.5$, וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים העוברים דרך נקודות הקיצון של $g'(x)$ ומאונכים לציר ה- x .

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cdot x^2 - x^3$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר. ענה על סעיפים א'-ג' עבור $0 < a$. הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.
א. (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

ג. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x .

(1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את טווח הערכים האפשריים של a שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$

חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.

ענה על סעיף ד' עבור $a = 0$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. ציין בגרף את הערכים

המספריים של שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

תשובות סופיות:

1) א. $(0,0)$, $(2,2\sqrt{a})$, $(2,-2\sqrt{a})$. ב. $y = \sqrt{a} \cdot x$.

ג. (1). מרכז המעגל: $(a+1,0)$, רדיוס: $(a+1)$. (2). $a = 4$.

ד. $y^2 = 18x$.

2) א. $t = \frac{3}{4}$, $k = \frac{1}{2}$. ב. $F\left(\frac{3}{4}, 3, 3\right)$, $E(1, 4, 0)$. ג. $z = 0$.

ד. $V = 6$.

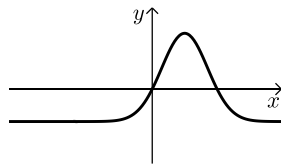
3) א. $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

ב. $S = 2\sqrt{3}$. ג. הוכחה. ד. $z = -\sqrt{\frac{b}{a}}i$, $z = \sqrt{\frac{b}{a}}i$, $z = -1$.

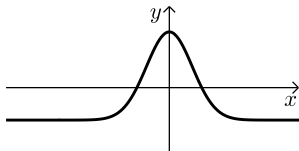
ה. $\frac{b}{a} = 8$.

4) א. (1). $(0,0)$, $(2,0)$. (2). אנכית: אין, אופקית: $y = -1$.

ב. (1). $a = 1$. (3). $(1, e^{-b} - 1)$ מקסימום. (4). סרטוט:



(3). סרטוט:



(2). $g(x) = e^{b(x^2-1)} - 1$, הפונקציה זוגית.

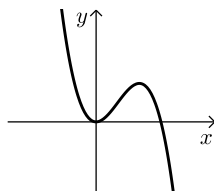
ג. $x = \sqrt{-\frac{1}{2b}}$ מינימום, $x = -\sqrt{-\frac{1}{2b}}$ מקסימום.

ד. $2(\sqrt{e} - 1) = 1.297$.

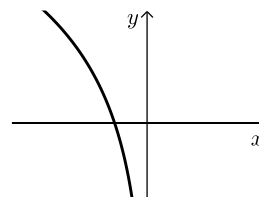
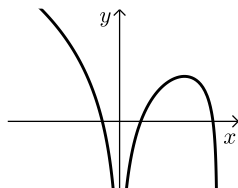
5) א. (1). חיובית: $0 < x < a$ או $x < 0$, שלילית: $a < x$.

ב. (1). $x \neq 0$, $x < a$. (2). $x = 0$, $x = a$.

(3). $\left(\frac{2a}{3}, \ln\left(\frac{4}{27}a^3\right)\right)$ מקסימום. ג. (1). סרטוט:



(2). $0 < a < 1.889$. ד. סרטוט:



בגרות 2022 מועד חורף:

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

- (1) הנקודה $(t, 0)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית.
 t הוא פרמטר חיובי.
 אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.
 בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t , אם יש צורך.
 א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.
 המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו-B.
 הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות C ו-D. הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D.
 ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
 ד. (1) הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל אחד.
 (2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

- (2) נתונים שני מישורים: $\pi_1: z-3=0$, $\pi_2: ay+z-8=0$, a הוא פרמטר שונה מ-0. הזווית בין המישורים היא 45° .
 א. מצא את הערכים האפשריים עבור הפרמטר a .
 הנקודה $A(2, -2, 6)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים.
 מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.
 האנך חותך את המישור האחר בנקודה B.
 ב. מצא את אורך הקטע AB.
 l הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו- π_2 .
 ג. מצא את ההצגה הפרמטרית של l .
 מן הנקודה B העבירו אנך לישר l . האנך חותך את הישר l בנקודה C.
 ד. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

(3) נתונים שני מספרים מרוכבים: $z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$

$$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.
הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ב-ג.

נתונים המספרים: $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי:

(1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

(2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה: $|z - p| = m$. p ו- m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב. מה הם הערכים של p ו- m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמק.

ענה על אחת מן השאלות 4-5 ($33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את m .

(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן

(אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$.

ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי.

נמק את תשובתך.

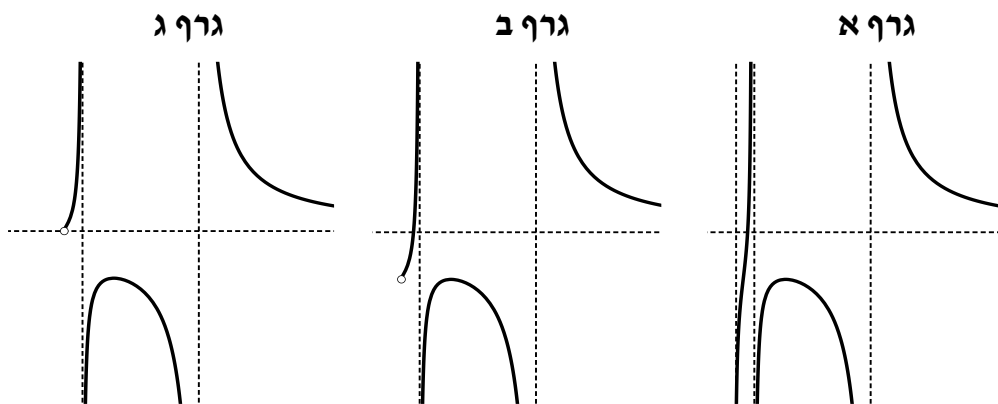
(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2 - 1}$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. לפניך שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים x ו- y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים. פרט של שיקוליד.



ג. (1) האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 1$? נמק את תשובתך.

(2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד?

נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$, $h(x) = (\ln(x))^2 + 1$

נסמן מלבן ABCD. הנקודות A ו-B הן שתי נקודות על ציר ה- x שבהן

הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת. הנקודות C ו-D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.

ד. מהו שטח המלבן ABCD? נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

(1) א. משוואת האליפסה: $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{3t^2} = 1$, משוואת הפרבולה: $y^2 = 4tx$.

ב. $A\left(-t, \frac{3t}{2}\right), B\left(-t, -\frac{3t}{2}\right)$. ג. $C(t, 2t), D(t, -2t)$.

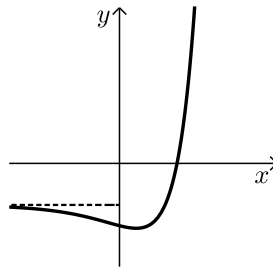
ד. (1). טרפז שווה שוקיים. (2). $\left(\frac{7t}{16}, 0\right)$.

(2) א. $a = \pm 1$. ב. 3. ג. $x = (0, -5, 3) + t(1, 0, 0)$. ד. 4.5.

(3) א. $a = -1$. ב. (1). הוכחה. (2). הוכחה. ג. $m = 1, p = 0$.

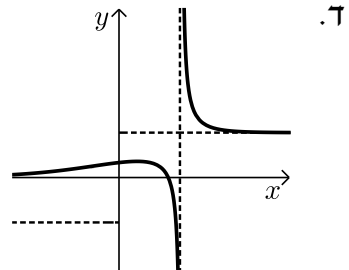
(4) א. (1). כל x . (2). $m = -4$. (3). $(\ln 4, 0), (0, -1.5)$.

(4). $\min\left(\ln \frac{3}{2}, \frac{-25}{16}\right)$. ב.



ג. (1). $x \neq \ln 4$. (2). $y = 0, y = 1, x = \ln 4$.

ה. $t = \ln 3$.



(5) א. (1). $x \neq \frac{1}{e}, e, x > 0$. (2). $y = 1, x = \frac{1}{e}, x = e$.

(3). תחומי עלייה: $0 < x < \frac{1}{e}$ או $\frac{1}{e} < x < 1$.

תחומי ירידה: $e < x$ או $1 < x < e$. ב. גרף ג'.

ג. (1). לא. (2). $k = 0$. ד. $S = \frac{2e^2 - 2}{e} = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

בגרות 2022 מועד חורף נבצרים:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

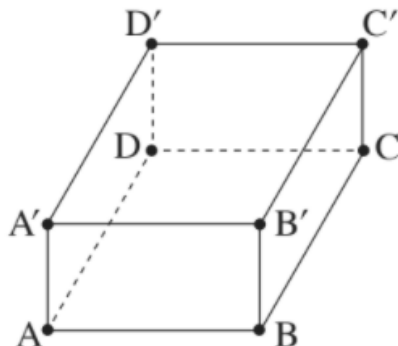
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

- (1) מעגל שמרכזו בנקודה M חסום במשולש ABC. הצלע AB נמצאת על הישר: $2x + y - 13 = 0$ והצלע AC נמצאת על הישר: $-x + 2y + 4 = 0$. מרכז המעגל M נמצא על הישר: $y = x - 1$. ראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש ABC.
- א. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש ABC.
 נתון כי הישר BM מאונך לציר ה-x.
 ב. מצא את משוואת הצלע BC.
 ג. מצא את המרחק בין מרכז המעגל החסום במשולש ABC ובין מרכז המעגל החוסם את המשולש הזה.

- (2) נתונה מנסרה ישרה ABCDA'B'C'D', שבסיסה הוא מעוין ABCD (ראה סרטוט).

נקודה F נמצאת על המישור ACD' כך ש: $\overrightarrow{D'F} = t\overrightarrow{D'A} + \frac{1}{4}\overrightarrow{D'C}$, t הוא פרמטר.
 נתון: DF מאונך למישור ACD', $\angle ADC = 120^\circ$, $|\overrightarrow{DC}| = 4$.



- נסמן: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.
- א. בטא את \overrightarrow{DF} באמצעות: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.
 ב. מצא את t.
 ג. חשב את נפח המנסרה.
 נתון: הנקודה D היא ראשית הצירים, הקודקוד A נמצא על החלק החיובי של ציר ה-x, הקודקוד D' נמצא על החלק החיובי של ציר ה-z, $C = (-2, \sqrt{12}, 0)$.
 ד. מצא את שיעורי הנקודה F.

(3) ענה :

א. פתור את המשוואה : $(z+i)^2 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$, z הוא מספר מרוכב.

נסמן את החלקים הממשיים של פתרונות המשוואה ב- a_1 וב- a_2 כך ש- $a_1 < a_2$.
נתונים שני מקומות גאומטריים :

$$I. |z - ia_1| = \sqrt{3}$$

$$II. |z - ia_2| = \sqrt{3}$$

ב. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.
הישר $y = x$ נמצא במישור גאוס. ישר זה חותך את המקומות הגאומטריים
שסרטטת בסעיף ב בראשית הצירים ובשתי נקודות אחרות שמיוצגות על ידי
שני המספרים המרוכבים w_1 ו- w_2 .

ג. פתור את המשוואה : $z^3 = w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot w_2 \cdot \overline{w_2}$, z הוא מספר מרוכב.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{ax}{\ln(x) - a}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ב, בטא את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגה.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האנך לציר ה- x

העובר בנקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x = e^{a+2}$ ועל ידי ציר

ה- x , הוא 3.

ג. מצא את a .

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = 9^{-x} - 6 \cdot 3^{-x} + m$, m הוא פרמטר.

א. בתת-סעיפים (1)-(3) בטא את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות

לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן

(אם יש כאלה).

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצא את הערך של הפרמטר m .

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) היעזר בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסרטט סקיצה של גרף

הפונקציה $\ln(f(x))$.

ד. הסבר מדוע: $\int_0^1 [\ln(f(x)) - \ln(4)] dx < \ln\left(\frac{9}{4}\right)$.

תשובות סופיות:

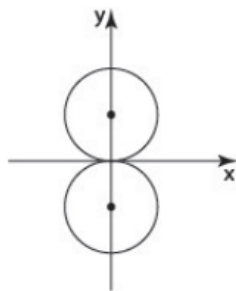
1. א. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ ב. $y = 2x + 1$ ג. 2.5

2. א. $\overrightarrow{DF} = t\overrightarrow{u} + \frac{1}{4}\overrightarrow{v} + \left(\frac{3}{4} - t\right)\overrightarrow{w}$ ב. $t = \frac{1}{4}$ ג. $V = 16\sqrt{3}$

ד. $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{12}}{4}, 1\right)$

3. א. $Z_1 = -\sqrt{3} - 2i$, $Z_2 = \sqrt{3}$ ב. להלן סרטוט:

ג. $\sqrt[3]{36}cis240^\circ$, $\sqrt[3]{36}cis120^\circ$, $\sqrt[3]{36}$



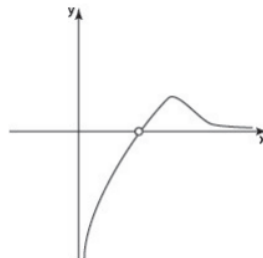
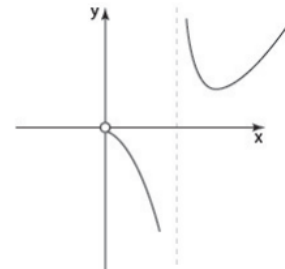
2. (2). (e^{a+1}, ae^{a+1}) מינימום.

4. א. (1). $0 < x \neq e^a$

ב. (1). $0 < x \neq e^a$ (2). $\left(e^{a+1}, \frac{1}{ae^{a+1}}\right)$ מקסימום.

(3). להלן סרטוט:

ג. $a = \frac{1}{2}$ (3). להלן סרטוט:



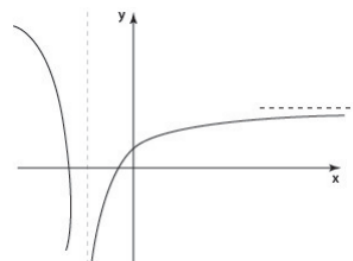
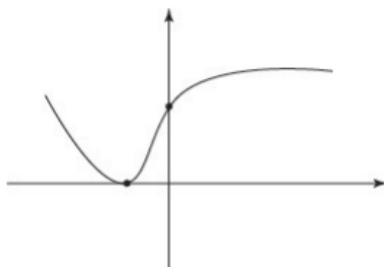
2. (2). $y = m$ (3). $(-1, m-9)$ מינימום.

5. א. (1). כל x

ג. (1). להלן סרטוט:

ב. $m = 9$

(2). להלן סרטוט:



ד. הוכחה.

בגרות 2022 מועד קיץ א':

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.

מרכזו של המעגל האחד הוא בנקודה M ומשוואתו היא: $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, הוא פרמטר חיובי.

מרכזו של המעגל האחר הוא בנקודה N ומשוואתו היא: $(x-15)^2 + y^2 = R^2$.
אורכו של הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הוא 9, והיחס בין אורכי הרדיוסים של המעגלים הוא: $1:2$, $r < R$.

א. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו N ואת שתי האפשרויות למשוואת המעגל שמרכזו M.

נתון כי: $a < 15$.

ב. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של שני המעגלים ושל כל המשיקים המשותפים לשני המעגלים.

ג. מצאו את משוואת המשיק העובר בנקודה המשותפת לשני המעגלים.

ד. הישר: $mx - y + n = 0$ הוא משיק משותף לשני המעגלים.

מצאו את m ואת n (שתי אפשרויות).

נתונים שני מעגלים אחרים המשיקים זה לזה מבחוץ.

משוואות המעגלים הן: $(x-t)^2 + y^2 = r^2$; $(x-k)^2 + y^2 = R^2$, t ו-k הם

פרמטרים. ערכי הרדיוסים r ו-R זהים לאלה שמצאתם בסעיף א.

ה. האם ייתכן כי שני הישרים שאת משוואותיהם מצאתם בסעיף ד משיקים

גם למעגלים האלה? אם כן – מצאו את t ואת k. אם לא – נמקו.

(2) נתונות ארבע נקודות הנמצאות באותו המישור :
 $p, A(4, p, -1), B(7, 5, 5), C(1, -1, 2), D(-2, 5, -4)$ הוא פרמטר.

- א. מצאו את משוואת המישור ABCD.
- ב. חשבו את ערך הפרמטר p .
- ג. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא ריבוע.
- הנקודה S היא קודקוד של פירמידה SABCD שבסיסה ABCD. המקצוע SC מונח על הישר : $x = (0, -4, 1) + t(1, 3, 1)$. נתון כי נפח הפירמידה הוא 81.
- ד. מצאו את שיעורי הנקודה S (שתי אפשרויות).
- נתון מישור נוסף π המאונך למקצוע SC.
- ה. מצאו את הזווית שבין המישור ABCD ובין המישור π .

(3) נתונה המשוואה : $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, z הוא מספר מרוכב.
 z_1 הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

- א. מצאו את משוואת המעגל.
- חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1 .
- ב. חשבו את שטח הריבוע.
- ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.
- מכפילים ב- $r_1 \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2 \cdot (\cos(\alpha + 60^\circ) + i \sin(\alpha + 60^\circ))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.
- נתון : r_1 ו- r_2 חיוביים, $r_1 \neq r_2$.
- ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.
- נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי 1.2 משטח הריבוע בסעיף ב.
- ה. חשבו את $r_1 \cdot r_2$.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$ המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- y (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1-e^x}{e^x-x}$, המוגדרת לכל x .

ב. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לציר ה- y .

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

(3) הוכיחו כי: $g'(x) = \frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$.

ג. היעזרו בסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ומצאו כמה נקודות מקסימום וכמה נקודות מינימום יש לפונקציה $g(x)$. נמקו את התשובה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = -1$.

5) נתונה הפונקציה : $f(x) = x + \ln(x^2 - 15)$

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע כי אין לה נקודות קיצון.

נתונה הפונקציה : $g(x) = e^{f(x)}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

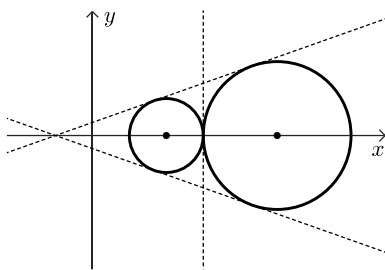
(2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה : $y = f'(x) \cdot g(x)$, על ידי

ציר ה- x ועל ידי הישרים : $x = -6$ ו- $x = -5$.

תשובות סופיות:

1. א. משוואת המעגל שמרכזו N: $(x-15)^2 + y^2 = 36$, משוואת המעגל שמרכזו M:



ב. להלן סקיצה: $(x-6)^2 + y^2 = 9$, $(x-24)^2 + y^2 = 9$

ג. $x = 9$ ד. $m_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_1 = \frac{3}{\sqrt{8}}$, $m_2 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$, $n_2 = -\frac{3}{\sqrt{8}}$

ה. $t = -21$, $k = -21$

2. א. $2x - y - 2z + 1 = 0$ ב. $p = 11$ ג. הוכחה.

ד. $(-2, -10, -1)$, $(4, 8, 5)$, 72.5°

3. א. $x^2 + y^2 = 10$ ב. 20 ג. $(-3, -1)$, $(-1, 3)$, $(1, -3)$

ד. מקבילית. ה. 2.4

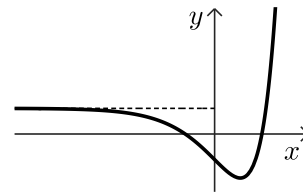
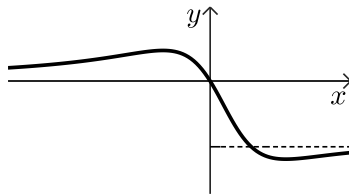
4. א. (1) $x \rightarrow \infty: y = 1$ א. (2) $(0, -1)$ א. (3) עלייה: $x > 1$, ירידה: $x < 1$.

א. (4) להלן סקיצה: ב. (1) $x \rightarrow \infty: y = -1$, $x \rightarrow -\infty: y = 0$

ב. (2) $(0, 0)$ ב. (3) הוכחה.

ג. נקי מינימום אחת, נקי מקסימום אחת.

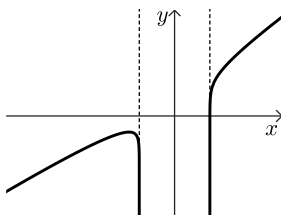
ד. להלן סקיצה:



ה. $\ln \frac{e+1}{e} \approx 0.31$

א. (2) $x = -\sqrt{15}$, $x = \sqrt{15}$

א. (4) להלן סקיצה:



5. א. (1) $x < -\sqrt{15}$, $x > \sqrt{15}$

א. (3) $\max(-5, -2.7)$

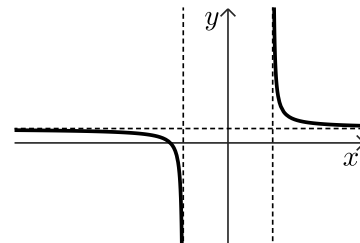
ב. (1) $x < -\sqrt{15}$, $x > \sqrt{15}$

ב. (2) $x = -\sqrt{15}$, $x = \sqrt{15}$, $y = 1$

ב. (3) $(-5, 0)$

ג. (1) $\max(-5, 0.067)$

ב. (4) להלן סקיצה:



ג. (2) עלייה: $x > \sqrt{15}$, $x < -5$, ירידה: $-5 < x < -\sqrt{15}$ ד. 0.015

בגרות 2022 מועד קיץ ב'

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונות הנקודות $A(-5, 3)$ ו- $B(0, -2)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם. נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו. נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M.

ג. מהי משוואת האליפסה? נסמן ב-F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד השמאלי של האליפסה. הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו-T, ואת המעגל M בנקודות K ו-L.

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF.

(2) נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

נסמן: $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{OB} = \underline{v}$, $\vec{OC} = \underline{w}$.

נתון: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$.

הנקודה H מקיימת: $\vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w}$, s, t, k הם פרמטרים.

נתון כי \vec{OH} מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

א. הוכיחו כי: $t = s = k$.

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

ב. הוכיחו כי: $\vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$, והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.

ג. הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} את הווקטור \vec{OP} שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z. נתון: $|u| = a$.

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $20\frac{5}{6}$. חשבו את a .

(3) המספר: $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

$$\text{נתון: } \frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

א. מצאו את α .

$$\text{נתון: } |2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$$

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z+k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקציה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב- B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקציה $g(x)$ הוא הגבוה

מבין כל נקודות הפיתול שלה. נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(5) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקציה מוגדרת לכל x ורציפה,

הפונקציה היא אי-זוגית, הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה, ולפונקציה יש

נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם: $a, (-1, -a)$ הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$

המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקציה $h(x)$ חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך

את ציר ה- x בשתי נקודות.

נתון: $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. (1) מצאו את הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל: $\int_{-5}^t g(x) dx$, $t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים: $\int_{-5}^t g(x) dx = 2 \cdot \int_{-5}^5 g(x) dx$? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) א. $x - y + 3 = 0$ ב. $M(0,3), R=5$ ג. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ד. $\frac{5}{3}$

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\overrightarrow{OP_1} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}, \overrightarrow{OP_2} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{w}$

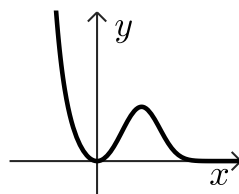
ד. $\ell = t(1,1,1)$ ה. $x + y + z - a = 0$ ו. $a = 5$

(3) א. $\alpha = 240^\circ$ ב. $R = 3$ ג. הוכחה.

ד. (1) $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ד. (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(4) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) מינימום: $x = 0$, מקסימום: $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 0.87$

ב. $a = 1$ ג. להלן סקיצה: ד. (1) כל x ד. (2) 2 נקודות.

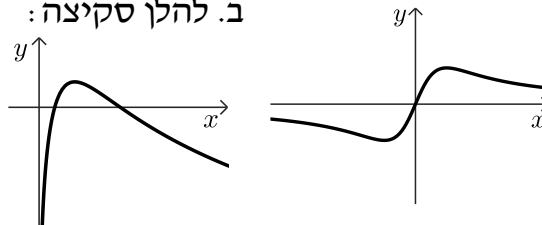


ה. $g(x) = \frac{e - e^{1-x^3}}{3}$

(5) א. להלן סקיצה: ב. (1) $x > 0$ ב. (2) $x = 0$ ב. (3) $a > 1$

ג. (1) $g(x) = 2\ln(1+x^2)$ ג. להלן סקיצה:

ג. (2) זוגית. ד. $t = 0$



בגרות 2023 מועד חורף:

ענה על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים

(1) נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b הוא פרמטר חיובי.

ידוע כי המוקדים של האליפסה נמצאים על ציר ה- x .

נסמן את נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y ב- D_1 ו- D_2 ,

את המוקד השמאלי של האליפסה נסמן ב- F_1 ואת המוקד הימני שלה ב- F_2 .

נתון כי המרובע $F_1D_1F_2D_2$ הוא ריבוע.

א. (1) מצאו את הערך של b .

(2) חשבו את שטח הריבוע $F_1D_1F_2D_2$.

הציבו במשוואת האליפסה $b^2 = 4.5$ וענו על סעיפים ב-ד.

נקודה E היא נקודה כלשהי על האליפסה.

מחברים באמצעות קו ישר את המוקד השמאלי F_1 עם הנקודה E

וממשיכים את הקו הישר עד לנקודה M (ראו סרטוט), כך שמתקיים $EM = EF_2$.

ב. הוכיחו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הוא מעגל, ורשמו את משוואתו.

מזיזים את המעגל שמצאתם בסעיף ב ימינה ב- $\frac{3}{\sqrt{2}}$ יחידות, ומתקבל מעגל אחר.

מכפילים ב- $\frac{2}{3}$ את שיעור ה- y של כל אחת מן הנקודות שעל המעגל האחר,

ומתקבל עקום חדש.

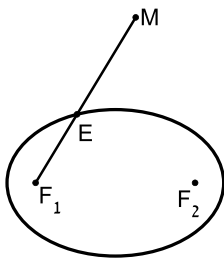
ג. זהו את צורת העקום החדש, ומצאו את משוואתו.

נתון משולש ששניי מוקדקודיו הם נקודות החיתוך של העקום החדש

עם ציר ה- x , והקודקוד הנוסף נמצא גם הוא על העקום החדש.

ד. מצאו את השטח הגדול ביותר האפשרי של המשולש.

נמקו את תשובתכם.



(2) נתונים שני מישורים, π_1 ו- π_2 :

$$\pi_1: (k+2)x + y + (k+1)z + 11 = 0$$

$$\pi_2: (k+1)x + y + z - 5 = 0$$

k הוא פרמטר.

א. הסבירו מדוע בהכרח שני המישורים נחתכים זה עם זה.

ידוע כי ישר החיתוך בין שני המישורים, ℓ_1 , מקביל לישר $\ell_2: \underline{x} = (1, 2, -1) + m(-1, k, k)$.

ב. (1) מצאו את הערך של k .

(2) מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1 .

(3) מצאו את הזווית בין המישורים π_1 ו- π_2 .

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ_1 ועל מישור $[yz]$.

הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של ציר ה- y עם המישורים π_1 ו- π_2 בהתאמה.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודות A, P, ו-B.

(2) מצאו את שטח המשולש APB.

(3) נתונה משוואה I: $w^6 = -27$, כאשר w הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, כאשר z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית

את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס, המייצגות את הפתרונות של

משוואה II, נמצאות על מעגל – ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של

משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II

מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 5e^x + 4}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

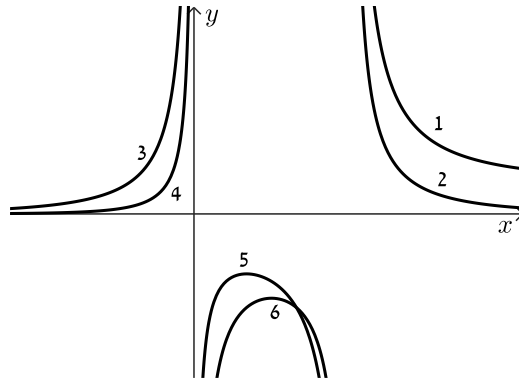
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{5e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4}$, המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין גרף הפונקציה $g(x)$.

לפניכם סרטוט הגרפים של שתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$. כל אחד מהחלקים של הגרפים מסומן בסרטוט בספרה אחרת.



ג. רשמו לאיזו פונקציה שייך כל אחד מהחלקים המסומנים בסרטוט. נמקו את תשובתכם.

ד. לפניכם שני ביטויים, II-I. קבעו, בנוגע לכל אחד מהביטויים, אם הוא שלילי או חיובי. נמקו ללא חישוב.

$$\text{I. } \int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx \qquad \text{II. } \int_{\ln \frac{8}{5}}^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx$$

ה. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ובין הישרים $x = \ln 9$ ו- $x = \ln 16$.

5 נתונה הפונקציה $f(x) = 4x(\ln(x^2) - 1)$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 (3) הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.
 ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (2) האם יש לפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$, המאונכות לצירים.
 (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 (4) בכמה נקודות הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים זה עם זה? נמקו את תשובתכם.
 ד. כתבו דוגמה לפונקציה קדומה של $g(x)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. (1) $b = \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{4.5}$ א. (2) 9. ב. מתקבל: $(x + \sqrt{4.5})^2 + y^2 = 36$
- ג. אליפסה: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ד. 24.
- (2) א. הסבר. ב. (1) $k = 1$ ב. (2) למשל: $(0, 21, -16) + t(-1, 1, 1)$
- ב. (3) 10.89° ג. (1) $P(0, 21, -16)$, $A(0, -11, 0)$, $B(0, 5, 0)$ ג. (2) 128.
- (3) א. $w_1 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(30^\circ)$, $w_2 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(90^\circ)$, $w_3 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(150^\circ)$
- $w_4 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(210^\circ)$, $w_5 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(270^\circ)$, $w_6 = \sqrt{3} \operatorname{cis}(330^\circ)$
- ב. (1) $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -\frac{3}{2}$, $z_4 = -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i$, $z_5 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_6 = \frac{3}{2} - \sqrt{3}i$
- ב. (2) להסביר. ב. (3) הוכחה. ג. (1) דלתון. ג. (2) 1.5.
- (4) א. (1) $x \neq 0$, $x \neq \ln 4$ א. (2) $x \rightarrow \infty: y = 2$, $x \rightarrow -\infty: y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$
- א. (3) עלייה: $0 < x < \ln \frac{8}{5}$, ירידה: $x > \ln 4$, $\ln \frac{8}{5} < x < \ln 4$, $x < 0$
- ב. $\left(\ln \frac{5}{2}, -\frac{50}{9}\right)$ ג. הפונקציה $f(x)$ ב-1, 4, 5. הפונקציה $g(x)$ ב-2, 3, 6.
- ד. ביטוי I: שלילי, ביטוי II: חיובי. ה. $\ln(4.5) \approx 1.5$
- (5) א. (1) $x \neq 0$ א. (2) $(\sqrt{e}, 0)$, $(-\sqrt{e}, 0)$ א. (3) הוכחה.
- ב. (1) $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{8}{\sqrt{e}}\right)$, $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$ ב. (2) אין פיתול.
- ב. (3) להלן סקיצה: ג. (1) $x \neq \pm\sqrt{e}$, $x \neq 0$ ג. (2) $x = \pm\sqrt{e}$, $x = 0$ ג. (3) להלן סקיצה: ג. (4) 6 נקודות.
- ד. למשל: $G(x) = \frac{\ln|\ln(x^2) - 1|}{8}$
- 