

מתמטיקה

שאלון 807

5 יחידות לימוד



הקדמה כללית:

ספר התרגילים של גול הינו פרי של שנות ניסיון רבות בהוראת חומרי הלימוד ובהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי הפרקים התואמים את תכנית הלימודים הנוכחית של משרד החינוך ומכיל את כל חומר הלימוד הנדרש. תוכן הפרקים מורכב מחלק תיאורטי ותרגול. החלק התיאורטי מכיל הסברים ופתרונות מלאים בסרטונים באתר הבגרות של גול, וחלק התרגול נועד לאפשר לתלמיד לתרגל את החומר הנלמד. השאלות שמופיעות תחת הנושאים הקרויים 'תרגול נוסף' אינן פתורות בסרטונים היות והן ניתנות כבונוס למורה ולתלמיד.

הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותנו היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

בהצלחה!

צוות האתר גול

ספר זה בנוי לפי הפרקים הבאים:

1	גיאומטריה אנליטית – נקודה וישר
25	גיאומטריה אנליטית – המעגל
42	גיאומטריה אנליטית – אליפסה ופרבולה
54	גיאומטריה אנליטית – מקומות גיאומטריים והוכחות
61	התיבה והקובייה
74	מנסרה ישרה
83	פירמידה ישרה
101	וקטורים גיאומטריים
115	וקטורים אלגבריים
146	מספרים מרוכבים
158	חוקי החזקות והשורשים
169	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
182	משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים
207	בעיות גדילה ודעיכה
224	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות
248	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות
272	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי
286	חשבון אינטגרלי

כל פרק פותח בתוכן עניינים מפורט בו תוכלו להתרשם מהסידור הפנימי והנושאים הכלולים בפרק זה. סדר הצגת הנושאים בספר זה ובאתר הבגרות של גול הינו עקבי ומאפשר עבודה שוטפת במהלך הלימוד.

תוכן העניינים:

פרק 1.....	2
גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר.....	2
סיכום כללי:	2
נוסחאות כלליות:	2
משוואת הישר:	2
מצב הדדי בין שני ישרים:	2
שיפועים של ישרים:	2
חלוקת קטע ביחס נתון:	3
הצגה כללית של ישר ומרחקים:	3
מבוא לגיאומטריה אנליטית:	4
שאלות העוסקות באמצע קטע:	4
שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:	5
שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:	6
שאלות העוסקות במשוואת ישר:	6
שאלות מסכמות:	10
תשובות סופיות:	15
נושאים מתקדמים עם משוואת הישר:	20
שאלות העוסקות בחלוקת קטע ביחס נתון:	20
שאלות העוסקות במרחק נקודה מישר:	20
שאלות העוסקות במיקום נקודה ביחס לישר:	21
שאלות העוסקות במרחק בין ישרים מקבילים:	22
תשובות סופיות:	24

פרק 1

גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ יחושב לפי: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.
- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

משוואת הישר:

- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y = mx + n$.
- כאשר: m הוא שיפוע הישר ו- n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .
- נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2, n_1 = n_2$.

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$.

חלוקת קטע ביחס נתון:

שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ ביחס של $k:l$

הם: $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}, y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax + By + C = 0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1, y_1)$ מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא: $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ כאשר $B > 0$.

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax + By + C_1 = 0$ ו- $Ax + By + C_2 = 0$ כאשר $B > 0$ הוא: $d = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:

- אם $C_1 > C_2$, $(d > 0)$ אז הישר $Ax + By + C_1 = 0$ מתחת ל- $Ax + By + C_2 = 0$.
- אם $C_1 < C_2$, $(d < 0)$ אז הישר $Ax + By + C_1 = 0$ מעל ל- $Ax + By + C_2 = 0$.

מבוא לגיאומטריה אנליטית:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

(1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$, $B(5,-8)$ ב. $A(-3,0)$, $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$, $B(-4,-5)$ ד. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$

ה. $A(6,-1)$, $B(-3,-1)$ ו. $A(4,7)$, $B(4,-12)$

(2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.

מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$, $M(2,1)$ ב. $A(-6,-8)$, $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$, $M(4,-7)$ ד. $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

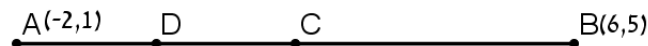
(3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.

ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $B(2,-4)$, $C(6,1)$.

מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

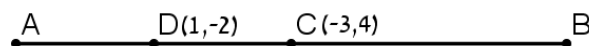
(4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.

ידוע כי: $A(-2,1)$, $B(6,5)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



(5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.

ידוע כי: $C(-3,4)$, $D(1,-2)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



(6) הנקודות $A(2,-7)$, $B(-10,4)$ ו- $C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.

מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

(7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7), B(-3,7)$ ב. $A(6,2), B(1,2)$

ג. $A(-3,10), B(0,6)$ ד. $A(6,-9), B(1,3)$

ה. $A(4,7), B(13,-1)$ ו. $A(6,6), B(-9,-9)$

(8) חשב את היקף המשולש ABC שקדקודיו הם: $A(3,-2)$, $B(4,9)$, $C(0,14)$.

(9) נתונות נקודות $A(14,4)$, $B(6,y)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את y .

(10) נתונות נקודות $A(x,-12)$, $B(15,-2)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את x .

(11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

(12) במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה- y של הקדקודים B ו-C הוא -2.
מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

(13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC} = \sqrt{50}$ וידוע כי: $A(-3,-2)$, $B(-4,1)$. מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

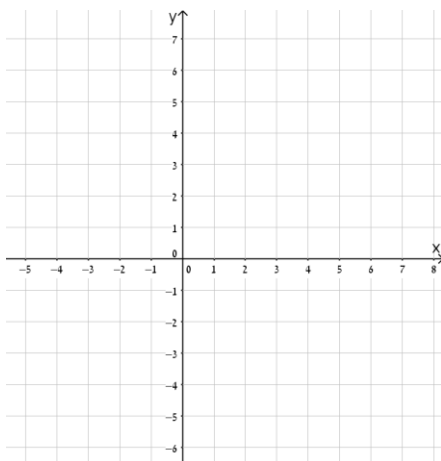
- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| א. $A(5,2)$, $B(4,1)$ | ב. $A(3,-2)$, $B(-3,1)$ |
| ג. $A(7,8)$, $B(6,15)$ | ד. $A(0,5)$, $B(7,0)$ |
| ה. $A(6,9)$, $B(6,-7)$ | ו. $A(4,-1)$, $B(18,-1)$ |

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקדקודיו הם: $A(6,5)$, $B(2,13)$, $C(4,-7)$ מונחים עליהם.

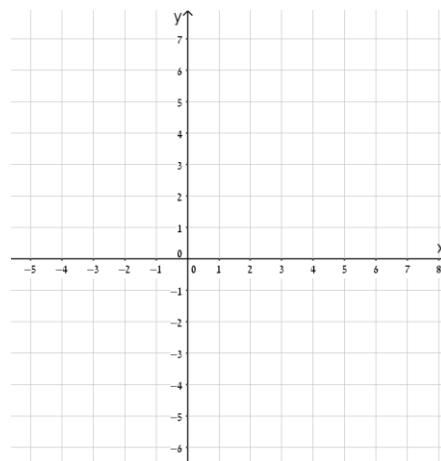
שאלות העוסקות במשוואת ישר:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

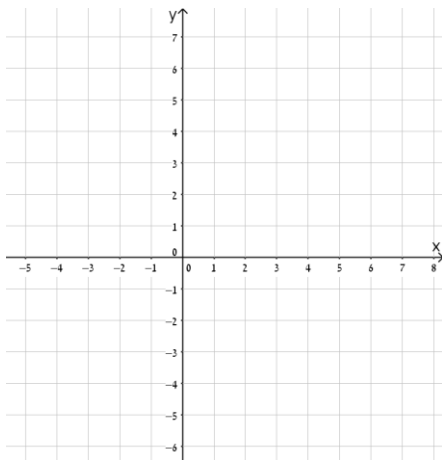
ב. $y = -x + 5$



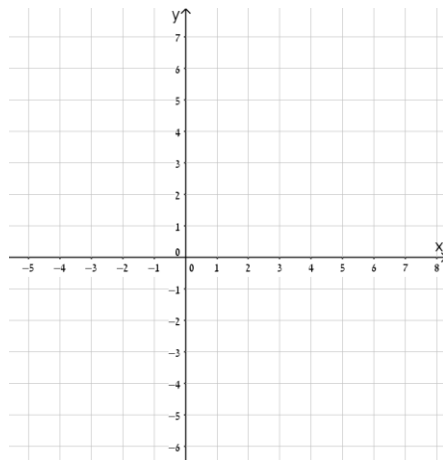
א. $y = x + 4$



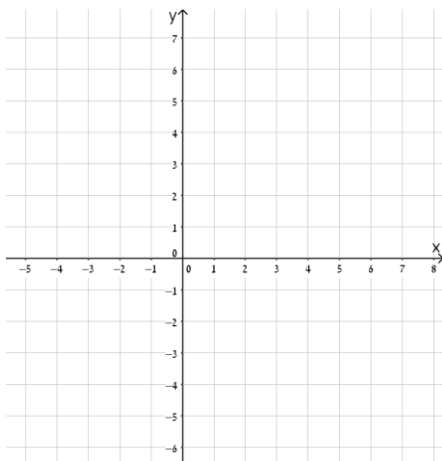
ד. $y = -3x + 5$



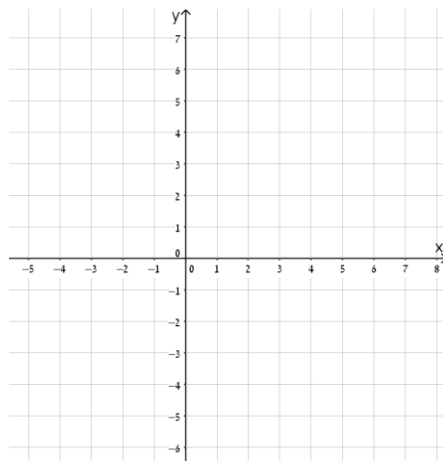
ג. $y = 2x - 3$



ו. $y = 8 - 4x$

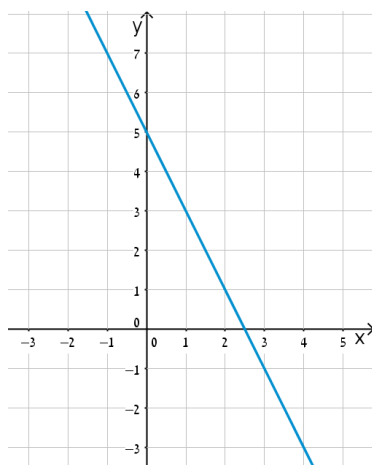


ה. $y = 3x - 1$

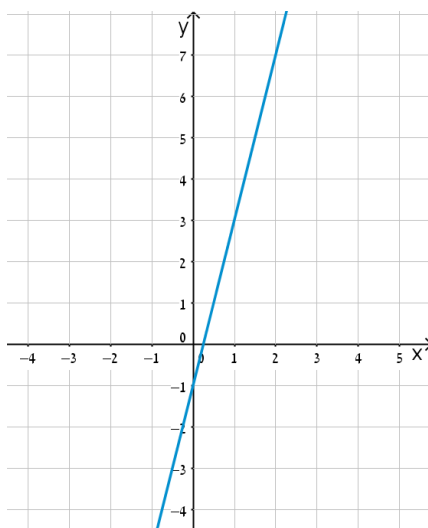


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

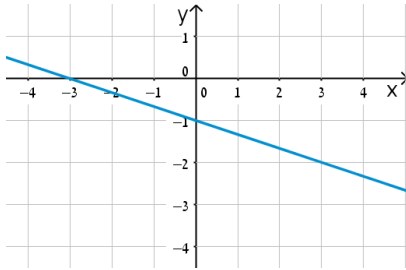
ב.



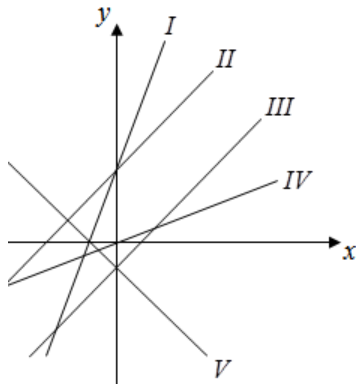
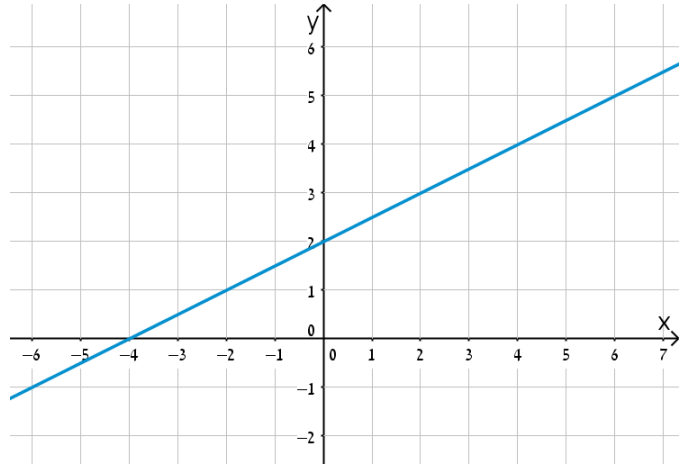
א.



ד.



ג.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

- א. $y = x + 3$
- ב. $y = -x - 1$
- ג. $y = 2x + 3$
- ד. $y = x - 1$
- ה. $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואה הישר הבאה: $y = 2x + 3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(0, 4)$, $D(6, 15)$.

20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y = mx - 2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4, 2)$ נמצאת על הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7, -2)$ נמצאת עליו.

21) הנקודות $A(5, -3)$, $B(4, 1)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y = mx + n$. מצא את m ואת n .

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

- א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$
- ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$
- ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

(23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים :

<p>א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$</p> <p>ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$</p> <p>ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$</p> <p>ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$</p>	<p>א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$</p> <p>ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$</p> <p>ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$</p> <p>ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$</p>
---	---

(24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה :

<p>א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$</p> <p>ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$</p> <p>ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$</p> <p>ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$</p>	<p>א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$</p> <p>ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$</p> <p>ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$</p> <p>ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$</p>
---	---

(25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y = 6x - 2$.

- א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?
 ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

(26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקדקודים : $A(5, -1)$, $B(3, 7)$, $C(-5, 5)$.
 הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

(27) מצא את משוואות הישרים הבאים :

- א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1, 3)$ ושיפועו $m = 2$.
 ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0, -4)$ ושיפועו $m = \frac{1}{3}$.
 ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5, 9)$ ושיפועו $m = 0$.
 ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5, -12)$ ו- $B(6, -6)$.
 ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6, 4)$ ומקביל לישר : $y = 2x - 3$.
 ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3, -5)$ ומקביל לציר ה- y .
 ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7, -3)$ ומאונך לישר : $y = x + 3$.
 ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים : $y = 11x - 4$ ו- $y = 3x - 12$ ומקביל לישר : $y = 7x + 5$.

שאלות מסכמות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

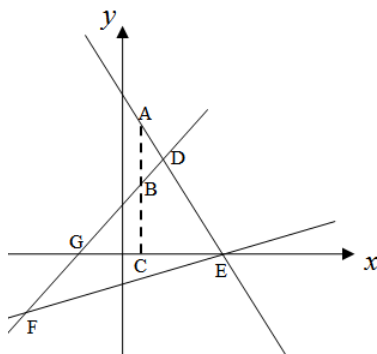
ידוע כי: $A(3, -2)$, $B(2, 4)$, $D(-2, 2)$.

- כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקדקודים $A(-9, 1)$ ו- $B(5, -7)$.

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x + 3y + 6 = 0$.

- מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
- מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים

המופיעים בשרטוט: $x - y + 2 = 0$, $x - 4y - 4 = 0$,

ו- $2x + y - 8 = 0$. הקטע AC מקביל לציר ה- y .

א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC} = 3$.

חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקדקוד $A(-6, 1)$.

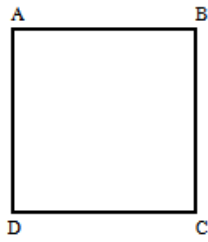
משוואת התיכון BD היא $x - y = 1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x + 5y = 67$.

מצא את שיעורי הקדקוד C.

32) נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$) ובו משוואת השוק BC היא: $x = 2$.

משוואת הבסיס CD היא $2x + 3y = 7$ וידוע כי $A(-4, 1)$.

- מצא את משוואת הבסיס AB.
- מצא את שיעורי הקדקודים B ו- C.
- מעבירים את האלכסון AC. הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



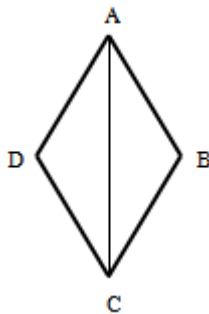
33) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: (1, 4).

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

נתון גם: $D(4, 13)$, $m_{CD} = -\frac{1}{3}$ ו- $BC = \sqrt{90}$ ס"מ.

ב. איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת? הראה חישוב מתאים.
נתון גם: $B(-8, 7)$.

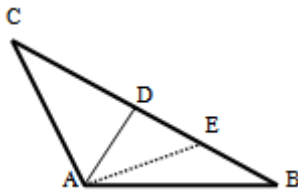
ג. איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת? הראה חישוב מתאים.
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



34) המרובע ABCD הוא מעוין.

ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: (0, 6).
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y = -1.5x + 6$ ואחת ממשוואות הצלעות היא: $5y + x = 4$.

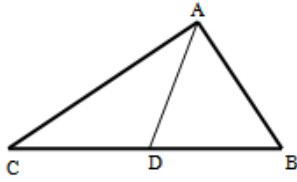
א. מצא את משוואת האלכסון השני.
ב. מצא את שאר קדקודי המעוין.



35) המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

ב- $\triangle ABC$ מעבירים את הגובה AD לבסיס BC ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE = BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $D(5, 7)$, $E(8.5, 2.5)$.

א. מצא את שיעורי שאר קדקודי המשולש.
ב. כתוב את משוואת השוק AC.



36 נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווים שטח ABD ו-ACD. הצלע BC מונחת על הישר: $y = 4$ וידוע כי שיעור ה- x של הנקודה C הוא: $x_C = -1$.

כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB} = -2$.

א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

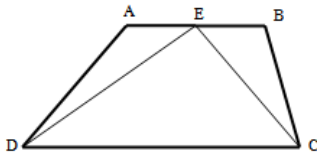
i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?



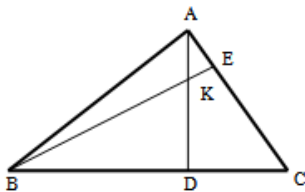
37 המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה- x . שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x = -5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$ כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\angle DEC = 90^\circ$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A, D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.



38 AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.

ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.

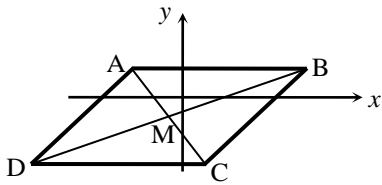
שיעורי הנקודות D ו-E הם: $D(-2,4)$, $E(3,5)$.

א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.



39 נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y = -7$.

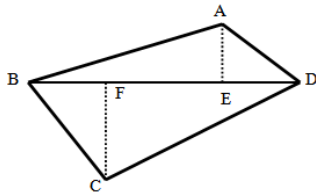
אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים

בנקודה: $M(-0.5, -3)$. שיפוע האלכסון AC הוא -4.

א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את שטח המשולש BMC.



40 נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם:

$A(3, 13)$, $B(-2, 4)$, $C(9, 3)$, $D(8, 14)$

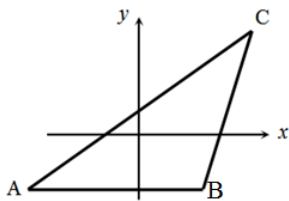
מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



41 על הישר $y = -5$ מסמנים את

הנקודות: $A(-7, -5)$, $B(2, -5)$.

הנקודה C נמצאת על הישר: $y = x - 5$.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.

א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

i. הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ii. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ג. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB. ידוע כי D נמצאת ברביע

השלישי. מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח המשולש DAC

יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = BC$) ובו נתון: $A(-4, 12)$, $B(x, 6)$ ו- $C(4, 8)$.

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

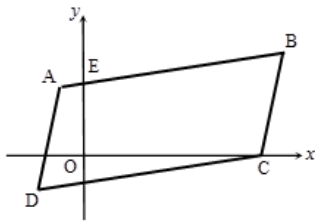
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון ($x_E < 5$) כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.



43 באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קדקודי המקבילית הבאים: $A(-1, y)$

ו- $B(x, 4)$. $(x$ ו- y נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD} = \sqrt{104}$.

א. מצא את x ו- y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה- x בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC} = \sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y ב- E.

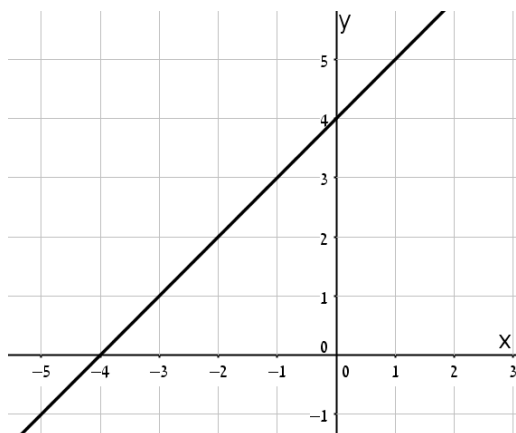
שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

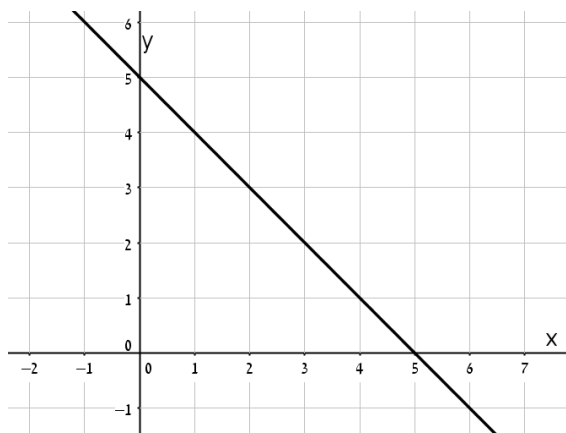
- (1) א. $(3, -2)$ ב. $(0, -1)$ ג. $(0, 0)$
- ד. $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5, -1)$ ו. $(4, -2.5)$
- (2) א. $B(0, 4)$ ב. $B(6, 8)$ ג. $B(-5, -3)$ ד. $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3) $D(4, -1.5)$
- (4) $D(0, 2)$
- (5) $A(5, -8)$, $B(-11, 16)$
- (6) $D(18, 0)$
- (7) א. $d_{AB} = 7$ ב. $d_{AB} = 5$ ג. $d_{AB} = 5$ ד. $d_{AB} = 13$
- ה. $d_{AB} = \sqrt{145}$ ו. $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8) $P_{ABC} \approx 33.862$ יחידות אורך
- (9) $y = -2$ או $y = 10$
- (10) $x = 39$ או $x = -9$
- (11) $B(-1, -3)$
- (12) $B(3, -2)$, $C(-3, -2)$
- (13) $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$ יחידות אורך
- (14) א. $m_{AB} = 1$ ב. $m_{AB} = -\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB} = -7$ ד. $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB} = 0$
- (15) $m_{AB} = -2$, $m_{BC} = -10$, $m_{AC} = 6$

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

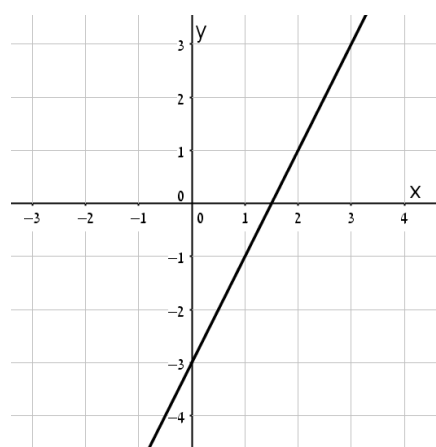
א.



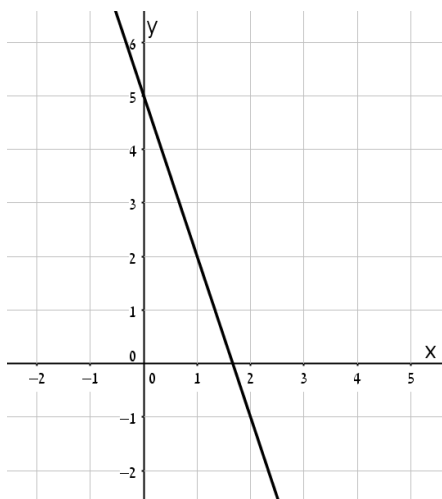
ב.



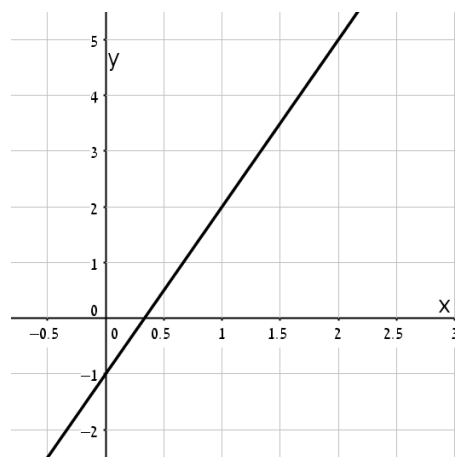
ג.



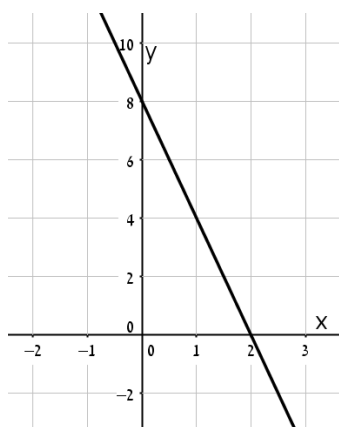
ד.



ה.



ו.



(17) א. $y = 4x - 1$ ב. $y = -2x + 5$ ג. $y = \frac{1}{2}x + 2$ ד. $y = -\frac{1}{3}x - 1$

(18) א. II. ב. V. ג. I. ד. III. ה. IV.

(19) נמצאות : A, D. לא נמצאות : B, C.

(20) $m = \frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

(21) $m = -4$, $n = 17$.

(22) א. $(-1, 1)$ ב. $(-6, -18)$ ג. $(10, 16)$

(23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

(24) מאונכים : ג', ד'. לא מאונכים : א', ב'.

(25) א. $m_{AB} = m_{CD} = 6$, $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$.

ב. הכל הפוך : $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$, $m_{BC} = m_{AD} = 6$.

(26) שאלת הוכחה.

(27) א. $y = 2x + 1$ ב. $y = \frac{1}{3}x - 4$ ג. $y = 9$ ד. $y = 6x - 42$

ה. $y = 2x + 16$ ו. $x = 3$ ז. $y = -x - 10$ ח. $y = 7x - 8$

(28) א. $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$ ב. $C(-6, 0)$ ג. $y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$

(29) א. $l_{BD} : y = 3x - 22$ ב. $l_{BC} : y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$

(30) א. 18 יח"ש S_{EDF} . ב. 3 יחידות אורך AB .

(31) $C(14, 5)$.

(32) א. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ ב. $B(2, -3)$, $C(2, 1)$ ג. 12 יחידות שטח S_{ABC} .

- (33)** א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
 ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
 ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. 90° יח"ש S .

(34) א. $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$ ב. $(5,5)$, $(4,0)$, $(-1,1)$.

(35) א. $B(12,-2)$, $C(-2,16)$ ב. $y = -8x$.

(36) א. $y = -2x + 22$

- ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.
 ב. ii. $B(9,4)$, $D(4,4)$.
 ג. ii. $AD = 5$, $BC = 10$.
 ג. ii. משולש ישר זווית – אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

(37) א. $D(-5,-8)$, $A(-5,-2)$, $E(-1,0)$.

ב. $CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$ ג. $C(5,-3)$ ד. $S_{DEC} = 30$ יח"ש.

(38) א. $AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$, $AC: y = -x + 8$.

ב. $A(7,1)$ ג. $BE: y = x + 2$, $BC: y = 3x + 10$ ד. $B(-4,-2)$.

(39) א. $y = -4x - 5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. 34 סמ"ר $S_{BMC} = S_{DMC}$.

(40) א. $d_{BD} = \sqrt{200}$, $y = x + 6$ ב. $E(5,11)$, $F(3,9)$.

ג. $d_{CF} = \sqrt{72}$, $d_{AE} = \sqrt{8}$ ד. $S_{ABCD} = 80$.

(41) א. $C(t, t-5)$ ב. i. $AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}$, $BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$.

ii. $t = 8$, $BC = 10$ ס"מ ג. $D(-20,-5)$.

$$D(0,10) \text{ .ii}$$

$$y = -0.5x + 10 \text{ .i .ג}$$

$$x = -2 \text{ .נ (42)}$$

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} \text{ .ii}$$

$$E(2,4) \text{ .i .ז}$$

$$.C(8,0) \text{ .ג}$$

$$C(8,0) , C(10,0) \text{ .ב}$$

$$x = 9 , y = 2 \text{ .נ (43)}$$

נושאים מתקדמים עם משוואת הישר:

שאלות העוסקות בחלוקת קטע ביחס נתון:

(1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $A(2, -5)$, $B(-12, 16)$.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}.$$

מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי:

(2) קדקודי משולש ABC הם: $A(-1, 3)$, $B(6, 0)$, $C(4, -12)$.

מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

(3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC

שקדקודיו הם: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

(4) קדקודי המשולש ABC הם: $A(5, 1)$, $B(7, -3)$, $C(-1, 4)$.

מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקדקוד A.

שאלות העוסקות במרחק נקודה מישר:

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2, 4)$ מהישר $4x + 3y + 11 = 0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4, 3)$ מהישר $y = 3x - 1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3, -11)$ מהישר $x - 5 = 0$.

(6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $3x - 4y + 6 = 0$, $A(-5, -1)$

ב. $12x + 5y - 17 = 0$, $A(-3, 8)$

ג. $2y + 7 = 0$, $A(11, -2)$

ד. $3x - 14 = 0$, $A\left(6, -\frac{1}{2}\right)$

(7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x + y - 7 = 0$ שמרחקן מהישר $2x - y + 5 = 0$ הוא $\sqrt{20}$.

(8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קדקודיה הם: $A(7, -1)$, $B(-5, 4)$, $C(-1, 7)$, $D(11, 2)$.

(9) מצא את שטחו של המשולש $\triangle ABC$ שבו שיעורי קדקוד A הם $A(5, -3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x - 4 = 0$ ו- $2x - y - 1 = 0$.

(10) מצא את שטחו של משולש שקדקודיו הם: $A(2, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(-5, -2)$.

(11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x - 2y + 6 = 0$, שמרחקן מהישר: $2x - y - 14 = 0$ הוא $3\sqrt{5}$.

(12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x + 3y - 20 = 0$, שמרחקן מהישר: $3x + 2y + 13 = 0$ הוא $2\sqrt{13}$.

שאלות העוסקות במיקום נקודה ביחס לישר:

(13) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x - 2y + 6 = 0$, שמרחקה מהישר: $2x - y - 14 = 0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

(14) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x + 3y - 20 = 0$, שמרחקה מהישר: $3x + 2y + 13 = 0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

(15) נתון משולש ABC שבו נתונים הקדקודים: $A(1, 1)$, $B(13, 6)$. הקדקוד C נמצא על הישר $2x - y - 19 = 0$ ונמצא מתחת לצלע AB . מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

16 נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים :
 $I: x+2y+1=0$, $II: x-2y-11=0$, $III: 2x-y+6=0$
 מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

17 מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים : $I: 4x-3y+2=0$, $II: 3x-4y-51=0$, $III: 3x+4y-11=0$

18 מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

19 מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

20 מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

21 מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

22 מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

23 מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

24 מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

שאלות העוסקות במרחק בין ישרים מקבילים:

25 מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

26 מצא את המרחק בין הישרים המקבילים : $5x+12y+25=0$, $5x+12y-14=0$

(27) נתונים הישרים : $y = 6x + 5$, $12x - 2y - 15 = 0$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

(28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB : 3x + y = 0$ ו- $CD : 3x + y - 6 = 0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

(29) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x - 2y + 5 = 0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1, -1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

(30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4, 1)$ ו- $Q(7, 2)$.
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

(31) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x - y + 3 = 0$ והצלע BP מונחת על הישר $x + 2y + 3 = 0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

תשובות סופיות:

- (1) $P(-2,1)$ (2) $M(3,-3)$
- (3) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ (4) 1.697 יחידות אורך
- (5) א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2 ד. $1\frac{1}{3}$ (6) א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$
- (7) $(4,3), \left(-2\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$ (8) $S_{ABCD} = 57$ יח"ש
- (9) $S_{ABC} = 18$ יח"ש (10) $S_{ABC} = 2.5$ יח"ש
- (11) $(4,9), (64,99)$ (12) $(-1,8), (-157,216)$
- (13) $(64,99)$ (14) $(-1,8)$
- (15) $C(11,3)$ (16) $(-1,-4)$
- (17) $(2,-5)$ (18) $y = 3x - 4$
- (19) $y = 2x + 10, y = \frac{2}{11}x + 6\frac{4}{11}$ (20) $y = -\frac{22}{31}x + 16\frac{12}{31}, y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$
- (21) $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}, y = 6$ (22) $x = 1$ או $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$
- (23) $x = 10$ או $y = 1\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{3}$ (24) $y = -\frac{4}{3}x - 7$
- (25) $3x - 4y + 28 = 0, 3x - 4y - 12 = 0$ (26) 3
- (27) $\frac{25}{\sqrt{148}}$ (28) $(2.1, -3.3), S = 14.4$ יח"ש
- (29) $3x - 2y - 15 = 0, y = -\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}x + 3$
- (30) $y = 3x$ (31) $P\left(2, -2\frac{1}{2}\right)$

תוכן העניינים:

פרק 2	26
גיאומטריה אנליטית - המעגל	26
המעגל :	26
הגדרה :	26
משוואת מעגל :	26
משוואת מעגל קנוני :	26
משיק למעגל :	26
מיתר המחבר שתי נקודות השקה :	26
שאלות יסודיות :	27
שאלות עם מעגלים המשיקים לצירים :	29
שאלות עם משיק למעגל :	30
שאלות יסודיות שונות :	30
תשובות סופיות :	35
נושאים מתקדמים במעגל :	38
כתיבת משוואת מעגל ע"י השלמה לריבוע :	38
שאלות עם משוואת המשיק למעגל :	38
שאלות עם מיתר המחבר שתי נקודות השקה :	39
שאלות מסכמות שונות :	39
תשובות סופיות :	41

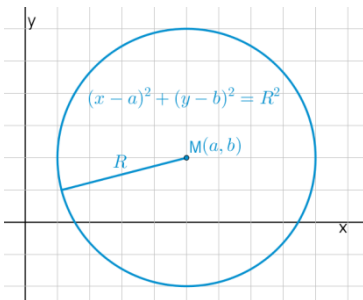
פרק 2

גיאומטריה אנליטית - המעגל

המעגל:

הגדרה:

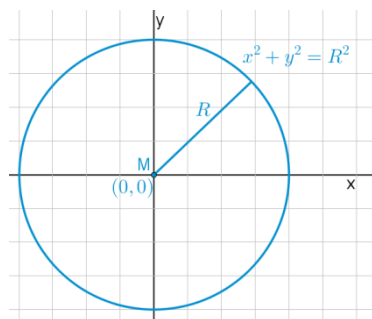
המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.



משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a, b)$

ורדיוסו R היא: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.



משוואת מעגל קנוני:

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0, 0)$)

ורדיוסו R היא: $x^2 + y^2 = R^2$.

משיק למעגל:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בנקודה $A(x_1, y_1)$

שעליו היא: $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים

למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1, y_1)$ שמחוץ

למעגל היא: $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$.

שאלות יסודיות:

(1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג. $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

(2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם R:

א. $M(4, -2), R=3$

ב. $M(-3, 5), R=10$

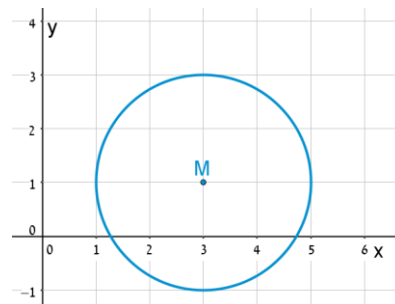
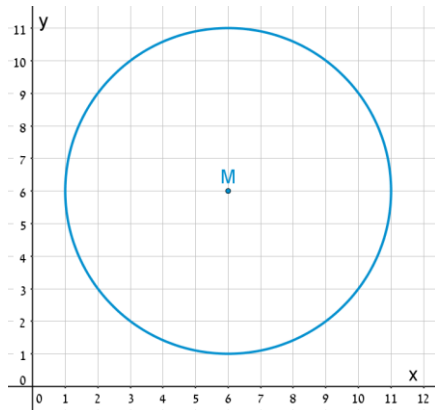
ג. $M(5, 5), R=\sqrt{40}$

ד. $M(10, -12), R=\sqrt{30}$

(3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

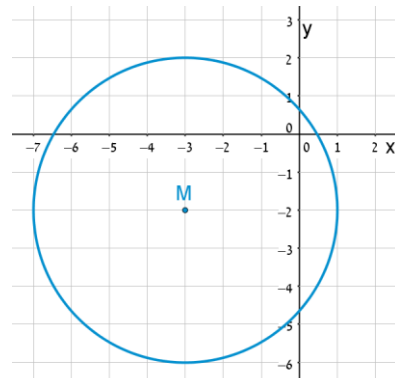
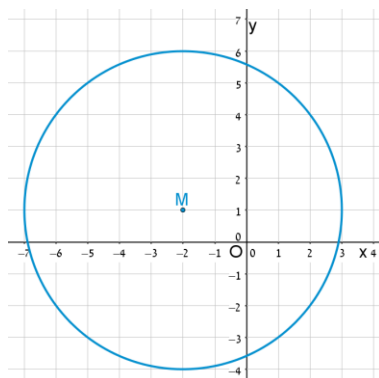
א.

ב.



ג.

ד.



(4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

(5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 9$.

(6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 3$.

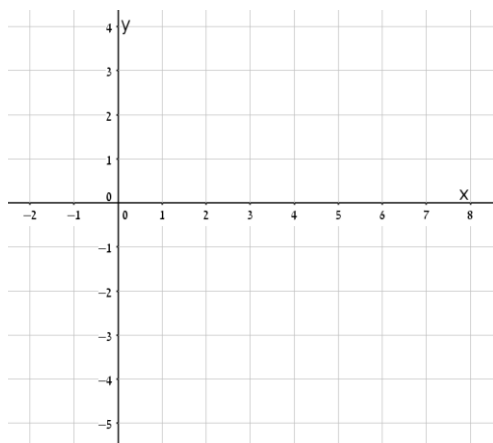
(7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y = 2x - 1$.

(8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו- $B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

(9) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x = 4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- x מיתר שאורכו 12.

(10) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4,-3)$ אם ידוע כי הישר $y = -3x + 7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

(11) מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקדקודיו הם:
 $A(22,-24)$, $B(-10,40)$, $C(-30,28)$



(12) נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$, האחד הוא בעל רדיוס R והשני בעל רדיוס של $2R$.
א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות R).
ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R = 2$?
ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.

13 שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6,2)$ ו- $M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

14 נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2 + y^2 - 10x - 10y + a = 0$ כאשר a פרמטר.

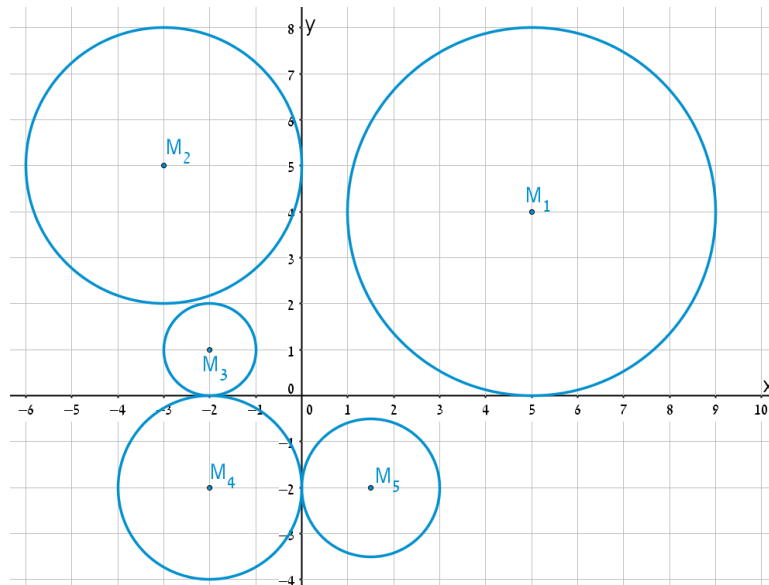
- א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות a .
 ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור a ?
 נמק ומצא את תחום ההגדרה של a .

i. $a = 5$

ii. $a = 55$

שאלות עם מעגלים המשיקים לצירים:

15 כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16 מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17 מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה- x ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

18 מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x + 3y + 6 = 0$ והוא משיק לשני הצירים.

19 מצא את משוואתו של מעגל שמשקף לציר ה- y ולישר $y = 6$ ומרכזו על הישר $y = 3x - 2$ ברביע הראשון.

שאלות עם משיק למעגל:

20 מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ בנקודות על המעגל שבהן $y = 5$.

21 נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ ומשוואת הישר $y = 2x + m$ כאשר m פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של m הישר ישיק למעגל ולאילו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

שאלות יסודיות שונות:

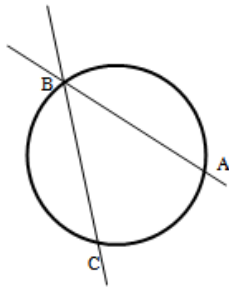
22 נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- x . מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

23 נתון ישר שמשוואתו $y = 2x - 10$. הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטר. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

24 נתון המעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- x . הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C. מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (O ראשית הצירים).

25 נתון ישר שמשוואתו $y = x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2 + y^2 = 32$ בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס. מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.



26) הישרים: $9y + 11x = 94$ ו- $y = -3x + 14$ נחתכים בנקודה B.

דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9, 1)$.

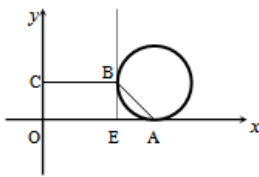
ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B)

בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y = -3x + 14$ עם המעגל.



27) נתון מעגל המשיק לציר ה- x בנקודה A. מהנקודה E שעל

ציר ה- x מעלים אנך המשיק למעגל בנקודה B

(ראה איור). הקטע BC מקביל לציר ה- x ו-O היא נקודת

ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית ABCO ששטחו

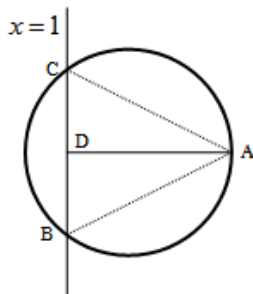
הוא 170 סמ"ר. ידוע כי: $C(0, 10)$ ו- $AE = 10$ ס"מ.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את שיעורי הנקודה B.

ii. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. כתוב את משוואת המעגל.



28) הנקודה $A(17, 4)$ נמצאת על המעגל

שמשוואתו: $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$.

הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך

ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD

המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.

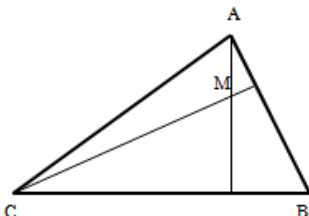
א. מצא את רדיוס המעגל.

ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר: $x=1$

ii. חשב את שטח המשולש ABC.



29) נתון משולש ABC. משוואות הצלעות AB ו-BC

במשולש ABC הן בהתאמה: $2y - x = 56$

ו- $8y + x = 104$.

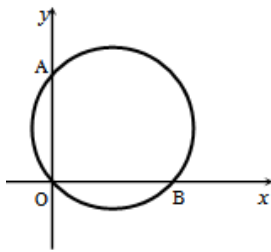
מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים

בנקודה $M(0, -2)$ שבתוך המשולש.

א. מצא את משוואות הגבהים.

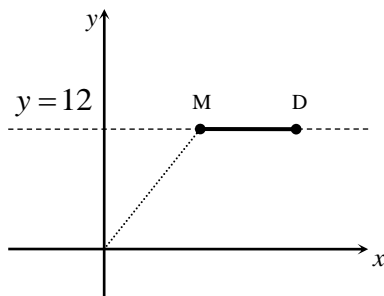
ב. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.

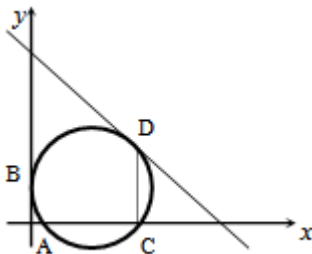


- 30** באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.
 המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.
 א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
 ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
 ג. חשב את היקף המלבן

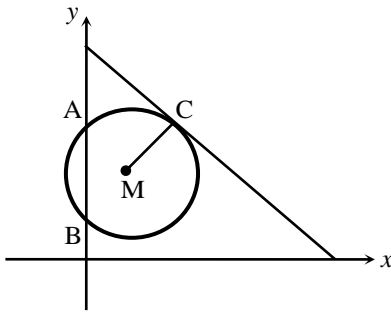
- 31** המעגל: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = a+4$, $a > 0$, חותך את ציר ה-x בנקודה שבה: $x=1$.
 א. מצא את a.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.
 ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
 ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.



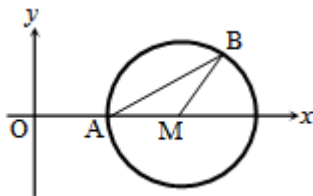
- 32** הנקודות M ו-D נמצאות על הישר: $y=12$.
 ידוע כי שיעור ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק בין הנקודות M ו-D (ראה איור).
 בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו והוא האורך DM.
 א. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
 ii. מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
 ב. כתוב את משוואת המעגל.
 ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.



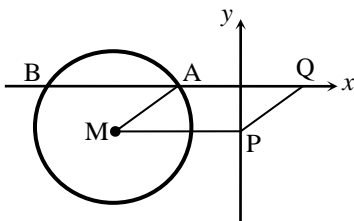
- 33** מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה-y בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.
 א. כתוב את משוואת המעגל.
 מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.
 דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
 ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.



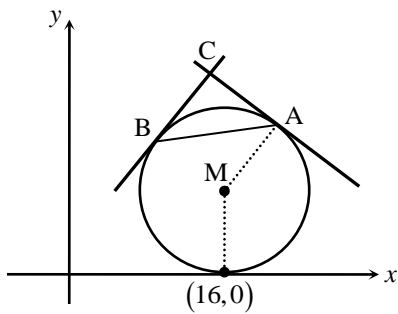
- 34** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M. המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו-B. מעבירים משיק למעגל: $6x + 7y = 191$ דרך הנקודה: $C(12, 17)$.
- כתוב את משוואת הרדיוס MC.
 - ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר: $y = 10$.
 - מצא את שיעורי הנקודה M.
 - מצא את אורך רדיוס המעגל.
 - כתוב את משוואת המעגל.
 - מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y .
 - חשב את שטח המשולש AMB.



- 35** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על ציר ה- x . המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה A. מסמנים את ראשית הצירים ב-O. ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5, 0)$.
- מצא את משוואת המעגל.
 - כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.
 - מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.
 - סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב את שטח המשולש AMB.



- 36** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו היא: $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 8$. מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x ב-A ו-B (ראה איור).
- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 - מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת מרכז המעגל M ומסמנים את חיתוכם ב-P.
 - מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.
 - כתוב את משוואת הישר PQ.
 - הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל בנקודה $(-2, -4)$.



37 נתון מעגל שרדיוסו R ($R < 16$) ומשיק לציר ה- x

בנקודה שבה: $x = 16$.

א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה- y או לא. נמק.

מהנקודה $A(22, 18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A .

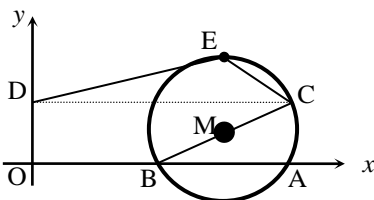
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה: $x_B < x_M$

אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה C .

i. מצא את שיעורי הנקודה C .

ii. מצא את שטח המשולש ABC .



38 באיור שלפניך נתון מעגל

שמשוואתו: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = 5$, פרמטר a .

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה $A(10, 0)$

א. מצא את a אם ידוע כי: $a > -10$.

ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה

של המעגל עם ציר ה- x .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M .

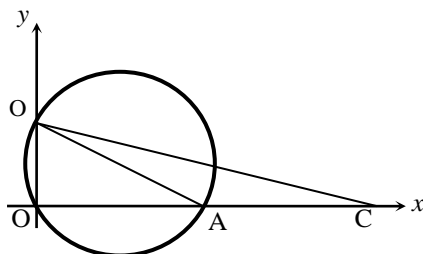
ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- y בנקודה D .

הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה- y הגדול ביותר על המעגל.

מחברים את הנקודות E ו- D כך שנוצר המחומש $DECBO$.

חשב את שטחו.



39 באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו:

$(x-5)^2 + (y-3)^2 = R^2$, רדיוס המעגל R .

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.

א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב

את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה- x כך ש- A היא אמצע הקטע CO .

i. מצא את שיעורי הנקודה C .

ii. חשב את שטח המשולש ABC .

תשובות סופיות:

$$\text{א. } M(3, -5), R = 7 \quad \text{ב. } M(-0.5, 0), R = \sqrt{10} \quad (1)$$

$$\text{ג. } M(m, -n), R = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

$$\text{א. } (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \text{ב. } (x+3)^2 + (y-5)^2 = 100 \quad (2)$$

$$\text{ג. } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 40 \quad \text{ד. } (x-10)^2 + (y+12)^2 = 30$$

$$\text{א. } (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \text{ב. } (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \quad (3)$$

$$\text{ג. } (x+3)^2 + (y+2)^2 = 16 \quad \text{ד. } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$\text{א. } M(3, -3), (x-2)^2 + (y+1)^2 = 72 \quad (4)$$

$$\text{ב. } (x+5)^2 + (y-6)^2 = 232 \quad (5)$$

$$\text{ג. } x^2 + (y+7)^2 = 100 \quad (6)$$

$$\text{א. } (x+1)^2 + (y+3)^2 = 169 \quad \text{ב. } (x-7.8)^2 + (y+14.6)^2 = 169 \quad (7)$$

$$\text{ג. } (x-1)^2 + y^2 = 18 \quad (8)$$

$$\text{א. } (x-4)^2 + (y-8)^2 = 100 \quad \text{ב. } (x-4)^2 + (y+8)^2 = 100 \quad (9)$$

$$\text{ג. } (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4\frac{2}{5} \quad (10)$$

$$\text{ד. } (x+2)^2 + (y-4)^2 = 1360 \quad (11)$$

$$\text{א. } (x-3)^2 + (y+1)^2 = R^2, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4R^2 \quad (12)$$

$$\text{ב. } (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\text{א. } (x-6)^2 + (y-2)^2 = 65, (x+3)^2 + (y+4)^2 = 50 \quad (13)$$

$$\text{א. } R = \sqrt{50-a} \quad \text{ב. } a = 5, a < 50 \quad (14)$$

$$M_1 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16, M_2 : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 9 \quad (15)$$

$$, M_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1, M_4 : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$. M_5 : (x-1.5)^2 + (y+2)^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$. (x \pm 4)^2 + (y \pm 4)^2 = 16 \quad (16)$$

$$. (x-16)^2 + (y-8)^2 = 64 \quad (17)$$

$$\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y+1\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}, (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36 \quad (18)$$

$$. (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 \quad (19)$$

$$. 4x+3y=27 \text{ ו- } 4x-3y+35=0 \quad (20)$$

$$. -9 < m < 11 : \text{חותך}, m=11, -9 : \text{משיק} \quad (21)$$

$$. (0,0), (6,0), (0,-8) \text{ א. ב. 27 יח"ש.} \quad (22)$$

$$. 12.5 \text{ יחידות אורך.} \quad (23)$$

$$. S_{\triangle BOC} = \text{יח"ש} \sqrt{80} \quad (24)$$

$$. y = -x+8, (x-8)^2 + (y-8)^2 = 32 \quad (25)$$

$$. (4,2) \text{ ג. } (x+9)^2 + (y-1)^2 = 170 \text{ ב. } (2,8) \text{ א.} \quad (26)$$

$$. (x-22)^2 + (y-10)^2 = 100 \text{ ב. } A(22,0) \text{ ii. } B(12,10) \text{ i. א.} \quad (27)$$

$$S=128 \text{ ii. } d=16 \text{ i. ג. } B(1,-4), C(1,12) \text{ ב. } R=10 \text{ א.} \quad (28)$$

$$. x^2 + (y+2)^2 = 900 \text{ ג. } (-24,16) \text{ ב. } y=8x-2, y=-2x-2 \text{ א.} \quad (29)$$

$$. S = \text{יח"ש} 28 \text{ ג. } C(8,6) \text{ ב. } O(0,0), A(0,6), B(8,0) \text{ א.} \quad (30)$$

$$. S = \frac{1}{4} \text{ ט. } y = -2x-1 \text{ ג. } (0,-1), (-2,3) \text{ ב. } a=1 \text{ א.} \quad (31)$$

(32) א.i. $d = 15$ ii. $x = 18$ ב. $(x-9)^2 + (y-12)^2 = 81$

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה- x – כאשר מציבים ב- y אפס מתקבלת

משוואה ריבועית ללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה אחת – $(12, 0)$.

(33) א. $(x-15)^2 + (y-12)^2 = 225$ ב. $C(24, 0)$, $D(24, 24)$ ג. $y = -\frac{3}{4}x + 42$

(34) א. $y = \frac{7}{6}x + 3$ ב.i. $M(6, 10)$ ii. $\sqrt{85}$

iii. $(x-6)^2 + (y-10)^2 = 85$ ג. $A(0, 17)$, $B(0, 3)$ ד. 42 יח"ש.

(35) א. $(x-10)^2 + y^2 = 25$ ב. $y = 0.5x - 2.5$ ג. $B(13, 4)$

ד. 10 יח"ש S_{AMB} .

(36) א. $A(-2, 0)$, $B(-6, 0)$ ב. $Q(2, 0)$ ג. $y = x - 2$

(37) א. $(x-16)^2 + (y-R)^2 = R^2$, המעגל אינו חותך את ציר ה- y .

ב. $(x-16)^2 + (y-10)^2 = 100$, $R = 10$ ג. $y = -\frac{3}{4}x + 34\frac{1}{2}$

ד. $y = \frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$ ה.i. $C(14, 24)$ ii. 50 יח"ש.

(38) א. $a = -8$ ב. $B(6, 0)$ ג. $y = 0.5x - 3$ ד. $(10, 2)$

ה. $11 + 5\sqrt{5}$ יח"ש S_{DECB} .

(39) א. $\sqrt{34}$ יחידות אורך $R =$, $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 34$ ב. $A(10, 0)$, $B(0, 6)$

ג. i. $C(20, 0)$ ii. 30 יח"ש S_{ABC} .

נושאים מתקדמים במעגל:

כתיבת משוואת מעגל ע"י השלמה לריבוע:

(1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2 + 10x + y^2 + 6y - 2 = 0$	ב. $x^2 - 2x + y^2 + 20y + 1 = 0$
ג. $x^2 - 8x + y^2 - 14y = 0$	ד. $x^2 + y^2 + 2y = 0$
ה. $x^2 + x + y^2 - 3\frac{3}{4} = 0$	ו. $x^2 + 2mx + y^2 + 6my + m^2 = 0$

(2) משוואתו של מעגל היא $x^2 + y^2 - 6mx - 2(m+2)y + 4m + 4 = 0$. מצא את ערכו של m אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y = 2x + 7$.

(3) משוואתו של מעגל היא $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$. מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y = 2x - 4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

שאלות עם משוואת המשיק למעגל:

(4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1, 8)$ המשיק לשני הצירים.

(5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 37 = 0$ היוצא מהנקודה $A(10, -3)$.

(6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ בנקודה $A(5, -4)$.

(7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2 + (y-1)^2 = 5$ בנקודות שבהן $x = -1$.

- 8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2, 6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.
- א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.
- ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.
- 9) נתון המעגל $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ והישר $y = 2x + m$.
- לאילו ערכים של הפרמטר m הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של m הישר חותך את המעגל?

שאלות עם מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

- 10) ענה על הסעיפים הבאים:
- א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3, 8)$.
- ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2 + (y-1)^2 = 5$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5, 1)$.
- 11) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 16x + 48 = 0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק החיצוני של ציר ה-y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה-y בנקודה Q. נתון: $PQ = 14$. מצא את שיעורי הנקודה Q.

שאלות מסכמות שונות:

- 12) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 64 = 0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.
- 13) המעגלים $x^2 + y^2 + 22x - 6y = m$ ו- $x^2 + y^2 = 26$ נחתכים בזווית ישרה. מצא את ערכו של m .

14 בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x - y - 9 = 0$ והשוק AD מונחת על הישר $x + y - 3 = 0$. שיעורי הקדקוד B הם $(3, -8)$. מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

15 מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x - y + 10 = 0$.

תשובות סופיות:

1) א. $M(3, -5)$, $R = 7$ ב. $M(1, -10)$, $R = 10$

ג. $M(4, 7)$, $R = \sqrt{65}$ ד. $M(0, -1)$, $R = 1$

ה. $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $R = 2$ ו. $M(m, -3m)$, $R = 3m$

2) $m = -1$

3) $2\sqrt{80}$

4) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ או $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$

5) 8

6) משיק: $y = 3x - 19$, נורמל: $x + 3y + 7 = 0$

7) $(-5, 1)$

8) שאלת הוכחה.

9) משיק: $m = -9, 11$, חותך: $-9 < m < 11$

10) א. $x - 4y + 11 = 0$ ב. $x = -1$

11) $Q(0, -6)$ או $Q(0, -8)$

12) $x^2 + y^2 = 16$, $A(-3.2, 2.4)$, $4x - 3y + 20 = 0$

13) $m = -26$

14) $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 20$

15) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

תוכן העניינים:

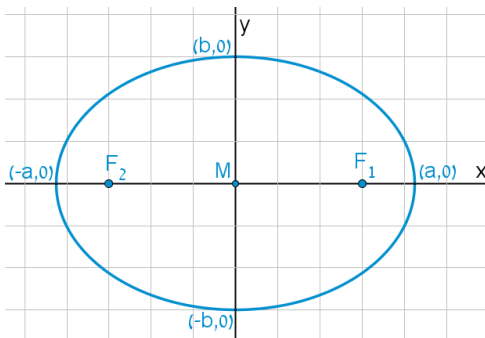
43	פרק 3
43	גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה
43	האליפסה :
43	הגדרה :
43	מושגים באליפסה :
44	משוואות וקשרים :
44	שאלות :
47	תשובות סופיות :
48	הפרבולה :
48	הגדרה :
48	מושגים בפרבולה :
48	משוואת הפרבולה :
49	משיק לפרבולה :
49	מיתר המחבר שתי נקודות השקה :
49	תיאורים גרפיים :
50	שאלות :
53	תשובות סופיות :

פרק 3

גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

האליפסה:

הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x .
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y .
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה (x, y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה (x, y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 36$.
- (2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.
- (3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.
- (4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $(-3\sqrt{3}, 2)$.
- (5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $(\sqrt{10}, 0)$.
- (6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, -2\sqrt{5})$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.
- (7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $(-2, \sqrt{6})$ ו- $(\sqrt{14}, 1)$.
- (8) מצא על האליפסה $3x^2 + 4y^2 = 144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

(9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3,1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.

(10) מצא על האליפסה $x^2 + 3y^2 = 12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

(11) מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2 + 4y^2 = 50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

(12) נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ והישר $y = 2x + k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.

(13) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2 + 5y^2 = 120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

(14) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

(15) באליפסה $5x^2 + 9y^2 = 90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

(16) באליפסה $x^2 + 5y^2 = 16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

(17) באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y .

מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $(4\sqrt{2}, 0)$.

(18) מצא באליפסה $2x^2 + 3y^2 = 12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $(1.5, 1)$.

(19) ישר שמשוואתו $x - y - 3 = 0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $(2, -1)$. מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2\sqrt{2}, -2)$.

(20) נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1$, $(0 < a \neq 5)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a = 4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

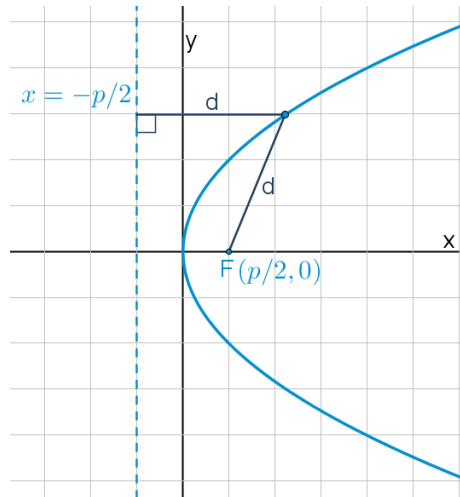
תשובות סופיות:

- (1) $2a = 12, 2b = 6$
- (2) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1$
- (3) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$
- (4) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
- (5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$
- (6) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$
- (7) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$
- (8) $(4, \sqrt{24}), (4, -\sqrt{24}), (-4, \sqrt{24}), (-4, -\sqrt{24})$
- (9) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
- (10) $(\sqrt{6}, \sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$
- (11) $y = \sqrt{6}x$
- (12) משיק: $k = \pm 12$, חותך: $-12 < k < 12$
- (13) $S = 60$ יח"ש
- (14) $S = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$
- (15) $S = 26\frac{2}{3}$ יח"ש
- (16) $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$
- (17) $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1$
- (18) $y = -x + 2.5$
- (19) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$
- (20) א. $a = \sqrt{12.5}$.ii $a \neq \sqrt{12.5}$

הפרבולה:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.



מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- x אצלנו).

משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

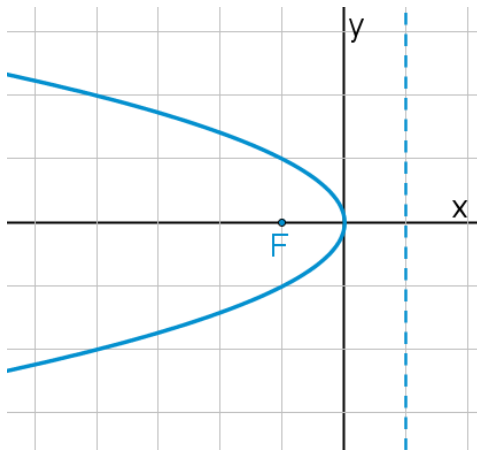
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה הוא: $m = \frac{p}{y_0}$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

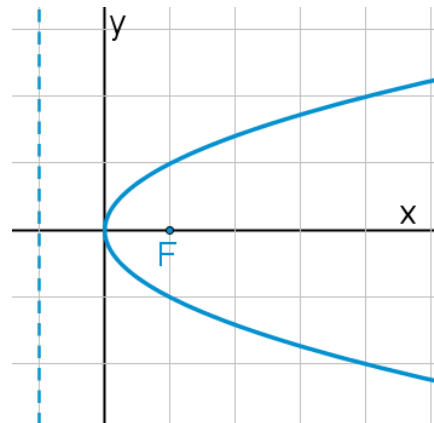
- משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2 = 2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0, y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2 = -2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$:



שאלות:

- (1) נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.
- (2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x = -3$ הוא המדריך שלה.
- (3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.
- (4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9, -6)$.
- (5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2 + 2y^2 = 18$.
- (6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.
- (7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 10x$.
- (10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 2px$.
- (11) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- x , וקדקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

12 את נקודה A שעל הפרבולה $y^2 = 20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

13 קצות מיתר בפרבולה $y^2 = 4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- x של נקודה A הוא 4.

14 מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

15 מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 2x$, שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

16 נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$ והישר $y = 2x + k$, לאיזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?

17 נתונה הפרבולה $y^2 = 6x$.

- א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x = 1.5$.
- ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- x .

18 הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2 = 12x$. נתון כי $y_A = 4$. מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

19 נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2 = 28x$ ברביע הרביעי. אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה- x הוא $7\sqrt{5}$. מצא את משוואת הנורמל.

20 מרחק המוקד של הפרבולה $y^2 = 8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$. מצא את משוואת המשיק.

21 נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p .

- 22** נתונות שתי פרבולות : I. $y^2 = 6x$, II. $y^2 = 12x$
 ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B.
 הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.
- 23** נתונה הפרבולה $y^2 = 14x$ והנקודה $(-1, -3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.
- 24** נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- x שלה קטן ב-1 משיעור ה- y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18. מצא את משוואת המיתר.
- 25** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2 = 24x$ והוא משיק למדריך שלה.
- 26** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8, 0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2 = 10x$ בשתי נקודות.
- 27** נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה- x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.
- 28** הנקודה $A(2, 3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה- y .
- 29** נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ שבה $p > 4$. הישר $x = 2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. מצא את שיעורי קדקוד C של משולש $\triangle ABC$ שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה- x .
- 30** אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 16$ חותכת את הפרבולה $y^2 = 2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

תשובות סופיות:

- (1) $p = 9, F\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$
- (2) $y^2 = 12x$
- (3) $y^2 = 10x$
- (4) $y^2 = 4x$
- (5) $y^2 = 12x$
- (6) $\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{15}\right), \left(2\frac{1}{2}, -\sqrt{15}\right)$
- (7) $(1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8})$
- (8) $\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$
- (9) $S_{OAB} = 300\sqrt{3}$ יח"ש
- (10) $S_{ABO} = 12\sqrt{3}p^2$ יח"ש
- (11) $S_{ABC} = 3\sqrt{3}p^2$ יח"ש
- (12) $S_{ABCF} = 40\frac{5}{8}$ יח"ש
- (13) $B\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ או $B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
- (14) $y = -2x$ או $y = 2x$
- (15) $y = 2x - 2$
- (16) $k = \frac{1}{2}$
- (17) $y = x + 1\frac{1}{2}, y = -x - 1\frac{1}{2}$.א
- (18) $B\left(6\frac{3}{4}, -9\right)$
- (19) $y = \frac{1}{2}x - 7\frac{7}{8}$
- (20) $y = x + 2$
- (21) $A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right)$
- (22) הוכחה.
- (23) $7x + 3y - 7 = 0$
- (24) $y = -9x + 18$
- (25) $(x - 6)^2 + y^2 = 144$
- (26) $(x - 8)^2 + y^2 = 55$
- (27) $\left(x - 2\frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = 4p^2$
- (28) $\left(x - 1\frac{1}{4}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{25}{16}$
- (29) $C(p + 2, 0)$
- (30) $y^2 = 1\frac{1}{2}x$

תוכן העניינים:

פרק 4	55
גיאומטריה אנליטית - מקומות גאומטריים ותרגילי הוכחה.....	55
מקום גיאומטרי:	55
הגדרה:	55
טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים:	55
שאלות:	56
תשובות סופיות:	58
תרגילי הוכחה:	59

פרק 4

גיאומטריה אנליטית - מקומות גאומטריים ותרגילי הוכחה

מקום גיאומטרי:

הגדרה:

מקום גאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.

מקום גאומטרי הוא משוואה המקשרת בין x ל- y .

טכניקות מרכזיות במציאת מקומות גיאומטריים:

בשאלות של מקום גאומטרי נפוץ השימוש בדברים הבאים:

• שיפועים:

i. שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה).

ii. שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא -1).

iii. שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע.

• משפט פיתגורס.

• אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון.

• משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס.

• קטע מרכזים:

i. במעגלים המשיקים מבחוץ – סכום הרדיוסים.

ii. במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים.

• משפטים מגאומטריה (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)

• אם נתונה משוואה בשאלה – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעליה במשוואה.

שאלות:

- (1) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(-7, -6)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(9, 2)$.
- (2) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(3, -6)$ גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה $B(-1, 10)$.
- (3) מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(1, 0)$ קטן פי 3 ממרחקן מהישר $x = 9$.
- (4) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שעוברים בנקודה $(6, 0)$ ומשיקים לישר $x = -6$.
- (5) נתונים שני ישרים: I. $3x + y - 6 = 0$, II. $2x + 6y - 1 = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 ממרחקן מישר II.
- (6) מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שמשיקים לציר ה- y ומשיקים מבפנים למעגל קנוני שרדיוסו 4. מהן ההגבלות?
- (7) מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה $(4, -10)$ עם נקודות על הישר $y = 6x + 2$.
- (8) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברים בראשית הצירים.
- (9) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 36$. הכפילו את שיעורי ה- y של כל הנקודות על המעגל ב- $\frac{2}{3}$. מצא את המקום הגאומטרי שמתקבל באופן הזה.

10 נתונות הנקודות $A(2,0)$ ו- $B(10,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים $\triangle ABC$ אם ידוע שקדקוד C מונח על הישר $y = 3x - 12$. מהי ההגבלה?

11 נתון המעגל $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקן מהנקודה $(7,2)$.

12 מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ בזווית של 120° .

13 מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בזווית של 60° .

14 נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו $x^2 + y^2 - 12x - 64 = 0$. מנקודה A שעל המעגל העבירו אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C . בנקודה B העבירו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה- x . המקביל ל- AM והמקביל לציר ה- x נפגשים בנקודה D . מצא את המקום הגאומטרי של נקודה D . מהן ההגבלות?

15 האליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ חותכת את חלקו החיובי של ציר ה- x בנקודה A ואת חלקו החיובי של ציר ה- y בנקודה B . מנקודה C שעל ציר ה- x בין O ל- A (ראשית הצירים) העלו אנך לציר ה- x שחותך את הישר AB בנקודה D . מצא את המקום הגאומטרי של נקודת מפגש הישרים BC ו- OD .

16 נתון מעגל קנוני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה C . נסמן ב- B את אמצע הקטע AC . מנקודה C העבירו מקביל ל- AO (O ראשית הצירים). מצא את המקום הגאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל- AO .

17 נתונות הנקודות $A(4,0)$ ו- $B(-2,0)$. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C כך שהקטע CO (O ראשית הצירים) הוא חוצה זווית $\sphericalangle C$ במשולש $\triangle ABC$.

- 18 נתון מעגל קנוני שרדיוסו R .
 את נקודה A שעל המעגל חיברו עם ראשית הצירים ועל הקטע AO (O ראשית הצירים) סימנו נקודה B כך שמתקיים $AB : BO = a : b$.
 מנקודה A העבירו אנך לציר ה- x ומנקודה B העבירו אנך לציר ה- y .
 א. מצא את המקום הגאומטרי של מפגש האנכים הללו.
 ב. המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- y בנקודות P ו- Q .
 מצא את אורך הקטע PQ .

תשובות סופיות:

$$\left(x+1\frac{1}{2}\right)^2 + (y-12)^2 = 38\frac{1}{4} \quad (2) \qquad y = -2x \quad (1)$$

$$y^2 = 24x \quad (4) \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (3)$$

$$y^2 = 16 - 8x, -4 < x, y < 4 \quad (6) \qquad x + 11y + 4 = 0, 7x + 13y - 8 = 0 \quad (5)$$

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad (8) \qquad y = 6x - 16 \quad (7)$$

$$y = 3x - 16, x \neq 5\frac{1}{3} \quad (10) \qquad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (9)$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 12 \quad (12) \qquad y = 3x - 7 \quad (11)$$

$$x = 6, -10 < y < 10 \quad (14) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = 4R^2 \quad (13)$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (16) \qquad 3x + 8 - 12 = 0, 0 < y < 3, 0 < x < 4 \quad (15)$$

$$(x+4)^2 + y^2 = 16 \quad (17)$$

$$PQ = \frac{2bR}{a+b} \quad \text{ב.} \quad b^2x^2 + (a+b)^2y^2 = R^2b^2 \quad \text{א.} \quad (18)$$

תרגילי הוכחה:

- (1) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישרים $x = R$ ו- $x = -R$ בנקודות A ו-B. הוכח: $y_A \cdot y_B = R^2$.
- (2) הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$, שחותך את ציר ה-y בנקודות $A(0, R)$ ו- $B(0, -R)$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר $y = R$ בנקודה T. הוכח: $OT \parallel BP$.
- (3) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ש- F_1 ו- F_2 הם מוקדיה. הוכח: $PO^2 + PF_1 \cdot PF_2 = a^2 + b^2$ (O ראשית הצירים).
- (4) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, שקדקודה הימני הוא A וקדקודה השמאלי הוא B. הישר AP חותך את הישר $x = -a$ בנקודה K והישר BP חותך את הישר $x = a$ בנקודה L. הוכח: $y_K \cdot y_L = 4b^2$.
- (5) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. הוכח: היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדול, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדול שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע.
- (6) הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, שקדקודה הימני הוא A, קדקודה השמאלי הוא B ומוקדה הימני הוא F_1 . הישר AP חותך את הישר $x = \frac{a^2}{c}$ בנקודה M והישר BP חותך את הישר $x = \frac{a^2}{c}$ בנקודה N. הוכח: $\angle MF_1N = 90^\circ$.
- (7) נתונה האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא $-\frac{b^2}{a^2}$.
- (8) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים נורמל. הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה-x הוא גודל קבוע.

(9) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים משיקים משתי נקודות שעליה, A ו-B. המשיקים נפגשים בנקודה C. הוכח: $y_A + y_B = 2y_C$.

(10) בנקודה A, שעל הפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים משיק לפרבולה שחותך את המדריך שלה בנקודה B. ממוקד הפרבולה מעלים אנך לציר ה- x שחותך את המשיק בנקודה C. הוכח: $FB = FC$ (F - מוקד הפרבולה).

(11) בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים מיתר, החותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. המיתר חותך את ציר ה- x בנקודה C. הוכח: $x_A \cdot x_B = (x_C)^2$.

תוכן העניינים:

פרק 5	62
התיבה והקובייה	62
סיכום הגדרות ונוסחאות :	62
הגדרה :	62
נוסחאות :	62
תיבה שבסיסה ריבוע :	63
שאלות חימום :	63
שאלות כלליות :	64
תיבה שבסיסה מלבן :	65
שאלות חימום :	65
שאלות כלליות :	67
הקובייה :	68
שאלות כלליות :	68
תשובות סופיות :	69
תרגול נוסף :	71
תשובות סופיות :	73

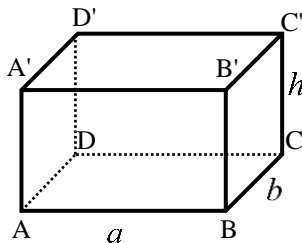
פרק 5

התיבה והקובייה

סיכום הגדרות ונוסחאות:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב ($ABCD$ ו- $A'B'C'D'$) הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי (AA' , BB' , CC' , DD') נקרא גובה התיבה. המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.



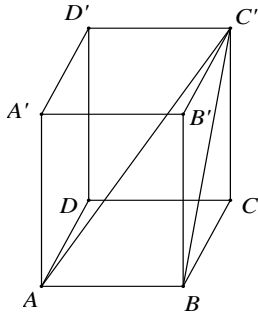
נוסחאות:

הנוסחה	תיאור מילולי
$S = a \cdot b$	שטח בסיס התיבה
$V = a \cdot b \cdot h$	נפח התיבה
$M = 2h(a + b)$	שטח מעטפת התיבה
$P = 2h(a + b) + 2ab$	שטח פנים
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$	אלכסון ראשי בתיבה

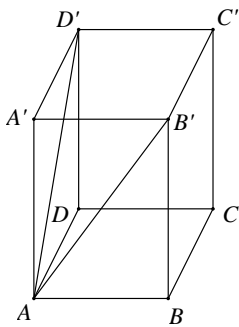
- תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסה הם ריבועים. מתקיים: $a = b$ בכל הנוסחאות.
- קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע הבסיס, דהיינו: $a = b = h$ אזי התיבה נקראת קובייה.

תיבה שבסיסה ריבוע:

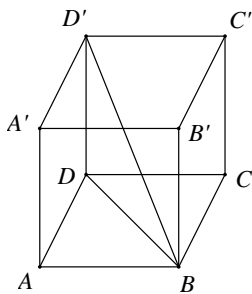
שאלות חימום:



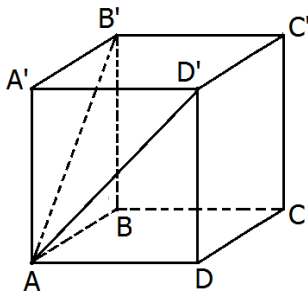
- (1) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע, אורך אלכסון הבסיס AC הוא 15.2 ס"מ.
אורך המקצוע הצדדי AA' הוא 10 ס"מ.
א. חשב אורך מקצוע הבסיס.
ב. חשב נפח התיבה ושטח הפנים.
ג. חשב את BC' , אלכסון הפאה $BB'C'C$, ואת אלכסון התיבה AC' .
ד. חשב את זווית $\angle AC'B$, שבין האלכסון BC' בפאה $BB'C'C$ לבין אלכסון התיבה AC' .



- (2) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע. אורך האלכסון AD' של הפאה הצדדית $ADD'A'$ הוא 16.8 ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני האלכסונים AD' ו- AB' היא 58° .
א. חשב את אורך אלכסון הבסיס $B'D'$.
ב. חשב את אורך מקצוע הבסיס AB .
ג. חשב את גובה התיבה AA' .
ד. חשב את נפח התיבה.

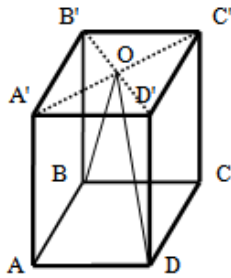


- (3) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע. אורך אלכסון הבסיס BD הוא 16 ס"מ ונפח התיבה הוא 1408 סמ"ק. חשב:
א. גובה התיבה DD' .
ב. הזווית שבין אלכסון התיבה BD' לבסיס $ABCD$.
ג. אורך מקצוע הבסיס AB .

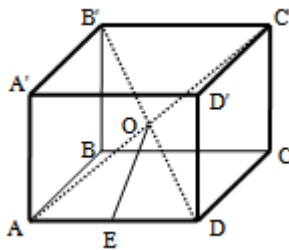


- (4) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$, שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית הוא 10 ס"מ. הזווית שבין אלכסוני הפאות הצדדיות היא 48° .
א. חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון $B'D'$.
ב. חשב את שטח הבסיס של התיבה.

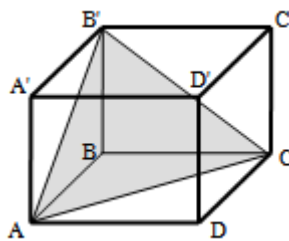
שאלות כלליות:



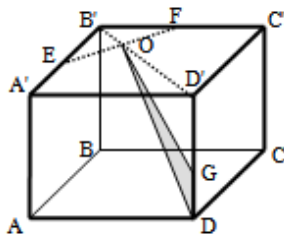
- (5) בתיבה ריבועית $ABCD A'B'C'D'$ מעבירים את האלכסונים $B'D'$ ו- $A'C'$ במישור הבסיס העליון. האלכסונים נפגשים בנקודה O כך שנוצר המשולש BOD . נתון כי: $\angle BOD = 23^\circ$ וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס"מ.
- א. חשב את היקף המשולש BOD .
- ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע OD של המשולש BOD ומישור הפאה $AA'D'D$.



- (6) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים AC' ו- $B'D'$. האלכסונים נחתכים בנקודה O שבתוך התיבה. מהנקודה O מעבירים את הקטע OE כך ש- E היא אמצע המקצוע AD . ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס"מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס"מ.
- א. מצא את אורך גובה התיבה.
- ב. מצא את אורך הקטע OE .



- (7) בתיבה ריבועית וישרה $ABCD A'B'C'D'$ מסמנים את אורך הגובה ב- h . מעבירים את הקטעים AB' , AC ו- $B'C'$ כך שנוצר המשולש $AB'C$ כמתואר באיור. הזווית הנוצרת בין אנך לצלע AC במשולש $AB'C$ ומישור הבסיס $ABCD$ היא α .
- א. הבע באמצעות h ו- α את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
- ב. הבע באמצעות h ו- α את נפח התיבה.



- (8) בתיבה הריבועית $ABCD A'B'C'D'$ שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון $B'D'$. הנקודות E ו- F נמצאות על אמצעי המקצועות $A'B'$ ו- $B'C'$ כך שהקטע EF חותך את האלכסון $B'D'$ בנקודה O . מקצים נקודה נוספת G - הנמצאת על הגובה DD' כך ש: $DG = a$. מעבירים את הקטעים GO ו- DO כך שנוצר המשולש DOG . אורך מקצוע הבסיס הוא k וגובה התיבה הוא h .
- א. הבע באמצעות k ו- a את שטח המשולש DOG .
- ב. מצא את היחס: $\frac{a}{h}$ עבורו מתקיים: $S_{DOG} = S_{DOG}$.

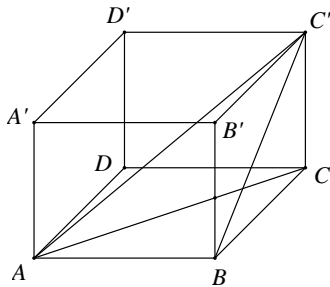
- 9) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע. גובה התיבה הוא h .
נתון: $\angle ADC' = \beta$.

א. הראה כי אורך הצלע בבסיס התיבה הוא: $\frac{\sqrt{2}h \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{\cos \beta}}$.

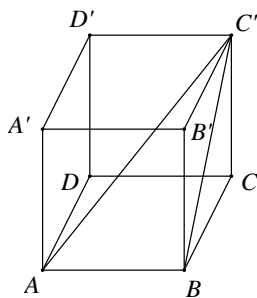
ב. לאלו ערכים של β יש פתרון לבעיה?

תיבה שבסיסה מלבן:

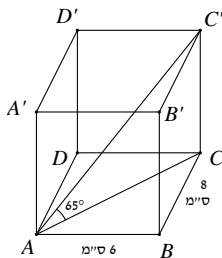
שאלות חימום:



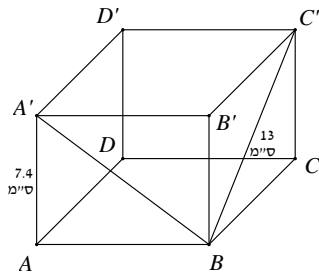
- 10) בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם:
12 ס"מ AB , 5 ס"מ BC . הזווית בין BC' אלכסון הפאה, $BB'C'C$, לבסיס $ABCD$ היא 40° .
א. חשב את גובה התיבה CC' .
ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס, AC .
ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה AC' לבסיס $ABCD$.
ד. חשב את אורך אלכסון התיבה AC' .
ה. חשב את נפח התיבה.
ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.



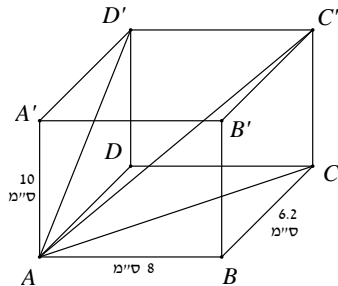
- 11) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$.
אורך צלע הבסיס: 9 ס"מ AB .
אלכסון הפאה $BB'C'C$ הוא: 15 ס"מ BC' .
חשב את הזווית בין BC' אלכסון הפאה $BB'C'C$ לאלכסון התיבה AC' .



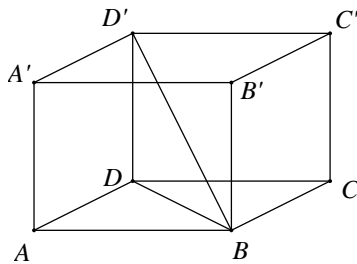
- 12) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ בה מתקיים:
8 ס"מ AD , 6 ס"מ AB . הזווית בין אלכסון התיבה AC' לבסיס $ABCD$ היא 65° .
א. חשב את גובה התיבה CC' .
ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.



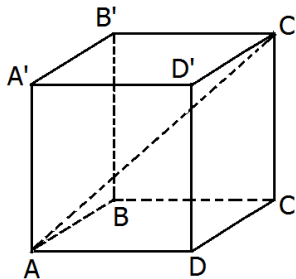
- 13** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן. גובה התיבה AA' הוא 7.4 ס"מ. אורך אלכסון הפאה $BC' = 13$ ס"מ. הזווית בין אלכסון הפאה $A'B$ לבסיס $ABCD$ היא 37° .
א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.
ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.



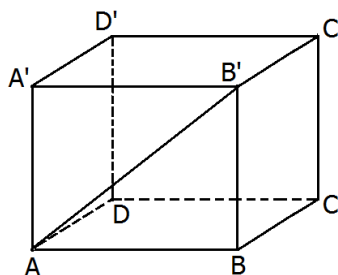
- 14** בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון :
 $AA' = 10$ ס"מ , $AB = 8$ ס"מ , $BC = 6.2$ ס"מ.
חשב :
א. אלכסון הבסיס : AC , אלכסון הפאה : AD' ואלכסון התיבה : AC' .
ב. חשב את הזווית בין AD' , אלכסון
ג. הפאה $ADD'A'$, לאלכסון
התיבה AC' : $\angle D'AC'$.
ד. חשב את נפח התיבה ושטח המעטפת.



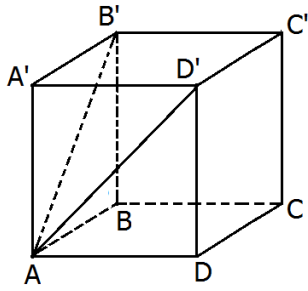
- 15** נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$. $AB = 12$ ס"מ .
אורך אלכסון הבסיס BD הוא 15 ס"מ.
נפח התיבה הוא 864 סמ"ק. חשב את :
א. רוחב הבסיס של התיבה , BC .
ב. גובה התיבה , AA' .
ג. הזווית בין אלכסון התיבה BD' לבסיסה $ABCD$.



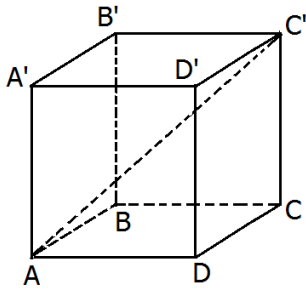
- 16** בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה ציור), נתון :
 $AD = 8$ ס"מ , $DC = 14$ ס"מ , $CC' = 14$ ס"מ .
א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס , AC .
ב. חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה AC' לבין הבסיס $ABCD$.
ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.
ד. חשב את שטח הפנים של התיבה.



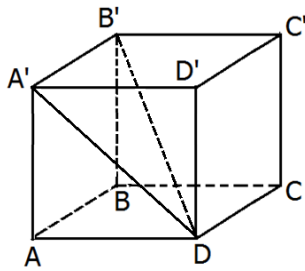
- 17** בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראה ציור) נתון :
 $AB = 12$ ס"מ , $AD = 10$ ס"מ . הזווית שבין אלכסון הפאה AB' לבין הבסיס $ABCD$ היא 35° .
א. חשב את גובה התיבה BB' .
ב. חשב את AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$.
ג. חשב את הזווית שבין AD' לבין הבסיס $ABCD$.



- 18 נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן (ראה ציור). אורך גובה התיבה AA' הוא 10 ס"מ. אורך AB' , אלכסון הפאה $ABB'A'$ הוא 14 ס"מ.
א. חשב את אורך המקצוע AB .
ב. הזווית שבין AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$, לבין הבסיס $ABCD$ היא בת 40° .
ג. חשב את נפח התיבה.
ד. חשב את שטח מעטפת התיבה.

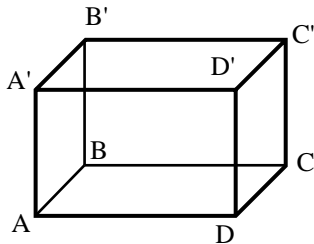


- 19 נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבה $AD = 12$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ (ראה ציור). הזווית שבין אלכסון התיבה, AC' , לבין הבסיס $ABCD$ היא בת 38° .
א. חשב את אלכסון הבסיס.
ב. חשב את גובה התיבה.
ג. חשב את שטח פני התיבה.

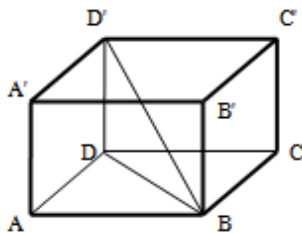


- 20 נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ (ראו סרטוט) שבה: $AA' = 8$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ.
א. חשב את אורך $A'D'$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.
ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה $B'D$.

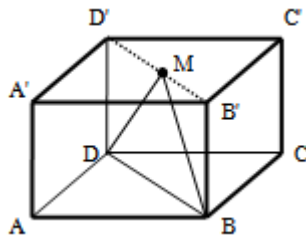
שאלות כלליות:



- 21 בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $AA' = 7$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ. חשב את אורך האלכסון BD' ואת הזווית בינו לבין בסיס התיבה.



- 22 נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן. מעבירים את האלכסונים BD ו- BD' כך שמתקיים: $\angle DBD' = \angle ABD = \alpha$.
אורך האלכסון BD יסומן ב- a .
א. הבע באמצעות a ו- α את:
i. אורך התיבה AB .
ii. רוחב התיבה AD .
iii. גובה התיבה AA' .
ב. מצא את α אם ידוע כי נפח התיבה הוא $0.64a^3$.



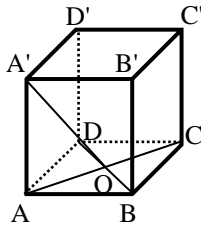
(23) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסון $B'D'$ בבסיס העליון. מאמצע האלכסון M מעבירים את הקטעים DM ו- BM כך שנוצר המשולש ישר הזווית BMD ($\angle BMD = 90^\circ$).
אורך מקצוע הבסיס AB הוא $5a$ ואורך הקטע DM הוא $4a$.

- הבע באמצעות a את אורך המקצוע AD .
- מעבירים את הקטע AM . חשב את זווית MAD .
- מצא את a אם ידוע כי שטח המשולש MAD הוא 125 סמ"ר (עגל למספר שלם).

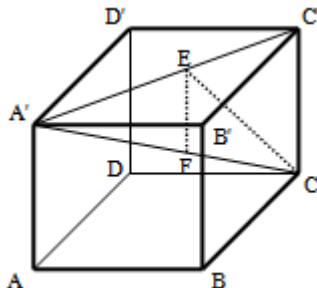
(24) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $BD' = m$. הזווית שבין האלכסון BD' לבסיס $ABCD$ היא α והזווית שבין האלכסון BD' לפאה צדדית $ABB'A'$ היא γ .
הבע באמצעות m , α ו- γ את נפח התיבה.

הקובייה:

שאלות כלליות:



(25) בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ אורך המקצוע הוא 8 ס"מ. הנקודה O היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון. מצא את הזווית שבין OA' לפאה $ABB'A'$.



(26) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. מעבירים את האלכסון $A'C'$ בבסיס העליון. מהנקודה E שעל האלכסון $A'C'$ מותחים את הקטע CE השווה באורכו לקטע $A'E$. כמו כן מורידים גובה EF ממישור הבסיס העליון $A'B'C'D'$ (מאונך ל- $A'C'$). הנקודה F נמצאת על האלכסון הראשי $A'C$. נסמן: $\angle ACE = \alpha$, $AF = m$.
הבע באמצעות m ו- α את נפח הקובייה.

תשובות סופיות:

- (1) א. 10.748 ס"מ. ב. 1155.2 סמ"ק V , 660.959 סמ"ר S .
ג. 14.68 ס"מ, 18.19 ס"מ. ד. $\angle AC'B = 36.21^\circ$.
- (2) א. 16.29 ס"מ. ב. 11.518 ס"מ. ג. 12.23 ס"מ.
ד. 1622.485 סמ"ק V .
- (3) א. 11 ס"מ. ב. 34.51° . ג. 11.313 ס"מ.
- (4) א. 8.13 ס"מ. ב. 33.09 סמ"ר.
- (5) א. 51 ס"מ. ב. 8.1° .
- (6) א. 4 ס"מ. ב. 4.47 ס"מ.
- (7) א. $\frac{h\sqrt{2}}{\tan \alpha}$. ב. $\frac{2h^3}{\tan^2 \alpha}$.
- (8) א. $S_{\text{DOG}} = \frac{3ka}{4\sqrt{2}}$. ב. $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$.
- (9) א. $0^\circ < \beta < 90^\circ$.
- (10) א. 4.195 ס"מ CC' . ב. 13 ס"מ AC . ג. 17.886° .
ד. 13.66 ס"מ AC' . ה. 251.7 סמ"ק V . ו. 142.63 סמ"ר M .
- (11) א. $\angle AC'B = 30.96^\circ$.
- (12) א. 21.44 ס"מ CC' . ב. 1029.6 סמ"ק V , 696.96 סמ"ר P .
- (13) א. 9.82 ס"מ AB , 10.688 ס"מ BC . ב. 303.5184 סמ"ר M , 513.43 סמ"ר P .
- (14) א. 10.121 ס"מ AC , 11.766 ס"מ AD' , 14.227 ס"מ AC' .
ב. 34.22° . ג. 496 סמ"ק V , 284 סמ"ר M .
- (15) א. 9 ס"מ BC . ב. 8 ס"מ h . ג. 28.072° .
- (16) א. 14.42 ס"מ AC . ב. 44.15° . ג. 560 סמ"ר. ד. 752 סמ"ר.
- (17) א. 8.4 ס"מ BB' . ב. 13.06 ס"מ AD' . ג. 40.03° .
- (18) א. 9.8 ס"מ AB . ב. 1,167.9 סמ"ק V . ג. 434.4 סמ"ר.
- (19) א. 15.62 ס"מ. ב. 12.2 ס"מ h . ג. 776.8 סמ"ר P .
- (20) א. 14.42 ס"מ AD' . ב. 17.55 ס"מ BD' .
- (21) א. 16.031 ס"מ BD' , $\angle D'BD = 25.89^\circ$.

$$a \cos \alpha \text{ .i } \quad a \sin \alpha \text{ .ii } \quad a \tan \alpha \text{ .iii } \quad .53.13^\circ \text{ .ג } \quad \textbf{(22)}$$

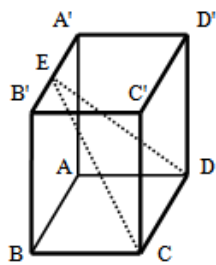
$$a\sqrt{7} \text{ .נ } \quad 70.6^\circ \text{ .ג } \quad .a = 5 \text{ .ל } \quad \textbf{(23)}$$

$$.V = m^3 \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \alpha} \quad \textbf{(24)}$$

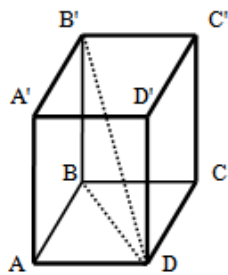
$$.24.095^\circ \quad \textbf{(25)}$$

$$.(m \sin 2\alpha \cos \alpha)^3 \quad \textbf{(26)}$$

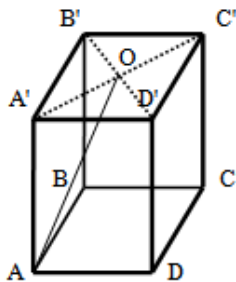
תרגול נוסף:



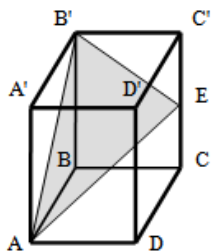
- (1) בסיס התיבה $ABCD A'B'C'D'$ הוא ריבוע שאורך צלעו 10 ס"מ. גובה התיבה הוא 24 ס"מ. הנקודה E נמצאת על אמצע המקצוע $A'B'$ וממנה מעבירים את הקטעים CE ו-DE.
א. חשב את אורך הקטע CE.
ב. חשב את זווית CED.
ג. מורידים גובה EF במישור המשולש CDE.
חשב את הזווית שהוא יוצר עם מישור הבסיס ABCD.



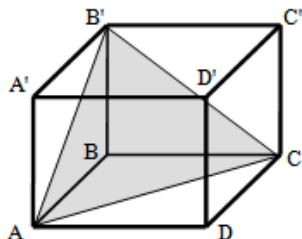
- (2) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסון $B'D$. הזווית שבין אלכסון התיבה לבסיס התיבה ABCD היא 56° .
ידוע כי אורך אלכסון התיבה $B'D$ הוא 24 ס"מ.
א. חשב את גובה התיבה.
ב. מצא את אורך בסיס הריבוע ABCD.
ג. חשב את נפח התיבה.



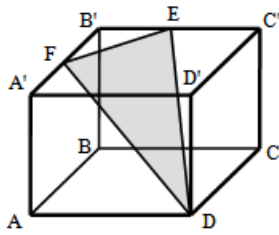
- (3) בתיבה ריבועית $ABDCA'B'C'D'$ מעבירים אלכסונים בבסיס העליון $A'B'C'D'$. האלכסונים נפגשים בנקודה O וממנה מעבירים את הקטע AO שאורכו 10 ס"מ. אורך גובה התיבה הוא 8 ס"מ.
א. חשב את הזווית שבין הקטע AO למישור הבסיס ABCD.
ב. חשב את אורך צלע הבסיס.
ג. חשב את נפח התיבה.



- (4) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע מקצים נקודה E באמצע הגובה CC' . מעבירים את הקטעים AE ו- AB' . ידוע כי שטח הפנים של התיבה הוא 264 סמ"ר וסכום כל מקצועותיה הוא 80 ס"מ.
חשב את היקף המשולש $AB'E$.

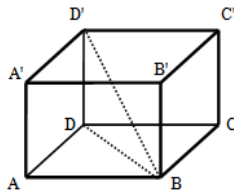


- (5) בתיבה ריבועית $ABCD A'B'C'D'$ ידוע כי גובה התיבה גדול פי 2 ממקצוע הבסיס. מעבירים את הקטעים AB' ו- AC , $B'C'$ כך שנוצר המשולש $AB'C'$ כמתואר באיור. שטח המשולש $AB'C'$ הוא 24 סמ"ר.
א. חשב את הזווית הנוצרת בין הצלע AB' של המשולש ומישור הבסיס ABCD.
ב. מצא את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
ג. חשב את נפח התיבה.



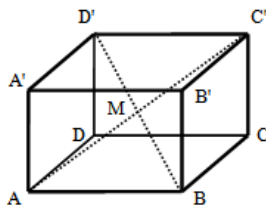
- (6) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה הוא ריבוע. מקצים נקודות E ו-F על אמצעי המקצועות $B'C'$ ו- $A'B'$ בהתאמה כך שנוצר המשולש EDF. אורך גובה התיבה הוא 12 ס"מ והזווית הנוצרת בין הקטע FD להיטלו על מישור הבסיס ABCD היא 50° .

- א. מצא את האורך של מקצוע הבסיס בתיבה.
ב. מצא את הזווית הנוצרת בין הקטע FD להיטלו על הפאה הצדדית $AA'D'D$.



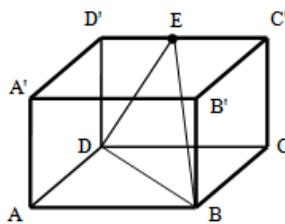
- (7) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן. רוחב המלבן גדול פי 2 מאורכו ושווה לגובה המלבן ($2AD = 2AA' = AB$). מעבירים את האלכסון BD בבסיס ABCD ואת אלכסון התיבה BD' .

- א. חשב את הזווית שבין האלכסון BD' למישור הבסיס ABCD.
ב. מצא את שטח המעטפת של התיבה אם ידוע כי נפחה הוא 432 סמ"ק.



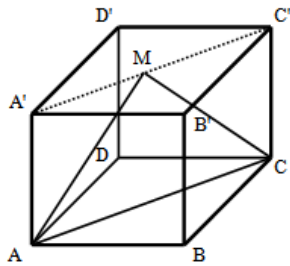
- (8) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסונים AC' ו- BD' הנחתכים בנקודה M. ידוע כי המשולש AMB הוא ישר זווית ($\angle AMB = 90^\circ$). אורך אלכסון התיבה הוא $2a$ וגובה התיבה שווה באורכו למקצוע הבסיס הקטן BC.

- א. הבע באמצעות a את אורכי מקצועות הבסיס.
ב. מצא את הזווית שבין אלכסון התיבה BD' לבין הפאה הצדדית $ADD'A'$.
ג. מצא את a אם ידוע כי נפח התיבה הוא $27\sqrt{2}$ סמ"ק.



- (9) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מקצים נקודה E באמצע המקצוע $C'D'$. מהנקודה E מעבירים את הקטעים BE ו-DE כך שנוצר המשולש BED. מסמנים את אורכי מקצועות התיבה: $AB = 3a$, $AD = 2a$. ידוע כי גובה התיבה שווה באורכו למקצוע הבסיס AD.

- א. מצא את הזווית הנוצרת בין הצלע BE למישור הפאה הצדדית $BB'C'C$.
ב. הבע באמצעות a את היקף המשולש BDE.
ג. מצא את a אם ידוע כי היקף המשולש BDE קטן ב-14 ס"מ מהיקף הבסיס ABCD.



- 10 נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. מעבירים את האלכסון בבסיס העליון $A'C'$ ומקצים נקודה M באמצעו. מהנקודה M מעבירים את הקטעים AM ו- CM כך שנוצר המשולש AMC . נתון: $AM = 6$ ס"מ, $\angle AMC = 120^\circ$.
- הסבר מדוע המשולש AMC הוא שווה שוקיים.
 - חשב את אורך הגובה של הקובייה.
 - חשב את נפח הקובייה.

תשובות סופיות:

- א. 26.476 ס"מ. ב. 21.171° . ג. 67.38° .
- א. 19.8 ס"מ. ב. 9.48 ס"מ. ג. 1791.22 סמ"ק.
- א. 53.13° . ב. 8.48 ס"מ. ג. 576 סמ"ק.
- 26.6 ס"מ או 27.6 ס"מ.
- א. 63.43° . ב. 4 ס"מ. ג. 128 סמ"ק.
- א. 9 ס"מ. ב. 16.7° .
- א. 24.1° . ב. 216 סמ"ר.
- א. $a, a\sqrt{2}$. ב. 45° . ג. $a = 3$.
- א. 27.9° . ב. $9.3a$. ג. $a = 20$.
- א. הקטעים AM ו- CM שווים וזאת ניתן לראות בשני המשולשים AMO ו- CMO כאשר O אמצע האלכסון AC .
ב. 3 ס"מ. ג. 27 סמ"ק.

תוכן העניינים:

75	פרק 6
75	מנסרה ישרה
75	סיכום והגדרות:
75	מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:
77	מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:
78	מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:
79	תשובות סופיות:
80	תרגול נוסף:
82	תשובות סופיות:

פרק 6

מנסרה ישרה

סיכום והגדרות:

גוף מרחבי הבנוי משני מצולעים זהים המקבילים זה לזה במרחב. המקצועות הצדדיים המחברים את קדקודי הבסיסים המתאימים נקראים גובהי המנסרה. כל גובה במנסרה ישרה מאונך למישורי הבסיס העליון והתחתון.



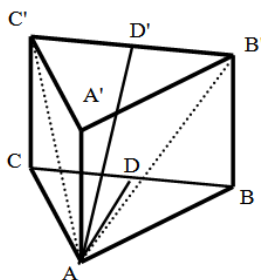
במסגרת שאלון 807 נעסוק במנסרות הבאות:

- מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.

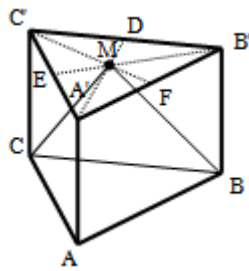
הערה:

התיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרות ישרות שבסיסן מלבן וריבוע בהתאמה.

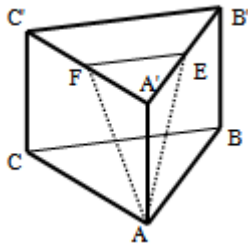
מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:



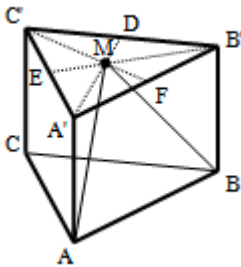
- 1) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים AB' ו- AC' כך שנוצר המשולש $AB'C'$. הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש ABC והאנך לצלע $B'C'$ במשולש $AB'C'$ היא 40° . אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ.
 - א. חשב את שטח המשולש $A'B'C'$.
 - ב. חשב את נפח המנסרה.



- (2) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון $A'B'C'$ את התיכונים $A'D$, $B'E$ ו- $C'F$ אשר נחתכים בנקודה M . מהנקודה M מעבירים את הקטעים MC ו- MB כך שנוצר המשולש MCB . גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה. חשב את הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש MCB למישור הבסיס ABC .

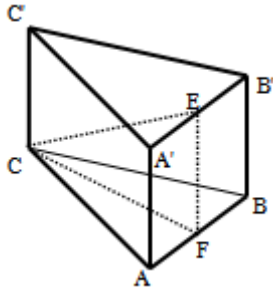


- (3) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי המקצועות $A'B'$ ו- $A'C'$. מעבירים את הקטעים AE ו- AF , כך שנוצר המשולש AEF . אורך מקצוע הבסיס של המנסרה הוא 10 ס"מ וגובה המנסרה הוא 12 ס"מ.
- חשב את אורכי הצלעות של המשולש AEF .
 - חשב את הזווית שבין גובה המנסרה AA' למישור המשולש AEF .

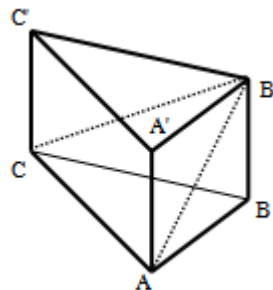


- (4) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון $A'B'C'$ את התיכונים $A'D$, $B'E$ ו- $C'F$ אשר נחתכים ב- M . מהנקודה M מעבירים את הקטעים MA ו- MB כך שנוצר המשולש MAB . גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה ויסומן ב- $2a$.
- הבע באמצעות a את אורך הקטע MA .
 - חשב את הזווית שבין הקטע MA ומישור הבסיס ABC .
 - חשב את הזווית שבין הגובה למקצוע AB במישור MAB לבין מישור הבסיס ABC .
 - חשב את הזווית שבין MA והפאה $AA'B'B$.
 - הבע באמצעות a את שטח הפנים של המנסרה.

מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:



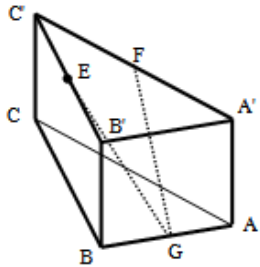
- (5) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). מאמצעי המקצועות $A'B'$ ו- AB מעבירים את הקטע EF . ידוע כי אורך מקצוע הבסיס AB הוא k ס"מ והוא קטן פי 2 מאורך שוק הבסיס AC . נסמן: $\angle FCE = \alpha$.
- א. הבע באמצעות k ו- α את נפח המנסרה.
 ב. חשב את נפח המנסרה אם ידוע כי: $2EF = CE$, וכי שטח הבסיס ABC הוא $\sqrt{15}$ סמ"ר.



- (6) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$) מעבירים את האלכסונים AB' ו- CB' כך שנוצר המשולש $AB'C$. ידוע כי הזווית שבין אנך למקצוע AC במשולש ABC ואנך למקצוע AC במשולש $AB'C$ היא 45° (האנכים נפגשים על המקצוע AC בנקודה E). זוויות הבסיס ABC הן $\angle CAB = 75^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.
- א. מצא את אורך המקצוע AC .
 ב. חשב את הזווית שבין האלכסון CB' למישור הבסיס.

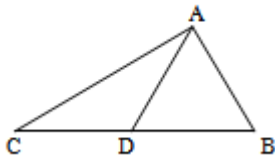
- (7) נתונה מנסרה $ABCA'B'C'$ שבה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$), אורך השוק היא k וזווית הראש היא γ . הזווית שבין המישור ABC למישור ABC' היא β . הבע באמצעות k , γ ו- β את נפח המנסרה.

מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:



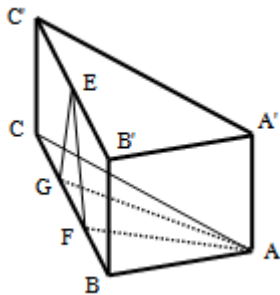
- 8 במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) הנקודות E, F ו-G הן בהתאמה אמצעי המקצועות $B'C'$, $A'C'$ ו- AB כמתואר באיור. מסמנים את מידות הבסיס ABC : $BC = 12t$, $AB = 5t$. הזווית שבין הקטע GE למישור הבסיס ABC היא 36.86° .
א. הבע באמצעות t את גובה המנסרה.

- ב. חשב את הזווית שבין הקטע GF ולמישור הבסיס ABC .
ג. מצא את t אם ידוע כי אורך הקטע GF הוא: $\sqrt{3825}$ ס"מ.

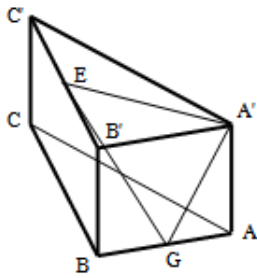


- 9 ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח את הטענה: תיכון במשולש חוצה אותו לשני משולשים שווי שטח.
כלומר, הקטע AD הוא תיכון במשולש ABC .
הראה כי: $S_{ABD} = S_{ACD}$.



- במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) הנקודות F ו-G מחלקות את מקצוע הבסיס BC לשלושה חלקים שווים. הנקודה E היא אמצע המקצוע $B'C'$. ידוע כי אורך הקטע EF הוא 10 ס"מ ואורך המקצוע BC הוא 24 ס"מ. שטח המשולש AFG הוא 40 סמ"ר.
ב. איזה משולש הוא המשולש EFG?
מצא את זוויותיו.
ג. מצא את גובה המנסרה.
ד. היעזר בטענה שהוכחת בסעיף א' ומצא את אורך המקצוע AB.
(רמז: התבונן במשולש ABF ומצא את הצלע AB באמצעות שטחו).
ה. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.

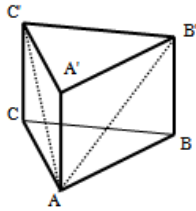


- 10) לפניך מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). ידוע כי הפאה הצדדית $AA'B'B$ היא ריבוע וכי אורך המקצוע BC גדול פי 3 מ- AB . הנקודות E ו- G נמצאות על אמצעי המקצועות $A'B'$ ו- $B'C'$ בהתאמה. מעבירים את הקטעים $A'E$, $A'G$ ו- GE .
- א. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הבסיס.
- ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הפאה $AA'B'B$.
- ג. נתון כי: $\angle EGA' = 69^\circ$. חשב את זווית $\angle EA'G$.

תשובות סופיות:

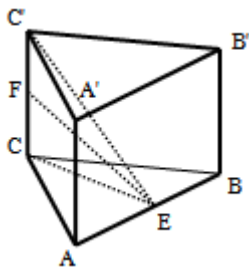
- 1) א. 160.68 סמ"ר. ב. 2250 סמ"ק.
- 2) 73.89° .
- 3) א. 13 ס"מ, 13 ס"מ, 5 ס"מ. ב. 19.84° .
- 4) א. $MA = 2.3a$ ב. 60° ג. 73.9° ד. 14.47° ה. $P = 15.46a^2$.
- 5) א. $V = \frac{15k^3 \tan \alpha}{8}$ ב. $\frac{15}{\sqrt{3}}$ סמ"ק.
- 6) א. 10 ס"מ. ב. 26.56° .
- 7) $V = \frac{1}{2}k^3 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \tan \beta$.
- 8) א. $4.875t$ ב. 39.1° ג. $t = 8$.
- 9) ב. משולש שווה שוקיים. 66.42° , 47.15° ג. $\sqrt{84}$ ס"מ. ד. 10 ס"מ. ה. $60\sqrt{84}$ סמ"ר.
- 10) א. $\angle EGH = 32.31^\circ$ ב. $\angle B'GE = 53.3^\circ$ ג. $\angle GAE = 75.6^\circ$.

תרגול נוסף:

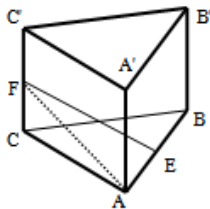


- (1) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים AB' ו- AC' ואת הקטע AD (אמצע $B'C'$). הזווית שבין AD למישור הבסיס ABC היא 40° . אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ. א. חשב את אורך מקצוע בסיס המנסרה.

- ב. חשב את הזווית הנוצרת בין האלכסון AB' למישור הבסיס ABC .
ג. חשב את שטח המשולש $AB'C'$.
ד. חשב את נפח המנסרה.

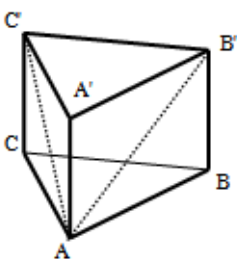


- (2) במנסרה ישרה ומשולשת $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מסמנים את אמצע מקצוע הבסיס AB בנקודה E וממנה מעבירים את הקטעים CE , FE ו- $C'E$, כך ש- FE הוא חוצה זווית במשולש CEC' . זווית FEC' תסומן ב- α . מקצוע הבסיס של המנסרה הוא k .
א. הבע באמצעות k ו- α את גובה המנסרה.
ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש FEC' .
ג. נתון: $\alpha = 30^\circ$, $k = 6$. חשב את נפח המנסרה.



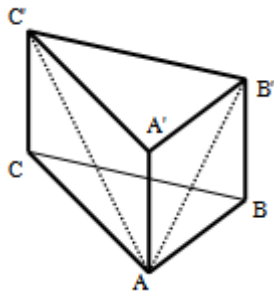
- (3) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מסמנים את אמצעי המקצועות AB ו- CC' בנקודות E ו- F בהתאמה. ידוע כי גובה המנסרה שווה למקצוע הבסיס ומסומן ב- $2x$. אורך הקטע FE הוא 16 ס"מ והזווית EAF היא 63.434° .

- א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AF ממשולש AFE .
ב. מצא את x (עגל למספר שלם).
(רמז: השתמש במשפט פיתגורס במשולש ACF).
ג. חשב את נפח המנסרה.

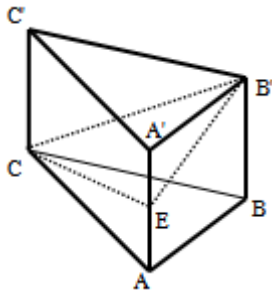


- (4) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את אלכסוני הפאות AB' ו- AC' ומסמנים: $\angle B'AC' = 2\alpha$. אורך כל אלכסון הוא k .
א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. הבע באמצעות k ו- α את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.

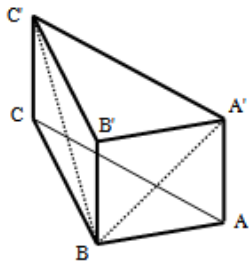
- ii. הבע באמצעות k ו- α את אורך גובה המנסרה.
iii. הבע באמצעות k ו- α את נפח המנסרה.
ב. חשב את נפח המנסרה כאשר: $\alpha = 15^\circ$, $k = 5$.



- (5) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$) אורך המקצוע AC הוא 8 ס"מ. ידוע כי זווית הראש ACB היא 20° וכי גובה המנסרה הוא 4 ס"מ. מעבירים את האלכסונים AC' ו- AB' .
- חשב את אורכי האלכסונים AC' ו- AB' .
 - חשב את הזווית שבין האלכסונים AC' ו- AB' למישור הבסיס ABC .
 - חשב את נפח המנסרה.



- (6) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). מאמצע הגובה AA' מעבירים את הקטעים CE ו- $B'E$, כך שנוצר המשולש CEB' . נתון: $\angle ACB = 40^\circ$, $AC = 5t$, $BB' = 2t$.
- חשב את הזוויות הנוצרות בין כל אחת מצלעות המשולש CEB' למישור הבסיס ABC .
 - חשב את היקף המשולש CEB' .



- (7) במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$) מעבירים את האלכסונים $A'B'$ ו- BC' , כך שנוצר המשולש $A'BC'$. ידוע כי: $BC' = 15.6$ ס"מ, 10 ס"מ $A'B =$ וכי: 22.4 ס"מ $AB + BC =$.
- מצא את גובה המנסרה AA' .
 - חשב את הזווית שבין האלכסון BC' למישור הבסיס ABC .
 - חשב את נפח המנסרה.

תשובות סופיות:

(1) א. 19.26 ס"מ. ב. 36° . ג. 209.7 סמ"ר. ד. 2250 סמ"ק.

(2) א. $0.5k\sqrt{3} \tan 2\alpha$ ב. $\frac{3k^2}{8} (\tan 2\alpha - \tan \alpha)$ ג. $81\sqrt{3}$ סמ"ק.

(3) א. $\sqrt{x^2 + 256}$ ב. $x = 8$ ג. $1024\sqrt{3}$ סמ"ק.

(4) א. i. $2k \sin \alpha$ ii. $k\sqrt{1-4\sin^2 \alpha}$ iii. $k^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3}\sqrt{1-4\sin^2 \alpha}$ ב. 12.4 סמ"ק.

(5) א. $\sqrt{80}$, 4.87 ב. 26.56° , 55.21° ג. 43.77 סמ"ק.

(6) א. 11.3° , 16.29° , 21.8° ב. $14.04t$.

(7) א. 6 ס"מ. ב. 22.61° ג. 345.6 סמ"ק.

תוכן העניינים:

84	פרק 7
84	פירמידה ישרה
84	סיכום הגדרות ונוסחאות :
84	הגדרה :
84	הגדרה :
84	משפט :
85	נפח פירמידה :
85	פירמידה שבסיסה ריבוע :
85	שאלות חימום :
86	שאלות כלליות :
88	פירמידה שבסיסה מלבן :
88	שאלות חימום :
92	שאלות כלליות :
93	פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות :
94	פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים :
94	פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית :
95	תשובות סופיות :
97	תרגול נוסף :
100	תשובות סופיות :

פרק 7

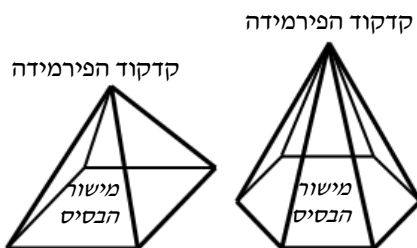
פירמידה ישרה

סיכום הגדרות ונוסחאות:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה. בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.

במסגרת שאלון 807 נעסוק בפירמידות הישרות הבאות:



- פירמידה שבסיסה מלבן.
- פירמידה שבסיסה ריבוע.
- פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.

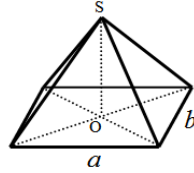
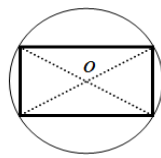
הגדרה:

גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

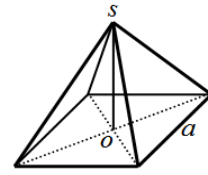
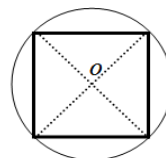
משפט:

בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

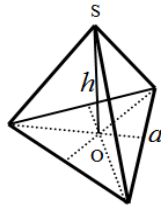
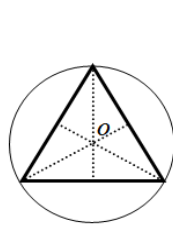
באיורים הבאים מופיע חתך מישורי של בסיסי הפירמידות ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



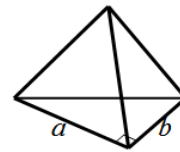
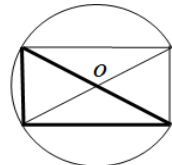
תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.



תיאור פירמידה שבסיסה ריבוע. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הריבוע.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).



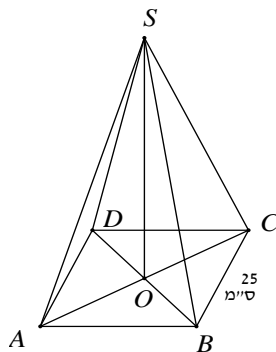
תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית. ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

נפח פירמידה:

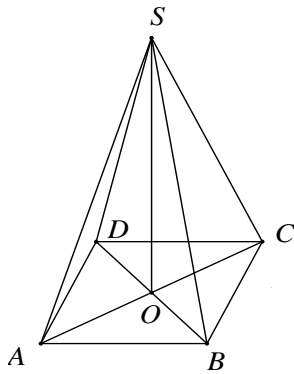
נפח פירמידה ששטח בסיסה הוא S וגובהה h הוא: $V = \frac{S \cdot h}{3}$.

פירמידה שבסיסה ריבוע:

שאלות חימום:

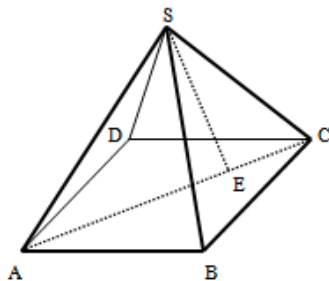


- 1) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע) SABCD. אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ. הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת 35° .
 - א. חשב את אלכסון הבסיס.
 - ב. חשב את גובה הפירמידה.
 - ג. סמן נקודה E כאמצע BC וחשב את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.

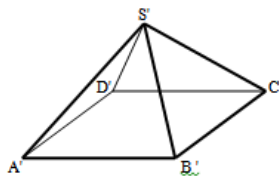
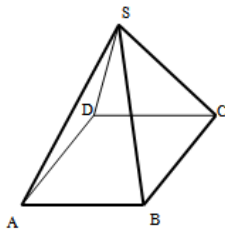


- (2) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ.
אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.
א. חשב אורך גובה של פאה צדדית.
ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
ג. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

שאלות כלליות:



- (3) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע a . אורך מקצועות הפירמידה הוא $3a$.
מעבירים את האלכסון AC ועליו מסמנים את הנקודה E המחלקת אותו ביחס של $1:3$ $\left(\frac{CE}{AE} = \frac{1}{3}\right)$.
מהקדקוד S מעבירים את הקטע SE.
א. הבע באמצעות a את גובה הפירמידה.
ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע SE לגובה הפירמידה.
ג. מצא את a אם ידוע כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא: $\sqrt{560}$ סמ"ר.



- (4) נתונות שתי פירמידות ריבועיות ישרות: SABCD ו-S'A'B'C'D'.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה הראשונה הוא a וגובהה הוא $2a$.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה השנייה הוא $2a$ וגובהה הוא a .
א. קבע לאיזו פירמידה יש נפח גדול יותר.
ב. כעת משנים את הגובה של כל פירמידה כך שנפחן יהיה זהה והוא: a^3 . מצא את יחס בין המקצוע הצדדי של הפירמידה SABCD למקצוע הצדדי של הפירמידה S'A'B'C'D'.
ג. דנה טוענת כי מאחר שנפח שתי הפירמידות זהה, הרי גם שטח הפנים שלהן זהה. האם דנה צודקת? הוכח את טענתך באמצעות חישוב מתאים.

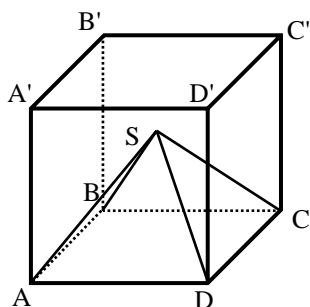
- (5) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה. אורכו של מקצוע הבסיס הוא 10 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 16 ס"מ. חשב את:
- הזווית שבין המקצוע הצדדי והבסיס.
 - גובה הפירמידה.
 - הזווית שבין הפאה הצדדית והבסיס.
 - נפח הפירמידה.
 - שטח הפנים של הפירמידה.

- (6) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורך מקצוע הבסיס הוא b והזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא α . הבע באמצעות b ו- α את נפח הפירמידה ואת שטח המעטפת שלה.

- (7) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורכו של מקצוע הבסיס הוא a והזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β . זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ . הבע באמצעות β את $\sin \gamma$.

- (8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא 2α והזווית שבין שני מקצועות צדדיים נגדיים היא 2β . הוכח: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

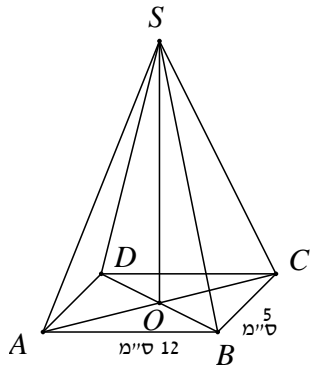
- (9) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. גובה הפירמידה הוא h והזווית שבין שתי פאות צדדיות היא β . הראה כי מקצוע הבסיס של הפירמידה הוא: $\frac{h}{\cos \frac{\beta}{2}} \cdot \sqrt{-2 \cos \beta}$.



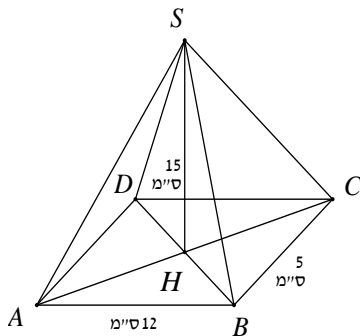
- (10) בקובייה ABCDA'B'C'D' חסומה פירמידה SABCD שבה כל המקצועות שווים. בסיס הפירמידה מונח על בסיס הקובייה. מצא את גודל הזווית שבין המקצוע הצדדי של הפירמידה לפאה צדדית של הקובייה, שלהם קדקוד משותף.

פירמידה שבסיסה מלבן:

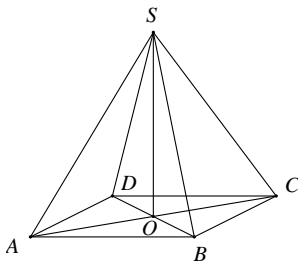
שאלות חימום:



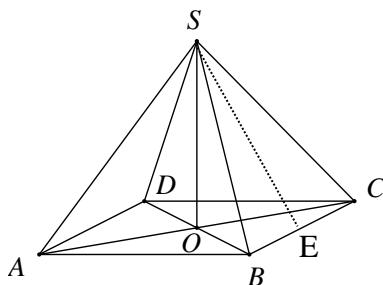
- 11 נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ. אורך גובה הפירמידה הוא: $SO = 15$ ס"מ.
א. חשב את נפח הפירמידה.
ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס.
ג. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



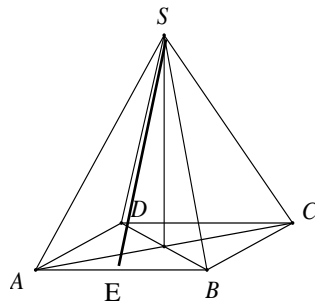
- 12 נתונה פירמידה מרובעת ישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ. אורך גובה הפירמידה הוא: $SH = 15$ ס"מ.
א. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.
ב. חשב את גובה הפאה הצדדית ABS.
ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
ד. הנקודה E היא אמצע BC. חשב את הזווית שבין SE לבסיס ABCD.



- 13 נתונה פירמידה ישרה ומרובעת שבסיסה ABCD הוא מלבן. נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס"מ. גובה הפירמידה SO הוא 12 ס"מ.
א. חשב את אורך המקצוע הצדדי.
ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
ג. נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא 40° . חשב את אורך מקצוע הבסיס BC.
ד. חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.

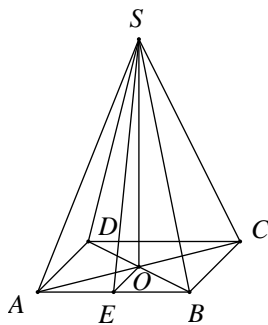


- 14 נתונה פירמידה SABCD, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. E אמצע BC. $AB = 16$ ס"מ. גובה הפירמידה: $SO = 10$ ס"מ.
א. חשב את הזווית שבין הקטע SE לבסיס הפירמידה ABCD.
ב. חשב את מקצוע BC אם נתון כי נפח הפירמידה הוא 480 סמ"ק.
ג. סמן ב-F את אמצע המקצוע AB. חשב את הזווית שבין SF לבסיס הפירמידה.



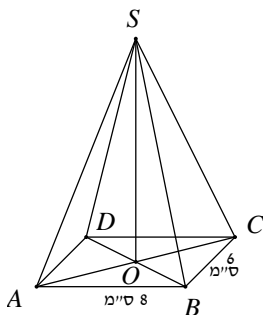
15 נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מלבן. זווית הראש של פאה צדדית SAB היא 56° . אורך מקצוע הבסיס AB שווה ל-12 ס"מ.

- חשב את אורך הגובה SE של הפאה SAB.
- חשב את אורך המקצוע הצדדי SA.
- נתון כי אורך המקצוע AD הוא 8 ס"מ. חשב את גובה הפירמידה.
- חשב את נפח הפירמידה.
- חשב את הזווית בין הקטע SE לבסיס הפירמידה.
- חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



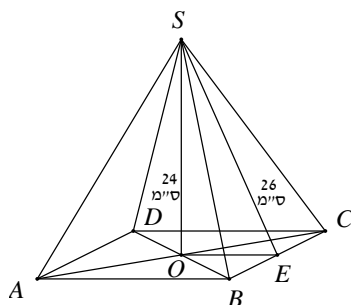
16 נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. אורך המקצוע AB הוא 15 ס"מ. הגובה SE של הפאה הצדדית SAB הוא 20 ס"מ. גובה הפירמידה SO הוא 18 ס"מ.

- חשב את אורך מקצוע הבסיס AD.
- חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.
- חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.



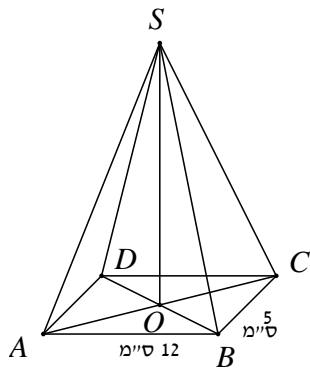
17 נתונה פירמידה ישרה SABCD. הבסיס ABCD הוא מלבן שבו: $AB = 8$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ. אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.

- חשב את הזווית $\angle CSA$.
- חשב את הזווית $\angle CSB$.
- חשב את נפח הפירמידה.

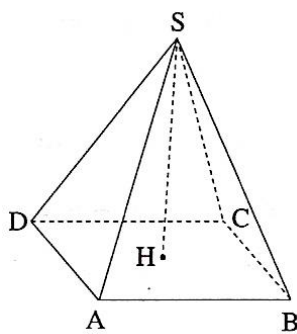


18 נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. גובה הפירמידה שווה ל-24 ס"מ. הגובה SE בפאה הצדדית SBC שווה ל-26 ס"מ. חשב את:

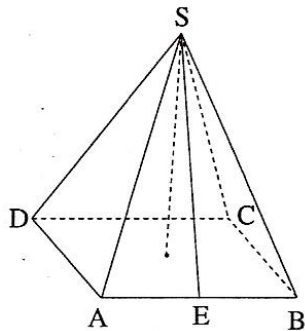
- אורך המקצוע AB.
- הזווית בין הקטע SE לבסיס ABCD.
- נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק.
- חשב את אורך המקצוע BC.



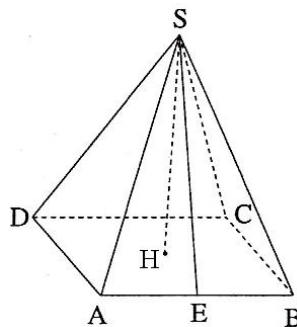
- 19 נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD.
בסיס הפירמידה הוא מלבן. אורכי
צלעות הבסיס הם: $BC = 5$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא 42° .
- חשב אורך מקצוע צדדי.
 - חשב את שטח הפאה SBC.
 - חשב את גובה הפירמידה, SO.



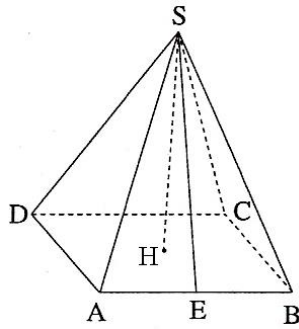
- 20 הבסיס ABCD של פירמידה ישרה
ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $SH = 12$ ס"מ, $AB = 25$ ס"מ, $AD = 17$ ס"מ.
- חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.
 - חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.
 - חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין
בסיס הפירמידה.



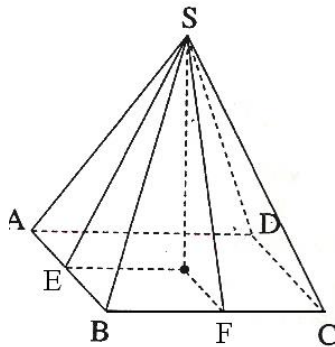
- 21 הבסיס ABCD של פירמידה ישרה
ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ. הגובה
של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 22$ ס"מ.
- חשב את גובה הפירמידה.
 - חשב את נפח הפירמידה.
 - חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס
הפירמידה.



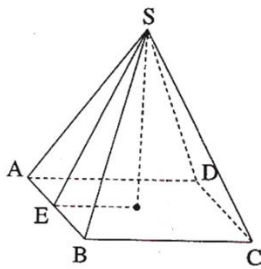
- 22 הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD
הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 16$ ס"מ, $AB = 17$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.
- חשב את גובה הפירמידה.
 - חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
 - חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין
בסיס הפירמידה.



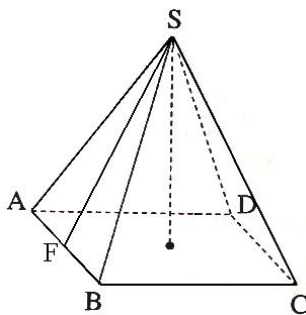
- (23)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AB = 20$ ס"מ, $SH = 8$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.
א. חשב את האורך AD.
ב. חשב את אורך DH.
ג. חשב את נפח הפירמידה.



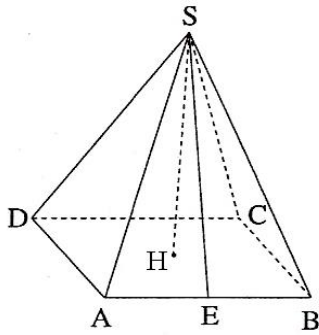
- (24)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AB = 15$ ס"מ, $BC = 20$ ס"מ. E היא האמצע של AB. הזווית שבין הישר SE לבסיס היא 55° .
א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. F היא האמצע של BC. חשב את זווית שבין הישר SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפאה הצדדית SAB.
ד. חשב את שטח הפאה SAB.



- (25)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 22$ ס"מ.
א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.
ב. חשב את מקצוע הבסיס BC.
ג. חשב את מקצוע הבסיס AB, אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.

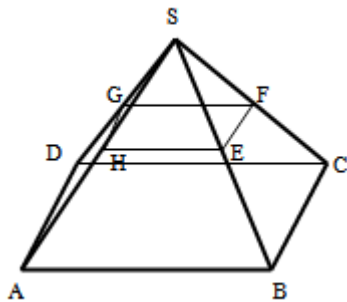


- (26)** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא 38° .
א. חשב את הגובה של הפאה הצדדית SAB.
ב. חשב את הזווית שבין SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפירמידה.

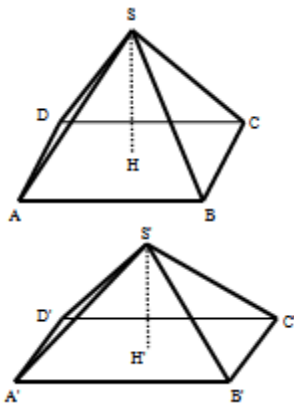


- (27) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון: $AD = 15$ ס"מ, $AB = 20$ ס"מ. זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא 38° .
- חשב את גובה הפאה SAB.
 - חשב את גובה הפירמידה.
 - חשב את זווית הראש של הפאה SAD.

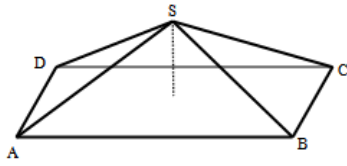
שאלות כלליות:



- (28) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מאמצעי המקצועות הצדדיים מעבירים קטעים כך שנוצר המלבן EFGH. ידוע כי שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר וכי אורך האלכסון שלו הוא 10 ס"מ. הזווית HSF היא 50° .
- מצא את מידות הבסיס ABCD.
 - מצא את גובה הפירמידה.
 - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.



- (29) נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן: האחת - SABCD והשנייה - $S'A'B'C'D'$. הקטעים SH ו- $S'H'$ הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות. ידוע כי: $AB = 2k$, $BC = k$, $HS = 3k$ וכי: $A'B' = 3k$, $B'C' = k$, $HS' = 2k$.
- לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות. נמק.
 - i. לשתי הפירמידות אותו שטח פנים.
 - ii. לשתי הפירמידות אותו הנפח.
 - iii. בשתי הפירמידות הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה שווה.
 - iv. אורך מקצוע צדדי בפירמידה SABCD גדול יותר מאורך מקצוע צדדי בפירמידה $S'A'B'C'D'$.
- ב. מצא את הערך של k בעבורו סכום הנפחים של שתי הפירמידות יהיה שווה לנפחה של קובייה בעלת אורך מקצוע של 4 ס"מ.



(30) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. ידוע כי מקצוע הבסיס BC שווה באורכו לגובה הפירמידה ויסומן ב- t .

כמו כן נתון כי אלכסון הבסיס AC גדול פי 4 מהמקצוע BC.

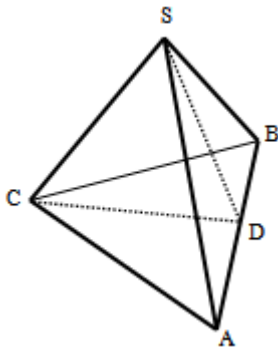
א. הבע באמצעות t את אורך המקצוע AB.

ב. הורד גובה SH למקצוע BC במישור הפאה SBC וחשב את הזווית הנוצרת בינו לבין מישור הבסיס ABCD.

ג. חשב את הזווית שבין שני מקצועות צדדיים שאינם סמוכים.

ד. מסמנים את פגישת התיכונים בפאה SBC ב-N. מעבירים קטע היוצא מנקודת פגישת האלכסונים במישור הבסיס ABCD לנקודה N. חשב את הזווית שהוא יוצר עם הבסיס.

פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:



(31) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש

שווה צלעות. מעבירים את הגובה SD בפאה

הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC. זווית הבסיס של פאה צדדית במנסרה היא 50° ושטח המעטפת הוא: 89.38 סמ"ר.

א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.

ב. מצא את גובה המנסרה.

ג. חשב את הזווית SDC.

ד. חשב את הזווית שבין המקצוע SC לבסיס הפירמידה.

(32) נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה.

אורכו של מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 14 ס"מ.

א. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי ובסיס הפירמידה.

ב. חשב את גובה פירמידה.

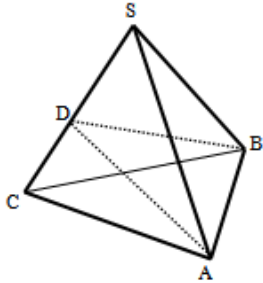
ג. חשב את הזווית שבין הפאה הצדדית ובסיס הפירמידה.

ד. חשב את הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות בפירמידה.

(33) נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שתי פאות צדדיות

סמוכות היא β . זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ . הוכח: $\sin \gamma \cdot \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$.

פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים:



34 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$).

מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו-SBC כך שהזווית הנוצרת בין מישורים אלו היא $\angle ADB = 42^\circ$.

ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ.

הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC

$$\text{ביחס: } \frac{DC}{SD} = \frac{2}{3}$$

א. חשב את אורך הגובה AD.

ב. חשב את זווית הראש בפאה SAC.

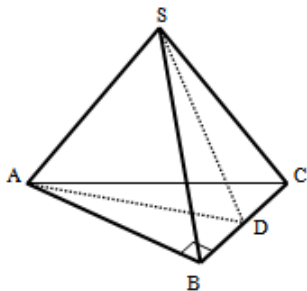
ג. חשב את שטח משולש הבסיס ABC.

35 נתונה פירמידה משוכללת וישרה SABC.

הבסיס הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$),

אורך שוקו k וזווית הראש שלו היא 2γ . אורך כל מקצוע צדדי בפירמידה גם הוא k . הבע באמצעות k ו- γ את נפח הפירמידה.

פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:



36 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא

משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

בפירמידה זו מעבירים גובה SD בפאה הצדדית SBC כך שנוצר המשולש SAD.

ידוע כי משולש זה הוא שווה שוקיים ובו

$$\text{נסמן: } SA = AD = 2m$$

הזווית הנוצרת בין הגובה SD והקטע AD

$$\text{תסומן ב- } \angle SDA = \alpha$$

א. הראה כי הגובה SD בפאה SBC שווה באורכו למקצוע הבסיס AB.

ב. מה ניתן לומר על המשולשים SAB ו-SAD במקרה זה?

ג. הבע באמצעות m , α את גובה הפירמידה.

37 נתונה פירמידה משולשת וישרה שבסיסה משולש ישר זווית.

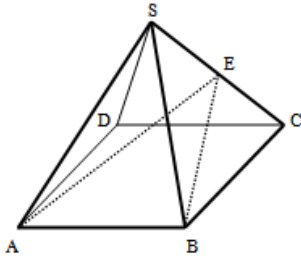
אחד מהניצבים במשולש הוא c והזווית שמולו היא α . הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא β . הבע באמצעות c , α ו- β את נפח הפירמידה.

תשובות סופיות:

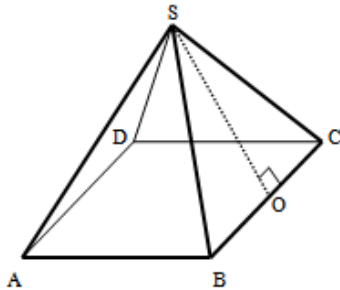
- (1) א. 35.36 ס"מ ב. 12.378 ס"מ ג. 44.72°
- (2) א. 19.079 ס"מ ב. 601.89 ס"מ ג. 64.896°
- (3) א. $a\sqrt{8.5}$ ב. 6.9° ג. $a = 2$
- (4) א. $V_{S'ABCD} = \frac{4}{3}a^3 > V_{SABCD} = \frac{2}{3}a^3$ ב. פי $4\sqrt{\frac{19}{82}}$ ג. דנה טועה - $P_{S'ABCD} = 9a^2 \neq P_{SABCD} \approx 7a^2 dy$
- (5) א. 63.77° ב. $\sqrt{206}$ ס"מ ג. 70.79° ד. 478.42 סמ"ק
ה. 403.97 סמ"ר.
- (6) $V = \frac{b^3 \tan \alpha}{3\sqrt{2}}, M = 2b^2 \sqrt{\frac{1}{2} \tan^2 \alpha + \frac{1}{4}}$
- (7) $\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \beta}}$
- (10) 30°
- (11) א. 300 סמ"ק ב. 13 ס"מ ג. 66.57°
- (12) א. 16.115 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. 263.26 סמ"ר ד. 68.2°
- (13) א. 13 ס"מ ב. 67.38° ג. 8.89 ס"מ BC
ד. $V = 162.32$ סמ"ק, $AB = 4.579$ ס"מ
- (14) א. 51.34° ב. 9 ס"מ BC ג. 65.77°
- (15) א. 11.284 ס"מ SE ב. 12.78 ס"מ SA ג. 10.551 ס"מ h
ד. 337.632 סמ"ק V ה. 69.24° ו. 55.65°
- (16) א. 17.435 ס"מ AD ב. 19.5 ס"מ SF ג. 640 סמ"ר M
- (17) א. 34.21° ב. 20.328° ג. 260 סמ"ק V
- (18) א. 20 ס"מ AB ב. 67.38° ג. 15 ס"מ BC
- (19) א. 6.796 ס"מ ב. 16.282 סמ"ר $S_{\Delta SBC}$ ג. 2.533 ס"מ h
- (20) א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג. 38.44°
- (21) א. 20.68 ס"מ h ב. 2068.2 סמ"ק V ג. 70.07°

- (22) א. $h = 8.94$ ס"מ ב. 14.7 ס"מ ג. 37.45°
- (23) א. $AD = 17.89$ ב. $DH = 13.42$ ס"מ ג. $V = 954.1$ סמ"ק
- (24) א. $h = 14.28$ ס"מ ב. 62.29° ג. 17.43 ס"מ ד. 130.7 סמ"ר
- (25) א. 50.6° ב. $BC = 27.93$ ס"מ ג. $AB = 6.32$ ס"מ
- (26) א. 29.04 ס"מ ב. 75.03° ג. $h = 28.05$ ס"מ
- (27) א. 29.04 ס"מ ב. $h = 28.05$ ס"מ ג. 28.27°
- (28) א. 12 ס"מ ו- 16 ס"מ ב. 21.44 ס"מ ג. 823 סמ"ר
- (29) א. i. לא נכון. שטח הפנים הוא שונה: $P_{S'ABCD} \approx 11.68k^2$, $P_{SABCD} \approx 11.245k^2$
 ii. נכון. הנפח הוא: $V = 2k^3$
 iii. לא נכון. הזוויות המתקבלות הן: 51.67° , 69.56°
 vi. נכון. מתקבל: $k\sqrt{10.25} > k\sqrt{6.5}$ ב. $k = \sqrt[3]{16}$
- (30) א. $AB = t\sqrt{15}$ ב. $\angle SHM = 27.31^\circ$ ג. $\angle ASC = 126.86^\circ$ ד. $\angle NMH = 14.47^\circ$
- (31) א. 10 ס"מ ב. 5.21 ס"מ ג. 61° ד. 42°
- (32) א. 60.339° ב. $\sqrt{148}$ ס"מ ג. 74.106° ד. 67.2°
- (34) א. 11.16 ס"מ ב. 53.13° ג. 47.27 סמ"ר
- (35) $V = \frac{k^3 \sin 2\gamma \cdot \sqrt{4 \cos^2 \gamma - 1}}{12 \cos \gamma}$
- (36) א. $SD = AB = 4m \cos \alpha$ ב. המשולשים חופפים. ג. $2\sqrt{3}m \cos \alpha$
- (37) $V = \frac{c^3 \tan \beta}{12 \tan \alpha \sin \alpha}$

תרגול נוסף:



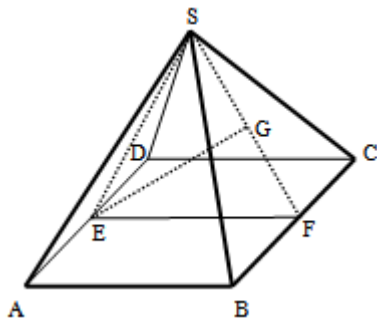
- (1) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע. מידות גובה הפירמידה ומקצוע הפירמידה הצדדי הם בהתאמה: 14 ס"מ ו-18 ס"מ.
- חשב את אורך מקצוע הבסיס.
 - חשב את נפח הפירמידה.
 - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
 - חשב את זווית הראש של פאה צדדית בפירמידה.
 - חשב את הזווית שבין המקצועות SB ו-SD.



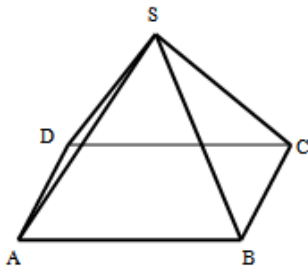
- (2) בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע מעבירים את הגובה SO למקצוע הבסיס BC בפאה הצדדית SBC וידוע כי הזווית שהוא יוצר עם מישור הבסיס ABCD היא 75° .
- פי כמה גדול גובה הפירמידה מאורך מקצוע הבסיס שלה?

ידוע כי גובה הפירמידה הוא 18.66 ס"מ.

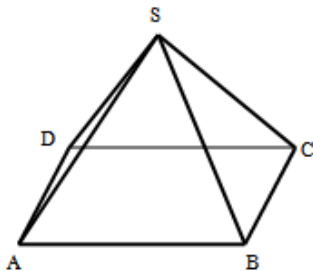
- חשב את הזווית הנוצרת בין גובה הפירמידה ובין אחד המקצועות הצדדיים.
- חשב את זווית הראש של אחת הפאות הצדדיות.
- חשב את הזווית הנוצרת שבין שני המקצועות SD ו-SB.



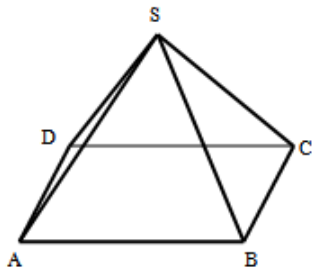
- (3) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע. מאמצעי המקצועות AD ו-BC מעבירים את הקטע EF ויוצרים את המשולש SEF. הנקודה G נמצאת על אמצע SF וידוע כי המשולש SEF הוא שווה צלעות.
- מסמנים: $GE = k$.
- הבע באמצעות k את נפח הפירמידה.
 - חשב את זווית הבסיס של פאה צדדית.
 - חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה.
 - מעבירים את הקטעים BE ו-BG כך שנוצר המשולש BEG. ידוע כי היקפו הוא: 28.17 ס"מ. מצא את k .



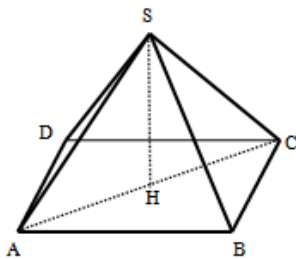
- (4) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. ידוע כי: $8 \text{ ס"מ} = BC$, $12 \text{ ס"מ} = AB$.
הזווית שבין המקצוע SB ומישור הבסיס היא 60° .
א. חשב את האורך של אלכסון בסיס הפירמידה.
ב. חשב את אורך גובה הפירמידה.
ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
ד. חשב את נפח הפירמידה.



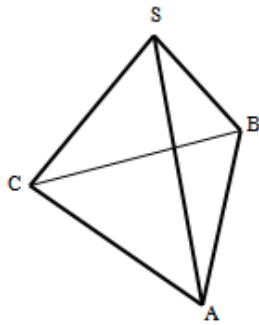
- (5) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. ידוע כי אורך המקצוע AB של המלבן הגדול פי 2 מאורך המקצוע BC. הזווית הנוצרת בין מקצוע צדדי למישור בסיס הפירמידה היא 60° . נפח הפירמידה הוא: $72\sqrt{15} \text{ סמ"ק}$.
א. מצא את מידות בסיס הפירמידה (AB ו-BC).
ב. חשב את זווית הראש של הפאה הצדדית SAB.
ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.



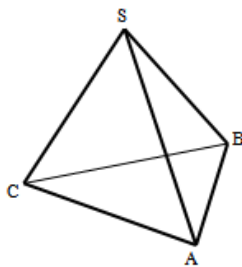
- (6) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מקצועות הפירמידה מקיימים: $SB = 3k$, $AB = 2k$, $BC = k$.
א. מצא את זוויות הבסיס של הפאות SAB ו-SBC.
ב. הבע באמצעות k את גובה הפירמידה.
ג. מצא את k בעבורו נפח הפירמידה יהיה שווה ל- 232 סמ"ק .



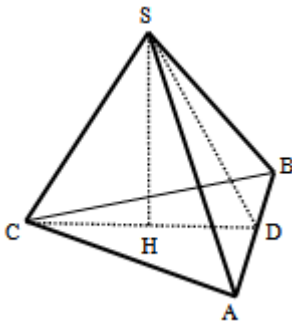
- (7) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מעבירים את האלכסון AC ומורידים את הגובה SH. אורך מקצוע צדדי הוא k ומסמנים את הזווית: $\angle ACB = \alpha$ וכן זווית הראש של הפאה SBC היא: 2α .
א. הבע באמצעות k ו- α את מידות הבסיס ABCD.
ב. הבע באמצעות k ו- α את גובה הפירמידה.
ג. מצא את α אם ידוע כי אורך גובה הפירמידה שווה למחצית מאורך האלכסון AC.



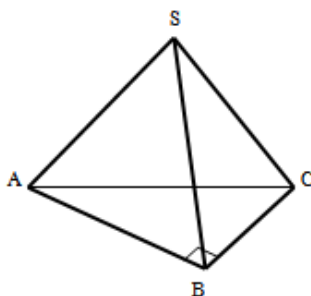
- 8 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. ידוע כי אורך מקצוע הבסיס שלה הוא 12 ס"מ וכי אורך מקצוע צדדי שלה הוא 14 ס"מ.
- חשב את שטח בסיס הפירמידה ABC.
 - חשב את גובה הפירמידה.
 - חשב את נפח הפירמידה.
 - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
 - חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי למישור הבסיס ABC בפירמידה.



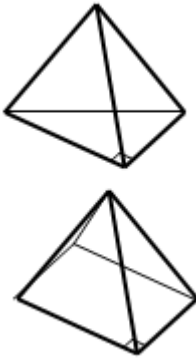
- 9 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). ידוע כי משולש הפאה SAC הוא שווה צלעות שאורך צלעו היא 16 ס"מ. זווית הראש של הפאה SAB היא 30° .
- מצא את אורך המקצוע AB.
 - חשב את הזווית שבין המקצוע SC למישור הבסיס ABC.
 - חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
 - חשב את נפח הפירמידה.



- 10 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$). מורידים גובה SD בפאה הצדדית SAB וגובה הפירמידה SH. ידוע כי המשולש SCD הוא שווה שוקיים שבו $SC = CD = 12$ ס"מ ו- $\angle SCD = 50^\circ$.
- מצא את אורך גובה הפירמידה.
 - מצא את אורך המקצוע AB.
 - חשב את הזווית שבין המקצועות AS ו-CS.
 - חשב את הזווית שבין המקצועות AS ו-BS.



- 11 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$). ידוע כי אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא 8 ס"מ וכי שטח משולש הבסיס הוא 24 סמ"ר. הפאה הצדדית SAB היא משולש שווה צלעות.
- מצא את מידות מקצועות הבסיס.
 - חשב את אורך גובה הפירמידה.
 - חשב את הזווית שבין המקצוע SB למישור הבסיס ABC.



12) לפניך שתי הצורות המרחביות הבאות:

1. פירמידה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית בעל

מקצועות ניצבים במידות $2a$, a וגובה $2a$.

2. פירמידה ישרה שבסיסה מלבן במידות $2a$, a וגובה $2a$

א. לפניך מספר טענות, קבע אלו מהן נכונות ואלו שגויות

ונמק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים.

i. הנפח של פירמידה 2 גדול פי 2 מהנפח של פירמידה 1.

ii. הזווית שיוצר גובה הפירמידה עם כל אחד

מהמקצועות הצדדיים בשתי הפירמידות שווה.

iii. שטח המעטפת של פירמידה 2 גדול פי 2 משטח המעטפת של פירמידה 1.

ב. הבע באמצעות a את אורך מקצוע קובייה שנפחה שווה לסכום הנפחים של פירמידות 1 ו-2.

תשובות סופיות:

- 1) א. 16 ס"מ. ב. 1194.66 סמ"ק. ג. 772 סמ"ר. ד. 52.7° . ה. 77.88° .
- 2) א. פי 1.86. ב. 20.75° . ג. 29° . ד. 41.5° .
- 3) א. $\frac{4k^3}{9}$. ב. 63.43° . ג. 50.76° . ד. $k = 10$.
- 4) א. $\sqrt{208}$ ס"מ. ב. 12.48 ס"מ. ג. 364.23 סמ"ר. ד. 399.36 סמ"ק.
- 5) א. 12 ס"מ, 6 ס"מ. ב. 53.13° . ג. 294.46 סמ"ר.
- 6) א. 70.52° , 80.4° . ב. $k\sqrt{7.75}$. ג. $k = 5$.
- 7) א. $2k \sin \alpha$, $2k \sin \alpha \tan \alpha$. ב. $k\sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$. ג. $\alpha = 35.56^\circ$.
- 8) א. $36\sqrt{3}$ סמ"ר. ב. $\sqrt{148}$ ס"מ. ג. $24\sqrt{111}$ סמ"ק. ד. 290 סמ"ר. ה. 60.33° .
- 9) א. 8.28 ס"מ. ב. 70.52° . ג. 285.7 סמ"ר. ד. 321.27 סמ"ק.
- 10) א. 9.19 ס"מ. ב. 12.83 ס"מ. ג. 69° . ד. 64.6° .
- 11) א. $10 \times 8 \times 6$ ס"מ. ב. $\sqrt{39}$ ס"מ. ג. 51.31° .
- 12) א. i. הטענה נכונה. ii. הטענה נכונה. iii. הטענה אינה נכונה. ב. $a\sqrt[3]{2}$.

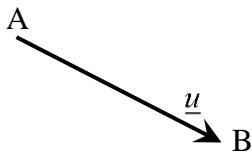
תוכן העניינים:

102.....	פרק 8
102.....	וקטורים גיאומטריים
102	סיכום כללי :
102.....	הגדרה כללית :
102.....	קשרים בין ווקטורים :
103.....	וקטורים הפורשים מישור :
103.....	קומבינציה לינארית של ווקטורים :
104.....	המכפלה הסקלרית וגודל של ווקטור :
105	שאלות :
105.....	שאלות יסודיות בווקטורים :
108.....	וקטורים הפורשים מישור :
110.....	המכפלה הסקלרית וחישוב גודל של ווקטור :
113	תשובות סופיות :

פרק 8

וקטורים גיאומטריים

סיכום כללי:



הגדרה כללית:

להלן תיאור של וקטור גיאומטרי:

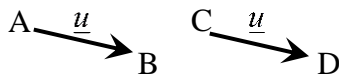
וקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: \overrightarrow{AB} .

ניתן לסמן וקטור באות קטנה באופן הבא: \underline{u} (אותיות מקובלות לסימון הן: \underline{u} , \underline{v} , \underline{w}).

מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין וקטורים:

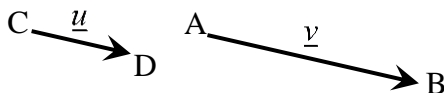
- וקטורים שווים: שני וקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם. דוגמא לווקטורים שווים:



מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

- וקטורים מקבילים: שני וקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים. ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.

וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית". דוגמא לתלות בין וקטורים מקבילים:

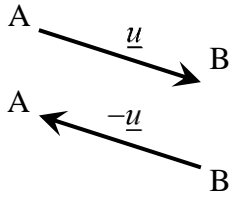


עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$,

או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.

- אם זוג וקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$ מקבילים אז

מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.



- ווקטור המסומן \overrightarrow{BA} הוא בעל גודל זהה לווקטור \overrightarrow{AB} וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

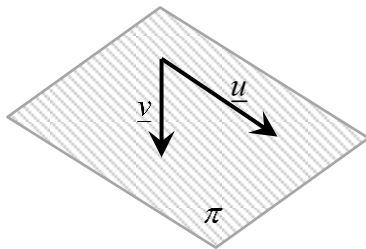
הערה:

שני ווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב- 180° .

ווקטורים הפורשים מישור:

כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:



הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור π .

קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים **תלויים ליניארית** (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

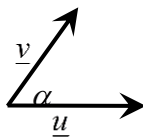
עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור \underline{w} המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם. במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ ו- \underline{w} נקראים תלויים ליניארית.

המכפלה הסקלרית וגודל של ווקטור:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר: α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.

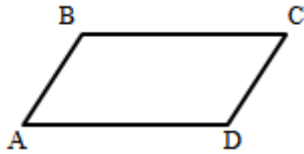
גודל של ווקטור נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$, או: $|\underline{u}|^2 = u^2$.

הערה:

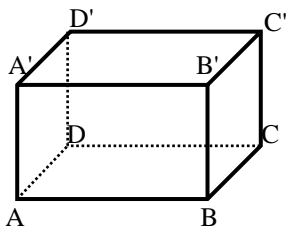
המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

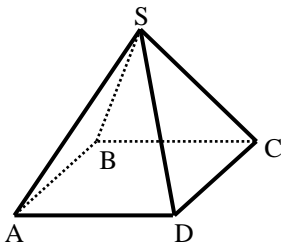
שאלות יסודיות בווקטורים:



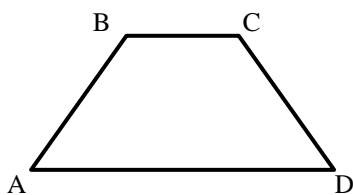
- (1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- \underline{u} או \underline{v} .



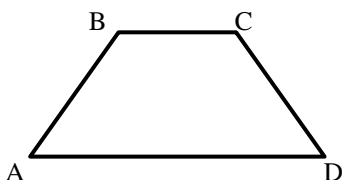
- (2) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- \underline{u} , \underline{v} או \underline{w} .



- (3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל- \underline{u} , \underline{v} או \underline{w} .



- (4) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות \underline{u} או \underline{v} .

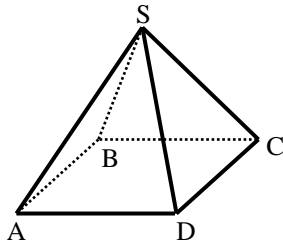


- (5) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

א. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטורים \overrightarrow{AC} ו- \overrightarrow{DC} .

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטור \overrightarrow{BE} .

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטור \overrightarrow{AF} .



6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את

הווקטורים \overrightarrow{AC} ו- \overrightarrow{SC} .

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הווקטור \overrightarrow{BN} .

7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB = 2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overrightarrow{AP} ו- \overrightarrow{PB} .

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB = 3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP} = \underline{u}$.

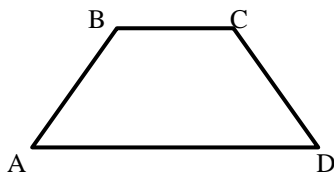
הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overrightarrow{PB} ו- \overrightarrow{AB} .

9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overrightarrow{AP} ו- \overrightarrow{PB} .

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overrightarrow{AP} ו- \overrightarrow{PB} .



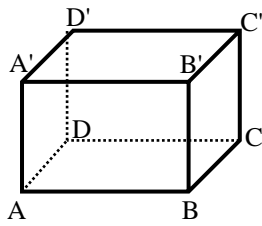
11) בטרפז ABCD שבשרטוט

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD

ומקיימת: $\frac{DF}{FC} = \beta$.

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- β את הווקטור \overrightarrow{AF} .

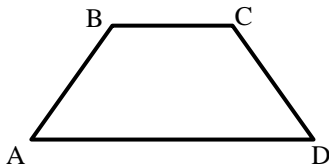


12) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

הבע באמצעות α , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור \overline{PQ} .



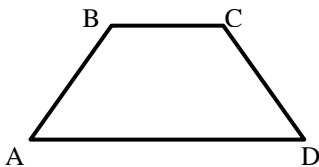
13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:

$\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$.



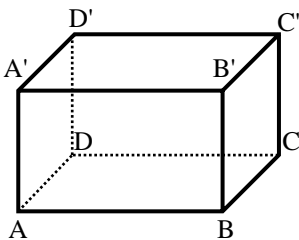
14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:

$\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overline{FE} \parallel \overline{AC}$.



15) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

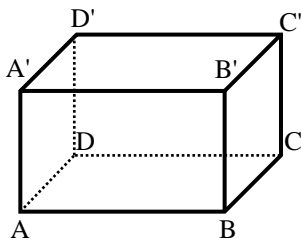
א. הבע באמצעות α , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור \overline{PQ} .

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overline{PQ} \parallel \overline{EC}$.

ווקטורים הפורשים מישור:



16) בתיבה ABCD A'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

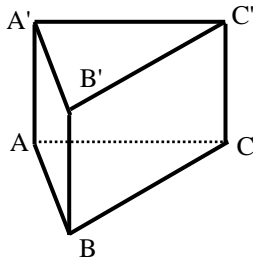
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- α את הווקטור \overrightarrow{PQ} .

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור \overrightarrow{PQ} מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור \overrightarrow{PQ} מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C' ובה נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{AM}{MC'} = \alpha$

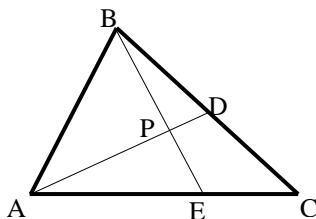
והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור \overrightarrow{NM} .

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור \overrightarrow{NM} מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור \overrightarrow{NM} מקביל לפאה ABB'A'.

הבע את α באמצעות β .



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE} = 2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

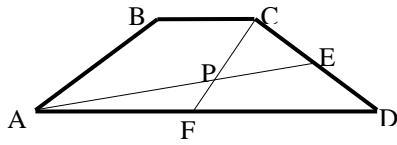
נגדיר: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, וכן: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = s \cdot \overrightarrow{BE}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- s את הווקטור \overrightarrow{AP}

בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD

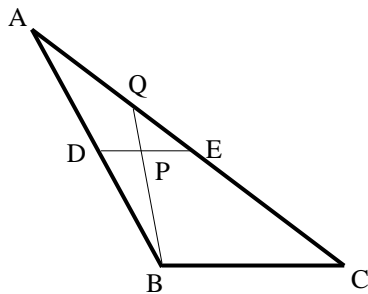
ואת הקטע BE.



19) בטרפז $ABCD$, $AD \parallel BC$ שבשרטוט

נתון: $AD = 3BC$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD. הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



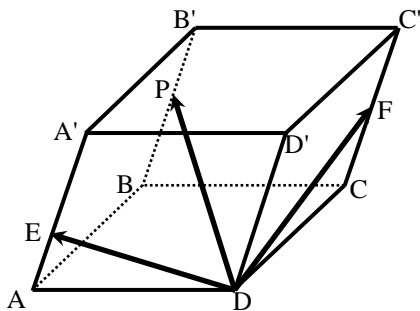
20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך

שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.

הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$.



21) במקבילון $ABCD A'B'C'D'$

נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.

הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC' ,

הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'

ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על

המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{BP} = k \cdot \overrightarrow{BB'}$.

נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- k את הווקטור \overrightarrow{DP} .

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB' .

ג. האם הנקודות D, E, F ו-P נמצאות על אותו מישור? נמק.

המכפלה הסקלרית וחישוב גודל של וקטור:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

ב. $\alpha = 120^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 4$

א. $\alpha = 60^\circ$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$

ד. $\alpha = 180^\circ$, $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 8$

ג. $\alpha = 30^\circ$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$

ו. $\alpha = 90^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 7$

ה. $\alpha = 0^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 3$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 4$

א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 3$

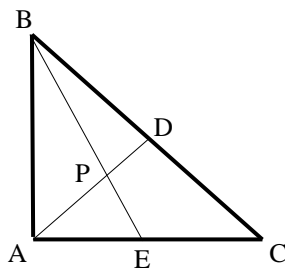
ד. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$

ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 9$

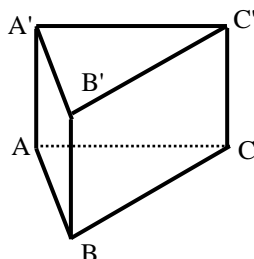
24) נתונים שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} שאורכם: $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 6$. הזווית ביניהם היא 120° .
חשב את גודלו של הווקטור \overrightarrow{PQ} שמוגדר: $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

25) נתונים שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 4$.
חשב את גודלו של הווקטור \overrightarrow{MN} שמוגדר: $\overrightarrow{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$.

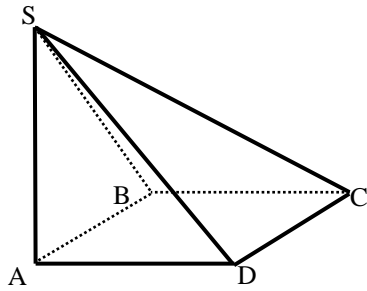
26) נתונים שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} שאורכם: $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 6$. הזווית ביניהם היא 120° .
חשב את גודל הזווית $\angle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$, $\overrightarrow{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$.



27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$). הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC. הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE. נתון: $AC = 12$, $AB = 8$, $\frac{AP}{PD} = 3$.
חשב את גודל הזווית $\angle DPC$.



28) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8. הנקודה M היא אמצע המקצוע $A'C'$ והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN = 2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.
חשב את גודל הזווית $\angle MAN$.



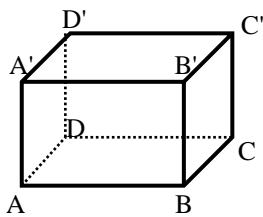
(29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.

$$\text{נתון: } AB = AD = \frac{1}{2} AS = k.$$

$$\text{נסמן: } \overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AS} = \underline{w}.$$

הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.

חשב את גודל הזווית: $\angle PAQ$.



(30) בתיבה ABCDA'B'C'D'

$$\text{נתון: } AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = AA', \overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AA'} = \underline{w}.$$

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת:

$$\frac{AP}{A'B'} = \alpha$$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

$$\text{א. מהו ערכו של } \alpha \text{ שבעבורו מתקיים: } |\overrightarrow{AP}| = \frac{5}{6} |\overrightarrow{AQ}|?$$

ב. הבע באמצעות α את $\cos \angle PAQ$ והראה כי לכל ערך של α הזווית $\angle PAQ$ חדה.

$$\text{ג. מהו ערכו של } \alpha \text{ שבעבורו הזווית } \angle PAQ \text{ מקיימת: } \cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}?$$

$$(31) \text{ הוכח כי בכל מרובע } ABCD \text{ מתקיים: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

$$(32) \text{ נתון מלבן } ABCD. \text{ הוכח כי לכל נקודה כלשהי } P \text{ מתקיים: } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}.$$

(33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

$$\text{הוכח כי מתקיים: } S_{ABCD} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}.$$

(34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

$$\text{הוכח כי מתקיים: } \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}.$$

(35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS} \perp \overrightarrow{AC}$.

$$\text{הוכח: } \overrightarrow{CS} \perp \overrightarrow{AB}.$$

(36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

(37) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.

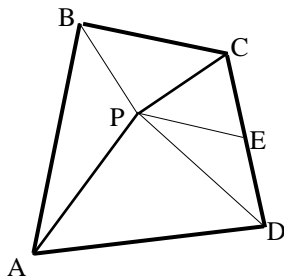
$$\text{הוכח: } \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$$

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.

$$\text{הוכח: } \vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AS})$$

ג. נתון בנוסף כי \vec{AS} ו- \vec{AP} מאונכים ל- \vec{BC} .

הוכח כי $AB = AC$. (הדרכה: סמן $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.)



(38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD

כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים

ישרי זווית וש"ש ($AP = PD$, $BP = PC$).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\vec{PE} \perp \vec{AB}$.

(הדרכה: סמן $\vec{PB} = \underline{a}$, $\vec{PC} = \underline{b}$, $\vec{PA} = \underline{c}$, $\vec{PD} = \underline{d}$.)

(39) בטראדר SABC נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AS}$.

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\vec{SQ} = \beta(\vec{SB} + \vec{SC})$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו \vec{PQ} מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. הוכח: $\vec{PQ} \perp \vec{BC}$. $AB = AC$.

(40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה

שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

$$\underline{u} = \overrightarrow{DC}, \underline{v} = \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\underline{w} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}, \underline{u} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}, \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} \quad (2)$$

$$\underline{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \underline{w} = \overrightarrow{AS} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \underline{v} \quad \text{ג.} \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overrightarrow{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overrightarrow{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad (8)$$

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \underline{u}, \overrightarrow{PB} = (1-\alpha)\underline{u} \quad (9)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overrightarrow{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u} \quad (10)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad (11)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad (12)$$

$$\alpha = 2 \quad (13)$$

$$\alpha = 1 \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \quad \text{ג.} \quad \overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\alpha = 1 \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{\beta}{1-\beta} \quad \text{ג.} \quad \overrightarrow{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{א.} \quad (17)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \overrightarrow{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad BP:PE = 3:2, AP:PD = 4:1 \quad (18)$$

. $AP:PE = 2:1$, $CP:PF = 2:1$ (19)

. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3}$.ג

$AQ:QC = 1:2$.נ (20)

.ג .כ

$BP:PB = 1:5$.ג

$\overrightarrow{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w}$.נ (21)

.0 .א

15 .ה

-24 .ז

$6\sqrt{3}$.ג

-10 .ב

3 .נ (22)

.0° .ז

.90° .ג

.150° .ב 60° .נ (23)

. $|\overrightarrow{PQ}| = 18.248$ (24)

. $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{29}$ (25)

. 31.87° (26)

. 55.49° (27)

. 70.623° (28)

. 24.095° (29)

. $\alpha = \frac{1}{2}$.א

$\cos(\angle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$.ג

$\alpha = \frac{3}{4}$.נ (30)

. $\alpha + 2\beta = 1$.נ (39)

תוכן העניינים:

117.....	פרק 9
117.....	וקטורים אלגבריים
117	סיכום כללי :
117	הגדרה כללית :
117	ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים :
118	אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון :
118	מכפלה סקלרית וגודל של ווקטור בהצגה אלגברית :
118	הצגה פרמטרית של ישר :
119	מצב הדדי בין ישרים :
120	הצגה פרמטרית של מישור :
120	משוואת מישור :
120	מצב הדדי בין ישר למישור :
121	מצב הדדי בין מישורים :
121	חישובי זוויות ונוסחאות :
122	חישובי מרחקים ונוסחאות :
123	שאלות :
123	שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים :
124	פעולות אלגבריות בין וקטורים :
125	גודל של וקטור :
125	וקטורים מקבילים ושווים :
126	זווית בין וקטורים :
126	הצגה פרמטרית של ישר :
127	מצב הדדי בין ישרים :
128	הצגה פרמטרית של מישור :
129	משוואת מישור :
129	מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור :
130	מישורים המקבילים לצירים :
130	מצב הדדי בין ישר ומישור :
131	מצב הדדי בין מישורים :
131	ישר חיתוך בין מישורים :
132	חישובי זוויות – זווית בין שני ישרים :
132	חישובי זוויות – זווית בין ישר ומישור :
133	חישובי זוויות – זווית בין שני מישורים :
133	מרחקים – מרחק בין שתי נקודות :
133	מרחקים - מרחק בין נקודה לישר :
134	מרחקים – מרחק בין נקודה למישור :

134	מרחקים – מרחק בין ישרים מקבילים :
134	מרחקים – מרחק בין ישר למישור :
135	מרחקים – מרחק בין מישורים מקבילים :
135	מרחקים – מרחק בין ישרים מצטלבים :
136	תשובות סופיות :
139	שאלות שונות בוקטורים :
141	תשובות סופיות :
142	שאלות שונות הכוללות שימוש במכפלה וקטורית :
142	מציאת משוואת מישור :
142	מצב הדדי בין ישר ומישור :
143	מצב הדדי בין מישורים :
143	מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים :
143	חישובי מרחקים שונים :
144	שאלות שונות :
145	תשובות סופיות :

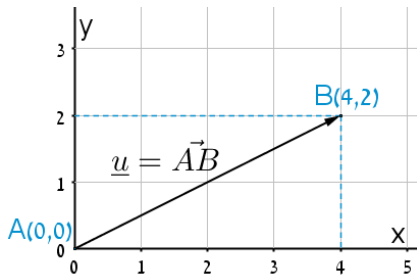
פרק 9

וקטורים אלגבריים

סיכום כללי:

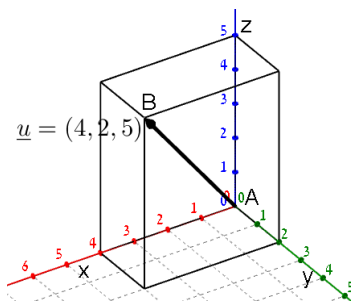
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x, y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u} = (x, y)$.



דוגמאות:

- הוקטור $\underline{u} = (4, 2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הוקטור $\underline{u} = (4, 2, 5)$ נמצא במרחב הקרטזי.

מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$

וסופו בנקודה $B(4,2,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$ ייכתב ע"י חישוב

הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$
הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים \underline{u} ו- \underline{v} תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב באופן

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\text{גודלו של וקטור } \underline{u} = (x_1, y_1, z_1) \text{ נתון ע"י: } |\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

הצגה פרמטרית של ישר:

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור \underline{a} נקרא וקטור ההעתקה.

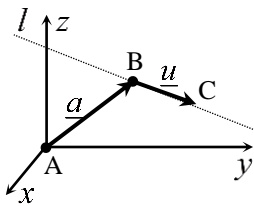
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור \underline{u} נקרא וקטור הכיוון של הישר.

זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- \underline{x} הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר ℓ .



דוגמא: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים

$$\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5, 3, 1); \underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7, 0, 10) - (5, 3, 1) = (2, -3, 9)$$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $\ell: \underline{x} = (5, 3, 1) + t(2, -3, 9)$

*הערות:

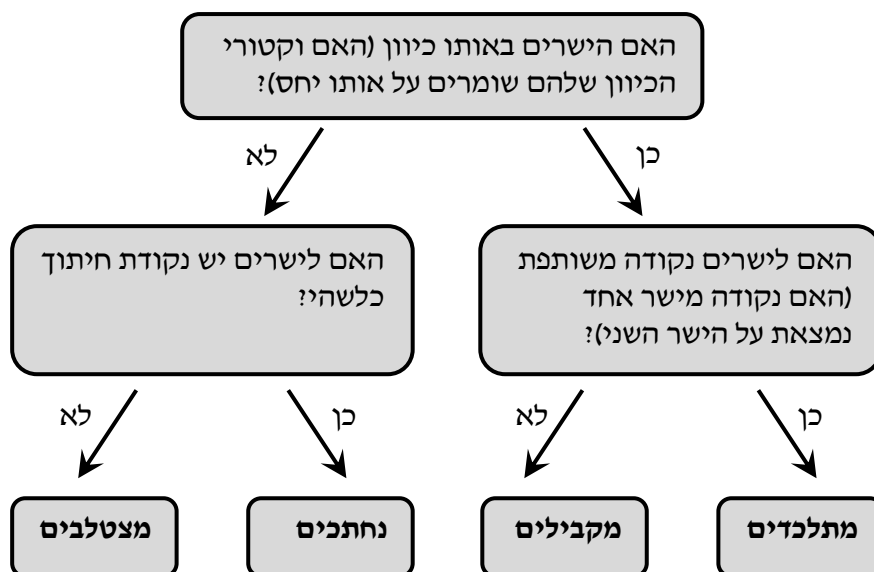
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור \underline{x} המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור \underline{a} ומוצאו של הווקטור \underline{u} .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור \underline{u} (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור \underline{a} .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים:

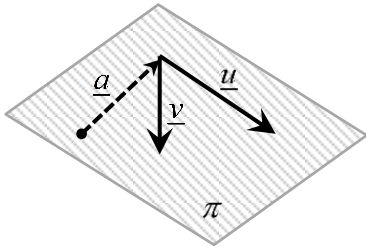
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור:



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים. הווקטור \underline{a} הוא ווקטור ההעתקה. מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} הם ווקטורי הכיוון של המישור. אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

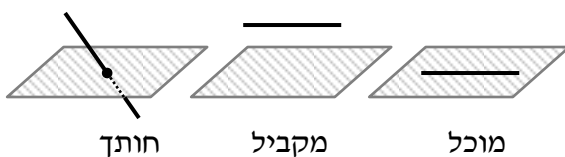
הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$ כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- \underline{x} הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π .

משוואת מישור:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$, כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a, b, c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h} = (a, b, c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$
נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

חישובי זוויות ונוסחאות:

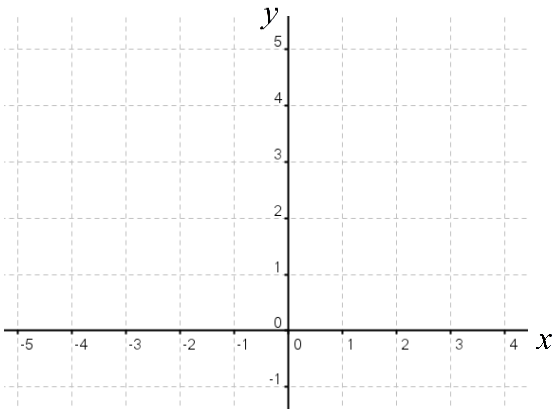
- זווית α בין שני וקטורים \underline{u} , \underline{v} תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|} \right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$ תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin \alpha = \left| \frac{\underline{u} \cdot \underline{h}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|} \right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|} \right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות:

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
2. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור: $\pi: ax + by + cz + d = 0$ יחושב ע"י: $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
ב. שימוש בנוסחה: $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

שאלות:

שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:



1) שרטט את הווקטורים הבאים:

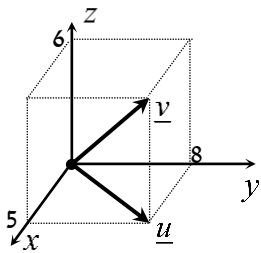
א. $\underline{u} = (4, 2)$

ב. $\underline{v} = (-5, 1)$

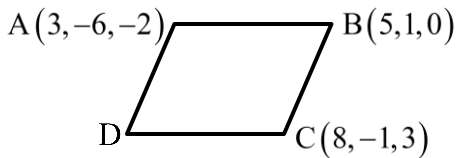
ג. $\underline{w} = (3, -4)$

ד. $\underline{a} = (0, 3)$

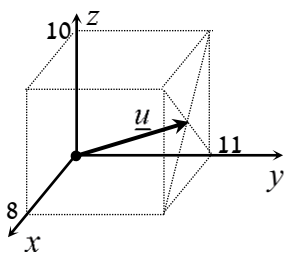
ה. $\underline{b} = (-5, 0)$



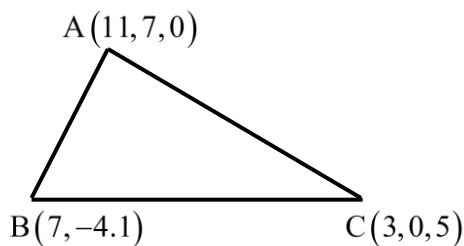
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} על פי השרטוט:



3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקדקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור \underline{u} על פי השרטוט:



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

6) מצא את x, y ו- z אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר: $\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$, $\underline{u} = (4, -1, 2)$.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור \overline{AB} אם נתונות הנקודות $A(-3, 5)$ ו- $B(6, 1)$.

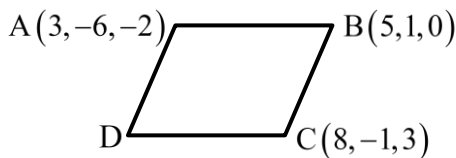
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8, 11)$ והווקטור $\overline{PQ} = (4, -3)$.

8) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור \overline{EF} אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$

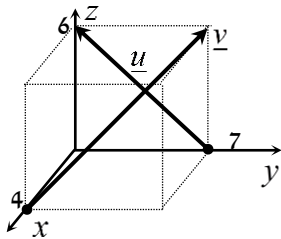
והווקטור $\overline{MN} = (-1, -1, 9)$.



9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה

מקדקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקדקוד D .



10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} :

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

11) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u} = (4, 0, 9)$, $\underline{v} = (-1, 3, -5)$

חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{u} - \underline{v}$, $\underline{u} - 2\underline{v}$, $3\underline{u} + 2\underline{v}$.

12) נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$. חשב את:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

ד. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$ ו. $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

13) נתונות הנקודות הבאות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$

מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overline{AC} + \overline{AB}$ ב. $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$ ג. $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

14 נתונים שלושה ווקטורים : $\underline{u} = (6, -1, z)$, $\underline{v} = (0, y, 4)$, $\underline{w} = (x, 5, -10)$

א. מצא את ערכם של x, y, z המקיימים : $\underline{u} + 2\underline{v} = \underline{w}$

ב. מצא את ערכם של x, y, z המקיימים : $2\underline{v} - 3\underline{w} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם : $\underline{u} = (6, y, z)$, $\underline{v} = (y-1, 2, x)$, $\underline{w} = (x, 2z, -10)$?

15 נתונים הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} .

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור : $\underline{u} = (-6, 2, 3)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. מצא את y עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים :

$\underline{u} = (1, 7, -6)$, $\underline{v} = (2, y, 4)$ תהיה -1.

ג. מצא את y עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

גודל של וקטור :

16 נתונים הווקטורים הבאים : $\underline{u} = (1, -3, 2)$, $\underline{v} = (5, -1, 0)$

חשב את הגדלים של הווקטורים הבאים : \underline{u} , \underline{v} , $2\underline{v} + \underline{u}$, $4\underline{u} - 3\underline{v}$

17 נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

וקטורים מקבילים ושווים :

18 נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$A(1, 2, 0)$, $B(-2, 5, 3)$, $C(-1, 8, 4)$, $D(4, 3, -1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19 נתונות הנקודות הבאות : $A(1, 0, 2)$, $B(3, 7, -4)$, $C(6, 9, 0)$, $D(7, 4, 10)$, $E(9, 11, 4)$

א. הראה כי : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמק.

זווית בין וקטורים:

(20) חשב את הזווית שבין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

(21) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם: $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(5, -1, 0)$.

(22) נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצא וקטור \underline{w} שמכפלתו ב- \underline{u} היא 0 ומכפלתו ב- \underline{v} היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

הצגה פרמטרית של ישר:

(23) האם הנקודה $A(7, 0, 3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = (4, 3, 0) + t(1, -1, 1)$?

(24) האם הנקודה $B(4, -2, -10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = t(2, -1, 5)$?

(25) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5, -2)$ ו- $B(1, 6)$.

(26) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3, 0, -2)$ ו- $D(4, 1, 1)$.

(27) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2, -7, 1)$

ומקביל לישר $\ell : \underline{x} = (0, 3, -1) + t(-4, 2, 1)$.

(28) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1, 2, 3)$

ומאונך לישר: $\ell : \underline{x} = (1, 2, 0) + s(1, -2, 4)$.

(29) ענה על הסעיפים הבאים :

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר : $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(4, 5, 6)$

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y ו- z .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות : $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(30) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

(31) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3, -1, 4)$

ומקביל לציר ה- z .

(32) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x} = (1, -2, 6) + t(-2, 1, 2)$ עם המישור $[xy]$.

מצב הדדי בין ישרים :

(33) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2), \ell_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$$

(34) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1), \ell_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$$

(35) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1), \ell_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$$

(36) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5), \ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$$

(37) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1), \ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$$

(38) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$

(39) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים :
 $\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$
א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

(40) נתונות הנקודות : $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

הצגה פרמטרית של מישור :

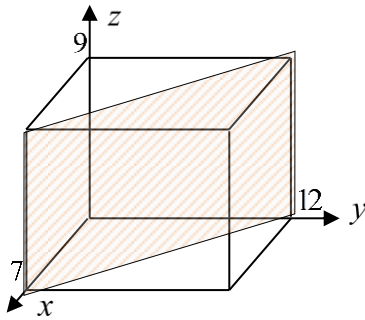
(41) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא :
 $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$, $C(0, -3, 1)$

(42) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$

(43) נתונים שני ישרים : $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$, $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

(44) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$ ומכיל
את ציר ה- x .

(45) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.



46 נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.

משוואת מישור:

47 קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$
 א. $D(5, 7, 1)$ ב. $E(2, -1, 1)$

48 מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על המישור: $\pi : kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$.

49 נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$.
 מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

50 נתונה משוואת מישור: $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$.
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

51 נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

52 נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$.
 מצא את משוואת המישור.

53 נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$.
 מצא את משוואת המישור.

54 המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$.
 מצא את משוואת המישור.

55) ענה על הסעיפים הבאים :

א. לפניך הנקודות הבאות : $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,-5)$.

i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה

פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

מישורים המקבילים לצירים :

56) נתונה משוואת מישור : $\pi : (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$

לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

57) פאונתיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$

ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

מצב הדדי בין ישר ומישור :

58) נתונים הישר והמישור הבאים : $\ell : \underline{x} = (5,0,1) + t(4,1,-2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

59) נתונים הישר והמישור הבאים :

$\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$, $\ell : \underline{x} = (2,-1,6) + t(-1,1,2)$

קבע את המצב ההדדי שביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

60) נתונים הישר והמישור הבאים : $\ell : \underline{x} = (-6,1,0) + t(3,0,-1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$

קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת

החיתוך.

61) נתונים הישר והמישור הבאים : $\ell : \underline{x} = (1,a,3) + t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$

מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכלל במישור.

מצב הדדי בין מישורים:

62 נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$, $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$, $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

63 נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים.

ישר חיתוך בין מישורים:

64 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$, $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$, $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67 נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$, $\pi_8 : z - 2 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

68 מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$

עם המישור $[xz]$.

69 נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

חישובי זוויות – זווית בין שני ישרים:

70 מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$

71 מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3, 4, 6)$, $B(6, 0, -2)$ וישר העובר דרך הנקודות: $C(6, 5, 1)$, $D(-1, 4, 2)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

72 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i. $B-A$

ii. $C-B$

iii. $C-A$

ב. מי מבין הנקודות $D(4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC .

73 נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $A(x, 6, 1)$, $B(-2, y, -1)$

נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.

מצא את שיעורי הנקודה C אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו- AC

הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$

חישובי זוויות – זווית בין ישר ומישור:

74 מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$

75 נתונות הנקודות $A(1, -1, 2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-7, 3, -1)$

מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו- D ובין המישור ABC .

76 נתונה פירמידה משולשת $SABC$, שמשוואת הבסיס ABC שלה היא: $2x + y - 2z - 6 = 0$. קדקוד הפירמידה הוא $S(3, 1, -2)$. מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה, אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים: $x_B = z_B = -1$.

חישובי זוויות – זווית בין שני מישורים:

77 מצא את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$ ו- $\pi_2: 4x - 7y + 5z + 3 = 0$.

78 נתונה פירמידה משולשת $ABCD$, שקדקודה הם: $A(0, 2, -5)$, $B(3, -1, 1)$, $C(7, -1, -5)$, $D(3, 2, 0)$. מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC .

79 מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x + 5y - z + 4 = 0$ למישור $[xz]$.

מרחקים – מרחק בין שתי נקודות:

80 נתונות הנקודות: $A(2, 4, -5)$, $B(0, -2, 6)$ ו- $C(k, -1, 13 - k)$. מצא ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB = AC$.

מרחקים - מרחק בין נקודה לישר:

81 מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\ell: \underline{x} = t(2, 0, -7)$.

82 נתונות הנקודות $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$. חשב את שטח המשולש ABC .

83 על הישר $\ell: \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע $ABCD$. אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$. מצא את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

מרחקים – מרחק בין נקודה למישור:

84) מצא את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.

85) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$ ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.

86) נתונים ישר ומישור: $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$, $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$. מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

מרחקים – מרחק בין ישרים מקבילים:

87) נתונות הנקודות $A(15, 0, -4)$, $B(12, -5, 2)$, $C(6, 1, 4)$, $D(12, 11, -8)$.

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B.

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

88) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1 : \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1), \quad l_2 : \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3 : \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2), \quad l_4 : \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

מרחקים – מרחק בין ישר למישור:

89) נתונה משוואת מישור: $4x - z + 6 = 0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה-y ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה-y ובין המישור הנתון.

90) נתונים ישר ומישור: $\pi : 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$, $l : \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

מרחקים – מרחק בין מישורים מקבילים:

- (91) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$. מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.
- (92) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$, $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$. מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

- (93) נתונים שישה מישורים:
- $$\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0, \quad \pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0, \quad \pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$$
- $$\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0, \quad \pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0, \quad \pi_6: kx + qy + z + p = 0$$
- מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q, k שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

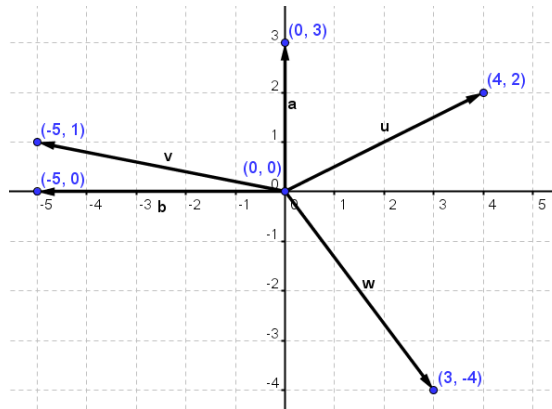
- (94) כדור שמרכזו בנקודה $O(3, 8, -1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x + 4y - 3z - 6 = 0$. מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

מרחקים – מרחק בין ישרים מצטלבים:

- (95) נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1: \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$ ו- $\ell_2: \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$. הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.
- (96) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1: \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$ ו- $\ell_4: \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$. מצא את המרחק שביניהם.
- (97) מצא את מרחק הישר $\ell: \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

תשובות סופיות:

(1) להלן הסרטוט:



(3) $D(6, -8, 1)$

(2) $\underline{u} = (5, 8, 0)$, $\underline{v} = (5, 8, 6)$

(5) $(7, 1, 2)$

(4) $\underline{u} = (4, 11, 5)$

ב. $Q(12, 8)$

(7) א. $\overline{AB} = (9, -4)$

(6) $x = 5$, $y = -2$, $z = 6$

(9) $D(6, -8, 1)$

(8) א. $\overline{EF} = (5, -1, 0)$ ב. $N(-1, -5, 10)$

(10) $\underline{u} = (0, -7, 6)$, $\underline{v} = (-4, 7, 6)$

(11) $\underline{u} + \underline{v} = (3, 3, 4)$; $\underline{u} - \underline{v} = (5, -3, 14)$; $\underline{u} - 2\underline{v} = (6, -6, 19)$; $3\underline{u} + 2\underline{v} = (10, 6, 17)$

(12) א. $(6, -2, 8)$ ב. $(-2, 1, 3)$ ג. $(-17, 7, 24)$

ד. $(2.5, -1, -3.5)$ ה. $(9.5, 9.5, -18)$ ו. $(19, 19, -36)$

(13) א. $(5, 7, 1)$ ב. $(-8, -16, 8)$ ג. $(8, 12, 0)$

ב. $x = -1$, $y = 9\frac{2}{3}$, $z = 72$

(14) א. $x = 6$, $y = 3$, $z = -18$

ג. $x = -4\frac{8}{9}$, $y = -4\frac{4}{9}$, $z = -\frac{2}{9}$

ג. $y = 3\frac{1}{7}$

(15) א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -21$ ב. $y = 3$

(16) $|\underline{u}| = \sqrt{14}$; $|\underline{v}| = \sqrt{26}$; $|2\underline{v} + \underline{u}| = \sqrt{140}$; $|4\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{266}$

(18) ב. כן.

(17) הוכחה.

ב. 90° ג. 180°

(20) א. 92.277°

ב. לא.

(19) א. הוכחת טענה.

- (21) 10.173 יח"ש. $\underline{w} = (-3, -6, 5)$ או $\underline{w} = (3, 6, -5)$ (22)
- (23) כן. (24) לא.
- (25) $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$ (26) $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$
- (27) $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$ (28) $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$
- (29) א. $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$
- (30) $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$ (31) $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$
- (32) $(7, -5, 0)$ (33) מתלכדים.
- (34) מקבילים. (35) נחתכים, $(1, 5, 0)$
- (36) מצטלבים. (37) מקבילים.
- (38) נחתכים, $(1, 8, -1)$ (39) א. $k = 2$ ב. $k = -2$
- (40) הוכחה. (41) $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (42) $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$ (43) $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (44) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$ (45) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (46) $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0)$ (47) א. על המישור. ב. לא על המישור.
- (48) $k = 3$ (49) $(3, 0, 0), \left(0, 4\frac{1}{2}, 0\right), (0, 0, -9)$
- (50) $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$ (51) $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (52) $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$ (53) $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (54) $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$ (55) א. i. $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ ii. $-2x + 3y + z - 1 = 0$
- ב. למשל: $(0, 0, 1), (-0.5, 0, 0)$ ג. לא.
- (56) $k = 3$ (57) 6 יח"נ.
- (58) הישר חותך, $(1, -1, 3)$ (59) מקבילים.
- (60) הישר מוכל. (61) $a = 1, b = -7$
- (62) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.
- (63) א. $k \neq 2, -3$ ב. $k = -3$ ג. $k = 2$
- (64) $\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$ (65) $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$

- (67) $\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$
- (66) $\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right)$
- (69) $\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13)$
- (68) $\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$
- (71) 63.37° הישרים מצטלבים.
- (70) א. 78.521° ב. 90°
- (72) א. i. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$ א. ii. $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$
- א. iii. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$ ב. הנקודה D. ג. 35.477°
- (73) C(0, 28.45, 11) או C(0, 2, 11)
- (74) 18.87°
- (75) 44.83°
- (76) 8.876°
- (77) 90°
- (78) 84.329°
- (79) 32.312°
- (80) $k = 12$ או $k = 8$
- (81) $\sqrt{54}$
- (82) 12.75 יח"ש.
- (83) B(5, -4, 2) או B(5, 4, -6)
- (84) $2\frac{1}{2}$
- (85) $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$ או $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$
- (86) (1, -9, 5) או (4, 5, 1)
- (87) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.
- (88) א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.
- (89) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$
- (90) א. הוכחה. ב. $k = 2, 4$
- (91) $\pi_1 : 3x - 4y + 5z + 10 = 0$, $\pi_2 : 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (92) $\pi_3 : x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (93) $k = 2$, $q = -2$, $p = 18, -12$
- (94) $12x + 4y - 3z - 136 = 0$
- (95) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
- (96) 1.567 יח"א.
- (97) $\sqrt{2}$ יח"א.

שאלות שונות בוקטורים:

- (1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.
- מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
 - חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.
 - מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.
- (2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$, $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
 - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(12,-3,1)$
 - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
 - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$, $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 3z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא : $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא : $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה A(4,0,-1) נמצאת על כדור שמרכזו O(1,1,2).
מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר : $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1,5,5) + t(1,1,0)$,
מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים : $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור : $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$, $\ell_1 : \underline{x} = (0,-3,0) + t(1,1,-8)$,
ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה P(1,0,-4) וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q. מצא את שטח המלבן PQQP' (הדרכה : הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2).
- (10) נתונים שני מישורים : $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$.
 ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60° עם הישר $\ell_2 : \underline{x} = (1,3,-4) + t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור π_3 .

תשובות סופיות:

(1) א. $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y - z + 2 = 0$

(2) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1, -3, 4)$. הזווית היא: 47.6°

(3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנקודה $(3.5, -0.5, -2)$, הזווית היא: 40.78°

(4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$, זווית: 63.6° .
ב. מקבילים. המרחק: 0.324 ג. מתלכדים.

(5) $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$, $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$

(6) $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$

(7) $(0, 0, 4)$ או $(0, 0, 14\frac{4}{5})$

(8) $\ell: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21)$

(9) 10.467 יח"ש.

(10) $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$ או $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$

שאלות שונות הכוללות שימוש במכפלה וקטורית:

הערה כללית:

נושא זה אינו חובה היות והוא לא כלול בתכנית הלימודים.
ניתן לפתור את כל השאלות שמובאות כאן ללא שימוש במכפלה וקטורית אך הפתרון בסרטונים מובא עם שימוש במכפלה וקטורית.

מציאת משוואת מישור:

(1) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$
מצא את משוואת המישור.

(2) המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$
מצא את משוואת המישור.

(3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (5, -4, 1) + t(0, 2, -1)$, $\ell_2 : \underline{x} = (0, -6, 2) + s(0, -2, 1)$
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

(4) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 1, 3) + t(3, -2, 4)$, $\ell_2 : \underline{x} = (-7, 1, 0) + s(4, -3, 0)$
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לישר ℓ_2 .

(5) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6, 0, -1)$ ומכיל את ציר ה- z .

מצב הדדי בין ישר ומישור:

(6) נתונים הישר והמישור הבאים:
 $\pi : \underline{x} = (-1, 0, 2) + s(1, 0, -2) + r(3, 0, -1)$, $\ell : \underline{x} = (0, 3, -2) + t(1, -1, 2)$
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(7) נתונים שני המישורים הבאים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

מצב הדדי בין מישורים:

- (8) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקדקודים הבאים:
 $A(1, -1, 4)$, $B(9, 0, 2)$, $C(5, 2, -2)$
 מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע
 שהנקודה $(2, -1, 0)$ נמצאת עליו.

מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים:

- (9) המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה.
 הישר $\ell: \underline{x} = (4, 1, -1) + t(2, -1, 1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.
 מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.
 (10) נתונים ישר ומישור: $\pi: 4x - 2y - 3z - 6 = 0$, $\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(3, 1, -1)$.
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר ℓ על המישור.

חישובי מרחקים שונים:

- (11) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקדקודה הם:
 $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$, $S(11, -2, 4)$.
 (12) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.
 נתון: $SA = 6$, $SB = 8$, $SC = 12$.
 חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקדקוד S לבסיס ABC.
 (13) נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1: \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$ ו- $\ell_2: \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$.
 הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.
 (14) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1: \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$ ו- $\ell_4: \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$.
 מצא את המרחק שביניהם.
 (15) מצא את מרחק הישר $\ell: \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה-z.

שאלות שונות:

16 נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (-2, 1, 5) + t(5, -4, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (-7, 3, -1) + s(-5, 4, -2)$.

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1 .
מצא את משוואות המישורים π_1 ו- π_2 .

17 נתונים שני מישורים: $\pi_1 : 2x - y + 4z - 8 = 0$, $\pi_2 : x - y + 2z - 4 = 0$.

המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- y בנקודה A כך שמתקיים $OA = m$ (O ראשית הצירים).

הזווית שבין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m .

18 נתונות שלוש נקודות: $A(3, -1, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $O(3, 1, 0)$.

הנקודות A ו- B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.
מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A (הישר נמצא במישור המעגל).

תשובות סופיות:

$$\pi: x-3y+8z=0 \quad (1)$$

$$\pi: 3x+6y-z-6=0 \quad (2)$$

$$\pi: y+2z+2=0 \quad (3)$$

$$\pi: 12x+16y-z-1=0 \quad (4)$$

$$\pi: y=0 \quad (5)$$

$$\text{נחתכים בנקודה: } (3,0,4) \quad (6)$$

$$l: \underline{x}=t(1,9,13) \quad (7)$$

$$\pi_{ABCD}: 2y+z+2=0 \quad (8)$$

$$\pi_1: y+z=0, \pi_2: x+y-z-6=0 \quad (9)$$

$$l: \underline{x}=(-5,-13,0)+t(7,11,2) \quad (10)$$

$$20.5 \text{ יח"נ.} \quad (11)$$

$$4.46 \text{ יח"א.} \quad (12)$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}} \text{ יח"א.} \quad (13)$$

$$1.567 \text{ יח"א.} \quad (14)$$

$$\sqrt{2} \text{ יח"א.} \quad (15)$$

$$\text{א. הישרים מקבילים.} \quad (16)$$

$$\text{ב. } \pi_2: y+2z-1=0 \text{ או } \pi_2: y+2z-11=0, \pi_1: 2x+2y-z+7=0 \quad (17)$$

$$m=-\frac{4}{7} \text{ או } m=4 \quad (17)$$

$$l: \underline{x}=(3,-1,1)+k(-5,-2,-4) \quad (18)$$

תוכן העניינים:

147.....	פרק 10.....
147.....	מספרים מרוכבים.....
147	סיכום כללי:
147	הגדרות כלליות:
147	צמוד קומפלקסי (מרוכב):
147	מישור גאוס והצגה קוטבית (פולרית) של מספר מרוכב:
148	נוסחאות ומעברים:
148	פעולות חשבון בהצגה קוטבית:
148	משפט דה-מואבר:
148	שורשים של מספר מרוכב:
149	שאלות:
149	הגדרת המספר המרוכב:
150	המספר הצמוד:
151	חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:
151	מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:
153	נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:
153	שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:
154	שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:
155	תשובות סופיות:

פרק 10

מספרים מרוכבים

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i = \sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z = a + bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b . המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).

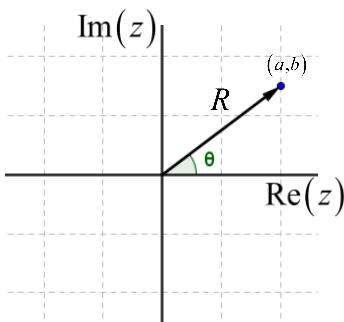
b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z = a + bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- \bar{z} וערכו: $\bar{z} = a - bi$.

מישור גאוס והצגה קוטבית (פולרית) של מספר מרוכב:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b , גודל הערך המדומה של z . מישור זה נקרא **מישור גאוס** ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a, b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R, θ) . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \text{cis} \theta$$

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R \cos \theta$, $b = R \sin \theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \operatorname{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R \operatorname{cis} \theta)^n = R^n \operatorname{cis}(n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n -י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0 \operatorname{cis} \theta_0$

$$z^n = z_0 = R_0 \operatorname{cis} \theta_0 \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \operatorname{cis} \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) : 1 \leq k \leq n$$

נבצע:

שאלות:

הגדרת המספר המרוכב:

(1) רשום עם i :

ג. $\sqrt{-25} =$

ב. $\sqrt{-4} =$

א. $\sqrt{-1} =$

ה. $\sqrt{-5} =$

ד. $\sqrt{-3} =$

(2) חשב:

ג. $i^3 =$

ב. $i^2 =$

א. $i =$

ו. $i^{17} =$

ה. $i^5 =$

ד. $i^4 =$

(3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

ב. $3 - i$

א. $2 + 5i$

ו. 0

ה. -4

ד. $7i$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

ג. $x^2 - 2x + 5 = 0$

ב. $x^2 + 36 = 0$

א. $x^2 = -1$

(5) פתור את המשוואה הבאה: $x^2 + x + 1 = 0$.

(6) פתור את המשוואה הבאה: $z^2 + iz + 6 = 0$.

(7) נתון: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

ג. $z_1 \cdot z_2 =$

ב. $z_1 - z_2 =$

א. $z_1 + z_2 =$

המספר הצמוד:

(8) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$	ב. $3-i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. -4	ו. 0

(9) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$	ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$	ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$
------------------------	------------------------	-------------------------

(10) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

(11) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

(12) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z+iw=5-4i \\ 5iz-2w=5+8i \end{cases}$$

(13) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$	ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$
------------------	------------------------

(14) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+z-3$.

(15) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$	ב. $\sqrt{8+6i}$
-------------------	------------------

(16) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-2(1-2i)z-8i=0$.

(17) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

(18) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

(19) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$
מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

(20) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60^\circ$	ב. $6\text{cis}135^\circ$	ג. $4\text{cis}330^\circ$
ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$	ה. $4\text{cis}690^\circ$	ו. $8\text{cis}90^\circ$
ז. $3\text{cis}270^\circ$	ח. $\text{cis}180^\circ$	ט. $\text{cis}0^\circ$

(21) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$	ב. $\sqrt{3}-i$	ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $3+4i$	ה. $6i$	ו. $-i$
ז. 4	ח. -1	ט. 1
י. 0		

(22) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$	ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$
ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$	ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$
ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$	

(23) נתון המספר המרוכב $z = R \operatorname{cis} \theta$. הבע באמצעות R ו- θ את המספרים:

- א. \bar{z} ב. $1/z$ ג. $-z$
 ד. $-\frac{1}{z}$ ה. iz ו. $z \cdot \bar{z}$

(24) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

- א. $z + \bar{z}$ ב. $z \cdot \bar{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(25) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

- א. $z^2 - \bar{z}^2$ ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$

(26) הוכח את הטענות הבאות:

- א. $z - iz = \overline{\bar{z} + iz}$ ב. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(27) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(28) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(29) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(30) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

(31) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

- א. \bar{z} ב. $1/z$ ג. z/\bar{z} ד. $z \cdot \bar{z}$

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

(32) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $(2\text{cis}30^\circ)^3$ ב. $(2\text{cis}14^\circ)^5$ ג. $(1+i)^4$

ד. $(\sqrt{3}-i)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

(33) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^3 = 36\text{cis}120^\circ$ ב. $z^4 = (9\text{cis}80^\circ)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(34) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

(35) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$

(36) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z - 3i| = 5$.

(37) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס

המתקבל בעבור המשוואה: $|z + i| = |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

(38) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי

הוא $a_3 = 5 - 9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

(39) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה

היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

- (40) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

- (41) פתור את המשוואה: $z + \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \operatorname{Im}(z)$.
- (42) פתור את המשוואה: $|2 - 3^{x^2-x-1}i| = \sqrt{13}$.
- (43) פתור את המשוואה: $z^3 = \bar{z}$.
- (44) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.
- (45) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.
- (46) נתון מספר מרוכב z , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור. הוכח כי אם $z - \frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.
- (47) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot R_2 \operatorname{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.
- (48) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון. נתון: $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.
- (49) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה. מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.
- (50) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2 \cos \theta \cdot z + 1 = 0$. מצא את גודל הזווית $\angle z_1 o z_2$ (ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

- (1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$
- (2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i
- (3) א. $a=2, b=5$ ב. $a=3, b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=-\frac{1}{2}$ ד. $a=0, b=7$ ה. $a=-4, b=0$ ו. $a=0, b=0$
- (4) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i, 1-2i$
- (5) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (6) $z=2i, -3i$
- (7) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$
- (8) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0
- (9) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $.5+3i$
- (10) $z=4-i$
- (11) $z=4+5i$
- (12) $z=2-3i, w=5+i$
- (13) א. $a=5, b=-3$ ב. $a=2, b=-1$
- (14) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$
- (15) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$
- (16) $z_1=2, z_2=-4i$
- (17) $z_1=-2-5i, z_2=3i$
- (18) $z_1=-3i, z_2=2i$
- (19) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$
- (20) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$ ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1

(21) א. $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$ ב. $2\text{cis}330^\circ$ ג. $\text{cis}240^\circ$ ד. $5\text{cis}53.13^\circ$

ה. $6\text{cis}90^\circ$ ו. $\text{cis}270^\circ$ ז. $4\text{cis}0^\circ$ ח. $\text{cis}180^\circ$

ט. $\text{cis}0^\circ$ י. 0.

(22) א. -6 ב. $5\text{cis}170^\circ$ ג. $4\text{cis}225^\circ$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$

ה. $4\text{cis}30^\circ$

(23) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$

ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$ ה. $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$ ו. R^2

(27) $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$

(28) $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$

(29) $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$

(30) $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$

(31) א. מחוץ למעגל ב. בתוך המעגל ג. על המעגל ד. מחוץ למעגל.

(32) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70^\circ$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1.

(33) א. $z_0 = 6\text{cis}60^\circ, z_1 = 6\text{cis}240^\circ$

ב. $z_0 = 3\text{cis}40^\circ, z_1 = 3\text{cis}130^\circ, z_2 = 3\text{cis}220^\circ, z_3 = 3\text{cis}310^\circ$

ג. $z_0 = \text{cis}12^\circ, z_1 = \text{cis}84^\circ, z_2 = \text{cis}156^\circ, z_3 = \text{cis}228^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$

(34) סכום: 0, מכפלה: -1.

(35) $x^2 + y^2 = 4$

(36) $x^2 + (y-3)^2 = 25$

(37) $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$

(38) $S_{10} = 100 - 15i$

(39) א. $a_1 = 2+i, q = -2i$ ב. $S_5 = 20 + 25i$

(40) $2, 2i, -2$ או $2, 4-2i, 6-8i$

(41) $z_1 = 3-4i, z_2 = -3-4i$

(42) $x = 2, -1$

$$\cdot z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i, z_4 = -1, z_5 = -i \quad (43)$$

$$\cdot z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i, z_4 = 1, z_5 = -1 \quad (44)$$

$$\cdot \arg(z) = 30^\circ \quad (48)$$

$$\cdot z + iz = \sqrt{2}, -\sqrt{2} \quad (49)$$

$$\cdot 2\theta \quad (50)$$

תוכן העניינים:

159.....	פרק 11.....
159.....	חוקי החזקות והשורשים.....
159	סיכום כללי :
159.....	סיכום חוקי החזקות :
159.....	סיכום חוקי השורשים :
160	שאלות לפי נושאים :
160.....	שאלות בחוקי חזקות :
163.....	שאלות בחוקי שורשים :
166.....	שאלות העוסקות בכתיבה מדעית של מספרים :
167	תשובות סופיות :

פרק 11

חוקי החזקות והשורשים

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.3	$a^1 = a$.2	$a^0 = 1$.1
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.6	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.5	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.4
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$.9	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.8	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.7

סיכום חוקי השורשים:

$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$.3	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.2	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.1
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.6	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.5	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.4

שאלות לפי נושאים:

שאלות בחוקי חזקות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

א. $a^2 a^6$	ב. $t^3 t^5 t^7$	ג. $b^2 b^5 b^{12} b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$	ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$	ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3 a^{19}}{a^{15}}$	ח. $\frac{x^{30}}{x^9 x^{18}}$	ט. $\frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}}$
י. $3^2 3^3 3^4$	יא. $\frac{2^{16} 2^2}{2^{10}}$	יב. $\frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

א. $\frac{3^4 2^7}{2^6 3^2}$	ב. $\frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}}$	ג. $\frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}$
------------------------------	---	--------------------------------------

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$
ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ד. $2^3 + 2^5$

5 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$
י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

6 לפניך הביטויים הבאים: $\left((3^2)^3\right)^4$ ו- $\left((3^6)^n\right)^2$. מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$
------------------------------	--	--

8 פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^2 9.81^2$	ב. $64^2 2^3 8^2$	ג. $125.25.5^5$
ד. $\frac{2^4 16^5}{8.512}$	ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64.2^3}$	ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

9 פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{(2a^2 b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$	ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$
ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$	ד. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

א. $(a^2 b)^3$	ב. $(m^4 n^3)^5$	ג. $(x^{12} y^3)^3$
ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$	ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$	ו. $\left(\frac{a^{14} b^4}{a^6 ab^3}\right)^3$
ז. $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6$	ח. $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2$	ט. $\left(\frac{(b^{12} c)^2 c^{14}}{c(c^3 b^5)^4 b^3}\right)^2$

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2$	ב. $\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2$	ג. $\left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^{27})^4}\right)^3$
---	---	--

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$	ב. $\frac{1}{5^3}$	ג. $\frac{1}{2^{10}}$
ד. $\frac{1}{8}$	ה. $\frac{1}{81}$	ו. $\frac{1}{125}$

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$	ב. $\frac{1}{3^{-2}}$	ג. $\frac{1}{5^{-3}}$
-----------------------	-----------------------	-----------------------

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^22)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2}4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

שאלות בחוקי שורשים:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ב. $2^{\frac{3}{5}}$

א. $3^{\frac{1}{4}}$

ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$

ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

ח. $27^{\frac{1}{3}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

ג. $\sqrt[3]{8}$

ב. $-\sqrt{25}$

א. $\sqrt{49}$

ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$

ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$

ד. $-\sqrt[3]{128}$

ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

ח. $\sqrt[4]{-16}$

ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

א. $8^{\frac{2}{3}}$	ב. $32^{-\frac{3}{5}}$	ג. $128^{-\frac{2}{7}}$
ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$	ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$	ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$
ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$	ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$	ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$
ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$
ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$	ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$	ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

א. $3\sqrt{2}$	ב. $5\sqrt{3}$	ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$
ד. $2\sqrt[3]{3}$	ה. $x\sqrt{x}$	

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

א. $2\sqrt{5}$	ב. $4\sqrt[3]{2}$	ג. $2\sqrt[5]{3}$
ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$	ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$
ז. $-5\sqrt[3]{2}$	ח. $-5\sqrt[4]{2}$	ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
 ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
 ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$
 ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
 ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
 ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
 ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

שאלות העוסקות בכתיבה מדעית של מספרים:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0012)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
 ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n = 16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
 ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n = 2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}
- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
 ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$

18. א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16 ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
19. א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$ ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$ י. $\sqrt{2}$ (20)
21. א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2 ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$ י. $\sqrt{18}$ (22)
22. א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$ ז. $\sqrt{20}$ (23)
23. א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$ ו. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$ ז. $\sqrt[4]{40 \frac{1}{2}}$ ח. $\sqrt[3]{-250}$ ט. $-\sqrt[4]{1250}$ י. $2\sqrt{3}$ (24)
24. א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$ ז. $2\sqrt{10}$ (25)
25. א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$ ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[3]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$ י. $\sqrt{2}$ (26)
26. א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$ ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$ י. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ (27)
27. א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$ ז. $1.5 \cdot 10^7$ (28)
28. א. $1.5 \cdot 10^7$ ב. $1.5 \cdot 10^6$ ג. $1.5 \cdot 10^{11}$ ד. $2.34 \cdot 10^7$ ה. $3 \cdot 10^{-4}$ ז. $4.2 \cdot 10^{-7}$ ח. $4.2 \cdot 10^{-8}$ ט. $4.2 \cdot 10^{-10}$ י. $9 \cdot 10^{12}$ (29)
29. א. $9 \cdot 10^{12}$ ב. $4 \cdot 10^{12}$ ג. $1.25 \cdot 10^{11}$ ד. $1.25 \cdot 10^{14}$ ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$ ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$ ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$ ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$ ט. $1.25 \cdot 10^{-16}$ י. $6.4 \cdot 10^{-14}$

תוכן העניינים:

170.....	פרק 12.....
170.....	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
170	סיכום כללי :
170	שאלות יסודיות :
171	תשובות סופיות :
172	מערכת משוואות מעריכיות :
172	תשובות סופיות :
173	אי שוויונים מעריכיים :
173	תשובות סופיות :
174	תרגול נוסף :
179	תשובות סופיות :

פרק 12

משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות יסודיות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} \quad (3) \quad 2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \quad (2) \quad 3^{5x-3} = 3^{3x+7} \quad (1)$$

$$3^x = 5^x \quad (6) \quad \sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3} \quad (5) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x} \quad (4)$$

$$2^x + 2^x = 16 \quad (9) \quad e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x} \quad (8) \quad 5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{2x/3-2} \quad (7)$$

$$2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227 \quad (12) \quad 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162 \quad (11) \quad e^x + 2e^x = 3e^4 \quad (10)$$

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \quad (15) \quad e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad (14) \quad 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145 \quad (13)$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3} \quad (18) \quad 6^x - 4 \cdot 6^x + 3 = 0 \quad (17) \quad 5 \cdot 25^x - 26 \cdot 5^x + 5 = 0 \quad (16)$$

$$e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1 \quad (21) \quad e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad (20) \quad \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1} \quad (19)$$

תשובות סופיות:

$x=1$ (3	$x=1$ (2	$x=5$ (1
$x=0$ (6	$x=-\frac{1}{2}$ (5	$x=-2$ (4
$x=3$ (9	$x=1, \frac{1}{6}$ (8	$x=3$ (7
$x=1$ (12	$x=4$ (11	$x=4$ (10
$x=1,2$ (15	$x=-1$ (14	$x=-2$ (13
$x=0,1$ (18	$x=0$ (17	$x=\pm 1$ (16
$x=\pm 1$ (21	$x=0$ (20	$x=1, -\frac{1}{2}$ (19

מערכת משוואות מעריכיות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^y - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3 \cdot 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4)	(1,2) (3)	(0,2) , (2,4) (2)	(2,9) (1)
(1,2) , (-1,0) (7)	(-1,-2) (6)	(3,2) (5)	

אי שוויונים מעריכיים:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$e^x > 3 \quad (4)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (6)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (8)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x} \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (5)$$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \cup 1\frac{1}{4} \leq x \quad (2)$$

$$x > \ln 3 \quad (4)$$

$$0 < x < 1 \quad (6)$$

$$x = 0 \quad (8)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (5)$$

$$x < 0 \cup \ln 4 < x \quad (7)$$

תירגול נוסף:

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

$$\begin{array}{lll}
 5^x \cdot 25^{x-1} = 625 & \text{(3)} & 3^{2x} = 27 & \text{(2)} & 2^x = 32 & \text{(1)} \\
 32^{\frac{x}{3}+5} = 4^{\frac{x}{2}-1} & \text{(6)} & 3^x \cdot 81^{x+2} = 9^{2x-1} & \text{(5)} & (4^{x-1})^2 = 8 & \text{(4)} \\
 (3^x \cdot 27)^4 = 9 & \text{(9)} & 6^{x^2-4} = 1 & \text{(8)} & 100^x = 10000^{x+1} & \text{(7)} \\
 25 \cdot 5^{x^2+x} = 5^x & \text{(12)} & (2^{x^2})^4 \cdot 8^x = 2 & \text{(11)} & (5^{2x} \cdot 125^{x-3})^3 = \frac{1}{25} & \text{(10)} \\
 10^x (10^x)^x = 100 & \text{(15)} & \frac{3^{x^2}}{3^{6(x+1)}} = 3 & \text{(14)} & 4^{x^2} = 2^{x+1} & \text{(13)} \\
 & & & & \frac{(3^x)^{3x}}{27} = \frac{3^x}{3} & \text{(16)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

$$\begin{array}{lll}
 27^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} & \text{(19)} & \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot 8^x & \text{(18)} & 3^x = \frac{1}{27} & \text{(17)} \\
 \frac{2^x}{8^{3x-2}} \left(\frac{2^{3-x}}{2^{x-4}}\right) = \frac{1}{4} & \text{(22)} & 16 \cdot (2^{3x+5} \cdot 8^{x+5})^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+8} & \text{(21)} & \frac{8}{32^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} & \text{(20)} \\
 8 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = 27 & \text{(25)} & 27 \left(\frac{3}{2}\right)^{4x+1} = 8 & \text{(24)} & \left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = \frac{4}{25} & \text{(23)} \\
 27 \left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2+9x} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+7} = 125 & \text{(27)} & 4 \left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} \left(\frac{7}{2}\right)^{3-x} = 49 & \text{(26)} \\
 49 \left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2+x} \left(\frac{7}{5}\right)^{4-6x} = 25 & \text{(28)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי שורשים):

תזכורת: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

<p>(30) $(\sqrt{5^x})^3 = 125$</p> <p>(32) $(9\sqrt{27})^x \cdot 3^{x+2} = \frac{1}{9}$</p> <p>(34) $\left(\frac{1}{49}\right)^x = \sqrt{7 \cdot 343^x \cdot \sqrt{7^x}}$</p> <p>(36) $\sqrt[5]{256} = \frac{\sqrt{2^x}}{4 \cdot 8^x}$</p> <p>(38) $\sqrt{10^{2x+1}} = 1000 \cdot \sqrt[3]{10^x}$</p> <p>(40) $\sqrt{5^{4x+3}} = \frac{\sqrt[4]{25^{x-2}}}{125}$</p> <p>(42) $27 \cdot \sqrt[3]{81} = 3^x$</p> <p>(44) $9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt[3]{3}$</p> <p>(46) $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt[3]{8}}}} = 1$</p>	<p>(29) $\sqrt{3^{x+2}} = 81$</p> <p>(31) $2^{2x-1} \cdot \sqrt{4^x \cdot 64} = 256$</p> <p>(33) $\frac{125 \cdot 5^{x+1}}{\sqrt{25^x}} = \frac{\sqrt{5}}{5^{3-x}}$</p> <p>(35) $\sqrt[3]{8^x} \cdot (2 \cdot 32^x) = \sqrt[5]{1024}$</p> <p>(37) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[5]{27^x}} = 1$</p> <p>(39) $81 \cdot \sqrt[8]{3^x} = 27^{x+9}$</p> <p>(41) $5^{x+1} = 25$</p> <p>(43) $100 \cdot \sqrt[3]{10^{x^2-3}} = 10,000$</p> <p>(45) $\sqrt{32} \cdot 2^{x^2+4x} = \sqrt{\frac{1}{8}}$</p>
---	--

פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

<p>(49) $5^{x+1} \cdot 3^{x-2} = 125$</p> <p>(52) $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$</p> <p>(55) $\sqrt[3]{3^{x-1} \cdot 2^{x-2} \cdot 5^{x-3}} = 0.02$</p>	<p>(48) $4 \cdot 3^x \cdot 2^x = 144$</p> <p>(51) $5 \cdot 3^{x+4} = 2187 \cdot 5^{x-2}$</p> <p>(54) $7^{x^2-1} \cdot 10^{x^2+4} = 7 \cdot 10^6$</p>	<p>(47) $2^x \cdot 5^x = 1000$</p> <p>(50) $3^{x+2} \cdot 20 = 405 \cdot 2^x$</p> <p>(53) $3^x \cdot 2^x = \sqrt{729} \cdot 10^3 \cdot 5^{-x}$</p>
---	---	---

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחיסור):

$$\begin{array}{lll}
 2^x + 4 \cdot 2^x = 80 & \textbf{(58)} & 5^x + 6 \cdot 5^x = 875 & \textbf{(57)} & 3^x + 3^x = 18 & \textbf{(56)} \\
 8^x + 8^{x+2} = 1040 & \textbf{(61)} & 7 \cdot 3^x - 2 \cdot 7^x = \frac{5}{27} & \textbf{(60)} & 7 \cdot 10^x - 10^x = 600 & \textbf{(59)} \\
 2^{x+3} + 2^{x-1} = \frac{17}{16} & \textbf{(64)} & 3^{x+2} - 3^{x-2} = 240 & \textbf{(63)} & 2^x + 2^{x+5} = 1056 & \textbf{(62)} \\
 5^{3x+2} + 3 \cdot 125^x = 28 & \textbf{(67)} & 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 245 & \textbf{(66)} & 3^{x-2} - 3^{x-3} = 54 & \textbf{(65)} \\
 (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 3.75 & \textbf{(70)} & 16^{x+\frac{1}{2}} - 4^{2x-\frac{1}{2}} = 14 & \textbf{(69)} & 2^{2x-1} + 4^{x+2} = 66 & \textbf{(68)} \\
 3^{3x+1} + 2178 = 27^{x+2} & \textbf{(73)} & 25^{2-x} - 5^{1-2x} = 124 & \textbf{(72)} & 3^{2-x} + 3^{1-x} = 4 & \textbf{(71)} \\
 8^{x+2} \cdot 3^{x-1} + 410 \frac{2}{3} = 4^{x+\frac{1}{2}} \cdot 6^{x+3} & \textbf{(75)} & 468 - 6^x = 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} & \textbf{(74)} \\
 10^{x+1} \cdot 2^{x-1} + 6 \cdot 10^3 = 5^{x+1} \cdot 4^{x+1} & \textbf{(76)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחיסור):

$$\begin{array}{ll}
 3^x - 3^{2-x} = 8 & \textbf{(78)} \\
 7^{x+4} + 7^{-x} = 350 & \textbf{(80)} \\
 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0 & \textbf{(82)} \\
 36^{-x} - 7 \cdot 6^{-x} + 6 & \textbf{(84)} \\
 2 \cdot 2^{4x+1} + 3 \cdot 4^x = 1 & \textbf{(86)} \\
 2^{\frac{2}{3}x+3} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} = -1 & \textbf{(88)} \\
 \frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3 & \textbf{(90)} \\
 \frac{3^{x+2}}{3^{2x}+3^x-2} - \frac{6}{3^x+2} = \frac{3^x}{3^x-1} & \textbf{(92)} \\
 2^{x+2} + 2^{x-2} = 8.5 & \textbf{(77)} \\
 5^x + 5^{2-x} = 26 & \textbf{(79)} \\
 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0 & \textbf{(81)} \\
 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0 & \textbf{(83)} \\
 16^{x+2} + 96 \cdot 4^{x-1} = 1 & \textbf{(85)} \\
 4^{1.5x+1} + 3 \cdot 2^{6x-3} = 56 & \textbf{(87)} \\
 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x-2} - 26 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}x} = 3 & \textbf{(89)} \\
 \frac{8}{9^x+4} + 3 = -\frac{77}{81^x-16} & \textbf{(91)} \\
 \frac{25 \cdot 2^x - 68}{2^x - 2} = \frac{5 \cdot 2^{x+2} + 82}{2^x + 3} & \textbf{(93)}
 \end{array}$$

פתור את מערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} 2x-1=y \\ 4 \cdot 3^x - 3^{y+2} = -15 \end{cases} & \text{(96)} & \begin{cases} x+y-3=0 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} & \text{(95)} & \begin{cases} y=x+1 \\ 3^x + 3^y = 36 \end{cases} & \text{(94)} \\ \begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = -1 \end{cases} & \text{(99)} & \begin{cases} 7^{3x-7y} = 7 \\ 2^{2x-12y} = 256 \end{cases} & \text{(98)} & \begin{cases} 2^{x+3y} = 8 \\ 3^{2x+7y} = 81 \end{cases} & \text{(97)} \\ \begin{cases} 2^x + 5^y = 29 \\ 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^y = 1298 \end{cases} & \text{(102)} & \begin{cases} 3^x - 7^y = 20 \\ 9^x - 3 \cdot 49^y = 582 \end{cases} & \text{(101)} & \begin{cases} 2^{x+1} + 3^{y+1} = 17 \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 3^y = 21 \end{cases} & \text{(100)} \end{array}$$

פתור את אי-השוויונים המעריכיים הבאים :

תזכורת: אם: $a > 1$ אז: $a^x > a^y \rightarrow x > y$; ואם: $0 < a < 1$ אז: $a^x > a^y \rightarrow x < y$.

$$\begin{array}{ll} 3^{x-2} > 27 & \text{(104)} \\ 2^x < 16 & \text{(103)} \\ 5^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x & \text{(106)} \\ 16^x < 8^{x+1} & \text{(105)} \\ 2 \cdot 16^{x^2} \cdot 32^x > 1 & \text{(108)} \\ 27 \cdot 3^{x^2} > 3^{x+3} & \text{(107)} \\ 0.3^{6x-1} < 0.3^{13-x} & \text{(110)} \\ 64^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 1024 & \text{(109)} \\ \left(\frac{1}{32}\right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2x} & \text{(112)} \\ 0.6^{x+1} \geq 0.6^{x^2-1} & \text{(111)} \\ \left(\frac{1}{625}\right)^x < 5^{x^2} & \text{(114)} \\ \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2} \cdot \sqrt{27^{x+1}} \geq 3 & \text{(113)} \\ 27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{3x-1} < 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} & \text{(116)} \\ \left(\frac{1}{100}\right)^{x^2-1} \geq 1000^{1-x} & \text{(115)} \\ 81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+3x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} < 16 & \text{(118)} \\ 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-1} < 5 \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^x & \text{(117)} \\ \frac{1}{9} \leq 3^{x+2} \leq 27 & \text{(120)} \\ 125 \cdot \sqrt[3]{5^x} > \sqrt[3]{5^{8x^2}} & \text{(119)} \\ 1 \leq 125 \cdot 5^x \leq 5^{x^2+1} & \text{(122)} \\ 1 \leq 4^{2x-1} \cdot 2^{x-1} \leq 128 & \text{(121)} \end{array}$$

$$0 < 25^x \cdot 5^{x^2} < 5 \cdot \sqrt{625^x} \quad (124)$$

$$0 < 8^x \cdot 2^{x^2} < 16 \quad (123)$$

$$9^x - \frac{10}{9} \cdot 3^{x+2} + 9 < 0 \quad (126)$$

$$16^x - 4^x - 12 > 0 \quad (125)$$

$$2^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{16}{x-6}} \geq 5^x \quad (128)$$

$$2^x - 3 \cdot 2^{4-x} > 2 \quad (127)$$

$$7^{\frac{2x-3}{x-2}} < 343 \quad (129)$$

תשובות סופיות:

2 (3	1.5 (2	5 (1
-40.5 (6	-10 (5	1.75 (4
-2.5 (9	± 2 (8	-2 (7
\emptyset (12	$-1, \frac{1}{4}$ (11	$1\frac{2}{3}$ (10
-1, 2 (15	-7, 1 (14	-0.5, 1 (13
-0.5 (18	-3 (17	$1, -\frac{2}{3}$ (16
-4 (21	2 (20	0.8 (19
-1 (24	$\frac{2}{3}$ (23	2 (22
$-4, \frac{1}{2}$ (27	$\frac{2}{3}$ (26	\emptyset (25
2 (30	6 (29	$-3, \frac{2}{3}$ (28
6.5 (33	$-\frac{8}{9}$ (32	2 (31
-1.44 (36	$\frac{1}{6}$ (35	$-\frac{2}{15}$ (34
-8 (39	1.75 (38	$\frac{5}{17}$ (37
-1, 4 (42	-2 (41	$-3\frac{2}{3}$ (40
-2 (45	\emptyset (44	-1, 3 (43
2 (48	3 (47	-3, 1 (46

3 (51	2 (50	2 (49
$\pm\sqrt{2}$ (54	3 (53	2 (52
3 (57	2 (56	1 (55
-3 (60	3 (59	4 (58
3 (63	5 (62	$\frac{4}{3}$ (61
$\frac{1}{4}$ (66	6 (65	-3 (64
0 (69	1 (68	0 (67
$\frac{1}{3}$ (72	0.5 (71	1 (70
0 (75	2 (74	2 (73
2 (78	-3, 1 (77	2 (76
3 (81	-3,-1 (80	0, 2 (79
0,-1 (84	1,-2 (83	2,3 (82
1 (87	-1 (86	-2.5 (85
1 (90	-4 (89	-3, -6 (88
3 (93	1 (92	-0.5 (91

(1,1) (96	(2,1) (95	(2,3) (94
(1,1) (99	(-2,-1) (98	(9,-2) (97
(2,2) ; (4.26,1.41) (102	(3,1) ; (3.182,1.318) (101	(2,1) (100
$x < 3$ (105	$x > 5$ (104	$x < 4$ (103
$x < -1, x > -0.25$ (108	$x < -3, x > 1$ (107	$x \leq 0.25$ (106
$x \leq -1, x \geq 2$ (111	$x > 2$ (110	$x > 2$ (109
$x < -4, x > 0$ (114	$-\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ (113	$x \leq \frac{1}{9}$ (112
$x > 1.5$ (117	$x > 1$ (116	$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ (115
$-4 \leq x \leq 1$ (120	$-1 < x < \frac{9}{8}$ (119	$x < -4, x > \frac{1}{2}$ (118
$-4 < x < 1$ (123	$-3 \leq x \leq 1, x \geq 2$ (122	$\frac{3}{5} \leq x \leq 2$ (121
$0 < x < 2$ (126	$x > 1$ (125	$x < 1$ (124
$x < 1, x > 2$ (129	$x < 6$ (128	$x > 3$ (127

תוכן העניינים:

183.....	פרק 13.....
183.....	משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים
183	סיכום כללי :
184	שאלות שונות – חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות :
187	תשובות סופיות :
188	מערכת משוואות לוגריתמיות :
188	שאלות :
188	תשובות סופיות :
189	מערכת משוואות לוגריתמיות-מעריכיות :
189	שאלות :
189	תשובות סופיות :
190	אי-שוויונים לוגריתמיים :
190	תשובות סופיות :
191	תרגול נוסף :
191	הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות :
194	תשובות סופיות :
196	חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות :
198	תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים :
200	תשובות סופיות :
202	מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות :
203	תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים :
205	תשובות סופיות :
206	אי-שוויונים לוגריתמיים :
206	תשובות סופיות :

פרק 13

משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

סיכום כללי:

- הגדרת הלוגריתם: $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.
לוגריתם על בסיס a של b מוגדר כחזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b . ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.
נפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

- דוגמאות כלליות:

1. $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$
2. $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$
3. $10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$
4. $\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow \log_{16} 4 = 0.5$
5. $5^{-2} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2$
6. $6^0 = 1 \Leftrightarrow \log_6 1 = 0$

- חוקי יסוד בלוגריתמים:

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$

- חוקי הלוגריתמים:

1. מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
3. מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$

- חזקה לוגריתמית: $a^{\log_a x} = x$

- מעבר מבסיס לבסיס: $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$, כאשר: $a, m > 0$; $a, m \neq 1$; $b > 0$.
- לוגריתם על בסיס e נקרא הלוגריתם הטבעי ומסומן: $\log_e x = \ln x$.

שאלות שונות – חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$	ב. $\log 1000$	ג. $\log_{25} 5$
ד. $\log_8 4$	ה. $\log_4 \frac{1}{16}$	ו. $\log_a a^4$
ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$		

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$	ב. $\ln \frac{1}{e^4}$	ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$
--------------	------------------------	------------------------------

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$	ב. $\log_2 x = 16$
ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$	ד. $\log_x 64 = 3$
ה. $\log_x 25 = 2$	ו. $\log_x (3x+4) = 2$
ז. $\ln x = 2$	ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$	ב. $2\log 2 + \log 25$
ג. $\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3\log_3 6 - (2 + \log_3 12)}$	

(5) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$	ב. $\log_3 6$
ג. $\log_3 24$	ד. $\log_3 1.5$

(6) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$	ב. $\log_2 60$	ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$
----------------	----------------	------------------------

(7) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$	ב. $4^{\log_2 5}$
ג. $e^{\ln 3}$	ד. $e^{2 \ln 3}$

(8) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$	ב. $\log_2 \sqrt{30}$	ג. $\log_5 22.5$
----------------	-----------------------	------------------

(9) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$	ב. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$
ג. $\log_5 (\log_2 (x^2 - 7)) = 0$	ד. $\log_5 (25^x - 20) = x$

(10) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$	ב. $\log_5 (4x - 3) = \log_5 7$
ג. $2 \log_2 (2x - 2) - \log_2 (16 - x) = \log_2 (x - 1) + 1$	

11 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבת t וקבלת משוואה ריבועית):

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

א. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

ד. $\log x \cdot \log(10x) = 2$

ג. $\log_4 x + \log_x 4 = 2.5$

ה. $\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2)$

12 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה):

ב. $x^{\log_5 x} = \frac{25}{x}$

א. $x^{\log_3 x} = 81$

ד. $x^{\frac{\log_2 x - 6}{4}} = \frac{4}{x}$

ג. $x^{\ln x} = e^6 x$

ו. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

ה. $\frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)}$

13 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (בסיסים שונים):

ב. $5^x = 8$

א. $2^x = 5$

ד. $e^x = \frac{1}{2}$

ג. $e^x = 2$

ה. $e^x = -1$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
- א. 4 ז. -1.5
- (2) א. 2 ב. -4 ג. -1.5
- (3) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
- ה. $x = 5$ ו. $x = 4$ ז. $x = e^2$ ח. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (4) א. 2 ב. 2 ג. 3
- (5) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$
- (6) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (7) א. 8 ב. 25 ג. 3 ד. 9
- (8) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + a - \frac{1}{ab}$
- (9) א. $x = 3$ ב. $x = 3$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = 1$
- (10) א. $x = 0$ ב. $x = 2.5$ ג. $x = 6$
- (11) א. $x = 4, \frac{1}{2}$ ב. $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$ ג. $x = 16, 2$ ד. $x = 10, \frac{1}{100}$
- ה. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$
- (12) א. $x = 9, \frac{1}{9}$ ב. $x = 5, \frac{1}{25}$ ג. $x = e^3, \frac{1}{e^2}$ ד. $x = 16, \frac{1}{4}$
- ה. $x = 3$ ו. $x = \sqrt{e}, e$
- (13) א. $x = 2.322$ ב. $x = 1.292$ ג. $x = 0.693$ ד. $x = -0.693$
- ה. \emptyset

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) & (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) & (2) & (8, 3) & (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) & (6) & (25, 8) & (5) & (16, 7) & (4) \\ (4, 7) & (9) & (3, 9), (9, 3) & (8) & (25, 4), (625, 2) & (7) \end{array}$$

מערכת משוואות לוגריתמיות-מעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array} \quad \begin{matrix} (3) & (2) & (1) \\ (6) & (5) & (4) \end{matrix}$$

אי-שוויונים לוגריתמיים:

פתרון אי-השוויון $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור $a > 1$ ו- $x < y$ עבור $0 < a < 1$.

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\log_6 (x^2 - 5x) < 1 \quad (8)$$

$$\log_2 x < \log_2 (5x - 20) \quad (7)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x) \quad (10)$$

$$\log_3 x > \log_9 (15x - 2) \quad (9)$$

$$\ln x < 3 \quad (12)$$

$$\ln x \geq \ln (x^2 - 12) \quad (11)$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad (14)$$

$$\ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (13)$$

תשובות סופיות:

$$-1 < x < 0, 5 < x < 6 \quad (2)$$

$$x > 5 \quad (1)$$

$$-3 \leq x \leq \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$3 < x < 7\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$0 < x < e^3 \quad (6)$$

$$2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (5)$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (8)$$

$$\frac{1}{e} < x < e^7 \quad (7)$$

תרגול נוסף:

הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות:

חשב את ערכי הלוגריתמים הבאים:

תזכורת: הגדרת הלוגריתם: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (כאשר: $a > 0, a \neq 1, b > 0$).

- | | | |
|--|---|---|
| $\log_5 5$ (3) | $\log_3 81$ (2) | $\log_2 8$ (1) |
| $\log_{125} 5$ (6) | $\log_{32} 8$ (5) | $\log_9 243$ (4) |
| $\log_{\frac{1}{2}} 16$ (9) | $\log_{32} 64$ (8) | $\log_{49} 7$ (7) |
| $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$ (12) | $\log_{\frac{1}{25}} 625$ (11) | $\log_{\frac{1}{3}} 27$ (10) |
| $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} 9$ (15) | $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125}$ (14) | $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ (13) |
| $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3}$ (18) | $\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{343}$ (17) | $\log_{\sqrt[3]{5}} 125$ (16) |
| $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{25}}} \sqrt[5]{125}$ (21) | $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{27}}} \sqrt[3]{81}$ (20) | $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{128}$ (19) |
| $\log_{0.01} \frac{10}{\sqrt[4]{1000}}$ (24) | $\log \frac{\sqrt[5]{100}}{\sqrt{10}}$ (23) | $\log \frac{\sqrt{10}}{100}$ (22) |

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות:

- | | | |
|---|---------------------------------|----------------------------------|
| $\log_6 x = 1$ (27) | $\log_2 x = 5$ (26) | $\log_3 x = 2$ (25) |
| $\log_7 x = 0$ (30) | $\log_4 x = -2$ (29) | $\log_3 x = -3$ (28) |
| $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3}$ (33) | $\log_{\frac{3}{5}} x = 4$ (32) | $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ (31) |
| $\log_{\sqrt{5}} x + 2 = 0$ (36) | $7 \log_{128} x - 3 = 0$ (35) | $4 \log_9 x - 2 = 0$ (34) |

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות :

$$\log_x 25 = 2 \quad (39)$$

$$\log_x 6 = -1 \quad (38)$$

$$\log_x 3 = 1 \quad (37)$$

$$\log_x 64 = 3 \quad (42)$$

$$\log_x 625 = 4 \quad (41)$$

$$\log_x 64 = 2 \quad (40)$$

$$\log_x \frac{1}{81} = 4 \quad (45)$$

$$\log_x \frac{4}{9} = -2 \quad (44)$$

$$\log_x \frac{1}{8} = 3 \quad (43)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם) :

$$\log_5 (6-7x) = 3 \quad (48)$$

$$\log_2 (x+5) = 4 \quad (47)$$

$$\log_5 (x+1) = 1 \quad (46)$$

$$\log_{64} (x+3) = \frac{1}{3} \quad (51)$$

$$\log_4 (4x+1) = \frac{1}{2} \quad (50)$$

$$\log_6 (3x-2) = 0 \quad (49)$$

$$\log_{0.2} (2x+1) = -2 \quad (54)$$

$$\log_{\sqrt{3}} (7x+2) = 2 \quad (53)$$

$$\log_{\sqrt{5}} (3x+1) = 4 \quad (52)$$

$$\log_3 \left(x^2 - \frac{2x}{9} \right) = -3 \quad (57)$$

$$\log_6 (13x - x^2) = 2 \quad (56)$$

$$\log_4 (10x - x^2) = 2 \quad (55)$$

$$\log_3 (x - 2x^2 + 28) \quad (60)$$

$$\log_2 (x^2 - 6x + 13) = 3 \quad (59)$$

$$\log_2 (x^2 - 6x + 10) = 1 \quad (58)$$

$$\log_7 (x^4 - 80) = 0 \quad (63)$$

$$\log_3 (x^3 - 44) = 4 \quad (62)$$

$$\log_4 (x^3 - 11) = 2 \quad (61)$$

$$\log_2 \frac{x^2 - 5}{x} = 2 \quad (66)$$

$$\log_3 \frac{20x + 68}{5x + 2} = 2 \quad (65)$$

$$\log_4 \frac{3x - 1}{x + 2} = 1 \quad (64)$$

$$\log_x (2x^2 - 6x^2 + 5) = 2 \quad (69)$$

$$\log_x (3x^2 - 5x + 3) = 2 \quad (68)$$

$$\log_x (2x^2 - 9x) = 2 \quad (67)$$

$$\log_{x+2} (4x+5) = 2 \quad (72)$$

$$\log_x (2x^2 + x - 6) = 2 \quad (71)$$

$$\log_x (4x^2 - 3x) = 2 \quad (70)$$

$$\log_{\sqrt{x+1}} (x^2 - x - 2) = 2 \quad (75)$$

$$\log_{\sqrt{x}} \left(\frac{8}{x} \right) = 4 \quad (74)$$

$$\log_{x-3} (3x-11) = 2 \quad (73)$$

$$\log_{\sqrt{x^2+3}} (4+3x+3x^2) = 2 \quad (78)$$

$$\log_{\sqrt{x+3}} (x+5) = 4 \quad (77)$$

$$\log_4 (10x - x^2) = 2 \quad (76)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם מספר פעמים):

$$2\log_9(\log_5(2x-1))=1 \quad (80)$$

$$\log_3(\log_2 x)=1 \quad (79)$$

$$\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(x^2-7.5x))=-\frac{1}{2} \quad (82)$$

$$\log_2(\log_3(x+3)+30)=5 \quad (81)$$

$$\log_{25}(2-5^{x+2})=x+2 \quad (84)$$

$$\log_2\left(\log_{0.25}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right)=-1 \quad (83)$$

$$\log_5(4+\log_6(3+\log_4(x^2+15)))=1 \quad (86)$$

$$\log_5(\log_3(\log_3(5x^2+7)))=0 \quad (85)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(5 \cdot 2^x + 1) = 4 \quad (88)$$

$$\log_2(5^x + 3) = 7 \quad (87)$$

$$\log_5(5^x + 120) - x = 2 \quad (90)$$

$$\log_2(12 - 2^x) = x + 1 \quad (89)$$

$$\log_9(10 \cdot 3^x - 9) = x \quad (92)$$

$$\log_4(5 \cdot 2^{x+1} - 16) = x \quad (91)$$

$$\log_4(17 - 4^x) + x = 2 \quad (94)$$

$$\log_5(30 - 5^x) + x = 3 \quad (93)$$

$$\log_2(5 \cdot 2^{x+1} - 1) = 2x + 4 \quad (96)$$

$$\log_5(49 \cdot 5^x - 120) = 2x + 1 \quad (95)$$

$$3\log_2\left(9 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}} - 1\right) = 15 + 2x \quad (98)$$

$$\log_8(3 - 23 \cdot 8^{3x}) = 6x + 1 \quad (97)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות:

הדרכה: היעזר בהצבה של: $\log_a x = t$, פתור משוואה עבור t והחזר את ההצבה למציאת x עפ"י הגדרת הלוגריתם.

$$(\log_2 x)^2 + 2 \cdot \log_2 x - 15 = 0 \quad (100)$$

$$(\log_3 x)^2 = 16 \quad (99)$$

$$\log_7 x - \frac{6}{\log_7 x} = 1 \quad (102)$$

$$2 \cdot (\log_4 x)^2 - 5 \cdot \log_4 x = 3 \quad (101)$$

$$\frac{5 \cdot \log_{64} x - 1}{(\log_{64} x)^2} = 6 \quad (104)$$

$$\frac{12}{\log_3 x + 1} - \frac{2}{\log_3 x} = 3 \quad (103)$$

$$\sqrt{\log_{16} x} + \sqrt{\log_{16} x + 2} = 2 \quad (106)$$

$$\log_3 x + \sqrt{\log_3 x} = 2 \quad (105)$$

$$(\log_3 x)^2 - \sqrt{(\log_3 x)^2 + 27} = 3 \quad (107)$$

תשובות סופיות:

2.5 (4	1 (3	4 (2	3 (1
$\frac{6}{5}$ (8	$\frac{1}{2}$ (7	$\frac{1}{3}$ (6	0.6 (5
1.5 (12	-2 (11	-3 (10	-4 (9
9 (16	6 (15	-3 (14	-2 (13
$-\frac{8}{9}$ (20	$-\frac{7}{15}$ (19	$-\frac{1}{12}$ (18	-9 (17
$-\frac{1}{8}$ (24	-0.1 (23	-2.5 (22	-0.9 (21
$\frac{1}{27}$ (28	6 (27	32 (26	9 (25
$\frac{81}{625}$ (32	9 (31	1 (30	$\frac{1}{16}$ (29
0.2 (36	8 (35	3 (34	0.5 (33
8 (40	5 (39	$\frac{1}{6}$ (38	3 (37
1.5 (44	0.5 (43	4 (42	5 (41
-17 (48	11 (47	4 (46	$\frac{1}{3}$ (45
8 (52	1 (51	0.25 (50	1 (49
9, 4 (56	8, 2 (55	12 (54	$\frac{1}{7}$ (53
$1, -\frac{1}{2}$ (60	1, 5 (59	4, 2 (58	$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$ (57
-9 (64	± 3 (63	5 (62	3 (61
1.5 (68	9 (67	5, -1 (66	2 (65
1 (72	2 (71	\emptyset (70	5 (69
2, 8 (76	3 (75	2 (74	5 (73
63 (80	8 (79	$-1, -\frac{1}{2}$ (78	-1 (77

-2 (84	$\pm \frac{1}{2}$ (83	$13.5, -6$ (82	6 (81
4 (88	3 (87	± 7 (86	± 2 (85
$0, 2$ (92	$3, 1$ (91	1 (90	2 (89
$-3, -1$ (96	$0.974, 1$ (95	$0, 2$ (94	$2, 1$ (93
$8, \frac{1}{32}$ (100	$81, \frac{1}{81}$ (99	$-12, -3$ (98	$-\frac{1}{3}$ (97
$8, 4$ (104	$\sqrt[3]{3}, 9$ (103	$343, \frac{1}{49}$ (102	$64, \frac{1}{2}$ (101
	$27, \frac{1}{27}$ (107	2 (106	3 (105

חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

תזכורת – חוקי הלוגריתמים:

$$\log_x (x)^n = n \cdot \log_a x \quad \log_x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \quad \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--|---|
| (2) $\log_8 4 + \log_8 16$ | (1) $\log_3 6 + \log_3 1.5$ |
| (4) $\log_5 150 - \log_5 6$ | (3) $\log_2 10 + \log_2 6.4$ |
| (6) $\log_2 768 - \log_2 6$ | (5) $\log_4 192 - \log_4 3$ |
| (8) $\log_{0.2} 2 - \log_{0.2} 10$ | (7) $\log_{81} 120 - \log_{81} 40$ |
| (10) $2\log_6 2 + \log_6 9$ | (9) $\log_{0.25} 80 - \log_{0.25} 5$ |
| (12) $3\log_3 6 + \log_3 3.375$ | (11) $\log_4 1.6 + 2\log_4 \sqrt{10}$ |
| (14) $\log_4 24 + \log_4 5 - \log_4 10 - \log_4 3$ | (13) $\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 4$ |
| (16) $\log_6 10 - \log_6 5 - \log_6 288 + \log_6 4$ | (15) $\log_5 50 + \log_5 20 - \log_5 2 - \log_5 4$ |
| (18) $\frac{1}{2} \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{5}{2} + \log_{\frac{1}{3}} 2 \right) + \log_{\frac{1}{3}} 10 - \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 8$ | (17) $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} 252 \log_{\sqrt{5}} 2 - \log_{\sqrt{5}} 60$ |
| (20) $-\frac{1}{4} \log_{\sqrt{7}} 81 + 2\log_{\sqrt{7}} 6 - \log_{\sqrt{7}} 84$ | (19) $\frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 3 + \frac{3}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 4$ |

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

טיפ: הפוך את המספרים השלמים לביטוי לוגריתמי לפי: $k = \log_a a^k$

וחבר אותם לביטויים הנוספים לפי חוקי הלוגריתמים.

- | | | |
|--|---|---|
| (23) $\frac{\log_7 4 + \log_7 8}{\log_7 2}$ | (22) $\frac{\log_4 125}{\log_4 5}$ | (21) $\frac{\log_3 16}{\log_3 8}$ |
| (26) $\frac{\log_7 5 + \log_7 3 - 4}{\log_7 225 - \log_2 256}$ | (25) $\frac{\log_2 5 - \log_2 2 + 1}{\log_2 200 - 3}$ | (24) $\frac{\log_3 6 + 2}{\log_3 108 - \log_3 2}$ |
| (29) $\frac{2 - 2\log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2\log_3 18}$ | (28) $\frac{\log_4 18 - \log_4 2 + \log_4 36}{2\log_4 6 - 3\log_4 8 + 4}$ | (27) $\frac{2 - 3\log 5 + \log 50}{1 + \log 128 - 5\log 2}$ |

חשב את ערכי הביטויים הבאים (הלוגריתם לפי בסיס 10):

$$\begin{array}{lll} \frac{\log 8}{\log \sqrt{8}} & \text{(32)} & \frac{\log 8}{\log 16} & \text{(31)} & \frac{\log 27}{\log 9} & \text{(30)} \\ \frac{\log 36 + 0.5 \log 6}{\log 12 - \log 2} & \text{(35)} & \frac{\log 72 - \log 8}{\log \sqrt{27}} & \text{(34)} & \frac{\log 24 - \log 3}{\log 2} & \text{(33)} \\ & & & & \frac{1 + \log 5}{\log 2 + 2 \log 5} & \text{(36)} \end{array}$$

(37) הוכח את נכונות השוויוניים הבאים (לפי בסיס 10):

$$\begin{array}{l} \text{א. } \frac{\log 125 - 1 + \log 2}{\log 5 + 1 - \log 2} = 1 \\ \text{ב. } \frac{2 - \log 25 + 2 \log 8}{\log \sqrt[3]{16}} = 6 \\ \text{ג. } \frac{\log 9 + 2 \log 5 + \log 4}{\log 10 - \log 2 + \log 6} = 2 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (איחוד ביטויים באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\begin{array}{ll} \log_{15} x + \log_{15} (x-2) = 1 & \text{(39)} & \log_4 x + \log_4 (x-6) = 2 & \text{(38)} \\ \log_{35} (x-8) + \log_{35} (x-6) = 1 & \text{(41)} & \log_2 x + \log_2 (x-3) = 2 & \text{(40)} \\ \log_3 (x+105) - \log_3 (x+1) = 3 & \text{(43)} & \log_2 (x+14) - \log_2 x = 3 & \text{(42)} \\ \log_2 (2x+8) = 2 + \log_2 (5-x) & \text{(45)} & \log_2 (3x+4) - \log_2 (x-2) = 1 & \text{(44)} \\ \log_2 (11x+4) - \log_2 (2x+1) = \log_2 (2x+3) & \text{(47)} & \log_3 (x^2 + 11) = 1 + \log_3 (2x+1) & \text{(46)} \\ & & \log_5 (30x+9) - \log_5 (4x+5) = \log_5 (3x+2) & \text{(48)} \\ & & 2 \log_5 (x+1) = \log_5 (2x+3.5) + \log_5 x & \text{(49)} \\ & & \log_2 (x-4) + \log_2 (x+2) - \log_2 (x-3) = 3 & \text{(50)} \\ & & \frac{\log_7 (12x-35)}{2 \log_7 x} = 1 & \text{(51)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם וקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_2(5^x + 19) = 3 + \log_2(8 - 5^x) \quad (53) \qquad \log_3(2^x + 2) - \log_3(2^x - 14) = 2 \quad (52)$$

$$\log_3(25^x + 8) - 2 = x \log_3 5 \quad (55) \qquad 1 + (x + 2) \log_3 2 = \log_3(4^x + 32) \quad (54)$$

$$x \log_2 4 = \log_2(2^x + 28) + x - 3 \quad (57) \qquad \log_3(9^{x+3} - 1) = x + 5 + \log_3(3^{x+3} - 1) \quad (56)$$

פתור את המשוואות הבאות (פתיחה באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\log_4(16x) \cdot \log_4(64x) = 12 \quad (59) \qquad \log_3 x \cdot \log_3(3x) = 6 \quad (58)$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{8} = -2 \quad (61) \qquad \log_2(32x) \cdot \log_2(128x) = 48 \quad (60)$$

$$\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = \log_4(4x) \quad (63) \qquad \log_3\left(\frac{27}{x}\right) \cdot \log_3(81x) = 10 \quad (62)$$

$$(\log_3 3x)^2 = \log_3 3x^2 + 1 \quad (65) \qquad \log_2 x^2 \cdot \log_2(8x) = \log_2\left(\frac{16}{x}\right) \quad (64)$$

$$\log_3(27x^3) \cdot \log(3x^2) = \log_3\left(\frac{81}{x}\right) + 3 \quad (67) \qquad (\log_5 25x)^2 = \log_5 25x^2 + 1 \quad (66)$$

$$2 \log_5 x \cdot \log_5\left(\frac{125}{x^2}\right) = 2 \quad (69) \qquad \log_2\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \log(32x^2) = \log_2\left(\frac{x}{128}\right) + 2 \quad (68)$$

$$\frac{\log_7\left(\frac{343}{x^2}\right)}{(\log_7 x)^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad (71) \qquad \log_2\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \log(32x^2) = \log_2\left(\frac{x}{128}\right) + 2 \quad (70)$$

תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים:

(72) נתון: $\log_2 7 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

$$\log_2 14 \quad \text{א.} \qquad \log_2 49 \quad \text{ב.}$$

(73) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

$$\log_3 125 \quad \text{א.} \qquad \log_3 0.2 \quad \text{ב.}$$

(74) נתון: $\log_{24} 6 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

$$\log_{24} 2 \quad \text{א.} \qquad \log_{24} 3 \quad \text{ב.}$$

(75) נתון: $\log 4 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log 16$ ב. $\log 2$ ג. $\log 8$

(76) נתון: $\log_3 5 = b$, $\log_3 6 = a$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 30$ ב. $\log_3 1.2$ ג. $\log_3 150$

(77) נתון: $\log_4 5 = b$, $\log_4 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_4 0.12$ ב. $\log_4 2.4$

(78) נתון: $\log_7 5 = b$, $\log_7 8 = a$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_7 40$ ב. $\log_7 320$

(79) נתון: $\log_5 2 = b$, $\log_5 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_5 \sqrt{6}$ ב. $\log_5 \sqrt[3]{72}$

(80) נתון: $\log_8 3 = b$, $\log_8 10 = a$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_8 \sqrt{0.03}$ ב. $\log_8 \sqrt[5]{\frac{10}{27}}$

(81) נתון: $\log_3 8 = b$, $\log_3 7 = a$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 \frac{64}{343}$ ב. $\log_3 \sqrt[4]{\frac{49}{512}}$

חשב את ערכי הביטויים הבאים באמצעות הנוסחה: $a^{\log_a b} = b$:

(82) $2^{\log_2 3}$ **(83)** $5^{\log_5 12}$ **(84)** $0.24^{\log_{0.24} 6}$ **(85)** $10^{\log 2}$

(86) $2^{2\log_2 3}$ **(87)** $3^{3\log_3 4}$ **(88)** $9^{\log_3 4}$ **(89)** $27^{\log_3 2}$

(90) $8^{\log_2 3}$ **(91)** $32^{\log_2 3}$ **(92)** $125^{-\log_5 3}$ **(93)** $\sqrt{6}^{\log_{36} 4}$

(94) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$ **(95)** $\sqrt[5]{8}^{\log_2 243}$ **(96)** $\sqrt[3]{5}^{\log_5 64}$ **(97)** $3^{\log_9 2}$

(98) $64^{\log_2 5}$ **(99)** $5^{\log_{125} 8}$ **(100)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 4}$ **(101)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\sqrt{49}} 81}$

(102) $5^{1+\log_5 2}$ **(103)** $3^{2-\log_3 6}$ **(104)** $4^{\frac{\log_4 9}{2}}$ **(105)** $\sqrt{27}^{1+\log_3 2}$

(106) $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

תשובות סופיות:

3 (5	2 (4	6 (3	2 (2	2 (1
2 (10	-2 (9	1 (8	0.25 (7	7 (6
3 (15	1 (14	3 (13	6 (12	2 (11
-2 (20	10.5 (19	-1.5 (18	-2 (17	-2 (16
0.5 (25	1 (24	5 (23	3 (22	$\frac{4}{3}$ (21
1.5 (30	0.5 (29	2 (28	1 (27	0.5 (26
2.5 (35	$\frac{4}{3}$ (34	3 (33	2 (32	0.75 (31
13 (40	4 (39	5 (38	8 (37	1 (36
2 (45	\emptyset (44	3 (43	3 (42	2 (41
8 (50	0.5 (49	$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (48	$1, -\frac{1}{4}$ (47	4, 2 (46
1.292, 0 (55	3, 2 (54	1 (53	4 (52	5, 7 (51
$2, \frac{1}{2^{13}}$ (60	$4, \frac{1}{4^6}$ (59	$9, \frac{1}{27}$ (58	2 (57	\emptyset (56
$3, \frac{1}{3}$ (65	$\sqrt{2}, \frac{1}{16}$ (64	2 (63	$\frac{1}{9}, 3$ (62	2, 4 (61
$\pm 5, \pm \sqrt{5}$ (70	$\sqrt{5}$ (69	$1, \frac{1}{4}$ (68	$\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}$ (67	0.2 (66
				49, 7 ⁶ (71
		ב. $2a$		$a+1$.א (72
		ב. $-a$		$3a$.א (73
		ב. $\frac{3a-1}{2}$		$\frac{1-a}{2}$.א (74
	א. $1.5a$	ב. $0.5a$		$2a$.א (75
	א. $a+2b$	ב. $a-b$		$a+b$.א (76

			$a+1-b$ ג.	$1-2b$ נ. (77
			$2a+b$ ג.	$a+b$ נ. (78
			$b+\frac{2}{3}a$ ג.	$\frac{b+a}{2}$ נ. (79
			$\frac{a-3b}{5}$ ג.	$\frac{b-2a}{2}$ נ. (80
			$\frac{2a-3b}{4}$ ג.	$2b-3a$ נ. (81
9 (86	2 (85	6 (84	12 (83	3 (82
243 (91	27 (90	8 (89	16 (88	64 (87
4 (96	27 (95	4 (94	$\sqrt[4]{4}$ (93	$\frac{1}{27}$ (92
$\frac{1}{81}$ (101	0.25 (100	2 (99	5^6 (98	$\sqrt{2}$ (97
$\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$ (106	$\sqrt{216}$ (105	3 (104	1.5 (103	10 (102

מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

תזכורת: $a, m > 0 \neq 1, \log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$

$\log_2 5 \cdot \log_{25} 4$ (2)	$\log_3 6 \cdot \log_6 3$ (1)
$\log_{0.1} 5 \cdot \log_{25} 100$ (4)	$\log_{27} 4 \cdot \log_2 3$ (3)
$\log_5 8 \cdot \log_7 25 \cdot \log_2 49$ (6)	$\log_{\sqrt{3}} 7 \cdot \log_{\sqrt{343}} 9$ (5)
$\log_{81} 49 \cdot \log_{32} 3 \cdot \log_7 2$ (8)	$\log_4 169 \cdot \log_9 64 \cdot \log_{13} 243$ (7)

הוכח את השוויוניים שלפניך:

$\log_6 \frac{1}{8} \cdot \log_2 6 = -3$ (10)	$\log_7 25 \cdot \log_5 7 = 2$ (9)
$\log_3 8 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 = 3$ (12)	$\log_4 25 \cdot \log_5 4 = 2$ (11)
$\log_{16} 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 25 = 1$ (14)	$\log_3 5 \cdot \log_5 8 + \log_3 2 \cdot \log_2 5 = 40$ (13)
$\log_a b \cdot \log_c a + \log_b a \cdot \log_c b = \log_c ab$ (16)	$\log_2 25 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{81} 2 = 1$ (15)

פתור את המשוואות הבאות:

$\log_{81} x + \log_3 x = 5$ (18)	$\log_2 x + \log_8 x = 4$ (17)
$\log_3 x + 3 \log_{27} x^2 = 3$ (20)	$5 \log_3 x - \log_{\frac{1}{25}} x = 11$ (19)
$\log_5 x \cdot \log_{125} x = 3$ (22)	$\log_2 x^3 + 4 \log_{16} x = 8$ (21)
$\log_3 (81x) \cdot \log_{27} \left(\frac{x}{9} \right) = \frac{7}{3}$ (24)	$\log_2 (8x) \cdot \log_{16} x = 17$ (23)
$\log_x 2 + \log_2 x = 2$ (26)	$\log_2 (32x^2) \cdot \log_8 \left(\frac{4}{x^3} \right) = -12$ (25)
$4 \log_x 5 = 3 + 2 \log_{25} x$ (28)	$\log_x 3 - 6 \log_{27} x = 1$ (27)
$\log_6 (16x - 3) \cdot \log_{x\sqrt{5}} 6 = 2$ (30)	$\log_3 (6 - x) \cdot \log_x 3 = 2$ (29)
$\log_2 (4x) + \log_{8x} 4 = 3.5$ (32)	$\log_5 x = 4.5 + \log_{5x} 125$ (31)

$$\log_x (27x) \cdot \log_{81x} \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5} = 0 \quad (34)$$

$$\log_x 4 + 3 \log_{4x} 16 = 4 \quad (33)$$

$$3 \cdot \log_{\sqrt{x}} (6x) - \log_{36} x = 4 \quad (36)$$

$$2 \log_{4x} 8 \cdot \log_{\frac{x}{2}} (16x) = 9 \quad (35)$$

$$\log_x 5 \cdot \log_{5x} (5x^2) = 2 \cdot \log_{25x} 5 \quad (37)$$

תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים:

(38) נתון: $\log_2 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_5 2$

ב. $\log_4 5$

ג. $\log_{16} 5$

(39) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32} 36$

ג. $\log_{216} 96$

(40) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 15$

ב. $\log_{15} 3$

ג. $\log_9 25$

(41) נתון: $\log 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log 80$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{80} 2000$

(42) נתון: $\log_5 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{36} 30$

ב. $\log_{216} 180$

ג. $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{125}$

(43) נתון: $\log 2 = 0.3$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{\sqrt{2}} 100$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{\frac{1}{4}} 5$

(44) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לכל $a, b > 0 \neq 1$ מתקיימת הטענה הבאה: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

ב. נתון: $\log_a 5 = b$. הוכח כי מתקיים: $\log_a b = \frac{b}{\log_b 5}$.

ג. נתון: $2 \cdot \log_3 a \cdot \log_{(b+c)} 3 = 1$.

הוכח כי לכל: $a, b, c > 0 \neq 1$ מתקיים: $a^2 = b + c$.

פתור את המשוואות הבאות (הוצאת לוג משני אגפים):

(47) $x^{1+\log_3 x} = 729$

(46) $x^{\log_3 x} = 3$

(45) $x^{\log_2 x} = 16$

(50) $x^{9-3\log_2 x} = \frac{x}{8}$

(49) $x^{2\log_3 x + 8} = x$

(48) $x^{3\log_5 x + 2} = 5$

תשובות סופיות :

-1 (4	$\frac{2}{3}$ (3	1 (2	1 (1
0.1 (8	15 (7	12 (6	$2\frac{2}{3}$ (5
3 (20	25 (19	81 (18	8 (17
$27,\frac{1}{243}$ (24	$16,\frac{1}{128}$ (23	$125,\frac{1}{125}$ (22	4 (21
$5,\frac{1}{625}$ (28	$\sqrt{3},\frac{1}{3}$ (27	2 (26	0.07 ,4 (25
$\frac{1}{4\sqrt{2}},2$ (32	$\frac{1}{5\sqrt{5}},5^5$ (31	0.2,3 (30	2 (29
$6^6,\frac{1}{36}$ (36	$4,\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ (35	3 (34	4 (33
			$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ (37
	$\frac{a}{4}.\lambda$	$\frac{a}{2}.\beth$	$\frac{1}{a}.\aleph$ (38
	$\frac{a+2}{3a}.\lambda$	$0.8a.\beth$	$2a-1.\aleph$ (39
	$.a.\lambda$	$\frac{1}{a+1}.\beth$	$a+1.\aleph$ (40
	$.\frac{a+3}{3a+1}.\lambda$	$\frac{2a+1}{3a}.\beth$	$3a+1.\aleph$ (41
	$-\frac{1.5}{a}.\lambda$	$\frac{2a+1}{3a}.\beth$	$\frac{a+1}{2a}.\aleph$ (42
		$.-1\frac{1}{6}.\lambda$	$1\frac{7}{9}.\beth$ $13\frac{1}{3}.\aleph$ (43
$\frac{1}{5},\sqrt[3]{5}$ (48	$9,\frac{1}{27}$ (47	$3,\frac{1}{3}$ (46	0.25 ,4 (45
		$8,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (50	$\frac{1}{81},\sqrt{3}$ (49

אי-שוויוניים לוגריתמיים:

פתור את אי-השוויוניים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $\log_5(x-2) \leq 1$ (2) | $\log_4(x-3) < 0$ (1) |
| $\log(x+4) \geq \log(10-2x)$ (4) | $\log_{0.5}(3-x) < -2$ (3) |
| $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3) > \log_{\frac{1}{3}}(x+5)$ (6) | $\log_2(x+2) < \log_2(2x-3)$ (5) |
| $\log_2(x^2-3x)-2 > 0$ (8) | $\log_{0.5}\left(x^2-\frac{1}{2}x\right) > 1$ (7) |
| $\log_4\left(\frac{x+3}{x-2}\right) > \frac{1}{2}$ (10) | $\log_2\left(x^2-\frac{9}{16}\right) < 0$ (9) |
| $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 > 0$ (12) | $\log_2\left(\frac{x-5}{x+2}\right) \geq 1$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | | |
|--|-----------------------|---|
| $x < -1$ (3) | $2 < x \leq 7$ (2) | $3 < x < 4$ (1) |
| $-1 < x < 2$ (6) | $x > 5$ (5) | $2 \leq x < 5$ (4) |
| $-\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$ (9) | $x < -1, x > 4$ (8) | $-\frac{1}{2} < x < 0, \frac{1}{2} < x < 1$ (7) |
| $0 < x < 4, x > 16$ (12) | $-9 \leq x < -2$ (11) | $2 < x < 7$ (10) |

תוכן העניינים:

208.....	פרק 14.....
208.....	בעיות גדילה ודעיכה.....
208	הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מעריכית :
208	שאלות חימום :
211	תשובות סופיות :
212	שאלות לפי נושאים :
212	שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית :
212	שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית :
212	שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה/דעיכה :
212	שאלות העוסקות במציאת הזמן :
213	שאלות שונות (כל הנושאים יחד) :
218	תשובות סופיות :
219	תרגול נוסף :
223	תשובות סופיות :

פרק 14

בעיות גדילה ודעיכה

הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מעריכית:

הכמות לאחר פרק זמן t , המסומנת M_t , כאשר הכמות ההתחלתית היא M_0 וקצב הגידול/דעיכה הוא q ניתנת ע"י הנוסחה הבאה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.
כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי: $q = \frac{100 \pm p}{100}$.

שאלות חימום:

(1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

- מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
- מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

- | | |
|---------------|---------------|
| א. $q = 1.2$ | ב. $q = 1.6$ |
| ג. $q = 0.85$ | ד. $q = 0.72$ |

(3) מצא את M_0 :

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$ | ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$ |
| ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$ | |

(4) מצא את q :

ב. $512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40}$

א. $25 = 10 \cdot q^6$

ד. $9.35 = 7 \cdot q^{10.5}$

ג. $10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25}$

ו. $13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3}$

ה. $6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{\frac{1}{3}}$

(5) מצא את t :

ב. $62.08^t = 39.68$

א. $10 \cdot 1.05^t = 70$

ג. $7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5$

(6) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2. בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.

א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?

ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?

ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

(7) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%. במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.

א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?

ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?

ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

(8) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה. מה היה מחירו ההתחלתי?

(9) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם.

ידוע כי שרון רצה ביום השישי מרחק של 2.5 ק"מ.

כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

(10) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה. כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.

א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?

ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

- 11** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית.
 בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה.
 כיום יש באגם $2 \cdot 10^5$ ק"ג אצות.
 א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?
 ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?
 ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?
- 12** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.
 א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?
 ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?
- 13** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.
 א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?
 ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?
- 14** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה $5 \cdot 10^4$ טון עצים ובשנת 1990 הייתה 10^7 טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?
- 15** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג.
 בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.
 א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?
 ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?
- 16** מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.
 א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?
 ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?
- 17** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.
 א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.
 ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

תשובות סופיות:

1.2 א.	ב. 0.6	ג. 1.05	ד. 1.15
ה. 2.	ו. 3. ז. 0.75	ח. 0.5	
2 א. 20% גדילה	ב. 60% גדילה	ג. 15% דעיכה	ד. 28% דעיכה.
3 א. 80.	ב. 45.	ג. 150.	
4 א. 1.165	ב. 0.7469	ג. 0.732	ד. 1.028
ה. 0.22	ו. 1.03		
5 א. 39.88	ב. 2.	ג. 33.01	
6 א. 100.	ב. 200.	ג. 52,428,800	
7 א. 1889.56 גרם.	ב. 1422.4 גרם.	ג. כן. 456.747 גרם.	
8 592.6 ש.			
9 1.41 ק"מ.			
10 א. 578,642 תושבים.	ב. 467,304 תושבים.		
11 א. 3,200,000 ק"ג	ב. 50,000 ק"ג.	ג. 4,525,483.4 ק"ג.	
12 א. 1.029	ב. 9.6 מיליון תושבים.		
13 א. 1.032	ב. 2117 תוכים.		
14 14.16%			
15 א. 0.9671	ב. 70.35 גרם.		
16 א. 0.90657	ב. 77.1%.		
17 א. 3.18%	ב. 6.15		

שאלות לפי נושאים:

שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

- (1) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?
- (2) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

- (3) מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה/דעיכה:

- (4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
- (5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
- (6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

שאלות העוסקות במציאת הזמן:

- (7) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
- (8) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?

9) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?

10) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?

11) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?

12) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

שאלות שונות (כל הנושאים יחד):

13) בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

14) נתונות שתי תרבויות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבות א' היו 4,000 חיידקים ובתרבות ב' היו 500 חיידקים. נסמן:

t_1 - הזמן שחלף עד שבתרבות א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות ב'.

t_2 - הזמן שחלף עד שבתרבות ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות א'.

חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

15) מספר החיידקים בתרבות גדל ב- $p\%$ בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה m . כעבור t שעות הוציאו m חיידקים מהתרבות וכעבור עוד t שעות היו $6m$ חיידקים בתרבות. הבע את t באמצעות p .

16) נתונה הפונקציה: $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$. מצא את ערך ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

17 נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

18 כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה. בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים. מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

19 ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.
א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.
ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.

20 שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.
א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?
ב. דני משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'.
רפי משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'.
למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות?
נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.

21 שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב' - 85,000 ₪.
ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה.
וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.
א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.
ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?

(22) כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.

- א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.
- ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.

(23) נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.

- א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.
- ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן (q_1, q_2) צריכים להיות מספרים הופכיים.

(24) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע p מדי שעה. ביום מסוים היו k גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד k גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו k גרם מהחומר. מצא את p .

(25) ערך ממנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$. מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.

(26) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה. בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים.

- א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.
- ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.

(27) אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה. כעבור t שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל- t שנים נוספות בתכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.

א. מצא את t .

לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪.

ב. מצא את אחוז הריבית החדש.

(28) ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה.

א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'.

ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

(29) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של p אחוזים לשנה. בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.

א. מצא את אחוז הגידול השנתי p אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.

ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.

(30) בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.

א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.

ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.

(31) אדם מפקיד k שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$. לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון k שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את p .

(32) ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה k שקלים.
המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא k . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

תשובות סופיות:

- (1) 5,062 חסידות. (2) 101,342 תושבים. (3) 34,907 זברות.
- (4) 2.3%. (5) 3.5%. (6) 921 חיידקים.
- (7) 9.41 שנים. (8) 7.47 שנים. (9) 16.43 שעות.
- (10) 12.43 שעות. (11) 9.43 ימים. (12) 16:00
- (13) בנק א' (14) $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2}$ (15) $t = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)}$
- (16) $x = 17.04$, מינימום.
- (17) 11 חודשים.
- (18) 100,000 עצים.
- (19) א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים
- (20) א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.
- (21) א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.
- (22) א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.
- (23) א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.
- (24) 14.82%
- (25) ב-5.95%
- (26) א. 4250 עופות ב. 20.77 שנים
- (27) א. $t = 4$ ב. $p = 20\%$
- (28) א. 3.13% ב. 25,909 ₪
- (29) א. 5% ב. 12.96 שנים.
- (30) א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים
- (31) 16.63%
- (32) ב-6.6%

תרגול נוסף:

- (1) בבריכת דגים נספרו 20,000 דגים.
כשלוש שנים לאחר מכן התבצעה ספירה נוספת ובה היו 28098 דגים.
א. מצא את אחוז הגדילה השנתי של הדגים.
ב. אחר 4 שנים נוספות הוציאו מהבריכה 40,000 דגים.
מצא כמה דגים יישארו בבריכה לאחר שנה מהוצאת ה-40,000 דגים.
- (2) כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה.
בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים
ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים.
מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.
- (3) מדען שוקל כמות חומר רדיואקטיבית 3 פעמים ביום מסוים.
בשקילה הראשונה כמות החומר היא 120 גרם.
לאחר שלוש שעות כמות החומר הייתה 61.44 גרם.
בשקילה השלישית 31.457 גרם.
א. מצא את אחוז הדעיכה של החומר הרדיואקטיבי.
ב. מצא לאחר כמה שעות מהשקילה השנייה התבצעה השקילה השלישית.
- (4) אחוז ריבוי אוכלוסייה בעיר מטרופולין הוא כזה שכל 30 שנים מכפילה העיר את
כמות תושביה.
א. מצא את קצב הגידול השנתי של תושבי העיר.
ב. אחוזי הריבוי בעיר גוטהם ובעיר מטרופולין זהה, אך ידוע כי כל 10 שנים
עוזבים את העיר גוטהם כ-10,000 תושבים. בשנת 1970 היו בעיר
גוטהם 40,000 תושבים. מצא כמה אנשים יהיו בעיר גוטהם בשנת 1988.
- (5) הערך של משאית הובלה יורד מדי שנה באחוז קבוע. ידוע כי ערך המשאית
לאחר 4 שנים מיום מכירתה נמוך ב-20,000 ממחירה המקורי.
כמו כן, ערך המשאית לאחר 8 שנים הוא 56,000 ₪.
מצא את המחיר המקורי של המשאית ואת האחוז שבו ערכה יורד מדי שנה.

- 6) ערך של מכונית היום הוא 45,000. המכונית יצאה לשוק לפני 3 שנים וערכה קטן מדי שנה באחוז קבוע של 8%.
א. מה המחיר המקורי של המכונית?
ב. מה יהיה מחיר המכונית לאחר 3 שנים מהיום?
ג. מצא תוך כמה שנים המכונית תרד עד לרבע מערכה בזמן שיצאה לשוק.
- 7) ערכן של אדמה עידית ואדמה זיבורית גדל בצורה מעריכית מדי שנה. ידוע כי הערך של דונם אדמה עידית גדול פי 5 מהערך של דונם אדמה זיבורית. הערך של האדמה הזיבורית גדל ב-8% והערך של האדמה העידית גדל ב-4% לשנה. מצא בעוד כמה שנים ישתוו המחירים של דונם אדמה מכל סוג.
- 8) ערכן של אדמה עידית ואדמה זיבורית גדל בצורה מעריכית מדי שנה. ידוע כי הערך של דונם אדמה עידית גדול פי 6 מהערך של דונם אדמה זיבורית. הערך של האדמה הזיבורית גדל באחוז קבוע הגדול פי 2 מהאחוז שבו גדל הערך של האדמה העידית. מצא את אחוז הגדילה של האדמה הזיבורית אם ידוע כי המחירים של דונם אדמה מכל סוג ישתוו לאחר 62.4 שנים.
- 9) ערכן של שתי מכוניות, האחת חדשה והשנייה ישנה, מתנהג בצורה מעריכית. ערך המכונית החדשה גדול פי 2 מערך המכונית הישנה ויורד באחוז מסוים מידי שנה. כמו כן, ידוע כי ערך המכונית הישנה גדל באותו האחוז מדי שנה. לאחר 20 שנים מהיום שבו הוצעו המכוניות למכירות פומביות ערכן השתווה. מצא את אחוז הגדילה או הדעיכה של כל מכונית.
- 10) אדם מפקיד לתכנית חיסכון סכום מסוים לפי ריבית דריבית של 3%. ערך מכונית יורד בכל שנה ב-3%. ידוע כי סכום המכונית גדול פי 3 מהסכום שהפקיד האדם בתכנית החיסכון. מצא לאחר כמה זמן יוכל האדם למשוך את הכסף שיעמוד לרשותו ולקנות את המכונית.

- 11** כמות חומר רדיואקטיבי מאבד 60% ממשקלו תוך 8 שעות.
קצב הדעיכה של החומר הוא מעריכי.
- א. מצא את קצב הדעיכה של החומר לשעה.
ב. מצא תוך כמה זמן יאבד החומר 90% ממשקלו.
ג. ידוע כי לאחר 3.5 שעות איבד החומר 10 גרם ממשקלו.
מצא את כמות החומר הרדיואקטיבי ההתחלתית.
ד. מה הייתה כמות החומר הרדיואקטיבי 3 שעות לפני שנערכה המדידה הראשונה.
ה. בכמה אחוזים קטן החומר הרדיואקטיבי מ-3 שעות לפני המדידה הראשונה עד למדידה הראשונה?
- 12** לשרון שתי חוות נמלים שבהן קצב ריבוי הנמלים הוא מעריכי וגדל ב-4% ליום. בסוף כל שבוע (לאחר 7 ימים) שרון לוקחת כמות נמלים קבועה מחווה א' ומעבירה אותם לחווה ב'. שרון סופרת את כמות הנמלים בכל חווה ביום מסוים ומגלה כי כמויות הנמלים בשתי החוות הן 3,000 נמלים בכל חווה. בספירה נוספת שערכה שרון לאחר שבועיים מיום מדידתה הקודם (ולאחר ההעברה) מצאה שרון כי בחווה ב' יש 1,500 נמלים יותר מבחווה א'. מצא כמה נמלים מעבירה שרון מחווה א' לחווה ב' לאחר כל 7 ימים.
- 13** תרבות חיידקים גדלה בצורה מעריכית. מדען שקל את כמות החיידקים בשעה 10:00 בבוקר ומצא כי יש בתרבות k חיידקים. בשעה 14:00 ערך המדען שקילה נוספת ומצא כי משקל החיידקים הוא $1.35k$. בשעה 20:00 ערך המדען שקילה נוספת ומצא כי משקל החיידקים הוא 741.14 גרם.
- א. מצא את קצב הגידול של החיידקים בכל שעה.
ב. מצא את המשקל של התרבות בשעה 10:00 בבוקר.
ג. מצא את המשקל של התרבות בשעה 6:00 בבוקר.
ד. כדי שהמדען יצליח בניסוי משקל התרבות חייב לעבור משקל של 1 ק"ג במהלך יום המדידות הנ"ל (עד שעה 12 בלילה - 24:00). האם המדען יצליח או ייכשל בניסוי?

- 14** סוחר קנה בריכת דגים ובה 1000 דגי סלמון. ידוע כי כל שבוע כמות הדגים בבריכה גדלה ב-7%. לאחר 5 שבועות מוכר הסוחר 500 דגי סלמון.
- א. מצא כמה דגים יהיו לסוחר בבריכה לאחר חודשיים (חודש בן 4 שבועות) מזמן הקנייה.
- ב. מצא כמה דגים יהיו לסוחר בבריכה לאחר חודשיים מזמן הקנייה, אם ידוע כי לאחר הוצאת 500 הדגים מהבריכה קצב הגידול של דגים עלה ל-10%.
- 15** סוללה בעלת קיבולת מקסימלית של 9 וולט נטענת בקצב של 14% לדקה.
- א. חשב תוך כמה זמן תטען הסוללה אם ידוע כי מטען הסוללה ההתחלתי הוא 3 וולט.
- ב. חשב תוך כמה זמן תטען הסוללה אם ידוע כי לאחר שהגיעה ל-6 וולט מוציאים ממנה 2 וולט (באופן חד-פעמי) ואוגרים אותו בקבל.
- 16** בתרביית $4 \cdot 10^4$ חיידקים. לאחר 4 שעות כמות החיידקים היא $5 \cdot 10^5$.
- א. מצא את קצב הגידול של החיידקים בכל שעה.
- ב. מדען גילה כי לאחר שבתרביית יש 10^6 חיידקים אז קצב הגדילה שלהם יורד ב-30%. תוך כמה זמן יהיו בתרביית 10^7 חיידקים מאז המדידה הראשונה?
- 17** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
- א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
- ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים מהכוורת וידוע כי נשארו 1,500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.
- 18** ידוע כי לאחר שמקום השורץ נמלים עובר ריסוס אז הן מתות בצורה מעריכית. המדביר אומר ללקוח כי לאחר 3 שעות כ-90% מהנמלים וודאי ימותו.
- א. מצא את הקצב בו מתות הנמלים בכל שעה.
- ב. חשב כמה זמן צריך הלקוח לחכות כדי שלפחות מחצית מהנמלים ימותו.

תשובות סופיות:

- (1) א. 12% ב. 4719 דגים.
- (2) 100000 עצים.
- (3) א. דועך ב-20%. ב. 3 שעות.
- (4) א. 1.023 ב. 48,598 תושבים.
- (5) 91,634.8 נה, יורד ב-6% לשנה.
- (6) א. 57,789 נה ב. 35,040 נה ג. 16.62 שנים.
- (7) 42.64 שנים.
- (8) 6%
- (9) 1.73%
- (10) 18.3 שנים.
- (11) א. 0.891 ב. 20.1 שעות. ג. $k = 30.278$ ד. 42.79 ג' ה. 29.26%.
- (12) 323 נמלים.
- (13) א. 1.078 ב. 350 גרם ג. 259.25 גרם ד. יצליח.
- (14) א. 1105 דגים. ב. 1201 דגים.
- (15) א. 8.38 דקות. ב. 11.47 דקות.
- (16) א. 1.88 ב. 10.1 שעות.
- (17) א. ב-4.1%. ב. 3000 דבורים.
- (18) א. בקצב של 1.535 לשעה. ב. כ-54 דקות ($t = 0.903$).

תוכן העניינים:

פרק 15.....	225
חשבון דיפרנציאלי – פונקציה מעריכית.....	225
סיכום כללי :	225
הגדרות כלליות :	225
תכונות כלליות :	225
תכונות נוספות :	226
נגזרות של פונקציות מעריכיות :	226
תזכורת – כללי הגזירה :	227
שאלות יסודיות – חישובי נגזרות :	228
שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :	229
שאלות שונות העוסקות בחקירה של פונקציות מעריכיות :	229
תשובות סופיות :	236
תירגול נוסף :	240
תשובות סופיות :	245
סקיצות לשאלות :	247

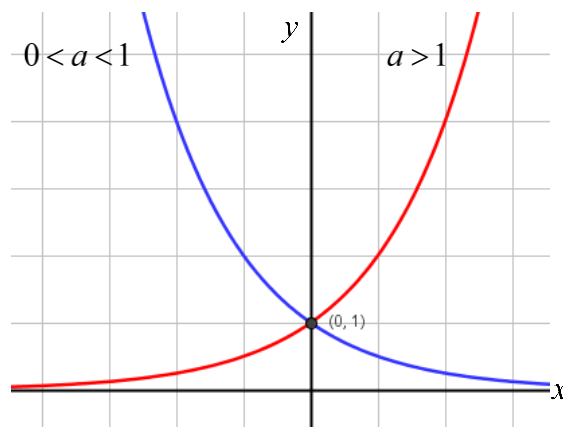
פרק 15

חשבון דיפרנציאלי – פונקציה מעריכית

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

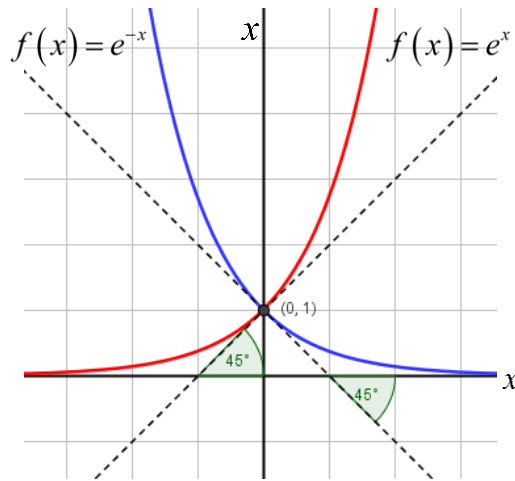
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$
עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1)$.
4. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

תזכורת – כללי הגזירה:

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$ ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$

ג. $f(x) = 2^{3x}$ ד. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x) = x \cdot e^x$ ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$ ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$ ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$ ג. $f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x) = e^{2x}$ ב. $f(x) = e^x + 1$

ג. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ד. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

ה. $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1)$ ו. $f(x) = e^{3x-2}$

ז. $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}$ ח. $f(x) = x^3 e^{2x}$

ט. $f(x) = e^{-2x}(x+4)$ י. $f(x) = e^{2x+1}(1-x)$

יא. $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$ יב. $f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}}$

יג. $f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}}$ יד. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$

טו. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{-x}}$ טז. $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x+1}}$

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.
- (9) נתונה הפונקציה: $y = e^{2x} + 3ex$.
לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x = 2$.
מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

שאלות שונות העוסקות בחקירה של פונקציות מעריכיות:

- (11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:
- א. $f(x) = \frac{2x-1}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{3}{e^x-1}$ ג. $f(x) = \frac{x+1}{e^x-5}$
- ד. $f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$ ה. $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$ ו. $f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2}$
- ז. $f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3}$
- (12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$.
- (13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 9}{e^x}$

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$.

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$.

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$.

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$.

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$.

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$.

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x - 1}{e^{3x} - e}$.

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = (x-3)e^x$.

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

(27) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1, \frac{2}{e}\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

(28) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים :

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $f(x) = (x-1)e^x$	ב. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
ג. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{4}x^2}$	ד. $f(x) = e^{x^2 - x}$
ה. $f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1}$	ו. $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}}$

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(34) נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. לאלו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון אחד?

(35) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(37) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2 + 6x + k}}$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

- מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2 + 6x + 1}} \leq e^2$.

(38) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8.$$

- מצא את a .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$.
- מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- מצא את b .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

(39) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 6x - e^x$ ו- $f(x) = ae^x - e^{2x} + b$. ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- y .

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

(40) לגרף הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2, \frac{4}{e}\right)$, $a, b \neq 0$.

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מעבירים ישר: $y = k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

(41) לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(42) הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(43) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר $y = -0.01$ את גרף הפונקציה?

(44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$f'(x) + f''(x) = 12 \quad x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות:}$$

- מצא את a .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$.
- מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- מצא את b .
- האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot a^x$, $(a > 0)$.

$$\text{לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: } x = -\frac{1}{\ln 2}$$

- מצא את a .
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- הנקודה שבה $x = 2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה: $g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$.
- מצא את k .
- מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

(46) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$.

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 2x \ln 3 \cdot 3^x - \ln 4 \cdot 4^{-x} \quad \text{ד} \quad 3 \ln 2 \cdot 2^{3x} \quad \text{ג} \quad (2x-3)e^{x^2-3x} + e \quad \text{ב} \quad 3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2 \quad \text{א}$$

$$(2) \quad 2^x(1+x \ln 2 + \ln 2) \quad \text{ג} \quad 2xe^{4x}(1+2x) \quad \text{ב} \quad (1+x)e^x \quad \text{א}$$

$$(3) \quad \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{ב} \quad \frac{x(2-x)}{e^x} \quad \text{א}$$

$$(4) \quad \frac{5e^{4x} + 6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}} \quad \text{ג} \quad \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}} \quad \text{ב} \quad 30e^{2x}(e^{2x}-1)^2 \quad \text{א}$$

$$(5) \quad 3e^{3x-2} \quad \text{ו} \quad e^{-x}(-x^2-2x+3) \quad \text{ה} \quad (x+1)^2 e^x \quad \text{ד} \quad -\frac{e^{1/x}}{x^2} \quad \text{ג} \quad e^x \quad \text{ב} \quad 2e^{2x} \quad \text{א}$$

$$\frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad \text{ז} \quad x^2 e^{2x}(3+2x) \quad \text{ח} \quad -e^{-2x}(2x+7) \quad \text{ט} \quad e^{2x+1}(1-2x) \quad \text{י}$$

$$\frac{e^{-1/x}}{x^2} \quad \text{יא} \quad \frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}} \quad \text{יב} \quad \frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}} \quad \text{יג} \quad \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \quad \text{יד}$$

$$\frac{(x+1)^2}{e^{-x}} \quad \text{טו} \quad \frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2} \quad \text{טז}$$

$$(6) \quad y = ex$$

$$(7) \quad y = 3x+1$$

$$(8) \quad y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e-1)x + e$$

$$(9) \quad y = 2e^4 x + 3ex - 3e^4$$

$$(10) \quad b = -1, \quad a = 2$$

$$(11) \quad \text{א} \quad \text{כל } x \quad \text{ב} \quad x \neq 0 \quad \text{ג} \quad x \neq \ln 5 \quad \text{ד} \quad x \neq 0, \quad x \neq \ln 2 \quad \text{ה} \quad \text{כל } x$$

$$\text{ו} \quad 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז} \quad x \leq 0, \quad x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \quad \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5, 0), \quad \max(3.5, 0.483), \quad b = -12, \quad a = 4$$

$$(15) \quad p = -27, \quad q = 35$$

$$(16) \quad y = 0$$

$$(17) \quad y = 0$$

$$x=0, y=-5, y=1 \quad (18)$$

$$x=\ln 5, y=-\frac{1}{5} \quad (19)$$

$$y=-1, y=1 \quad (20)$$

$$(\ln 2, -1) : \text{נקודת אי הגדרה}, x=\ln 3, y=-\frac{1}{3}, y=0 \quad (21)$$

$$x=0, y=0 \quad (22)$$

$$y=0 \quad (23)$$

$$x=\frac{1}{3}, y=0 \quad (24)$$

$$y=0 \quad (25)$$

$$(0,0) : \text{נקודת אי הגדרה}, x=0 \quad (26)$$

$$\left(3, \frac{10}{e^3}\right), a=1, b=1 \quad (27)$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad 2. (1,0), (0,-1) \quad 3. \min(0,-1) \quad 4. \text{עולה: } x>0 \text{ יורדת: } x<0$$

$$\text{ב. כל } x \quad 2. (0,1) \quad 3. \text{פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right) \quad 4. \text{עולה: } x>-1, x<-1$$

$$\text{ג. כל } x \quad 2. (0,0) \quad 3. \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$4. \text{עולה: } 0<x<2, x<-2 \text{ יורדת: } -2<x<0, x>2$$

$$\text{ד. כל } x \quad 2. (0,1) \quad 3. \min(0.5, e^{-0.25}) \quad 4. \text{עולה: } x>0.5 \text{ יורדת: } x<0.5$$

$$\text{ה. כל } x \quad 2. (0,1) \quad 3. \max(0,1) \quad 4. \text{עולה: } x<0 \text{ יורדת: } x>0$$

$$\text{ו. כל } x \quad 2. (0, 2e^{-1}) \quad 3. \min(0, 2e^{-1}) \quad 4. \text{עולה: } x>0 \text{ יורדת: } x<0$$

$$(29) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } \min(2, -e^2) \quad \text{ג. תחומי עלייה: } x<2 \text{ תחומי ירידה: } x>2$$

$$\text{ד. } (3,0), (0,-3)$$

$$(30) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } \max(0,3), \min(\ln 3, 1.59)$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } x>\ln 3 \text{ או } x<0 \text{ תחומי ירידה: } \ln 0<x<\ln 3 \quad \text{ד. } (0,3)$$

$$(31) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } \min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right), \max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } -1<x<1 \text{ תחומי ירידה: } x>1 \text{ או } x<-1 \quad \text{ד. } (0,0)$$

$$(32) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } \max\left(3, \frac{27}{e^3}\right) \quad \text{ג. עולה: } x<3, \text{ יורדת: } x>3 \quad \text{ד. } (0,0)$$

(33) א. כל x ב. $\min(-0.91, -0.67)$ ג. עולה: $x > -0.91$ יורדת: $x < -0.91$ ד. $(0, 0)$

(34) א. כל x ב. $\max(1, 2\sqrt{e})$, $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ ג. עולה: $-1 < x < 1$ יורדת: $x < -1$, $x > 1$

ד. $(0, 2)$ ה. $y = 2$ ו. $m = 2$, $m = 2\sqrt{e}$, $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$

(35) א. $x \neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$ ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, יורדת: $0 \neq x < \frac{1}{2}$ ד. אין

(36) א. כל x ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$, $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$

ג. עולה: $x < \frac{1}{6}$, $x > \frac{1}{2}$ יורדת: $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$ ד. $(0, 1)$

(37) א. $k = 1$, $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1, e^2)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$

(38) א. $a = 4$ ב. $x = \ln 2$ ג. $b = -5$ ד. $(0, 0)$

(39) א. $a = 12$, $b = -12$ ב. עולות: $x < \ln 6$ יורדות: $x > \ln 6$

(40) א. $a = 1$, $b = 0.25$, $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ב. $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$, $\min(0, 0)$ ג. $(0, 0)$ ה. $0 < k < \frac{4}{e}$

(41) א. $a = \frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1 < x < 11$ יורדת: $x < 1$, $x > 11$

ד. $(-1, 0)$, $(7, 0)$, $(0, -7e)$

(42) א. $m = -6$, $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$ ב. $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$, $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$ ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

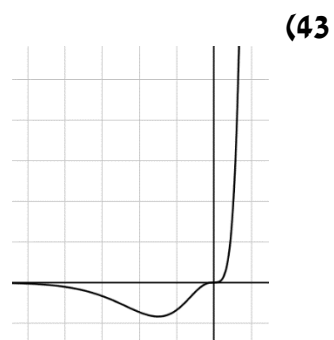
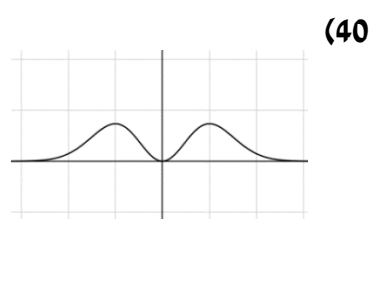
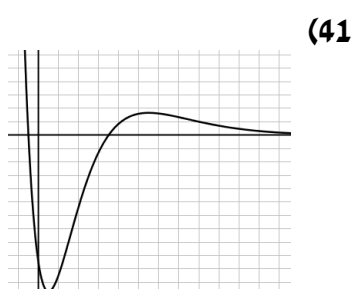
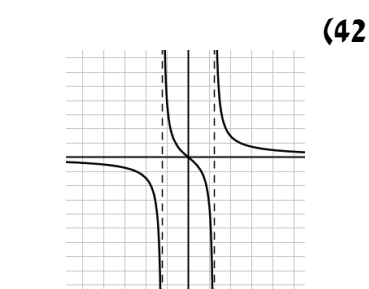
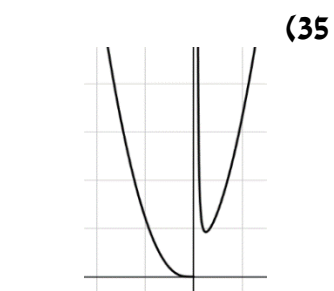
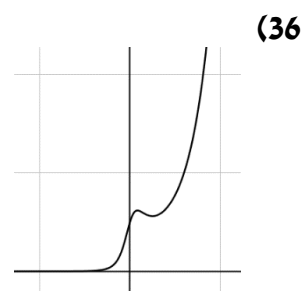
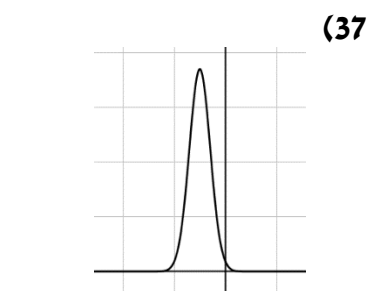
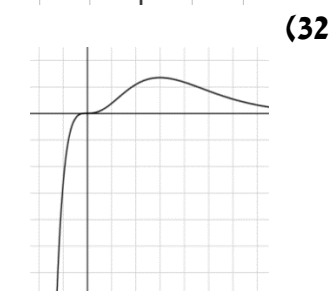
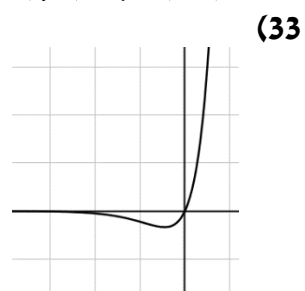
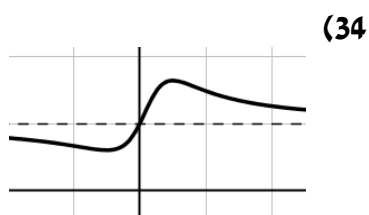
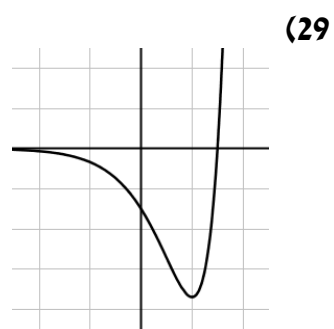
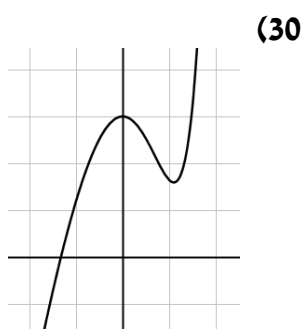
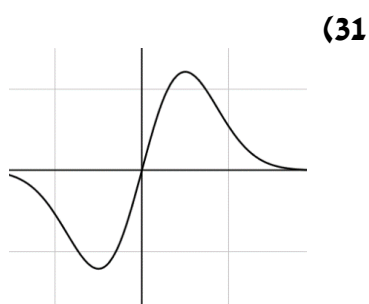
(43) א. $x = 0, -1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ ב. $y = 0$ ד. 2 נקודות

(44) א. $a = 7$ ב. $x = \ln 2$ ג. $b = 10$ ד. לא

(45) א. $a = 2$ ב. עולה: $x > -\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x < -\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k = 1$ ד. $(0, 0)$

(46) א. $y = -x \ln 81 + 7$ ג. $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:



תירגול נוסף:

(1) חקור את הפונקציה $y = e^{4(x-1)}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) חקור את הפונקציה $y = xe^x$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) חקור את הפונקציה $y = (x+2)e^x$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) חקור את הפונקציה $y = (x^2 - 5x + 5)e^x$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) חקור את הפונקציה $y = \frac{e^x}{x+2}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6) חקור את הפונקציה $y = \frac{x^2}{e^{x+1}}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7) חקור את הפונקציה $y = \frac{(x-4)^2}{e^x}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8) חקור את הפונקציה $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9) חקור את הפונקציה $y = x^2 e^{x^2}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10) חקור את הפונקציה $y = \frac{x - e^x}{x}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- y .
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

11) חקור את הפונקציה $y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) חקור את הפונקציה $y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 15}$ לפי הסעיפים הבאים:

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^3 - 3x^2 - 9x}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = (3x^2 - 4)e^{6x}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{x^2 - 24}}{x^2 - 24}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16 לפונקציה: $y = \frac{ae^x}{x+b}$ יש נקודת קיצון: $(4, 5e^4)$.

- א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

17 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 8$.

- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18 נתונה הפונקציה: $f(x) = 4^x + 4^{1-x}$.

- א. הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B.
- ב. הוכח כי אחת מהנקודות נמצאת על ציר ה- y .
- ג. הוכח כי שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה שווה לממוצע של שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.
- ד. כתוב את משוואת המשיק בנקודת הקיצון של הפונקציה.

19 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{kx}$.

- א. ידוע כי יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון שבה $x = 1$.
- ב. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- ג. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

- (1) א. כל x ב. אין קיצון ג. עולה בכל ת.ה. ד. $(0, e^{-4})$
- (2) א. כל x ב. $\min(-1, e^{-1})$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$ ד. $(0, 0)$
- (3) א. כל x ב. $\min(-3, -e^{-3})$ ג. עולה: $x > -3$ יורדת: $x < -3$ ד. $(0, 2)$, $(-2, 0)$
- (4) א. כל x ב. $\max(0, 5)$, $\min(3, -e^3)$ ג. עולה: $x < 0$, $x > 3$ יורדת: $0 < x < 3$ ד. $(0, 5)$, $(3.61, 0)$, $(1.38, 0)$
- (5) א. $x \neq -2$ ב. $\min(-1, e^{-1})$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$, $x \neq -2$ ד. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ה. $x = -2$
- (6) א. כל x ב. $\min(0, 0)$, $\max(2, 4e^{-3})$ ג. עולה: $0 < x < 2$ יורדת: $x < 0$, $x > 2$ ד. $(0, 0)$
- (7) א. כל x ב. $\min(4, 0)$, $\max(6, 4e^{-6})$ ג. עולה: $4 < x < 6$ יורדת: $x < 4$, $x > 6$ ד. $(0, 16)$, $(4, 0)$
- (8) א. $x \neq 0$ ב. אין קיצון ג. יורדת בכל ת.ה. ד. אין חיתוכים עם הצירים כלל. ה. $x > 0: y = 1$, $x < 0: y = 0$, $x = 0$
- (9) א. כל x ב. $\min(0, 0)$ ג. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$ ד. $(0, 0)$
- (10) א. $x \neq 0$ ב. $\max(1, 1 - e)$ ג. עולה: $x < 1$, $x \neq 0$ יורדת: $x > 1$ ד. אין חיתוכים ה. $x < 0: y = 1$
- (11) א. כל x ב. $\max(0, 0.5)$ ג. עולה: $x < 0$ יורדת: $x > 0$ ד. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ה. $y = 0$
- (12) א. $x \neq \pm\sqrt{15}$ ב. $\min\left(-5, \frac{e^5}{10}\right)$, $\max\left(3, -\frac{1}{6e^3}\right)$ ג. עולה: $-5 < x < 3$, $x \neq -\sqrt{15}$ יורדת: $x < -5$, $x > 3$ ד. $\left(0, -\frac{1}{15}\right)$ ה. $x = \pm\sqrt{15}$
- (13) א. כל x ב. $\min(3, e^{-27})$, $\max(-1, e^5)$ ג. עולה: $x < -1$, $x > 3$ יורדת: $-1 < x < 3$ ד. $(0, 1)$

(14) א. כל x ב. $\min(1, -e^6), \max\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3e^8}\right)$

ג. עולה: $x < -\frac{4}{3}, x > 1$ יורדת: $-\frac{4}{3} < x < 1$ ד. $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), (0, -4)$

(15) א. $x \neq \pm\sqrt{24}$ ב. $\max\left(0, -\frac{1}{24e^{24}}\right), \min(-5, e), \min(5, e)$

ג. עולה: $x > 5, -5 < x < 0, x \neq -\sqrt{24}$ יורדת: $x < -5, 0 < x < 5, x \neq \sqrt{24}$

ד. $\left(0, -\frac{1}{24e^{24}}\right)$ ה. $x = \pm\sqrt{24}$

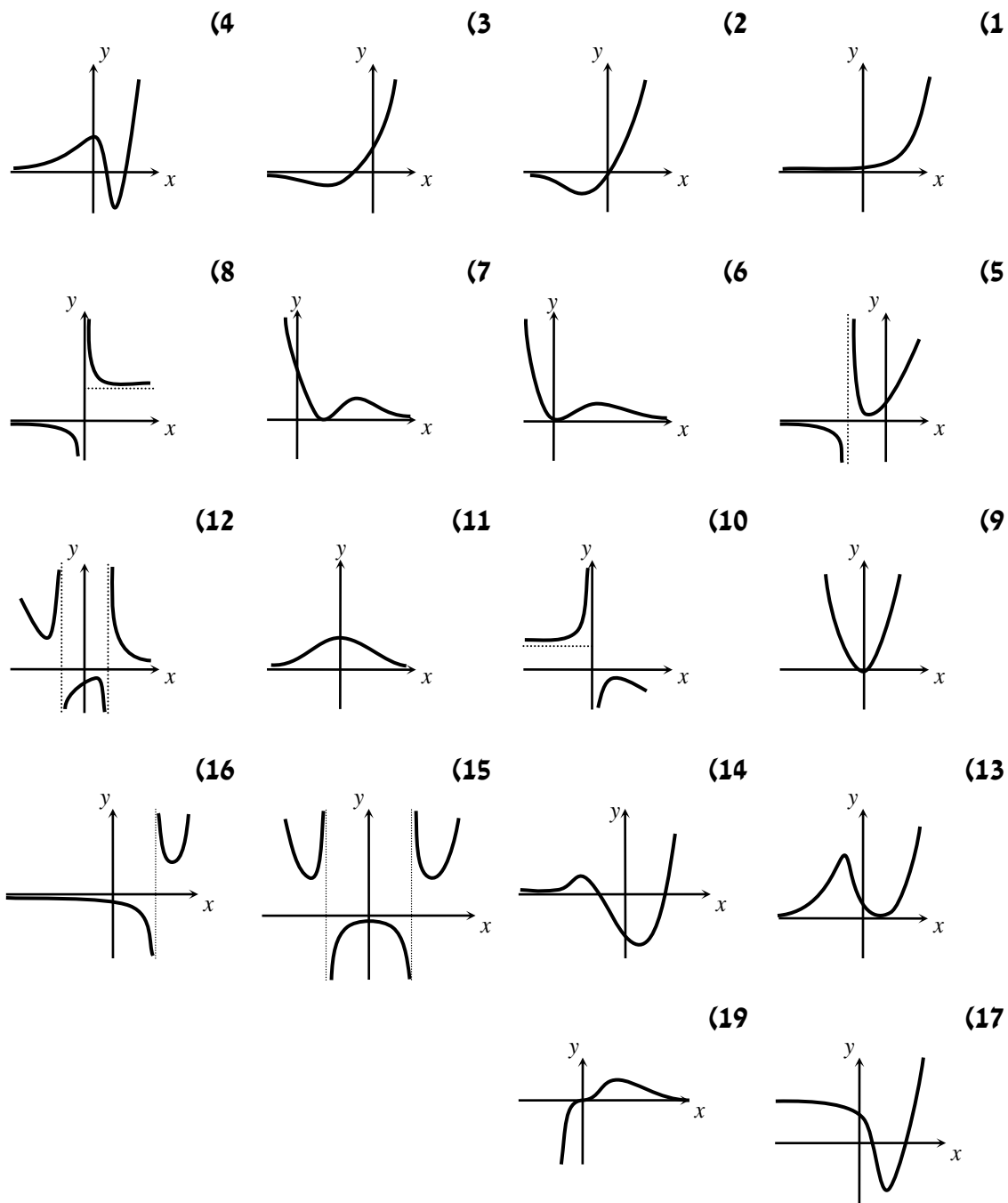
(16) א. $a = 5, b = -3$ ב. $x \neq 3$ ג. עולה: $x > 4$ יורדת: $x < 4, x \neq 3$ ד. $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

(17) א. $\min(\ln 3, -1)$ ב. עולה: $x > \ln 3$ יורדת: $x < \ln 3$ ג. $(\ln 2, 0), (\ln 4, 0), (0, 3)$

(18) ג. $y = 4$

(19) א. $f(x) = x^3 e^{-3x}, k = -3$ ב. לא ג. עולה: $x < 1, x \neq 0$ יורדת: $x > 1$

סקיצות לשאלות:



תוכן העניינים:

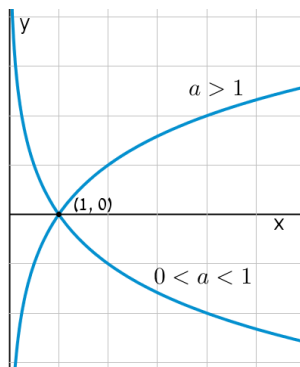
249.....	פרק 16.....
249.....	חשבון דיפרנציאלי – פונקציה לוגריתמית.....
249	סיכום כללי :
249	הגדרות כלליות :
249	תכונות כלליות :
249	תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית :
250	נגזרות של פונקציות לוגריתמיות :
251	שאלות יסודיות – חישובי נגזרות :
252	שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :
253	שאלות שונות העוסקות בחקירה :
259	תשובות סופיות :
264	תרגול נוסף :
269	תשובות סופיות :

פרק 16

חשבון דיפרנציאלי – פונקציה לוגריתמית

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:



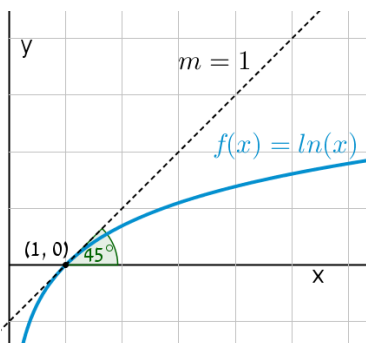
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית

כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$

עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל

כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3\ln x + 4\ln(x+2) - 5\ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2 x + 5\log_3(2x-1)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$ ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$ ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3\ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x) = \ln(x+2)$ ב. $f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3$

ג. $f(x) = x^2 \ln x$ ד. $f(x) = x^3 \ln x$

ה. $f(x) = \ln e^{2x}$ ו. $f(x) = e^x \ln x$

ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$ ח. $f(x) = x^2(2\ln x - 1)$

ט. $f(x) = \ln(x^2)$ י. $f(x) = \ln(x^4)$

יא. $f(x) = (\ln x)^4$ יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$

יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$

טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- | | |
|--|---|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$ | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$ | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$ |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2-1}$ | ו. $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right)$ |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$ |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$ | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$ | |

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

(7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(8) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

9) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצא את משוואת המשיק.

10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \ln(x^2 + 1)$ בנקודה שבה $x = 1$.

שאלות שונות העוסקות בחקירה:

11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| א. $f(x) = \ln x$ | ב. $f(x) = \ln(x^2)$ |
| ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$ | ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$ |
| ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$ | ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$ |
| ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$ | |

12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

13) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

17) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$.

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$.

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$.

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$.

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$.

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3\ln x$	ב. $y = x \ln x$
ג. $y = x \ln x - x$	ד. $y = \sqrt{x} \ln x$
ה. $y = x^2 \ln x$	ו. $y = \ln(x^2 + 1)$

(27) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

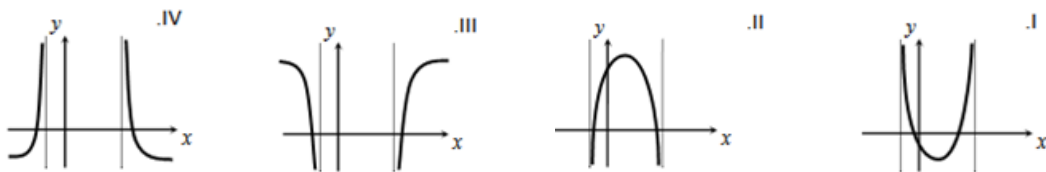
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$.
- מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

31 נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

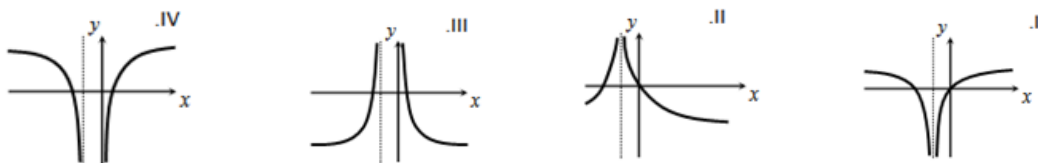
32 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



33 נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

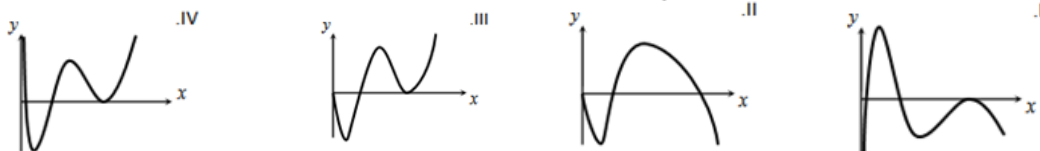
- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

35) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^5 x + 4\ln x$.
- ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ג. ענה על השאלות הבאות:
 - i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.
- ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



37) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x) = \ln x$.

(38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$.

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x = e$.

(39) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, a פרמטר חיובי, $a \neq 1$.

א. הבע באמצעות a את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y' = 0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום : $x > e - 2$. מצא את a .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.

ד. נתון הישר : $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

(40) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \text{ א. (1)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \text{ ז.} \quad f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \text{ ג.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \text{ ח.} \quad f'(x) = -\tan x \text{ ה.}$$

$$f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \text{ ב.} \quad f'(x) = \ln x + 1 \text{ א. (2)}$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \text{ ה.} \quad f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \text{ ז.} \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \text{ ג.}$$

$$f'(x) = 2x \ln(\ln x + 1) \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \text{ א. (3)}$$

$$f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \text{ ז.}$$

$$x(2 \ln x + 1) \text{ ג.} \quad \frac{2 \ln x + 2}{x} \text{ ב.} \quad \frac{1}{x+2} \text{ א. (4)}$$

$$e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \text{ ח.} \quad 2 \text{ ה.} \quad x^2(3 \ln x + 1) \text{ ז.}$$

$$\frac{2}{x} \text{ ט.} \quad 4x \ln x \text{ ה.} \quad e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right) \text{ ג.}$$

$$\ln x + 1 - \frac{2}{x} \text{ יב.} \quad \frac{4(\ln x)^3}{x} \text{ יא.} \quad \frac{4}{x} \text{ י.}$$

$$\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} \text{ טז.} \quad \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \text{ טו.} \quad \frac{1}{2x} \text{ יד.} \quad \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \text{ יג.}$$

$$\frac{6}{x^2-9} \text{ ג.} \quad \frac{2}{x^2-1} \text{ ב.} \quad -\frac{2}{x(x+2)} \text{ א. (5)}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2} \text{ ח.} \quad \frac{x}{x^2-1} \text{ ה.} \quad \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1} \text{ ז.}$$

$$\frac{1}{x^2-1} \text{ ט.} \quad \frac{1}{4-2x} \text{ ה.} \quad \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}} \text{ ג.}$$

$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{ב.י.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{א.י.}$$

$$\frac{10}{3(1-25x^2)} \quad \text{ז.י.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.י.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{ד.י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{ה.י.}$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (6)$$

$$a = 2, b = -2 \quad (7)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (8)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (9)$$

$$y = \ln 2 \cdot x + x - 1 \quad (10)$$

$$x > \ln 4 \quad \text{ז.י.} \quad x < -2 \quad \text{א.י.} \quad x > 10 \quad \text{ג.י.} \quad x \neq 0 \quad \text{ב.י.} \quad x > 0 \quad \text{א.י.} \quad (11)$$

$$x \geq e \quad \text{ז.י.} \quad x \neq e^3, e^{-1} \quad \text{וגם} \quad x > 0 \quad \text{ז.י.} \quad 0 < x \neq e \quad \text{ה.י.}$$

$$\max(1, -1) \quad (12)$$

$$\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \quad (13)$$

$$\max\left(e, \frac{1}{e}\right), \text{קצה}, \min(\sqrt{e}, 0) \quad (14)$$

$$\min(4, -1) \quad (15)$$

$$a = 1, b = -1 \quad (16)$$

$$a = 1, b = -1 \quad (17)$$

$$x = 3 \quad (18)$$

$$y = 0, x = e, (0, 0) \quad \text{נקודת אי הגדרה} \quad (19)$$

$$y = 2, x = \frac{1}{e}, (0, 2) \quad \text{נקודת אי הגדרה} \quad (20)$$

$$y = 0, x = \frac{1}{e^2}, \left(e^2, \frac{1}{4}\right) \quad \text{נקודת אי הגדרה} \quad (21)$$

$$x = 0, y = 0 \quad (22)$$

(23) נקודת אי הגדרה $(0,0)$.

(24) נקודת אי הגדרה $(0,2)$.

$$(25) \cdot \left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}} \right)$$

(26) א. i. $x > 0$ iii. $\max(1, -3.5)$, $\min(3, \ln 27 - 7.5)$

iv. עולה: $0 < x < 1$, $x > 3$; יורדת: $1 < x < 3$.

ב. i. $x > 0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min(e^{-1}, -e^{-1})$

iv. עולה: $x > e^{-1}$; יורדת: $0 < x < e^{-1}$.

ג. i. $x > 0$ ii. $(e,0)$ iii. $\min(1, -1)$

iv. עולה: $x > 1$; יורדת: $0 < x < 1$.

ד. i. $x > 0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$

iv. עולה: $x > e^{-2}$; יורדת: $0 < x < e^{-2}$.

ה. i. $x > 0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

iv. עולה: $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$; יורדת: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$.

ו. i. כל x ii. $(0,0)$ iii. $\min(0,0)$

iv. עולה: $x > 0$; יורדת: $x < 0$.

(27) א. $x > 0$ ב. $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right)$, $\min(1,0)$

ג. עלייה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$. ד. $(1,0)$.

(28) א. $0 < x \neq e$ ב. $\min(e^2, e^2)$ ג. עלייה: $x > e^2$, ירידה: $0 < x < e^2$ וגם $x \neq e$

ד. אין. ו. $k > e^2$.

(29) א. $x > 0$ ב. $\min(4, -1)$ ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: $0 < x < 4$

ד. $(1,0)$, $(16,0)$.

(30) א. $x \geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ ג. $(1,0)$, $(e,1)$

ד. $x = \sqrt[4]{e}$.

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x > 0$, $x \neq 1$ ותחום ההגדרה

של $g(x)$ הוא: $x > 0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x=e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$ יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$.
ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$ יורדת: $x > e$.
iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$.

$$\text{נכפול: } y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$$

(32) א. $x < -1, x > 7$ ב. $x = -1, 7$ ג. עולה: $x > 7$ יורדת: $x < -1$.
ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.
באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א. $x \neq -1$ ב. $x = -1$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$.
ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.
באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $-2 < x < 0, x \neq -1$.

(34) א. $0 < x < e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1 - \ln x > 0$ וגם $x > 0$).

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0 \quad \text{ג. } (1, 0)$$

$$\text{א. } x < -\frac{1}{2}, x > 1 \quad \text{ב. } x = -\frac{1}{2}, 1 \quad \text{ג. } (-2, 0)$$

$$\text{ד. מתקבל: } y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$$

$$\text{ב. } x > 1, e^{-4} < x < e^{-1} \quad \text{(36)}$$

ג. i. 2 נקודות והן: $(1, 0)$, $(e^{-2}, 0)$. הנקודה שבה: $x=0$ לא קיימת עקב ת.ה.

$$\text{ii. } x \neq 1, x > e^{-2}$$

ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.
שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

$$\text{א. } x > 0 \quad \text{ב. } (e^{\sqrt{3}}, 0), (e^{-\sqrt{3}}, 0), (1, 0)$$

$$\text{ג. } \min(e^{-1}, 2), \max(e^{-2}, -2) \quad \text{ה. } (1, 0), (e^2, 2), (e^{-2}, -2)$$

$$\text{א. } x = e \quad \text{ב. מתקבל: } y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0 \quad \text{ג. } y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$$

iii. $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$

ii. $(e-a, e)$

39) א. i. $x > -a, x \neq 1-a$

iv. $x = 1-a$ ב. $a = 2$ ז. $k < e$

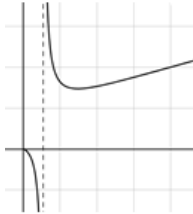
40) א. i. $x > 0$ ii. $x = 0$ ב. $\min(1, 1)$

ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:



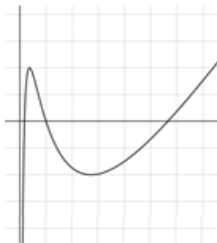
(29)



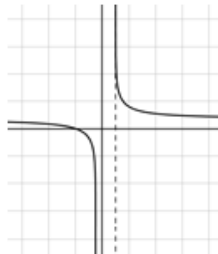
(28)



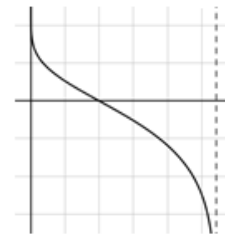
(27)



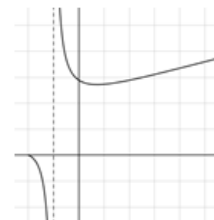
(37)



(35)



(34)



(39)

תרגול נוסף:

(1) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x(\ln x - 4)$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln x + \sqrt{3-2x}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הגדרתה.
- ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
- ג. הראה כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x^2)$.

- א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
 - i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - ii. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? נמק והראה חישוב מתאים.
 - iii. האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית? אם כן מהי?
 - iv. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - v. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 - vi. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = (\ln x)^2$.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = (\ln x)^2 + a \ln(x^2)$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = e^2$.
א. מצא את a .

ב. מצא האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודות נוספות.
ג. הראה כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי שהוא -1.

(6) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln^2(x+a)$, a פרמטר.

א. הבע באמצעות a את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

ב. באיזה תחום צריך להימצא a עבורו האסימפטוטה של הפונקציה תהיה מימין לציר ה- y ?

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי עבור התחום שמצאת בסעיף הקודם יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון עם שיעור x חיובי.

ii. הוכח כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x וקבע את סוגה.

ד. מצא את a אם ידוע כי הפונקציה עולה בתחום: $x > 4$.

(7) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (x+k)(\ln(x+k)-1)$, k פרמטר.

א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = \ln(x+k)$.

ב. הבע באמצעות k את:

i. נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ii. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. ידוע כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y . מצא את k .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. העזר בסקיצה של גרף הפונקציה והוכח כי אי-השוויון

הבא: $(x+k)(\ln(x+k)-1) \geq -1$ מתקיים עבור כל x .

(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = x(\ln x)^2$.

א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

i. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x$.

ii. הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .

ב. האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטות? נמק.

ג. נתון הישר: $y = 4x$. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר.

(9) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln \frac{x}{x+a}$, $a > 0$, פרמטר.

א. הבע באמצעות a את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

ג. נגזרת הפונקציה מקיימת: $f'(1) = 0.5$. מצא את a .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(10) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^2(x-a)$, $a > 0$, פרמטר.

א. הראה כי הנגזרת השנייה של הפונקציה היא: $f''(x) = [2 - 2\ln(x-a)] / (x-a)^2$.

ב. הבע באמצעות a את שיעורי הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.

ג. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.

ד. הבע באמצעות a את משוואת המשיק הנ"ל.

ה. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2e^{-1} - 1$. מצא את a .

(11) נתונה הפונקציה הבאה: $y = k \ln x - x^3$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$ הוא -26 .

א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ד. היעזר בסעיף הקודם והוכח את הטענות הבאות:

i. גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

ii. גרף הפונקציה שלילי בכל תחום הגדרתו.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln^2 x + 2\ln x = 0$.

ב. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה: $f(x) = x(\ln x)^3$

היא: $f'(x) = (\ln x)^3 + 3(\ln x)^2$.

ג. הוכח כי הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא: $f''(x) = \frac{3\ln^2 x + 6\ln x}{x}$.

ד. הראה כי אחת מהנקודות המקיימות $f''(x) = 0$ נמצאת על ציר ה- x .

13 ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln^2(10-x^2) - \sqrt{\ln(10-x^2)} = 0$

(רמז : סמן $t = \ln(10-x^2)$ ופתור עבור t).

ב. לפניך הפונקציות הבאות : $f(x) = \ln^2(10-x^2)$, $g(x) = \sqrt{\ln(10-x^2)}$

קבע אלו מהמשפטים הבאים נכונים לגבי הפונקציות ואלו לא.
נמק כל הסבר בחישוב מתאים.

i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון אחת הנמצאת על ציר ה- y .

iii. הגרפים של הפונקציות נחתכים ב-2 נקודות בלבד.

iv. הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותן הנקודות.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ על סמך מה שקבעת בסעיף ב'.

14 נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון כלל.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר : $y = k$. האם קיימים ערכי k עבורם הישר יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד? אם כן – מצא אותם.

15 נתונה הפונקציה : $y = \log_2(3x+1)$

א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

ג. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16 נתונה הפונקציה הבאה : $y = x^2 \log_{0.5}(x^2)$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(17) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \log_3(x^2 + ax + 9)$.

ידוע כי יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה אנכית: $x = -3$.

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. הישר $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

מצא את נקודות אלו.

(18) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x-2}$, $g(x) = 1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של כל פונקציה.

ב. הראה כי הגרפים של הפונקציות לא נחתכים באף נקודה.

ג. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

שלה עם ציר ה- y .

(19) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \log_4(x-2) - \log_{16}(x^2 - 4)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

ג. מעבירים ישר $y = -1$ החותך את גרף הפונקציה.

ד. מצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך.

(20) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{1}{\log_2(x-2)} + \frac{1}{\log_4 x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 4$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

תשובות סופיות:

- (1) א. $x > 0$ ב. $\min(e^3, -e^3)$ ג. $(e^4, 0)$
- (2) א. $0 < x \leq 1.5$ ב. $(1, 1)$ ג. $x = 0$
- (3) א. $1 < x < 3$ ב. $x = 1, 3$ ג. $(2, 0)$
- (4) א. i. $x \neq 0$ ii. לא. הנגזרת היא: $y' = \frac{2x}{x^2}$ והרי ש- $x \neq 0$ iii. $x = 0$
- iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$ v. $(1, 0)$, $(-1, 0)$ ב. $(e^2, 4)$, $(1, 0)$
- (5) א. $a = -1$ ב. $(1, 0)$
- ג. לגרף הפונקציה נקודת מינימום יחידה והיא: $(e, -1)$. לכן ערך הפונקציה המינימלי הוא -1.
- (6) א. i. $x > -a$ ii. $x = -a$ ב. $a < 0$
- ג. i. מתקבל: $x = 1 - a = 1 - (-) > 0$ ii. $\min(1 - a, 0)$ ד. $a = -3$
- (7) א. i. $(1 - k, -1)$ ii. $(0, k(\ln k - 1))$, $(e - k, 0)$, $(-k, 0)$ ג. $k = 1$
- (8) א. $x > 0$ ב. $(1, 0)$
- ג. לא. גרף הפונקציה שואף ל-0 בגבול שלו. ד. $(e^2, 4e^2)$, $(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2})$
- (9) א. i. $x > -a$, $x > 0$ ii. $x = 0, -a$
- ב. מתקבלת הנגזרת: $y' = \frac{a}{x(x+a)} > 0$ ג. $a = 1$
- (10) א. ב. $(a + e, 1)$ ג. $m = \frac{2}{e}$ ד. $y = \frac{2}{e}x - \frac{2a}{e} - 1$ ה. $a = 1$
- (11) א. $y = 3 \ln x - x^3$, $k = 3$ ב. $x > 0$ ג. $\max(1, -1)$
- ד. i. + ii. הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 1- ולכן גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה- x וכולו שלילי.
- (12) א. $x = 1, e^{-2}$
- (13) א. $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 2.7$
- ב. i. לא. עבור: $f(x)$ ת.ה. הוא: $-3.16 < x < 3.16$. עבור: $g(x)$ ת.ה. הוא: $-3 \leq x \leq 3$.
- ii. כן. עבור $f(x)$ הנקודה: $\max(0, 5.3)$. עבור $g(x)$ הנקודה: $\max(0, 1.5)$.
- iii. לא. מסעיף א' ניתן לראות כי הגרפים חותכים זה את זה ב-4 נקודות שונות.
- iv. כן. $(3, 0)$, $(-3, 0)$

14 א. $0 < x \leq 1, x \geq e^2$ ב. ניתן לראות כי:

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}}{2\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{2 \ln x - 2}{2x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} \rightarrow x \neq e$$

הפתרון נפסל עקב ת.ה. ולכן אין נקודות קיצון כלל.

ג. $(1, 0), (e^2, 0)$ ד. עולה: $x \geq e^2$ יורדת: $0 < x \leq 1$.

ו. לא. הגרף תמיד יחתך בשתי נקודות כאשר $k \geq 0$ ובאף נקודה כאשר $k < 0$.

15 א. $x > -\frac{1}{3}$ ב. מתקבל: $y' = \frac{3}{(3x+1)\ln 2} > 0$.

16 א. $x \neq 0$ ב. $\max(-0.606, 0.53), \max(0.606, 0.53)$.

ג. עולה: $0 < x < 0.606, x < -0.606$, יורדת: $-0.606 < x < 0, x > 0.606$.

17 א. $a = 6$ ב. $(-4, 0), (-2, 0)$ ג. $(24, 6), (-30, 6)$.

18 א. עבור $f(x)$: $x < 1, x > 2$, עבור $g(x)$: $x < 0, x > 2$.

ב. הנקודה המתקבלת ($x = 1.5$) אינה בתחום. ג. $y = \frac{1}{2 \ln 3}x + \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

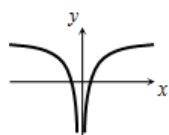
19 א. $x > 2$ ב. מתקבל: $y' = \frac{2}{(x^2 - 4)\ln 4} > 0$.

ג. $x = 2\frac{4}{15} \approx 2.266$.

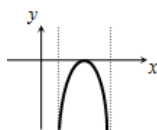
20 א. $x > 2, x \neq 3$ ב. $y = -\frac{5}{4 \ln 4}x + \frac{5 + \ln 16}{\ln 4}$.

ג. $\left(0, \frac{5 + \ln 16}{\ln 4}\right), \left(\frac{4(5 + \ln 16)}{5}, 0\right)$ ד. $S = \frac{2(5 + \ln 16)^2}{5 \ln 4}$.

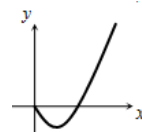
סקיצות לשאלות:



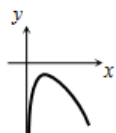
(4)



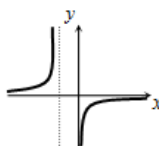
(3)



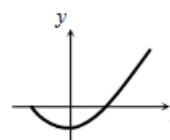
(1)



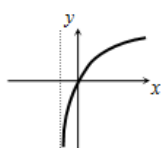
(11)



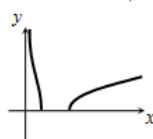
(9)



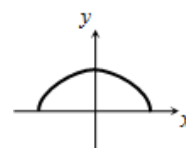
(7)



(15)



(14)



(13)

תוכן העניינים:

פרק 17.....	273
חשבון דיפרנציאלי – פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי	273
סיכום כללי :	273
הגדרות כלליות :	273
תכונות כלליות :	273
נגזרת של פונקצית חזקה :	274
שאלות יסודיות – חישובי נגזרות :	274
שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :	275
שאלות שונות העוסקות בחקירה :	276
תשובות סופיות :	279
תרגול נוסף :	281
תשובות סופיות :	284

פרק 17

חשבון דיפרנציאלי – פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

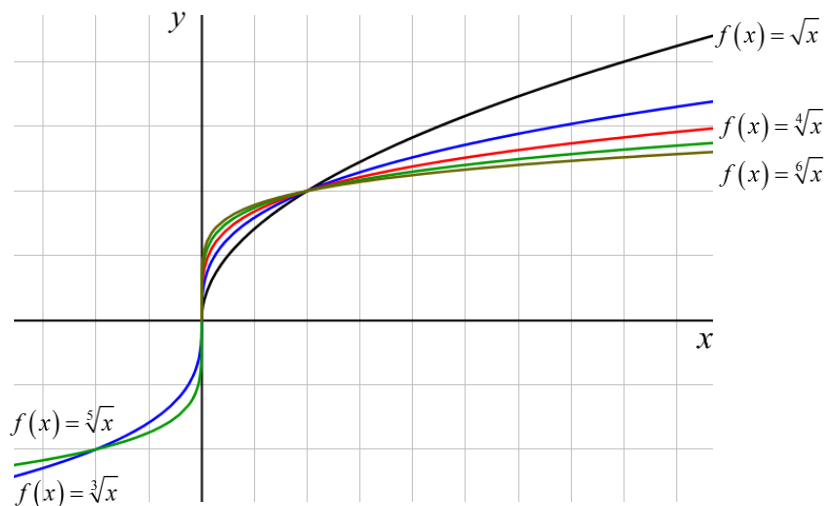
סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

הצורה הכללית של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי: $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$.

תזכורת: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$.

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה: $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.



תכונות כלליות:

1. פונקציית חזקה: $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור n אי-זוגי ומוגדרת לכל $x \geq 0$ עבור n זוגי.
2. הפונקציה: $f(x) = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור n אי-זוגי ולכל $x \geq -\frac{b}{a}$ עבור n זוגי.

נגזרת של פונקצית חזקה:

הפונקציה	הנגזרת
$y = x^{\frac{m}{n}}$	$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$
$y = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$	$y' = a \cdot \frac{m}{n} (ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$

שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

(1) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $y = \sqrt[4]{x}$ ב. $y = \sqrt[7]{x}$ ג. $y = \sqrt[3]{x+1}$ ד. $y = \sqrt[8]{2-3x}$
ה. $y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ ו. $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$ ז. $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{3x+7}}$ ח. $y = \frac{x^2-2x}{\sqrt[20]{(2x-4)^3}}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $y = 4x + \sqrt[4]{x}$ ב. $y = 27 - \sqrt[3]{x+1}$
ג. $y = (x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ ד. $y = (3-x^3) \cdot \sqrt[6]{x}$
ה. $y = \sqrt[3]{(3x+1)^5}$ ו. $y = \sqrt[10]{(8-7x)^7}$
ז. $y = (x^2-4) \cdot \sqrt[8]{(4x+3)^3}$ ח. $y = x^3 \cdot \sqrt[7]{1-x}$
ט. $y = \frac{6}{\sqrt[5]{x+2}}$ י. $y = \frac{2}{\sqrt[7]{(4-3x)^4}}$

(3) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ב. $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$
ג. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

(4) לפניך מספר פונקציות. מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:

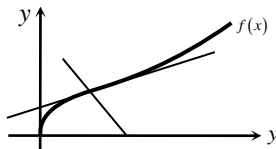
ב. $y = 2x + \sqrt[3]{3x-1}$; $x = 3$

א. $y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^4}}$; $x = 1$

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \sqrt[4]{6-x} - x$ בנקודה שבה: $x = -10$.

(6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = (2x+4) \cdot \sqrt[4]{x}$.

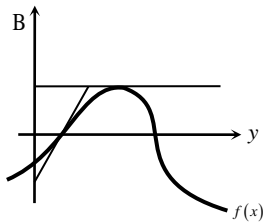
א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך $(1, 6)$.



ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודה $(1, 6)$.
ג. חשב את השטח הנוצר ע"י שני הישרים והצירים.

(7) באיור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה: $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{9-x}$.

א. מצא נקודה על הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא 0.



ב. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הקרובה יותר לראשית.
ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים שמצאת וציר ה- y .

(8) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt[4]{2x+7} - Ax^2$, A (פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 4.5$ הוא: $m = -\frac{1}{2}$.
מצא את A .

(9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1-x}}{Ax+B}$, (A, B) (פרמטרים). משוואת המשיק לגרף

הפונקציה דרך הנקודה: $x = 2$ היא: $45y = 2x - 19$. מצא את A ואת B .

שאלות שונות העוסקות בחקירה:

10) חקור את הפונקציה $f(x) = (x^2 - 36)\sqrt[4]{x}$ לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
- מציאת תחומי העלייה והירידה.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה.

11) חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt[5]{8x-2}}{x^2+1}$ לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
- מציאת תחומי העלייה והירידה.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה.

12) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = -f(x)$.
קבע לגבי כל טענה האם היא נכונה או שגויה. נמק.
- i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
- ii. שתי הפונקציות חותכות את הצירים באותן הנקודות.
- iii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

- 13** נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + k\sqrt[3]{x} + 8$, k פרמטר.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = -2.741$.
 א. מצא את ערך הפרמטר k , עגל למספר שלם.
 ב. הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת גם היא על ציר ה- x .
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ה. העזר בסקיצה וקבע כמה פתרונות יהיו למשוואה הבאה: $x^3 + 9\sqrt[3]{x} = 8$.

- 14** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = \sqrt[5]{2x+2.6}$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- x .
 ב. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
 כתוב מפורשות את הפונקציה $h(x)$ ואת תחום הגדרתה.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
 ה. מצא עבור אלו ערכים של k יחתוך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

- 15** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{5x^2 - 66x - 440}{\sqrt[6]{x}}$.
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית?
 ב. האם הפונקציה חותכת את הצירים בתחום: $[0:18]$? נמק ע"י חישוב.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ה. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)$ המקיימת: $g(x) = -f(x)$. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציה $g(x)$ קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו שגויות. נמק ע"י הסבר או חישוב מתאים.
 i. $g(x)$ חיובית בכל התחום $[0:18]$.
 ii. ל- $g(x)$ אותן נקודות קיצון (אותם שיעורים ואותו סוג) כמו $f(x)$.
 iii. ל- $g(x)$ אותו תחום הגדרה כמו ל- $f(x)$.

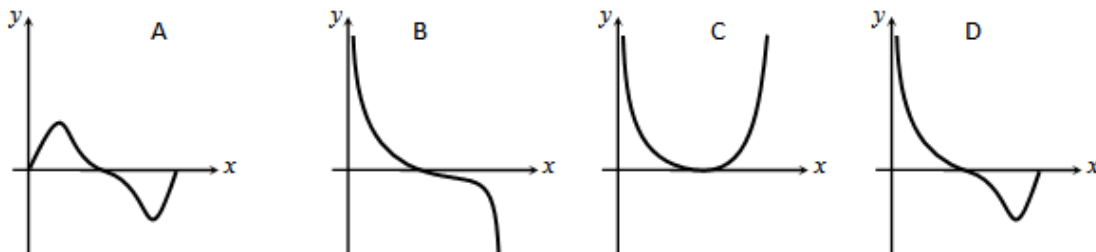
16 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים קבע כמה פתרונות יש למשוואה הבאה: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x} = k$ כאשר:

i. $k = -2$

ii. $k = 1$

ה. קבע איזה מבין הגרפים הבאים מתאר את הנגזרת של הפונקציה. נמק.



תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \geq 0 \quad \text{ב. כל } x \quad \text{ג. כל } x \quad \text{ד. } x \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{ה. } x > 0 \quad \text{ו. } x \neq 0 \quad \text{ז. } x \neq -\frac{7}{3} \quad \text{ח. } x > 2$$

$$(2) \quad \text{א. } y' = 4 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \quad \text{ב. } y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad \text{ג. } y' = \frac{(x+2)(7x+2)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{ד. } y' = \frac{3-19x^3}{6\sqrt[6]{x^5}} \quad \text{ה. } y' = 5\sqrt[3]{(3x+1)^2} \quad \text{ו. } y' = -\frac{49}{10\sqrt[10]{(8-7x)^3}}$$

$$\text{ז. } y' = \frac{9.5x^2 + 6x - 6}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}} \quad \text{ח. } y' = \frac{21x^2 - 22x^3}{7\sqrt[7]{(1-x)^6}} \quad \text{ט. } y' = -\frac{6}{5\sqrt[5]{(x+2)^6}}$$

$$\text{י. } y' = \frac{24}{7\sqrt[7]{(4-3x)^{11}}}$$

$$(3) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{2-5x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$(4) \quad \text{א. } -8 \quad \text{ב. } 2.25$$

$$(5) \quad y = -\frac{33}{32}x + 1\frac{11}{16} \leftarrow 33x + 32y - 54 = 0$$

$$(6) \quad \text{א. } y = 3.5x + 2.5 \quad \text{ב. } y = -\frac{2}{7}x + 6\frac{2}{7} \quad \text{ג. } 67.25 \text{ סמ"ר}$$

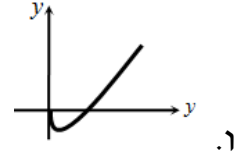
$$(7) \quad \text{א. } (7, 6\sqrt[3]{2}) \quad \text{ב. } y = 6\sqrt[3]{2} \quad \text{ג. } y = 2x - 2 \quad \text{ד. } 22.84 \text{ סמ"ר}$$

$$(8) \quad A = \frac{1}{16}$$

$$(9) \quad A = B = 1$$

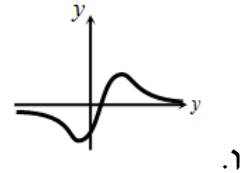
10 א. $x \geq 0$ ב. $(0,0)$, $(6,0)$ ג. $\min(2,-38)$

ד. יורדת: $0 < x < 2$, עולה: $x > 2$ ה. אין



11 א. כל x ב. $(0,-1.14)$, $(0.25,0)$ ג. $\max(0.5,0.91)$

ד. $\min\left(-\frac{2}{9}, -1.24\right)$ יורדת: $x > \frac{1}{2}$, $x < -\frac{2}{9}$, עולה: $-\frac{2}{9} < x < \frac{1}{2}$ ה. $y = 0$



12 א. $x \geq 0$ ב. $(0,-6)$, $(64,0)$ ג. הנגזרת: $f'(x) = \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}} > 0$ בת.ה.

ה. i. נכון ii. לא נכון, החיתוך עם ציר ה- y שונה ה. iii. לא נכון.

13 א. $k = -9$ ב. $\min(1,0)$, $\max(-1,16)$

ג. עולה: $x < -1$, $x > 1$ יורדת: $-1 < x < 1$ ה. 2.

14 א. $(-1.3,0)$, $(2,0)$ ב. $h(x) = (x-2)^2 \sqrt[5]{2x+2.6}$ כל x

ג. $\min(2,0)$, $\max(-1,8.126)$ ה. $0 < k < 8.126$

15 א. $x = 0$, $x > 0$ אסימפטוטה אנכית ב. לא

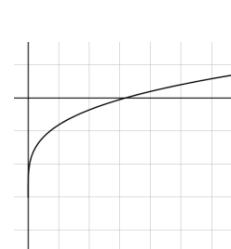
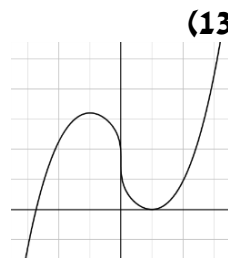
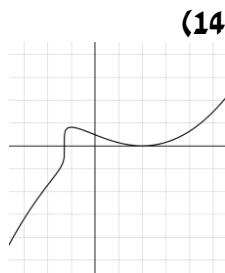
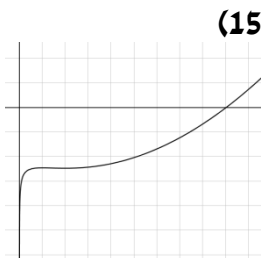
ג. $\min(4,-495.27)$, $\max(2,-491.77)$ ה. i. נכון ii. לא נכון ה. iii. נכון

16 א. $0 \leq x \leq 9$ ב. $\min(0,0)$, $\max(6,3.22)$ קצה, $\min(9,0)$ קצה

ג. עולה: $0 < x < 6$, יורדת: $6 < x < 9$

ד. i. $k = -2$ אין פתרון. ii. $k = 1$ שני פתרונות ה. B.

סקיצות לשאלות:



תרגול נוסף:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } y = \frac{4x - x^3}{\sqrt[5]{x^2}} \quad \text{ב. } y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

(2) לפניך מספר פונקציות. מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:

$$\text{א. } y = (x^2 - 81) \cdot \sqrt[4]{x}; x = 81 \quad \text{ב. } y = \frac{x+4}{\sqrt[3]{4x}}; x = 8$$

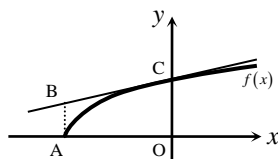
(3) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $y = (x^2 - 3x - 4) \cdot \sqrt[3]{x}$ בנקודה: $x = 1$.

(4) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{\sqrt[5]{2x}}{x^2 - 258.5}$ בנקודה שבה: $x = 16$.

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{6}{\sqrt[3]{x+x^3}}$ בנקודה שבה: $x = 1$.

(6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[4]{8x+16}$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .



א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מעלים אנך לציר ה- x מקצה תחום ההגדרה של הפונקציה כך שנוצר טרפז ישר זווית ABCO. חשב את שטחו.

(7) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 3 \cdot \sqrt[6]{x} - 2$.

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. קבע באלו תחומים מתקיים: $f(x) > g(x)$.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$

העובר דרך נקודת החיתוך הרחוקה יותר מהראשית מבין הנקודות שמצאת.

8 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt[3]{32-x}$, $g(x) = \sqrt[3]{32+x}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות.
- ב. כתוב את משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות העוברים דרך נקודת החיתוך.
- ג. חשב את שטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- x .

9 לפיך מספר פונקציות. מצא את שיעורי הנקודה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא המצוין לידה:

- א. $f(x) = \sqrt[3]{5x-1}$; $m=15$
- ב. $f(x) = \frac{6}{\sqrt[6]{x}}$; $m = -\frac{1}{128}$
- ג. $f(x) = \sqrt[5]{2x} + \frac{x}{40}$; $m = \frac{1}{20}$
- ד. $f(x) = \frac{x^2+27x}{\sqrt{x}}$; $m=15$

10 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.
מצא את משוואת המשיק המקביל לישר: $y = 3x$.

11 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$.
מצא את משוואת המשיק המאונך לישר: $2y + x = 4$.

12 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = (x+A) \cdot \sqrt[3]{3x}$, A (פרמטר).
ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=9$ הוא: $m=6$.
מצא את A .

13 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{Ax+B}{\sqrt[3]{x}}$, (A, B) פרמטרים. משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה: $x=1$ היא: $3y-x=14$. מצא את A ואת B .

14 לפיך מספר פונקציות. מצא את נקודות הקיצון הפנימיות שלהן וקבע את סוגן.

- א. $f(x) = x \cdot \sqrt[4]{2x+8}$
- ב. $f(x) = -\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 2$
- ג. $f(x) = \frac{x+6}{\sqrt[3]{x}}$
- ד. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{7-x}}{x-11}$

15 מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציות הבאות :

א. $f(x) = x^2 - 128\sqrt{x}$ ב. $f(x) = (x^2 - 25) \cdot \sqrt[6]{x+4}$

ג. $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2}{x}$ ד. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[3]{x+8}}$

16 חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

1. תחום הגדרה.
2. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
3. מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
4. מציאת תחומי העלייה והירידה.
5. מציאת אסימפטוטות אנכיות.
6. סרטוט סקיצה.

א. $f(x) = \sqrt[4]{6-x}$ ב. $f(x) = (x+12)\sqrt[5]{x}$

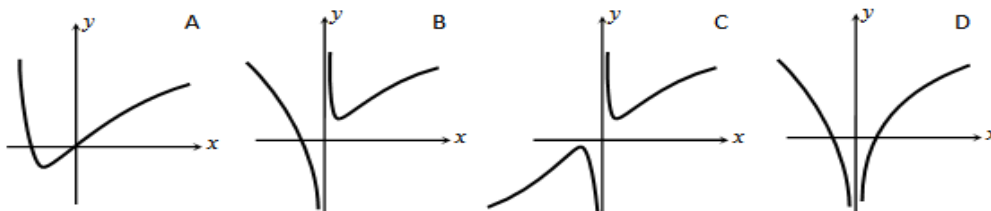
ג. $f(x) = (x+5)\sqrt[3]{1-3x}$ ד. $f(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{2x+3}}$

ה. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 10 + \frac{9}{\sqrt[3]{x}}$ ו. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{6-3x}}{x^2-4}$

ז. $f(x) = \frac{x+9}{\sqrt[4]{x+6}}$ ח. $f(x) = \frac{x^2-16}{\sqrt[3]{7-x}}$

17 נתונה הפונקציה : $f(x) = (x+1) \cdot \sqrt[7]{x^4}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. לפניך 4 סרטוטים. קבע איזה סרטוט מתאר את גרף הנגזרת של הפונקציה. נמק את בחירתך.



תשובות סופיות:

- (1) א. $y' = \frac{12x-13x^3}{5\sqrt{x^7}}$ ב. $y' = \frac{4x\sqrt{x}+x+6\sqrt{x}+3}{6\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^4}}$
- (2) א. 546 ב. 0.35
- (3) $y = -3x - 3$
- (4) $y = -10.25x + 163.2$
- (5) $y = -5x + 8$
- (6) א. $y = 0.25x + 2$ ב. 3.5 סמ"ר
- (7) א. (1,1) , (64,4) ב. $x < 1$, $x > 64$ ג. $y = \frac{1}{64}x + 3$
- (8) א. (0,2) ב. $y = -\frac{1}{80}x + 2$, $y = \frac{1}{80}x + 2$ ג. 320 סמ"ר
- (9) א. $\left(\frac{28}{135}, \frac{1}{3}\right)$ ב. (64,3) ג. (16,2.4) ד. (1,28) , (81,972)
- (10) $y = 3x + 3\frac{2}{9}$
- (11) $y = 2x - 3\frac{3}{8}$
- (12) $A = 18$
- (13) $B = 3$, $A = 2$
- (14) א. $\min(-3.2, -3.59)$ ב. $\max(1,3)$ ג. $\min(3,6.24)$ ד. $\min\left(6, -\frac{1}{5}\right)$
- (15) א. (0,0) , (16,0) ב. (0,-31.5) , (-4,0) , (5,0) ג. (1,0) , (0,2) ד. (0,2)
- (16) התשובות לפי סעיפים:
- א. 1. $x \leq 6$ 2. (0,1.56) , (6,0) 3. $\min(6,0)$ קצה 4. יורדת בכל ת.ה.
5. אין
- ב. 1. כל x 2. (0,0) , (-12,0) 3. $\min(-2, -11.48)$
4. יורדת: $x < -2$, עולה: $x > -2$ 5. אין
- ג. כל x 2. (0,5) , (-5,0) , $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 3. $\max(-1, 6.35)$
4. יורדת: $x > -1$, עולה: $x < -1$ 5. אין

ד. 1. $x > -1.5$ 2. $(0, 3.03)$ 3. אין 4. יורדת בכל ת.ה.

5. $y = 0, x = -1.5$

ה. 1. $x \neq 0$ 2. $(-1, 0), (-729, 0)$ 3. $\min(27, 16), \max(-27, 4)$

4. יורדת: $-27 < x < 27$, עולה: $x < -27, x > 27$ 5. $x = 0$

ו. 1. $x \neq \pm 2$ 2. $(0, -0.357)$ 3. $\max\left(\frac{2}{9}, -0.353\right)$

4. יורדת: $x > \frac{2}{9}, x \neq 2$, עולה: $x < \frac{2}{9}, x \neq -2$ 5. $y = 0, x \neq \pm 2$

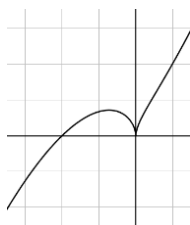
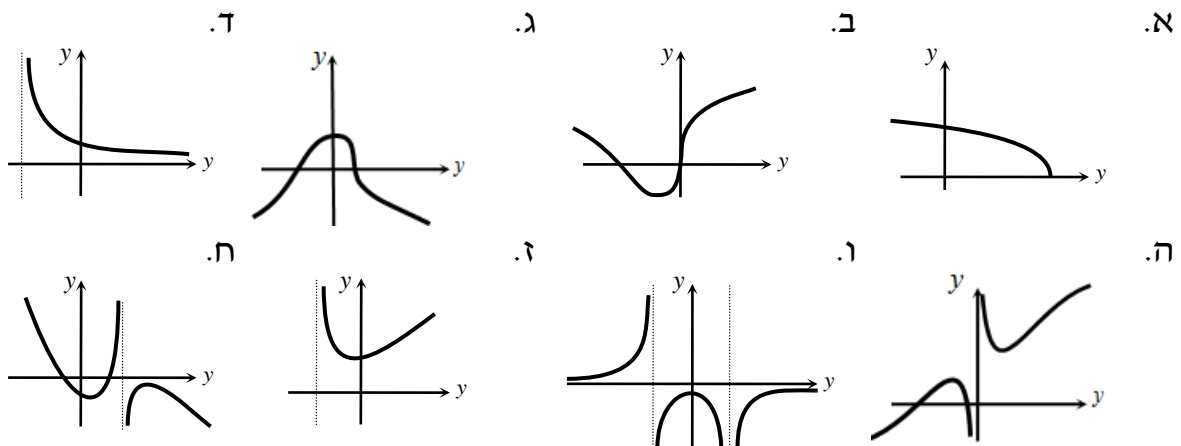
ז. 1. $x > -6$ 2. $(0, 5.75)$ 3. $\min(-5, 4)$

4. יורדת: $-6 < x < -5$, עולה: $x > -5$ 5. $x = -6$

ח. 1. $x \neq 7$ 2. $(4, 0), (-4, 0)$ 3. $\min(0.4, -8.44), \max(8, -48)$

4. יורדת: $x < 0.4, x > 8$, עולה: $0.4 < x < 28$ 5. $x = 7$

סקיצות לסעיפים א'-ח':



17) א. כל x ב. $(0, 0), (-1, 0)$ ג. $\max\left(-\frac{4}{11}, 0.356\right)$ ה.

תוכן העניינים:

287	פרק 18.....
287	חשבון אינטגרלי.....
287	פונקציות מעריכיות :
287	שאלות יסודיות – אינטגרל כללי :
288	שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים :
288	חישובי שטחים :
291	חישובי נפחים :
292	תרגול נוסף :
298	תשובות סופיות :
301	פונקציות לוגריתמיות :
301	שאלות יסודיות – אינטגרל כללי :
301	שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים :
302	חישובי שטחים :
305	חישובי נפחים :
306	תרגול נוסף :
310	תשובות סופיות :
312	פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי :
312	שאלות יסודיות – אינטגרל של פונקצית חזקה :
313	שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים :
313	חישובי שטחים :
316	תרגול נוסף :
319	תשובות סופיות :

פרק 18

חשבון אינטגרלי

פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

שאלות יסודיות – אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx \\ \text{ב.} & \int (3^x + 5^{2x}) dx \\ \text{ג.} & \int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx \\ \text{ד.} & \int (e^x + e^{-x})^2 dx \end{array}$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx \\ \text{ב.} & \int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx \end{array}$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \\ \text{ב.} & \int (e^{x+1})^2 dx \\ \text{ג.} & \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \\ \text{ד.} & \int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \end{array}$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}} \right) dx$ ב. $\int \left(\frac{3 - e^x}{(e^x - 3x)^2} \right) dx$ ג. $\int (xe^{x^2}) dx$

שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים:

(5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\ln 2, 3\frac{1}{4} \right)$.

(6) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

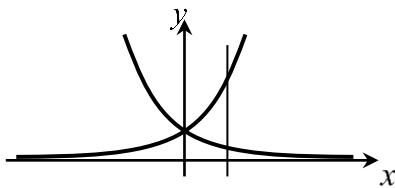
(7) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 6x^2 e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1, \frac{2}{e} \right)$.

חישובי שטחים:

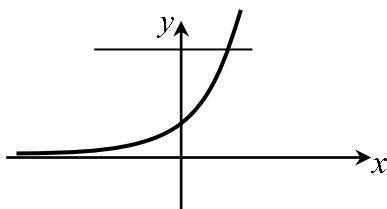
(8) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

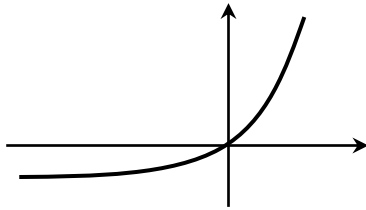
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \ln 3$.



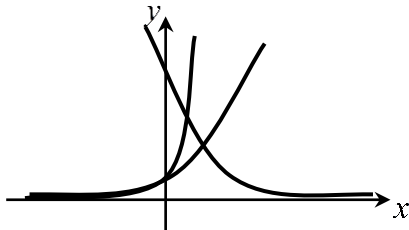
(9) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^x$.

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $y = 9$ וציר ה- y .

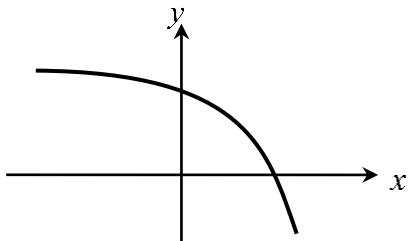




- (10) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - e^x$.
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x = 2$.



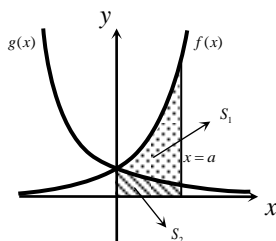
- (11) נתונות הפונקציות:
 $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 16e^{-x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש
הפונקציות.



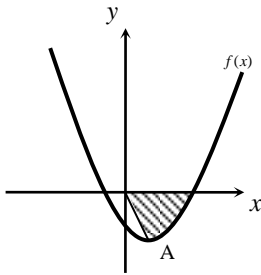
- (12) נתונה הפונקציה: $f(x) = 5 - e^x$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

- (13) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{bx}$, $(0 < b)$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$. מצא את ערכו של הפרמטר b .

- (14) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $g(x) = e^{-x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת
החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x כך שנוצר מלבן.
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



- (15) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x = a$, $a > 0$.
כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
מצא את a .



16 נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$.

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

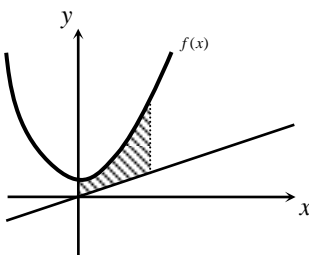
ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה

A עם הראשית.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



17 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

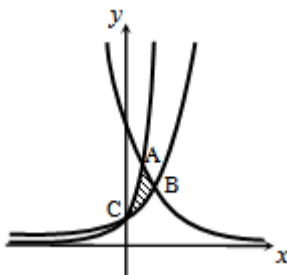
ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2}\right)$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$

והישר: $y = 0.1x$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר,

ציר y והאנך: $x = 2$.



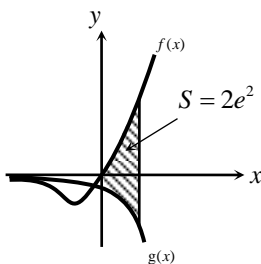
18 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות:

$$h(x) = 2^{4-2x} \quad \text{II} \quad g(x) = 4^x \quad \text{II} \quad f(x) = 2^x \quad \text{I}$$

א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).

ג. חשב את השטח המסומן באיור.



19 ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

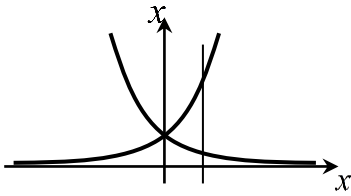
מעבירים ישר $x = a$ ($a > 0$), החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- a והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את a .

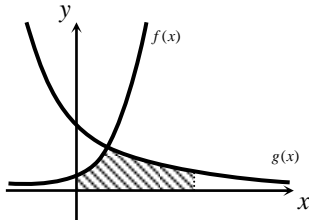
חישובי נפחים:



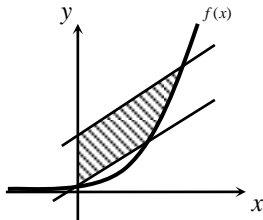
(20) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.
 השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x = \ln 2$
 מסתובב סביב ציר ה- x .
 חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

תרגול נוסף:

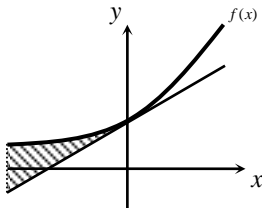
- (21) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x-1}$.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר $x = 2$ והצירים.



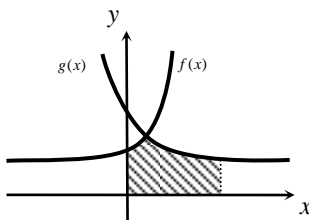
- (22) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = e^x$ ו- $g(x) = ke^{-x} + 2$ ידוע כי הגרפים חותכים זה את זה בנקודה שבה $x = \ln 3$.
א. מצא את k .
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות, הצירים והישר: $x = \ln 4$.



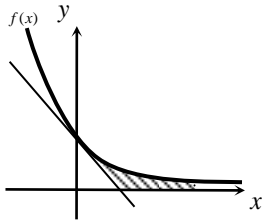
- (23) באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x) = e^x$.
מעבירים ישר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y ודרך הנקודה שבה $x = 1$.
א. מצא את משוואת הישר.
מעבירים ישר נוסף המקביל לישר שמצאת קודם וחותך את ציר ה- y בנקודה: $y = 3$.
ב. מצא את משוואת הישר השני.
ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הישרים, ציר ה- y וגרף הפונקציה אם ידוע כי הישר השני חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1.8$.



- (24) ענה על הסעיפים הבאים:
א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:
 $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- y .
ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x)$ והמשיק. חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר: $x = -3$.

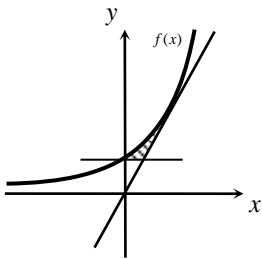


- (25) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = e^{ax-1} + 2$ ו- $g(x) = e^{1-ax} + 2$.
ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = \frac{1}{3}$.
א. מצא את a וכתוב את הפונקציות.
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- x והישר $x = 2$.



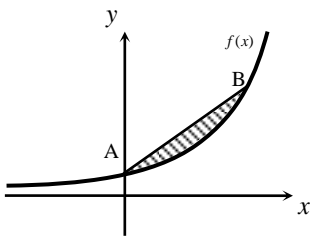
(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{-2x} + 1$.

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר: $x = 3$.



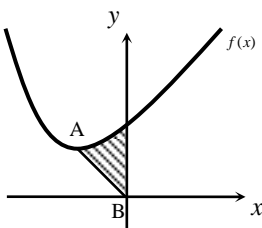
(27) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{x+2}$.

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ ומעבירים ישר המקביל לציר ה- x ויוצא מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- כתוב את משוואת המשיק והראה כי הוא עובר דרך ראשית הצירים.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



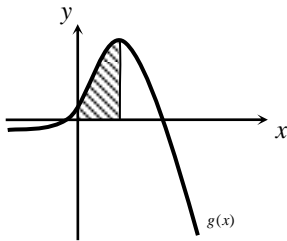
(28) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - x + 1$.

- הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה ובה $x_B = 1$.
- מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.
- חשב את השטח הכלוא בין הישר AB וגרף הפונקציה.



(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x+2} - 2x - 1$.

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה B נמצאת בראשית הצירים.
- מצא את שיעורי הנקודה A.
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר AB וציר ה- y .



30 נתונה הפונקציה: $f(x) = (a-x)e^x$.

א. הוכח כי: $f'(x) = (a-1-x)e^x$.

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$

בנקודה שבה $x=3$ הוא אפס. מצא את a .

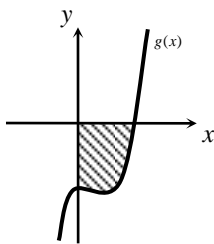
ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:

$$f(x) = (3-x)e^x$$

מורידים אנך לציר ה- x מנקודת הקיצון של

הפונקציה. חשב את השטח המוגבל בין גרף

הפונקציה $g(x)$, הצירים והאנך.



31 נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^2-2x+k}$.

ידוע ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=3$

הוא $4e^3$.

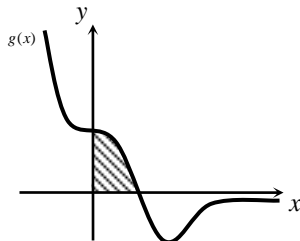
א. כתוב את נגזרת הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:

$$g(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$$

מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$

והצירים.



32 נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot e^{-9x^3}$.

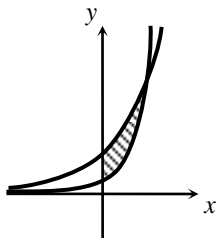
א. הוכח: $f'(x) = (1-27x^3)e^{-9x^3}$.

ב. באיור שלפניך נתונה הפונקציה:

$$g(x) = (1-27x^3)e^{-9x^3}$$

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והצירים.



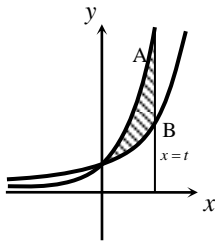
33 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 9^x \text{ ו- } g(x) = 9 \cdot 3^x$$

א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

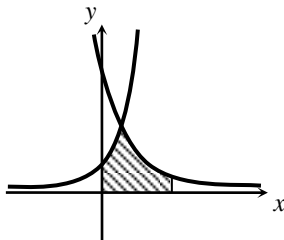
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים וציר

ה- y .

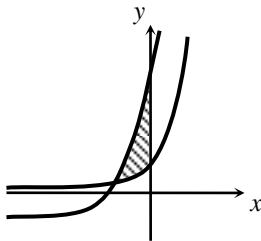


- 34** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = 2^x$ ו- $g(x) = 4^x - 1$. ישר $x=t$ חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור. ידוע כי אורך הקטע AB הוא 240.
 א. מצא את t .
 ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה- y .

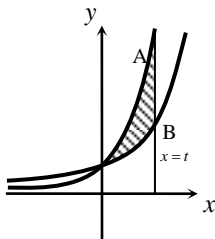
ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.



- 35** נתונות הפונקציות: $f(x) = 2^x$ ו- $g(x) = 4^{k-x} - 1$. ידוע כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=4$.
 א. מצא את k .
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, הישר $x=8$ וציר ה- x .

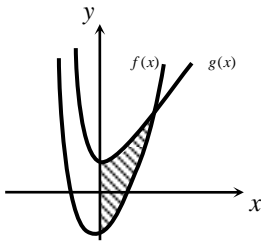


- 36** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = 3^{x+2}$ ו- $g(x) = 3^{x+5} - 26$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- y .
 ג. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- y .



- 37** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = 3^x$ ו- $g(x) = 9^x - 1$. ישר $x=t$ ($t > 0$) חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור. ידוע כי אורך הקטע AB הוא 702.
 א. מצא את t .
 ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה- y .

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.



(38) באיור שלפניך נתונות הפונקציות :

$$f(x) = e^{2x} + x^2 + k \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2e^x + x^2 - 1$$

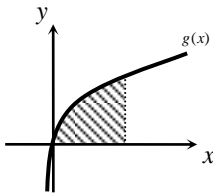
ידוע כי המרחק בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- y הוא 4.

א. מצא את k .

ב. מצא את נקודת החיתוך שבין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של

שתי הפונקציות וציר ה- y .



(39) ענה על הסעיפים הבאים :

א. גזור את הפונקציה הבאה : $f(x) = -(x+1)e^{-x}$.

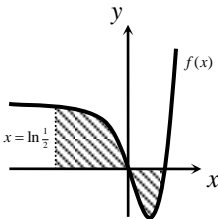
נתונה הפונקציה : $g(x) = xe^{-x} + kx$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 1.

ב. מצא את k וכתוב את הפונקציה.

ג. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח המוגבל בין

גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=2$.



(40) ענה על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. חשב את האינטגרל : } \int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 4} (e^{2x} - 5e^x + 4) dx$$

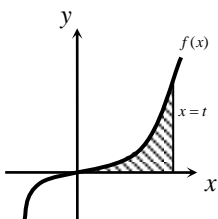
באיור שלפניך מתואר גרף

$$f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$$

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = \ln 0.5$ (המקווקו).

ג. הסבר מדוע התוצאות שקיבלת בסעיפים א' וב' שונות.



(41) נתונה הפונקציה : $f(x) = e^x - e^{-x}$.

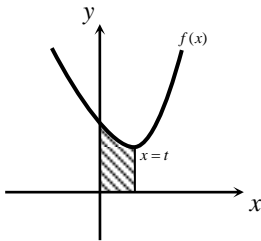
א. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים ישר $x=t$, $(t > 0)$ המאונך לציר ה- x

וחותך את גרף הפונקציה.

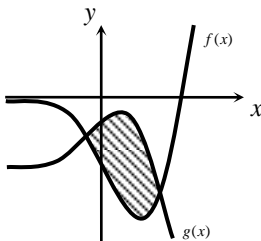
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך הוא : $S = 1\frac{1}{3}$. מצא את t .



(42) נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} + 16e^{-2x}$.

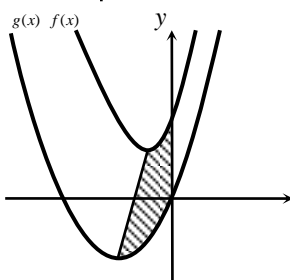
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- מעבירים ישר $x=t$, $(t > 0)$ כמתואר באיור. ידוע כי השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה והצירים הוא: $S = 7.5$. הוכח כי ישר זה יוצא מנקודת הקיצון שמצאת בסעיף א'.



(43) באיור שלפניך נתונות הפונקציות:

$$f(x) = 2e^{2x} - 7e^x \text{ ו- } g(x) = 3e^x - e^{2x} - 3$$

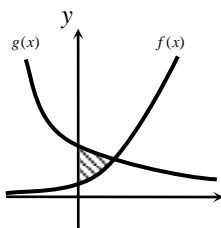
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים.



(44) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 4e^{2x} + e^{-x} \text{ ו- } g(x) = x^2 + 2x$$

- מצא את נקודות הקיצון של כל פונקציה וקבע את סוגן.
- מעבירים ישר המחבר את נקודות הקיצון של שני הגרפים כמתואר באיור. כתוב את משוואת הישר הנ"ל (עגל תוצאות למספרים שלמים).
- חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- y והישר הנ"ל.



(45) ענה על הסעיפים הבאים:

$$9 \cdot 3^x = \frac{243}{9^x} \text{ א. פתור את המשוואה הבאה:}$$

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

$$g(x) = 3^{x+2} \text{ ו- } g(x) = 3^{5-2x}$$

הוכח כי השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר

$$\text{ה-} y \text{ שווה ל-} \frac{90}{\ln 3}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$.ב. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5}$.ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$.ד. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2) א. $e^x + x + c$.ב. $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
- (3) א. $\frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c$.ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2} + c$
- (4) א. $2\sqrt{e^x + 3} + c$.ב. $\frac{1}{e^x - 3x}$.ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4} + \frac{3.2^x}{\ln 3.2} + \frac{200^x}{\ln 200} + c$.ד. $8\sqrt{e^x} - \frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}}$
- (5) $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (6) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7) $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
- (8) $S = \text{יח"ש} 1\frac{1}{3}$
- (9) $S = \text{יח"ש} 10.72$
- (10) $S = \text{יח"ש} 18.41$
- (11) $S = \text{יח"ש} 3\frac{1}{3}$
- (12) $S = \text{יח"ש} 0.192$
- (13) $b = 2$
- (15) $a = \ln 2$
- (16) א. $A(1, -e - 2)$.ב. $y = -(e + 2)x$.ג. $S = \text{יח"ש} 4.744$
- (17) א. $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$, $a = -2$.ב. 1.52
- (18) א. $A(1, 4)$, $B(1\frac{1}{3}, 2.52)$, $C(0, 1)$.ב. $S = \text{יח"ש} 1.03$
- (19) א. $y' = xe^x$.ב. $a = 2$
- (20) $S = \text{יח"ש} 1\frac{1}{8}\pi$

$$S = \frac{e^4 - 1}{2e} \quad (21)$$

$$S = 2.825 \text{ יח"ש} \quad \text{ב.} \quad k = 3 \quad \text{א.} \quad (22)$$

$$S \sim 3 \text{ יח"ש} \quad \text{ג.} \quad y = (e-1)x + 3 \quad \text{ב.} \quad y = (e-1)x + 1 \quad \text{א.} \quad (23)$$

$$S = 2.45 \text{ יח"ש} \quad \text{ב.} \quad y = x + 1 \quad \text{א.} \quad (24)$$

$$S \sim 4.54 \text{ יח"ש} \quad \text{ב.} \quad g(x) = e^{1-3x} + 2, \quad f(x) = e^{3x-1} + 2, \quad a = 3 \quad \text{א.} \quad (25)$$

$$S \sim 2.5 \text{ יח"ש} \quad \text{ג.} \quad (1, 0) \quad \text{ב.} \quad y = -2x + 2 \quad \text{א.} \quad (26)$$

$$S = \frac{e^3 - 2e^2 - e}{2} \sim 1.3 \quad \text{ב.} \quad y = e^3 x \quad \text{א.} \quad (27)$$

$$S = 1.5 - \frac{e}{2} \approx 0.14 \quad \text{ב.} \quad y = (e-2)x + 2 \quad \text{א.} \quad (28)$$

$$S = 3.433 \text{ יח"ש} \quad \text{ג.} \quad y = \frac{5 - \ln 4}{\ln 2 - 2} x \sim y = -2.76x \quad \text{ב.} \quad A(\ln 2 - 2, 5 - \ln 4) \quad \text{א.} \quad (29)$$

$$S = 2e^2 - 4 \approx 10.78 \text{ יח"ש} \quad \text{ג.} \quad a = 4 \quad \text{ב.} \quad (30)$$

$$S = \frac{e-1}{e} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x} \quad \text{א.} \quad (31)$$

$$S = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \quad \text{ב.} \quad (32)$$

$$S = \frac{32}{\ln 3} \quad \text{ב.} \quad (2, 81) \quad \text{א.} \quad (33)$$

$$S = \frac{225}{\ln 4} \quad \text{ג.} \quad t = 4 \quad \text{א.} \quad (34)$$

$$S = \frac{735}{32 \ln 2} \quad \text{ב.} \quad k = 6 \quad \text{א.} \quad (35)$$

$$S = 52 \cdot \frac{4 - \ln 3}{\ln 3} \text{ יח"ש} \quad \text{ג.} \quad (0, 9), (0, 217) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1) \quad \text{א.} \quad (36)$$

$$S = \frac{338}{\ln 3} \text{ יח"ש} \quad \text{ג.} \quad t = 3 \quad \text{א.} \quad (37)$$

$$S = \ln 27 \text{ יח"ש} \quad \text{ג.} \quad (\ln 3, 7.2) \quad \text{ב.} \quad k = -3 \quad \text{א.} \quad (38)$$

$$S = 3 - \frac{3}{e^2} \text{ יח"ש} \quad \text{ג.} \quad k = 1, \quad g(x) = xe^{-x} + x \quad \text{ב.} \quad f'(x) = xe^{-x} \quad \text{א.} \quad (39)$$

$$S \sim 2.6 \quad \text{ב.} \quad 4 \ln 8 - 9 \frac{5}{8} \approx 1.3 \quad \text{א.} \quad (40)$$

ג. בסעיף א' חושב ערך האינטגרל בלבד. בסעיף ב' ניתן לראות כי חלקו שלילי ולכן יש לפצל אותו כדי לקבל ערך מקסימלי.

ב. $t = \ln 3$ (41)

נ. $(\ln 2, 8)$ (42)

ב. $S = 13\frac{1}{3} - 2\ln 27 \sim 6.74$ נ. $(\ln 3, -3)$, $\left(\ln \frac{1}{3}, -2\frac{1}{9}\right)$ (43)

ג. $S \sim 3.46$ יח"ש \sim ב. $y = 13x + 12$ נ. $\min(-1, -1)$, $\min\left(\ln \frac{1}{2}, 3\right)$ (44)

נ. $x = 1$ (45)

פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

שאלות יסודיות – אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x} dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9} dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx$ ב. $\int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2} dx$ ג. $\int \frac{x^4+3}{x+1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{2x}{x^2-3} dx$ ב. $\int \frac{x-1}{x^2-2x} dx$ ג. $\int \frac{e^x}{e^x+5} dx$
 ד. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ ה. $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים:

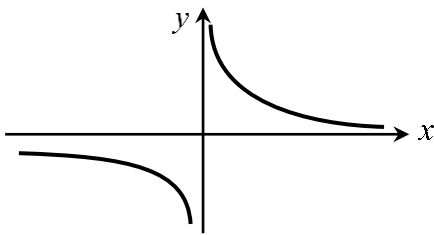
(4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5,28).

(5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם

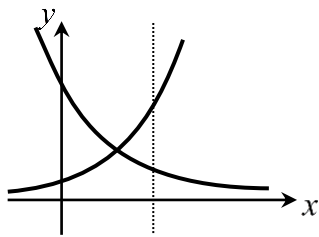
ידוע שהיא עוברת בנקודה (1,-2) וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

חישובי שטחים:



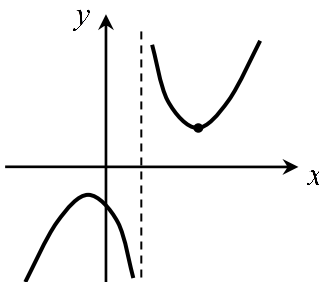
(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר \ln בתשובה.



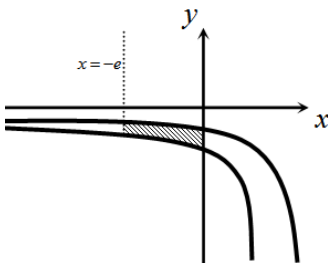
(7) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $g(x) = \frac{4}{8-x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x = 4$ והצירים.



(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה. אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.



(9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x-1}$.

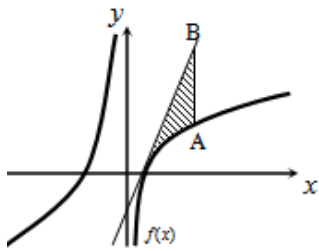
ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של

שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

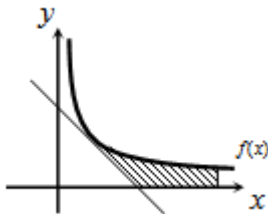


10 נתונה הפונקציה: $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא: $y = 18x - 9$.
א. מצא את a ו- b וכתוב את הפונקציה.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

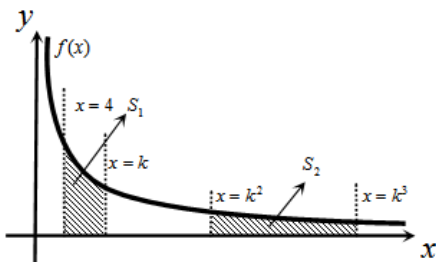


11 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$ היא: $y = 4 - x$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

- ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק בתחום: $x > 0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.



12 באיור שלפניך נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{בתחום: } x > 0$$

מעבירים את הישרים: $x = k^2$, $x = k^3$,

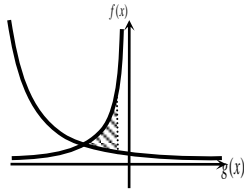
$x = k$, $x = 4$ כמתואר $x > 4$.

א. הבע באמצעות k את

השטחים: S_1 ו- S_2 .

ב. הראה כי ההפרש: $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצא את k .



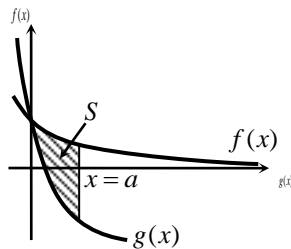
13 נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



14 באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1) \text{ ו- } g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$$

בתחום: $(x \geq 0)$.

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

ב. מעבירים ישר $x = a$, $(a > 1)$ המאונך

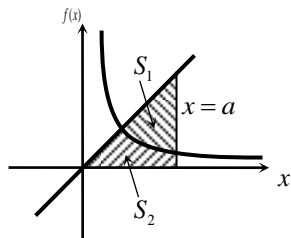
לציר ה- x אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצא את ערכו של a עבורו מתקיים: $S = 4$.

15 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר: $y = x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.



מעבירים אנך לציר ה- x - $x = a$ הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים

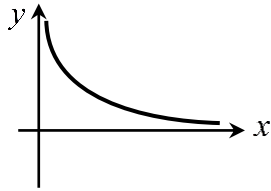
S_1 ו- S_2 המתוארים באיור.

ב. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2

$$\text{יהיה שווה ל- } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$$

ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

חישובי נפחים:



16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו- $x=3$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה. אפשר להשאיר \ln בתשובה.

17 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x = \ln \sqrt{3}$ מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

18 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו- $x=a+3$ ($a > 0$), וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן זה.

תרגול נוסף:

19 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 8x - \frac{k}{x}$.

ידוע כי יש לפונקציה נקודת מינימום $(1,1)$.

א. מצא את k ואת הפונקציה $f(x)$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? נמק את תשובתך.

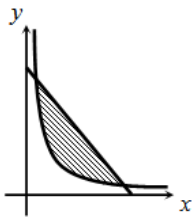
20 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x+a}{x}$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 6.

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=e$.

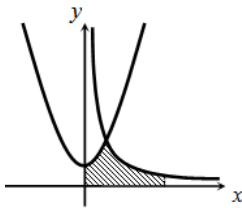


21 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{10}{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = -x + 7.$$

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.



22 באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x}$.

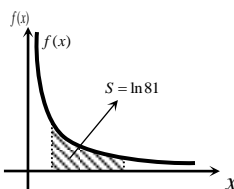
ו- $g(x) = x^2 + 2$. ידוע כי הגרפים נחתכים בנקודה

שבה $x=2$.

א. מצא את a .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים,

הצירים והישר $x=e^2$.

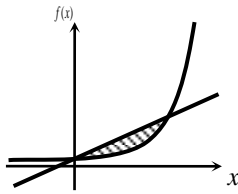


23 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$.

ידוע כי השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x

והישרים: $x=4$ ו- $x=4+t$ הוא $\ln 81$.

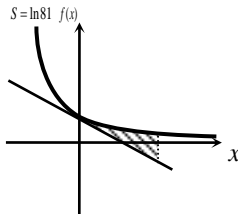
מצא את t .



24) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{4e-x}$

והישר: $g(x) = \frac{3}{4e^2}x + \frac{3}{4e}$

- א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות.

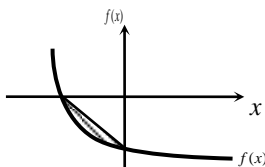


25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{ax+5}$, פרמטר a .

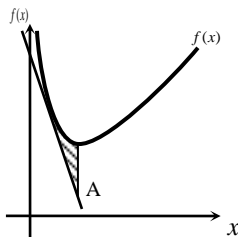
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא -0.12 .

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
ב. כתוב את משוואת המשיק.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר $x=2$.

26) גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x+5} - m$, פרמטר m , חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = -4$.



- א. מצא את ערך הפרמטר m .
ב. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר שמצאת בסעיף הקודם.

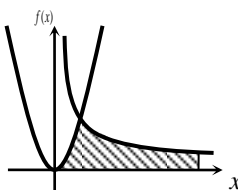


27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x} + x + 5$, בתחום: $x > 0$.

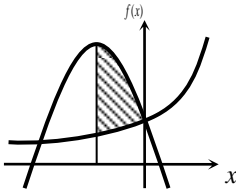
- א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- y מנקודת המינימום של הפונקציה.
הישר חותך את משוואת המשיק בנקודה A .
ב. מצא את שיעורי הנקודה A .
ג. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק והישר.

28) באיור שלפניך נתונות הפונקציות:

$f(x) = 3x^2$ ו- $g(x) = \frac{3}{x}$



- א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- x והישר: $x = e^3$.



(29) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6}{6-x}$

בתחום: $x < 0$.

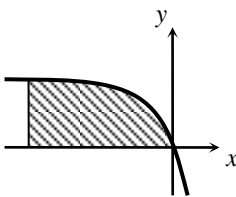
מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר

ה- y מעבירים את הפרבולה: $g(x) = -x^2 - 4x + 1$.

א. מצא את נקודת הקדקוד של הפרבולה.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים ואנך

היוצא מנקודת הקדקוד של הפרבולה.



(30) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:

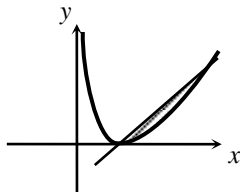
$$f(x) = \frac{8}{x-2} + k \quad \text{בתחום: } x < 0$$

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את הישר: $y = x + 4$

בנקודה שבה: $x = 4$.

א. מצא את k .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x = -6$.



(31) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$

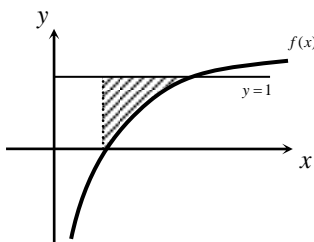
א. מצא את נקודת המינימום של הפונקציה.

מעבירים ישר דרך נקודת המינימום של הפונקציה

והנקודה שבה $x = 4$.

ב. מצא את משוואת הישר.

ג. חשב את השטח המוגבל בין הישר וגרף הפונקציה (העזר באיור).



(32) ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = 2x - x \ln x$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \ln x$.

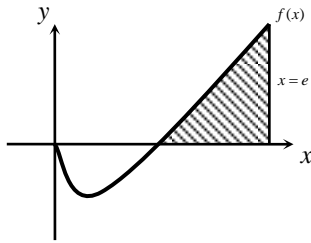
מעבירים ישר $y = 1$ החותך את גרף הפונקציה

בנקודה A.

מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x מעלים אנך לישר.

ב. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

האנך והישר.



33) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה :

$$y = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) \quad \text{היא : } y' = x \ln x$$

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה :

$f(x) = x \ln x$. מעלים את הישר $x = e$ המאונך

לציר ה- x החותך את גרף הפונקציה.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- x .

34) ענה על הסעיפים הבאים :

א. גזור את הפונקציה הבאה : $y = \frac{x^3}{3} + x - x \ln x$

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות :

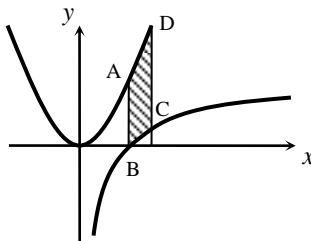
$f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = x^2 - 1$. מעבירים את הישרים

$x = 1$ ו- $x = 2$ המקבילים לציר ה- y .

ישרים אלו חותכים את הגרפים של הפונקציות

בנקודות A, B, C, D בהתאמה.

ב. חשב את השטח ABCD.



35) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה : $y = 2 \ln(x-2) + x \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$

$$\text{היא : } y' = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות : $f(x) = \ln x$

ו- $g(x) = \ln(x-2)$.

ב. קבע איזה מבין הגרפים I, II מתאר את $f(x)$ ואיזה את $g(x)$. נמק.

ג. מצא את נקודת החיתוך של כל גרף עם

ציר ה- x .

ד. מנקודת החיתוך הגדולה יותר שמצאת

בסעיף הקודם מעלים אנך לציר ה- x

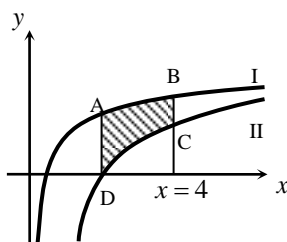
מהנקודה D, החותך את הגרף השני בנקודה

A (ראה איור). מעבירים אנך נוסף $x = 4$

החותך את הגרפים בנקודות B ו-C.

העזר בסעיף א' וחשב את השטח ABCD -

הכלוא בין שני הגרפים.



תשובות סופיות:

$$(1) \quad \ln|x-3|+c \quad \lambda \quad \frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c \quad \text{ב.} \quad 3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c \quad \text{א.}$$

$$(2) \quad \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c \quad \text{א.}$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c \quad \lambda$$

$$(3) \quad \ln|e^x+5|+c \quad \lambda \quad \frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c \quad \text{ב.} \quad \ln|x^2-3|+c \quad \text{א.}$$

$$\ln|\sin x|+c \quad \text{ה.} \quad \ln|e^x+e^{-x}|+c \quad \text{ז.}$$

$$(4) \quad f(x)=x^2-\ln|x-4|+3$$

$$(5) \quad f(x)=x^3+\ln|x|-x-2$$

$$(6) \quad S=\text{יח"ש} \ln 4$$

$$(7) \quad S=\text{יח"ש} 2.17$$

$$(8) \quad S=\text{יח"ש} 4\ln 2-2$$

$$(9) \quad \text{א.} \quad a=2, \quad g(x)=\frac{1}{x-2}, \quad f(x)=\frac{2}{x-1} \quad \text{ב.} \quad 1.76 \text{ יח"ש} \quad S$$

$$(10) \quad \text{א.} \quad a=2, \quad b=-4, \quad f(x)=7+2x-\frac{4}{x} \quad \text{ב.} \quad x=2$$

$$\lambda \quad 11.54 \text{ יח"ש} \approx 6+\ln 256 \quad S$$

$$(11) \quad \text{א.} \quad f(x)=\frac{4}{x} \quad \text{ב.} \quad 6-4\ln 2 \text{ יח"ש} \quad S$$

$$(12) \quad \text{א.} \quad S_2=2\ln k, \quad S_1=2\ln k-\ln 16, \quad S_2-S_1=\ln 16 \quad \text{ב.} \quad k=8 \quad \lambda$$

$$(13) \quad \text{א.} \quad g(x)=\frac{2}{2x+5} \quad \text{ב.} \quad (-2,2) \quad \lambda \quad \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \text{ יח"ש} \quad S$$

$$(14) \quad \text{ב.} \quad a=2$$

$$(15) \quad \text{א.} \quad (1,1) \quad \text{ב.} \quad a=5 \quad \lambda \quad \frac{S_1}{S_2}=5.955$$

$$(16) \quad V=\text{יח"נ} \pi \ln 3$$

$$(17) \quad V=\text{יח"נ} \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$(18) \quad V=\text{יח"נ} \pi \left(19\frac{1}{2}+4\ln 4 \right)$$

- (19) א. $k=8$, $f(x)=4x^2-8\ln x-3$ ב. $x>0$
ג. עולה: $x>1$, יורדת: $0<x<1$
ד. לא. הנקודה הנמוכה ביותר בתחום הגדרתה נמצאת מעל לציר ה- x ולכן גם כל גרף הפונקציה.
- (20) א. $a=-6$ ב. $(2,0)$ ג. $S=3e+\ln 64-12$ יח"ש
- (21) א. $(2,5)$, $(5,2)$ ב. $S=10.5+10(\ln 2-\ln 5)$ יח"ש
- (22) א. $a=12$ ב. $S=30\frac{2}{3}-12\ln 2$ יח"ש
- (23) $t=8$
- (24) א. $\left(0, \frac{3}{4e}\right), \left(3e, \frac{3}{e}\right)$ ב. $S=5\frac{5}{8}-\ln 64$ יח"ש
- (25) א. $a=3$, $f(x)=\frac{1}{3x+5}$ ב. $y=-0.12x+0.2$ ג. $S=0.1$ יח"ש
- (26) א. $m=2$ ב. $y=-\frac{2}{5}x-1\frac{3}{5}$ ג. $S=4.8-\ln 25 \approx 1.58$ יח"ש
- (27) א. $y=-3x+13$ ב. $(2,7)$ ג. $S=\ln 16-2 \approx 0.772$ יח"ש
- (28) א. $(1,3)$ ב. $S=10$ יח"ש
- (29) א. $(-2,5)$ ב. $S=7\frac{1}{3}-6(\ln 8-\ln 6) \approx 5.6$ יח"ש
- (30) א. $k=4$ ב. $S=24-16\ln 2$ יח"ש
- (31) א. $(2,0)$ ב. $y=\frac{1}{2}x-1$ ג. $S=3-\ln 16$ יח"ש
- (32) א. $y'=1-\ln x$ ב. $S=e-2$ יח"ש
- (33) ב. $S=\frac{e^2+1}{4}$
- (34) א. $y'=x^2-\ln x$ ב. $S=3\frac{1}{3}-\ln 4 \approx 1.94$ יח"ש
- (35) א. $f(x)=I$, $g(x)=II$ ב. $(1,0)$, $(3,0)$ ג. $S=3\ln \frac{4}{3} \approx 0.863$ יח"ש

פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרלים מיידיים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.

שאלות יסודיות – אינטגרל של פונקצית חזקה:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \int \sqrt[3]{x} dx & \text{ב. } \int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx & \text{ג. } \int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx \\
 \text{ד. } \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{ה. } \int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx & \text{ו. } \int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx \\
 \text{ז. } \int \sqrt[3]{2x-3} dx & \text{ח. } \int \sqrt[4]{5-x} dx & \text{ט. } \int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx \\
 \text{י. } \int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx & &
 \end{array}$$

(2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx & \text{ב. } \int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx & \text{ג. } \int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx
 \end{array}$$

שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים:

(3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצא את הפונקציה.

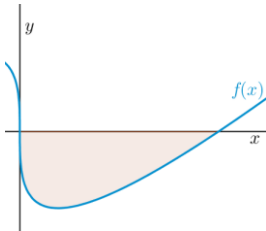
(4) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
מצא את הפונקציה.

(5) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
מצא את הפונקציה.

חישובי שטחים:

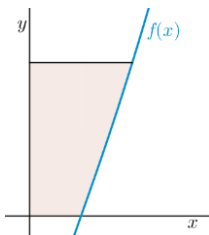


(6) באיור שלפניך מופיע גרף

הפונקציה: $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

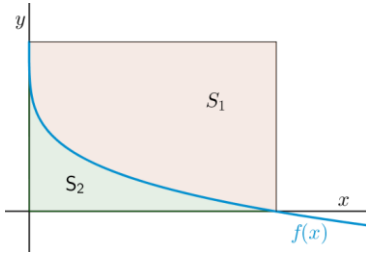


(7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

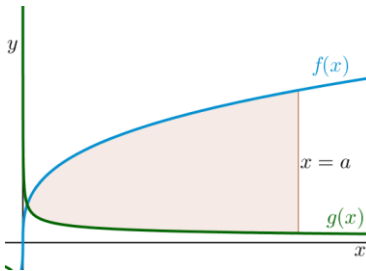
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

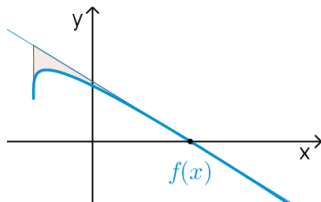
ג. מעבירים אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



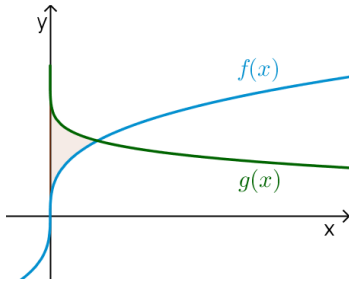
- (8) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:
 $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$. מעבירים אנכים לצירים
 מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים
 כך שנוצר מלבן. מסמנים את השטח שבין גרף
 הפונקציה והצירים:
 ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים
 ב- S_2 . מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.



- (9) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות
 הבאות: $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים
 בתחום: $x > 0$.
 ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x = a$,
 (פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין
 שני הגרפים מנקודת החיתוך שלהם ועד
 לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר. מצא את a .



- (10) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$,
 (פרמטר). ידוע כי גרף הפונקציה חותך את
 ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.
 א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
 ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
 ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך
 שלה עם ציר ה- x .
 ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאת בסעיף
 הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה
 שמצאת בסעיף ג'.
 חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

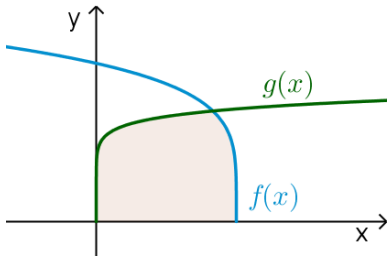


11) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$$

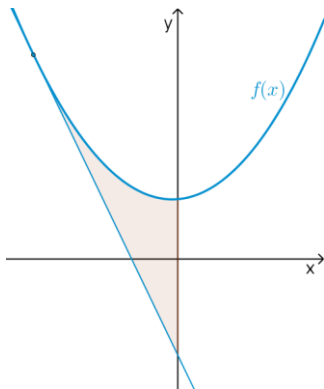
- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

12) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$



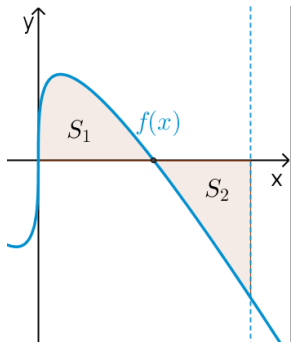
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 1.2$

- א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .



13) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



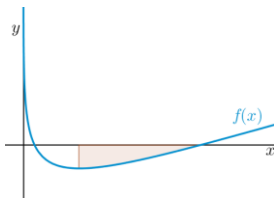
14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 . מעבירים ישר $x = k$ אשר יוצר את השטח S_2 כמתואר. מצא את k אם ידוע כי: $S_1 = S_2$.

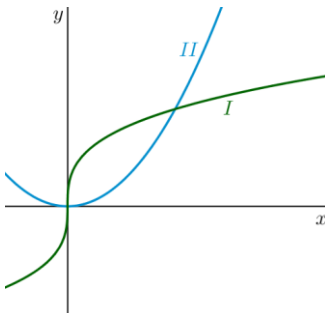
תרגול נוסף:

- 15 נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}$.
ידוע כי הישר $y = 6x - 380$ משיק לגרף הפונקציה.
מצא את הפונקציה.

- 16 נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x}}$.
ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה הוא 4.
מצא את הפונקציה.

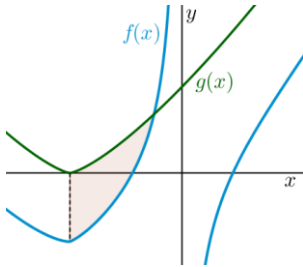


- 17 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:
 $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2$
מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים אנך לציר ה- x .
מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- x .



- 18 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = 32\sqrt[3]{x}$ בתחום: $x \geq 0$.
א. קבע איזה מבין הגרפים I ו-II שייך לכל פונקציה.
ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.

*הערה: בתרגיל הבא יש שימוש גם באינטגרל לוגריתמי.



19 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$

היא: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x+2}$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי הישר:

$4y - 8x = 7$ חותך אותה כאשר: $x = -1$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$

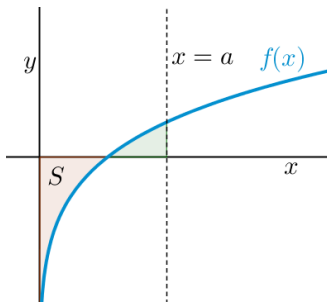
בתחום: $x < 0$.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+2)^4}$

ואף היא מסורטטת באיור.

i. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות.

ii. חשב את השטח הכלוא ביניהן והישר: $x = -2$.



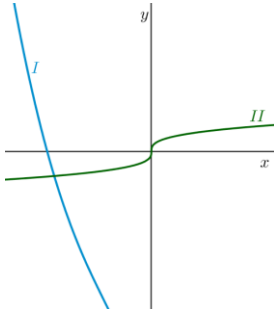
20 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt[5]{x} + 2\sqrt[10]{x} - 3$.

א. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x=a$, a (פרמטר). מצא את הערך של a עבורו השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בין נקודת החיתוך

שלם ועד לאנך הוא: $S - \frac{7}{66} a^{1.2}$ כאשר S

הוא השטח שמצאת בסעיף הקודם.



21 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 + B}{\sqrt[4]{x}}$,

(a, B) פרמטרים טבעיים).

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt[4]{x}$.

ידוע כי מכפלת הפונקציות שווה לביטוי

הבא: $f(x) \cdot g(x) = x^3 + 8$.

א. מצא את ערך הפרמטר B .

מגדירים את פונקציית ההפרש הבאה: $h(x) = f(x) - g(x)$.

ב. מצא את ערך הפרמטר a אם ידוע כי $h(x) = 258$.

ג. באיור שלפניך מצוירים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

i. התאם לכל גרף את הפונקציה המתאימה: I ו-II.

ii. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

iii. מורידים אנך לציר ה- x מנקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$, האנך וציר ה- x .

תשובות סופיות:

- (1) א. $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$ ב. $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$
- ד. $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$ ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$
- ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$ ח. $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7} + c$ ט. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$ י. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$
- (2) א. $45\frac{1}{3}$ ב. 33.76 ג. $18\frac{2}{3}$
- (3) $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (4) $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
- (5) $f(x) = 12.5\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
- (6) א. $(0,0) ; (8,0)$ ב. 16 יח"ש
- (7) א. $x > 0$ ב. $(2,0)$
- ג. 11.749 יח"ש
- (8) $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (9) א. $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$ ב. $a = 8$
- (10) א. $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a = 1$ ב. $x \geq -1.2$ ג. $(-1.2, 1.2)$
- ד. $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$ ה. 4.56 יח"ש
- (11) א. $(1,1)$ ב. $\frac{11}{28}$ יח"ש

$$f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א. (12)} \quad \text{ב. } S = \text{יח"ש} 1\frac{5}{66}$$

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א. (13)} \quad \text{ב. } S = \text{יח"ש} 4.56$$

$$x \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{(14)}$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג. (15)}$$

$$f(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} - 297\frac{5}{7} \quad \text{(15)}$$

$$f(x) = 0.4\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + 8\frac{4}{15} \quad \text{(16)}$$

$$S = \text{יח"ש} 1\frac{301}{480} \sim 1.627 \quad \text{(17)}$$

$$I - g(x); II - f(x) \quad \text{א. (18)} \quad \text{ב. } (0,0); (8,64) \quad \text{ג. } S = \text{יח"ש} 213\frac{1}{3}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4} - 2 \quad \text{א. (19)} \quad \text{ב. i. } (-0.5, 1.28)$$

$$S = \text{יח"ש} 3 - \ln 4 \quad \text{ב. ii. (20)}$$

$$S = \text{יח"ש} \frac{23}{66} \quad \text{א. (20)} \quad \text{ב. } a = \left(\frac{33}{31}\right)^{10}$$

$$II - g(x); I - f(x) \quad \text{א. i. } a = 3 \quad \text{ב. } B = 8 \quad \text{א. (21)}$$

$$S = \text{יח"ש} 0.75 \quad \text{א. iii. } (1,9) \quad \text{ב. ii. ג. (22)}$$