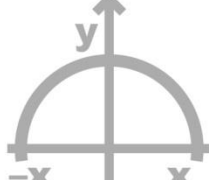


# מתמטיקה

שאלון 805

4 יחידות לימוד



## **הקדמה כללית:**

ספר התרגילים של גול הינו פרי של שנות ניסיון רבות בהוראת חומרי הלימוד ובהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי הפרקים התואמים את תכנית הלימודים הנוכחית של משרד החינוך ומכיל את כל חומר הלימוד הנדרש. תוכן הפרקים מורכב מחלק תיאורטי ותרגול. החלק התיאורטי מכיל הסברים ופתרונות מלאים בסרטונים באתר הבגרות של גול, וחלק התרגול נועד לאפשר לתלמיד לתרגל את החומר הנלמד. השאלות שמופיעות תחת הנושאים הקרויים 'תרגול נוסף' אינן פתורות בסרטונים היות והן ניתנות כבונוס למורה ולתלמיד.

הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותנו היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

**בהצלחה!**

**צוות האתר גול**

## ספר זה בנוי לפי הפרקים הבאים:

1	סדרות.....
25	טריגונומטריה במרחב.....
68	חוקי החזקות והשורשים.....
79	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים.....
93	משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים.....
120	בעיות גדילה ודעיכה.....
134	משוואות טריגונומטריות.....
145	פונקציות טריגונומטריות.....
187	פונקציות מעריכיות.....
208	פונקציות לוגריתמיות.....
228	פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי.....
242	חשבון אינטגרלי.....

כל פרק פותח בתוכן עניינים מפורט בו תוכלו להתרשם מהסידור הפנימי והנושאים הכלולים בפרק זה. סדר הצגת הנושאים בספר זה ובאתר הבגרות של גול הינו עקבי ומאפשר עבודה שוטפת במהלך הלימוד.

## תוכן העניינים:

פרק 1.....	2
סדרות.....	2
סיכום תכונות הסדרה החשבונית :	2
שאלות לפי נושאים :	3
שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי :	3
שאלות העוסקות בסכום סדרה חשבונית :	4
שאלות מסכמות :	5
תשובות סופיות :	8
סיכום תכונות הסדרה ההנדסית :	10
שאלות לפי נושאים :	10
שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי :	10
שאלות העוסקות בסכום סדרה הנדסית :	11
שאלות מסכמות :	12
תשובות סופיות :	15
סדרות מעורבות :	16
שאלות מסכמות :	16
תשובות סופיות :	16
סיכום תכונות של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת :	17
שאלות שונות :	18
שאלות כלליות :	18
שאלות מסכמות :	18
תשובות סופיות :	20
סדרות נסיגה :	21
שאלות יסודיות :	21
שאלות מסכמות :	22
תשובות סופיות :	24

# פרק 1

## סדרות

### סיכום תכונות הסדרה החשבונית:

- **נוסחת האיבר הכללי :**  
נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר  $a_1$  והפרשה הוא  $d$  נתונה ע"י:  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , כאשר:  $n$  הוא מיקום האיבר שערכו  $a_n$  בסדרה.
- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**  
כלל נסיגה של סדרה חשבונית  $a_n$  שהפרשה הוא  $d$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י:  $a_{n+1} - a_n = d$ .
- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**  
סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה חשבונית  $a_n$  שהפרשה הוא  $d$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י:  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ .  
בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים:  $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$ .

## שאלות לפי נושאים:

### שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית:  $17, 11, 5, -1, -7, \dots$ . מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית:  $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$ .
- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- (7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית:  $91, 88, 85, 82, \dots$ .
- (8) מצא את ערכו של  $x$  אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית:  $x-3, 3x-4, x^2-1$ .
- (9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: 
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

## שאלות העוסקות בסכום סדרה חשבונית:

- (10)** מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית:  $-3, 2, 7, 12, \dots$ .
- (11)** נתונה הסדרה החשבונית:  $-13, -7, -1, 5, \dots$ . כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- (12)** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- (13)** נתונה הסדרה החשבונית:  $-71, -67, -63, \dots$ . כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- (14)** נתונה הסדרה החשבונית:  $4, 13, 22, 31, \dots$ . בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- (15)** נתונה הסדרה החשבונית:  $4, 9, 14, 19, \dots, 599$ . מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
- (16)** סכום  $n$  האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת  $3n$  איברים גדול ב-1024 מסכום  $n$  האיברים הראשונים שבה.  
א. בטא את  $n$  באמצעות הפרש הסדרה,  $d$ .  
ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
- (17)** נתונה סדרה שבה  $S_n = 2n^2 + 4n$ .  
א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.  
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
- (18)** נתונה הסדרה החשבונית:  $-21, -17, -13, \dots$ . בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**(19)** בסדרה חשבונית שהפרשה  $d$  ובה  $2n$  איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612. הוכח כי  $nd = 60$ .

**(20)** בסדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי  $1\frac{14}{15}$  מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

### שאלות מסכמות:

**(21)** בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.  
 ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.  
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

**(22)** לפינך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית:  $x-5$ ,  $x-16$ ,  $2x+23$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. מצא את  $x$ .  
 ii. מצא את הפרש הסדרה.  
 ב. ידוע כי:  $a_{12} = 0$ . מצא את  $a_1$ .  
 ג. האיבר האחרון בסדרה הוא:  $a_n = 308$ .

**(23)** בסדרה חשבונית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח:  $a_5 = 0$ .  
 ב. נתון:  $a_3 - a_{11} = 24$ . מצא את  $a_1$  ואת  $d$ .  
 ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה  $b_n$  המקיימת:  $b_n = 2a_n - 3$ . מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.



**(24)** מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

$$\left\{ \begin{array}{l} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{array} \right.$$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר האחרון מהטור השני) הוא אפס.

- א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.
- ב. מחברים את  $n$  האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם  $n$  האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את  $n$  אם ידוע שהוא קטן מ-20.

**(25)** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.

- א. הוכח את הטענות הבאות:
  - i.  $a_1 = -4d$
  - ii.  $S_9 = 0$
- ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5. מצא את  $a_1$  ואת  $d$ .
- ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

**(26)** נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות:  $a_n$  שהפרשה הוא  $d_1$  ו- $b_n$  שהפרשה

$$\text{הוא } d_2. \text{ ידוע כי: } d_1 = -2d_2.$$

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה  $a_n$  גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה  $b_n$ .

- א. מצא את הפרש הסדרה  $a_n - d_1$ .
- ב. ידוע כי האיבר  $a_{10}$  קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר  $b_{50}$ . מצא את  $a_1$  ואת  $b_1$ .

**(27)** אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

- ההצעה הראשונה: לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
- ההצעה השנייה: לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם. ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים בהצעה הראשונה.
- א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה?
- ב. מה מחיר הרכב?

- (28)** בסדרה חשבונית שבה  $2n$  איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- א. הוכח כי  $nd = 66$ .
- ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות  $a_1$  את סכום  $n$  האיברים הראשונים.
- ג. סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

## תשובות סופיות:

(1)  $a_{43} = -235$

(2)  $d = 4, a_1 = -5$

(3) 20 איברים.

(4) 48 איברים.

(5) 15 קפיצות.

(6) 58 מספרים.

(7) 31 איברים חיוביים.

(8)  $x = 4, x = 1$

(9)  $a_{19} = 59$

(10)  $S_{14} = 413$

(11) 21 איברים.

(12) 16 דקות.

(13) 37 איברים.

(14) 3647

(15) 23920

(16) א.  $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$  ב. 24 איברים.

(17) א.  $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$  ב.  $d = 4$

(18) זוגיים:  $S = 135$ , אי-זוגיים:  $S = 99$

(19) שאלת הוכחה.

(20) 29 איברים.

(21) א.  $a_1 = 50, d = -6$  ב.  $a_{10} = -4$  ג.  $n = 6$

(22) א. i.  $x = -50$  א. ii.  $d = 11$  ב.  $a_1 = -121$  ג.  $S = 2156$

(23) א.  $a_1 = 12, d = -3$  ב.  $b_5 = -3$

(24) א.  $n = 81$  ב.  $n = 16$

(25) א.  $a_1 = -8, d = 2$  ב.  $n = 36$

26 א.  $d_1 = 4$       ב.  $a_1 = -52, b_1 = 95$

27 א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה.      ב. 45000 ₪.

28 א.  $S = 22a_1 + 693$       ב.  $a_9 = 1$

## סיכום תכונות הסדרה ההנדסית:

- **נוסחת האיבר הכללי:**  
נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר  $a_1$  ומנתה היא  $q$  נתונה ע"י הנוסחה:  $a_n = a_1 q^{n-1}$ , כאשר:  $n$  הוא מיקום האיבר שערכו  $a_n$  בסדרה.
- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**  
כלל נסיגה של סדרה הנדסית  $a_n$  שמנתה היא  $q$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י הקשר הבא:  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ .
- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**  
סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה הנדסית  $a_n$  שמנתה היא  $q$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

## שאלות לפי נושאים:

### שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי:

- (1) נתונה הסדרה ההנדסית:  $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$ . מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.
- (2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית:  $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$ .
- (3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
- (7) מצא את ערכו של  $x$  אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית:  $x-6, x+4, 4x+1$ . מצא גם את מנת הסדרה.
- (8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: 
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

### שאלות העוסקות בסכום סדרה הנדסית:

- (9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: 5, 10, 20, 40, ....
- (10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
- (11) סכום  $n$  האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת  $3n$  איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום  $n$  האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
- (12) בסדרה הנדסית עולה שבה  $n$  איברים, סכום  $n-3$  האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום  $n-3$  האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
- (13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

- 14** נתונה הסדרה ההנדסית:  $7, 14, 28, \dots$ .  
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.
- 15** בסדרה הנדסית ובה  $2n$  איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.
- 16** נתונה סדרה הנדסית שמנתה  $q$  ובה מספר זוגי של איברים.  
בטא באמצעות  $q$  את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.
- 17** בסדרה הנדסית שבה  $2n+1$  איברים, סכום  $n$  האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום  $n$  האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

### שאלות מסכמות:

- 18** ענה על הסעיפים הבאים:
- א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה  $2n$  איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת הסדרה.
- בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
- ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

**19** באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...

המלך הסכים להצעה.

- כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
- העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
- סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית  $2^n$  אבנים, כאשר  $n$  הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

**20** המספרים:  $2x-3$ ,  $x-9$ ,  $x-13$  הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

- מצא את  $x$ .
- ענה על הסעיפים הבאים:
  - כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
  - מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
- ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא:  $a_n = 5^{11}$ . מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

**21** בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

- מצא את מנת הסדרה.
- ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.



**(22)** נתונה הסדרה הבאה:  $a_n$ ,  $4$ ,  $12$ ,  $36$ ,  $\dots$ . מוסיפים לכל איבר בסדרה זו

שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה  $b_n$  באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$  ובין

סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $b_n$  הוא  $\frac{2}{3}$ .

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה  $b_n$  שסכומם מהווה  $\frac{2}{9}$  מ- $a_8$ .

## תשובות סופיות:

$$a_9 = 729 \quad (1)$$

$$n = 7 \quad (2)$$

$$a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2 \quad (3)$$

$$a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3 \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{1}{25}, q = 5 \quad (5)$$

$$5 \text{ דקות.} \quad (6)$$

$$x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3 \quad (7)$$

$$a_8 = 384 \quad (8)$$

$$S_9 = 2555 \quad (9)$$

$$5 \text{ דקות.} \quad (10)$$

$$n = 4, \text{ יש } 12 \text{ איברים בסדרה.} \quad (11)$$

$$q = 2 \quad (12)$$

$$n = 6 \quad (13)$$

$$S = 1190 \text{ זוגיים, } S = 595 \text{ אי-זוגיים} \quad (14)$$

$$q = 4 \quad (15)$$

$$\frac{q+1}{q} \quad (16)$$

$$a_1 = \frac{3}{8} \quad (17)$$

$$a_n = 3^{n-1} \text{ ב. } a_5, a_6 \text{ ג.} \quad (18) \quad \frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1} \text{ א.}$$

$$a_{25} = 16,777,216 \text{ א.} \quad (19)$$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

לו 20,000,000 אבנים. ג.  $2^{24}, 4, 16, 64, \dots, S_n = 22,369,620$

$$x = 14 \text{ א.} \quad (20) \quad \text{ב. i. } a_n = 5^{n-1} \quad \text{ב. ii. } a_6, a_7 \quad \text{ג. } S_7^* = 61,034,375$$

$$q = 2 \text{ א.} \quad (21) \quad \text{ב. } a_1 = 1 \quad \text{ג. } S_{6(p)} = 2730$$

$$q = 3 \text{ א.} \quad (22) \quad \text{ג. } b_5, b_6$$

## סדרות מעורבות:

### שאלות מסכמות:

(1) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה. האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

- א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.
- ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.
- ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

(2) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית:  $a_1, a_2, a_3, \dots$  וסדרה הנדסית:  $b_1, b_2, b_3, \dots$ . ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

- א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.
- ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.
- ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

### תשובות סופיות:

(1) א. 8, 10, 12      ב. 5      ג. 6.

(2) א.  $q = -2$       ג.  $a_1 = 2$ .

## סיכום תכונות של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

- הגדרה:  
סדרה הנדסית  $a_n$  המקיימת:  $|q| < 1$ ,  $(q \neq 0)$  נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.
- נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:  
הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת  $a_n$  ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.  
מתקבל הכלל הבא:  $S = \frac{a_1}{1-q}$ .
- סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:
  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של  $n$  איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .
  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של  $n$  איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר  $a_k$  יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא:  $S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1}$ .

## שאלות שונות:

### שאלות כלליות:

- (1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה:  $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$
- (2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה  $\frac{1}{4}$  הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- (3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).
- (4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא  $9\frac{1}{3}$ . מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.
- (5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא:  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$ .  
 א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.  
 ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.  
 מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

### שאלות מסכמות:

- (6) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת  $a_n$  ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי  $1\frac{2}{3}$  מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.  
 א. מצא את מנת הסדרה.  
 מחברים כל שני איברים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה  $b_n$ .  
 ב. הוכח כי הסדרה  $b_n$  גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.  
 ג. הראה כי סכום הסדרה  $b_n$  שווה לסכום הסדרה  $a_n$ .  
 ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה  $a_n$ .

(7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה היא  $q$ ,  $(0 < q < 1)$ .  
נגדיר את הסכומים הבאים:  $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$ ,  $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \dots$ .  
נתון כי:  $T = 6V$ .

- א. מצא את מנת הסדרה  $q$ .
- ב. פי כמה קטן  $V$  מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
- ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא  $1365\frac{1}{3}$ .

(8) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  שמנתה היא  $q$ .  
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא:  $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$ .  
א. הוכח כי היחס בין סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.  
בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.  
ב. מצא את מנת הסדרה.  
ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר  $a_n$  כלשהו. ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר  $a_n$ .

(9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה היא  $q$ ,  $(q \neq 0, |q| < 1)$ .  
נגדיר את הסכומים הבאים:  $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$ ,  $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13} + \dots$ .  
נתון כי:  $V = 0.3T$ .  
א. מצא את מנת הסדרה  $q$ .  
מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.  
ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.  
ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

## תשובות סופיות:

(1)  $S = 18$

(2)  $a_1 = 24$

(3)  $q = \frac{4}{5}, a_1 = 12\frac{1}{2}$  או  $q = \frac{1}{5}, a_1 = 50$

(4)  $S = 18\frac{2}{3}$

(5) ב.  $q = \frac{1}{3}, a_1 = 16$

(6) א.  $q = 0.6$  ב.  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$  ג.  $a_1 = 200$

(7) א.  $\frac{S_{n(s)}}{S_{n(o)}} = a_1$  ב.  $q = 0.5$  ג.  $a_5 = 20$

(8) א.  $q = \frac{1}{2}$  ב. פי 5 ג.  $a_1 = 1024$

(9) א.  $q = \frac{1}{3}$  ב.  $a_1 = -16$  ג.  $S = 288$

## סדרות נסיגה:

### שאלות יסודיות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- מצא את האיבר השלישי בסדרה.
- נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את  $a_{14}$  ו- $a_{12}$ .
- נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא  $k$ . הבע באמצעות  $k$  את  $a_{32}$  ו- $a_{30}$ .
- מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 113.
- הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי  $a_k = 72$ . הבע באמצעות  $k$  את  $a_{k+2}$ .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את ערכו של  $t$  שבעבורו האיברים  $a_7, a_8, a_9$  הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

$$(4) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

$$a_{n+1} = a_n + 6n - 2$$

$$\text{מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא } b_n$$

$$\text{באופן הבא: } b_n = a_{n+1} - a_n$$

א. הוכח שהסדרה  $b_n$  היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את  $b_1$ .

$$(5) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = 3a_n + 4$$

$$\text{מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא } b_n \text{ באופן הבא: } b_n = a_n + 2$$

א. הוכח שהסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון:  $b_5 = 162$ . חשב את  $a_1$ .



## שאלות מסכמות:

- (6) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה:  $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$ .
- א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
  - ב. הוכח כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $a_{n+2} = a_n + 3$ .
  - ג. כתוב נוסחה לסכום  $n$  האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
  - ד. חשב את הסכום הבא:  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$ .
- (7) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא:  $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$ .
- א. ענה על הסעיפים הבאים:
    - i. הבע את  $a_{n+2}$  באמצעות  $a_n$ .
    - ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.
  - ב. הנוסחה לסכום  $n$  האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא:  $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$ .
  - חשב את הסכום הבא:  $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$ .
  - ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?
- (8) סדרה מוגדרת לכל  $n$  טבעי ע"י הנוסחה:  $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$ .
- א. הבע באמצעות  $k$  את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
  - ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
  - ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.
- (9) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה:  $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$ .
- מגדירים סדרה חדשה  $b_n$  המקיימת לכל  $n$  טבעי:  $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$ .
- א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא הנדסית ומצא את מנתה.
  - ב. כתוב נוסחה ל- $b_n$  באמצעות  $n$  בלבד.
  - ג. חשב את הסכום הבא:  $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$ .

**10** סדרה מוגדרת ע"י הכלל:  $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$ .

מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל  $n$  טבעי:  $b_n = a_n + 5n$ .

א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר  $b_5$ .

ג. חשב את הסכום:  $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$ .

**11** סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא:  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$ .

מגדירים סדרה חדשה לפי:  $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$ .

א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא:  $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$ .

## תשובות סופיות:

(1) א.  $a_3 = -22$  ב.  $a_{12} = 5$ ,  $a_{14} = 33$  ג.  $a_{30} = k - 49$ ,  $a_{32} = k + 51$

ד.  $a_{62}, a_{63}$  ה. ההפרש בין שני איברים סמוכים נתון

ע"י:  $a_{n+1} - a_n = 2n - 11$ . כאשר נשווה את הפרש זה ל-62 נקבל  $n = 36.5$

אשר לא יתכן. מכאן כי לא קיימים אני איברים סמוכים שהפרשם 62.

(2)  $a_{k+2} = 74 + 4k$

(3)  $t = -33$

(4) א.  $d = 6$  ב.  $b_1 = 4$

(5) א.  $q = 3$  ב.  $a_1 = 0$

(6) א.  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -5$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = -2$ ,  $a_5 = 7$  ג.  $S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n$

ד.  $S_{9(o)} = 117$

(7) א. i.  $a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4$  ii.  $a_4$

ב.  $S_{6-11} = 265458$  ג.  $a_1 = 5$

(8) א.  $a_1 = k$ ,  $a_2 = 11 - k$ ,  $a_3 = k + 8$ ,  $a_4 = 19 - k$  ב. 8

ג. 830

(9) א.  $q = 2.5$  ב.  $b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$  ג.  $S_{10}^* = -4086.74$

(10) א.  $b_{n+1} = 3b_n$  ב.  $b_5 = 648$  ג.  $S = 1594320$

(11) ב.  $S_{11(p)} = 267 \frac{2}{3}$

## תוכן העניינים:

פרק 2.....27

טריגונומטריה במרחב.....27

27	הגדרות יסודיות :
29	שאלות יסודיות – סימון זוויות במרחב :
30	תשובות סופיות :
30	התיבה והקובייה :
31	תיבה שבסיסה ריבוע :
31	שאלות יסודיות :
32	שאלות מסכמות :
33	תיבה שבסיסה מלבן :
33	שאלות יסודיות :
36	שאלות מסכמות :
36	הקובייה :
36	שאלות מסכמות :
37	תשובות סופיות :
39	תרגול נוסף – תיבה וקובייה :
41	תשובות סופיות :
42	מנסרה ישרה :
42	מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות :
42	שאלות מסכמות :
44	מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים :
44	שאלות מסכמות :
44	מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית :
44	שאלות מסכמות :
46	תשובות סופיות :
47	תרגול נוסף – מנסרה ישרה :
49	תשובות סופיות :
50	פירמידה ישרה :
52	פירמידה שבסיסה ריבוע :
52	שאלות יסודיות :
52	שאלות מסכמות :
53	פירמידה שבסיסה מלבן :
53	שאלות יסודיות :

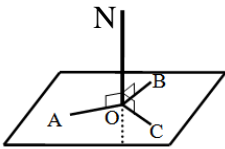
58.....	שאלות מסכמות :
59 .....	פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות :
59.....	שאלות מסכמות :
59 .....	פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים :
59.....	שאלות מסכמות :
60 .....	פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית :
60.....	שאלות מסכמות :
61 .....	תשובות סופיות :
63 .....	תרגול נוסף – פירמידה ישרה :
67 .....	תשובות סופיות :

## פרק 2

# טריגונומטריה במרחב

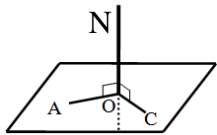
### הגדרות יסודיות:

#### הגדרה:



ישר המאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו נקרא אנך למישור. באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO, BO CO שעל המישור.

#### משפט:

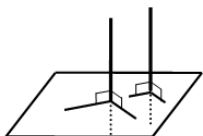


אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו אזי הוא מאונך למישור כולו. באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO, CO שעל המישור ולכן מאונך למישור כולו.

#### משפט:

בכל נקודה במישור אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

#### משפט:

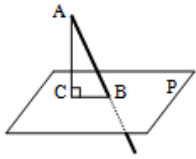


מנקודה שמחוץ למישור אפשר להוריד אנך אחד בלבד למישור זה.

#### משפט:

שני אנכים למישור אחד הם מקבילים. באיור הסמוך ניתן לראות כי שני אנכים הם מקבילים.

### הגדרה:

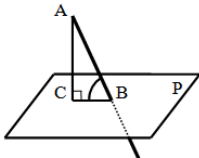


ישר החותך מישור ואינו מאונך למישור זה נקרא משופע למישור.  
הקטע המחבר את עקב האנך עם עקב המשופע נקרא היטל המשופע על המישור.  
באיור הסמוך הקטע AC הוא אנך למישור P, AB הוא משופע למישור ו-BC הוא היטל המשופע.

### הגדרה:

אורך אנך המורד מנקודה שמחוץ למישור אל המישור נקרא מרחק הנקודה מהמישור.

### הגדרה:



זווית בין ישר ומישור היא הזווית שבין הישר (המשופע) ובין היטלו של הישר על המישור.  
באיור הסמוך הזווית שבין הישר המשופע AB לבין המישור P היא:  $\angle ABC$ .

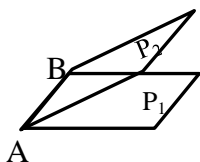
### הגדרה:

שני מישורים שאינם נחתכים נקראים מישורים מקבילים.

### הגדרה:

אורך האנך המורד מנקודה שעל פני מישור אחד אל מישור המקביל לו נקרא המרחק בין המישורים.

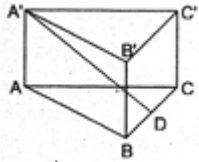
### הגדרה:



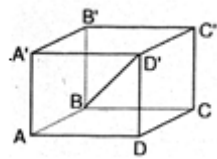
שני מישורים נחתכים יוצרים צורה גיאומטרית הנקראת פינה.  
ישר החיתוך של שני המישורים נקרא מקצוע, והמישורים היוצרים את הפינה נקראים פאות.  
באיור הסמוך הקטע AB הוא ישר החיתוך של שני המישורים  $P_1$  ו- $P_2$  הנקרא מקצוע.  
הצורות הסגורות של המישורים נקראות פאות וכל הצורה נקראת פינה.

## שאלות יסודיות – סימון זוויות במרחב:

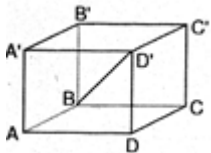
הערה: הגדרות מדויקות של הצורות המרחביות תופענה בהמשך הפרק.



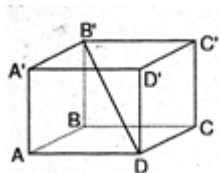
- (1) במנסרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) הנקודה D היא אמצע המקצוע BC. סמן את הזווית בין הישר  $A'D$  לבין הבסיס ABC.



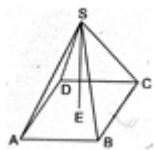
- (2) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ . סמן את הזווית בין האלכסון  $BD'$  לבין הבסיס ABCD.



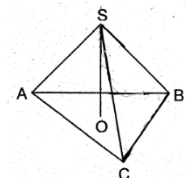
- (3) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  (ראה איור). סמן את הזווית בין האלכסון  $AC'$  לבין הפאה  $D'C'CD$ .



- (4) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ . סמן את הזוויות בין :  
א. האלכסון  $B'D$  לבין הפאה  $B'C'CB$ .  
ב. האלכסון  $B'D$  לבין הפאה  $D'C'CD$ .



- (5)  $SABCD$  היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן (ראה איור). סמן את הזווית בין המקצוע  $SB$  לבין הבסיס ABCD.



- (6)  $SABC$  היא פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). סמן את הזווית בין המקצוע  $SA$  לבין הבסיס ABC.



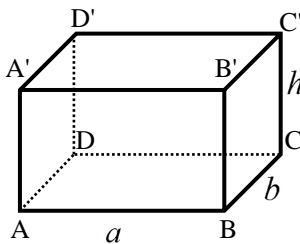
## תשובות סופיות:

- (1)  $\angle A'DA$  (2)  $\angle D'BD$  (3)  $\angle AC'D$   
 (4) נ.  $\angle DB'C$  ב.  $\angle B'DC'$  (5)  $\angle SBE$  (6)  $\angle SAO$

## התיבה והקובייה:

### הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב ( $ABCD$  ו- $A'B'C'D'$ ) הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי ( $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ ) נקרא גובה התיבה. המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.



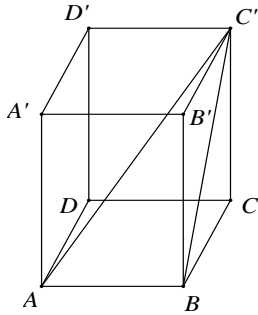
### נוסחאות:

הנוסחה	תיאור מילולי
$S = a \cdot b$	שטח בסיס התיבה
$V = a \cdot b \cdot h$	נפח התיבה
$M = 2h(a + b)$	שטח מעטפת התיבה
$P = 2h(a + b) + 2ab$	שטח פנים
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$	אלכסון ראשי בתיבה

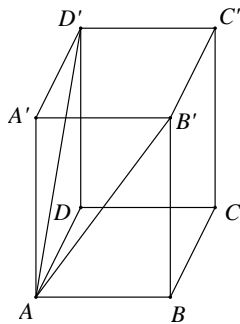
- תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסה הם ריבועים. מתקיים:  $a = b$  בכל הנוסחאות.
- קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע הבסיס, דהיינו:  $a = b = h$  אזי התיבה נקראת קובייה.

## תיבה שבסיסה ריבוע:

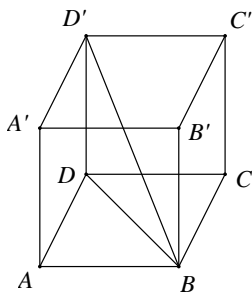
### שאלות יסודיות:



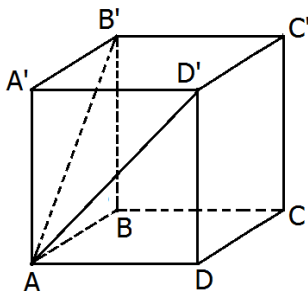
- (1) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע, אורך אלכסון הבסיס  $AC$  הוא  $15.2$  ס"מ.  
אורך המקצוע הצדדי  $AA'$  הוא  $10$  ס"מ.  
א. חשב אורך מקצוע הבסיס.  
ב. חשב נפח התיבה ושטח הפנים.  
ג. חשב את  $BC'$ , אלכסון הפאה  $BB'C'C$ , ואת אלכסון התיבה  $AC'$ .  
ד. חשב את זווית  $\angle AC'B$ , שבין האלכסון  $BC'$  בפאה  $BB'C'C$  לבין אלכסון התיבה  $AC'$ .



- (2) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע. אורך האלכסון  $AD'$  של הפאה הצדדית  $ADD'A'$  הוא  $16.8$  ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני האלכסונים  $AD'$  ו- $AB'$  היא  $58^\circ$ .  
א. חשב את אורך אלכסון הבסיס  $B'D'$ .  
ב. חשב את אורך מקצוע הבסיס  $AB$ .  
ג. חשב את גובה התיבה  $AA'$ .  
ד. חשב את נפח התיבה.

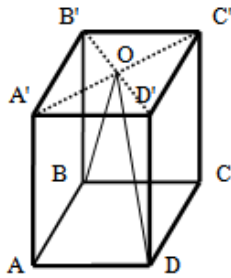


- (3) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע. אורך אלכסון הבסיס  $BD$  הוא  $16$  ס"מ ונפח התיבה הוא  $1408$  סמ"ק. חשב:  
א. גובה התיבה  $DD'$ .  
ב. הזווית שבין אלכסון התיבה  $BD'$  לבסיס  $ABCD$ .  
ג. אורך מקצוע הבסיס  $AB$ .

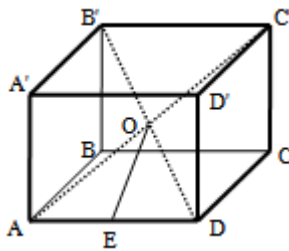


- (4) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$ , שבסיסה  $ABCD$  הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית הוא  $10$  ס"מ. הזווית שבין אלכסוני הפאות הצדדיות היא  $48^\circ$ .  
א. חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון  $B'D'$ .  
ב. חשב את שטח הבסיס של התיבה.

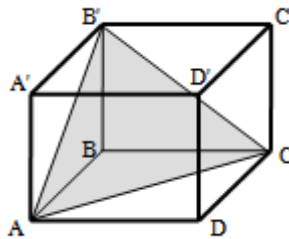
## שאלות מסכמות:



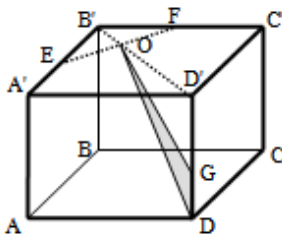
- (5) בתיבה ריבועית  $ABCD A'B'C'D'$  מעבירים את האלכסונים  $B'D'$  ו- $A'C'$  במישור הבסיס העליון. האלכסונים נפגשים בנקודה  $O$  כך שנוצר המשולש  $BOD$ . נתון כי:  $\angle BOD = 23^\circ$  וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס"מ.
- א. חשב את היקף המשולש  $BOD$ .
- ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע  $OD$  של המשולש  $BOD$  ומישור הפאה  $AA'D'D$ .



- (6) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים  $B'D'$  ו- $AC'$ . האלכסונים נחתכים בנקודה  $O$  שבתוך התיבה. מהנקודה  $O$  מעבירים את הקטע  $OE$  כך ש- $E$  היא אמצע המקצוע  $AD$ . ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס"מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס"מ.
- א. מצא את אורך גובה התיבה.
- ב. מצא את אורך הקטע  $OE$ .



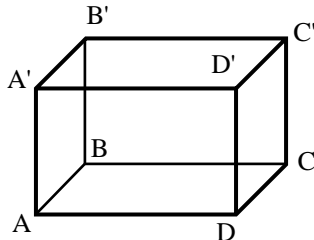
- (7) בתיבה ריבועית וישרה  $ABCD A'B'C'D'$  מסמנים את אורך הגובה ב- $h$ . מעבירים את הקטעים  $AB'$ ,  $AC$  ו- $B'C'$  כך שנוצר המשולש  $AB'C$  כמתואר באיור. הזווית הנוצרת בין אנך לצלע  $AC$  במשולש  $AB'C$  ומישור הבסיס  $ABCD$  היא  $\alpha$ .
- א. הבע באמצעות  $h$  ו- $\alpha$  את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
- ב. הבע באמצעות  $h$  ו- $\alpha$  את נפח התיבה.



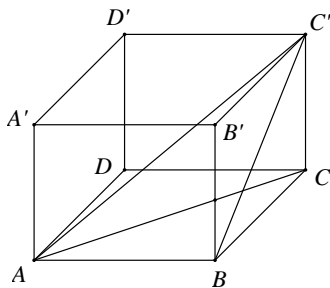
- (8) בתיבה הריבועית  $ABCD A'B'C'D'$  שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון  $B'D'$ . הנקודות  $E$  ו- $F$  נמצאות על אמצעי המקצועות  $A'B'$  ו- $B'C'$  כך שהקטע  $EF$  חותך את האלכסון  $B'D'$  בנקודה  $O$ . מקצים נקודה נוספת -  $G$  - הנמצאת על הגובה  $DD'$  כך ש- $DG = a$ .
- מעבירים את הקטעים  $GO$  ו- $DO$  כך שנוצר המשולש  $DOG$ . אורך מקצוע הבסיס הוא  $k$  וגובה התיבה הוא  $h$ .
- א. הבע באמצעות  $k$  ו- $a$  את שטח המשולש  $DOG$ .
- ב. מצא את היחס  $a/h$  עבורו מתקיים:  $S_{DOG} = S_{D'OG}$ .

## תיבה שבסיסה מלבן:

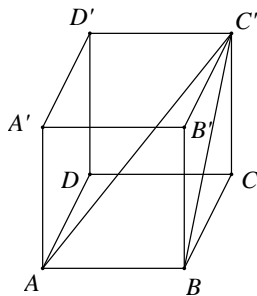
### שאלות יסודיות:



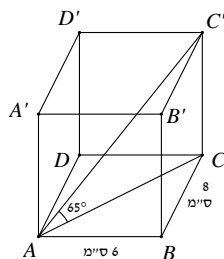
- (9) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  
 $AA' = 7$  ס"מ,  $AD = 12$  ס"מ,  $AB = 8$  ס"מ.  
 חשב את אורך האלכסון  $BD'$  ואת הזווית בינו לבין  
 בסיס התיבה.



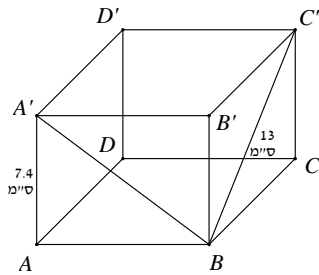
- (10) בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם:  
 $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 5$  ס"מ. הזווית בין  $BC'$   
 אלכסון הפאה  $BB'C'C$ , לבסיס  $ABCD$  היא  $40^\circ$ .  
 א. חשב את גובה התיבה  $CC'$ .  
 ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס,  $AC$ .  
 ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה  $AC'$   
 לבסיס  $ABCD$ .  
 ד. חשב את אורך אלכסון התיבה  $AC'$ .  
 ה. חשב את נפח התיבה.  
 ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.



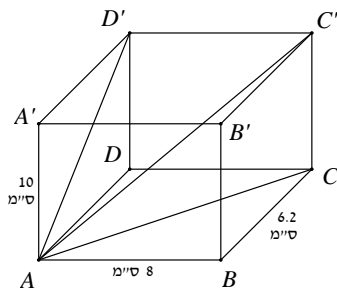
- (11) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ .  
 אורך צלע הבסיס:  $AB = 9$  ס"מ.  
 אלכסון הפאה  $BB'C'C$  הוא:  $BC' = 15$  ס"מ.  
 חשב את הזווית בין  $BC'$ , אלכסון הפאה  $BB'C'C$ ,  
 לאלכסון התיבה  $AC'$ .



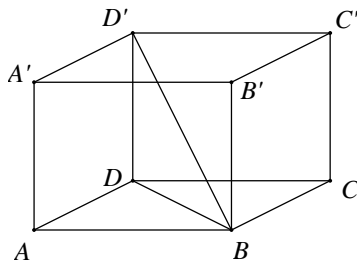
- (12) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  בה מתקיים:  
 $AB = 6$  ס"מ,  $AD = 8$  ס"מ.  
 הזווית בין אלכסון התיבה  $AC'$  לבסיס  $ABCD$  היא  $65^\circ$ .  
 א. חשב את גובה התיבה  $CC'$ .  
 ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.



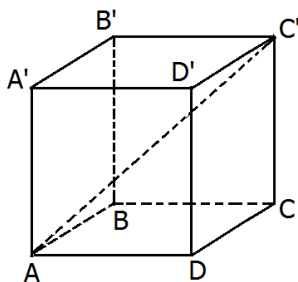
- 13** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן. גובה התיבה  $AA'$  הוא 7.4 ס"מ. אורך אלכסון הפאה  $BC' = 13$  ס"מ. הזווית בין אלכסון הפאה  $A'B'$  לבסיס  $ABCD$  היא  $37^\circ$ .  
א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.  
ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.



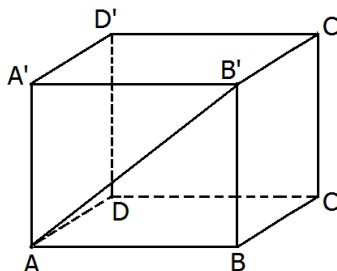
- 14** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $BC = 6.2$  ס"מ,  $AB = 8$  ס"מ,  $AA' = 10$  ס"מ. חשב:  
א. אלכסון הבסיס,  $AC$ , אלכסון הפאה,  $AD'$ , ואלכסון התיבה,  $AC'$ .  
ב. חשב את הזווית בין  $AD'$  אלכסון הפאה  $ADD'A'$ , לאלכסון התיבה  $AC'$ :  $\angle D'AC'$ .  
ג. חשב את נפח התיבה ושטח המעטפת.



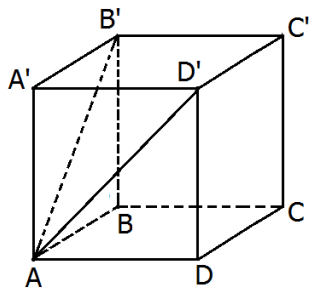
- 15** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$ .  $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 15$  ס"מ. אורך אלכסון הבסיס  $BD$  הוא 15 ס"מ. נפח התיבה הוא 864 סמ"ק. חשב את:  
א. רוחב הבסיס של התיבה,  $BC$ .  
ב. גובה התיבה,  $AA'$ .  
ג. הזווית בין אלכסון התיבה  $BD'$  לבסיסה  $ABCD$ .



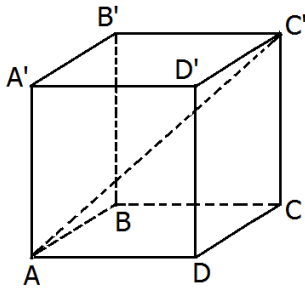
- 16** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  (ראה ציור), נתון:  
 $AD = 8$  ס"מ,  $DC = 14$  ס"מ,  $CC' = 14$  ס"מ.  
א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס,  $AC$ .  
ב. חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה  $AC'$  לבין הבסיס  $ABCD$ .  
ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.  
ד. חשב את שטח הפנים של התיבה.



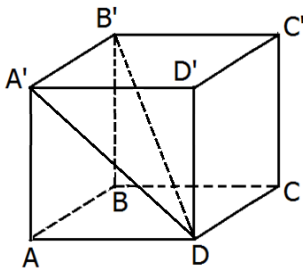
- 17** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  (ראה ציור) נתון:  
 $AD = 10$  ס"מ,  $AB = 12$  ס"מ. הזווית שבין אלכסון הפאה  $AB'$  לבין הבסיס  $ABCD$  היא  $35^\circ$ .  
א. חשב את גובה התיבה  $BB'$ .  
ב. חשב את  $AD'$ , אלכסון הפאה  $ADD'A'$ .  
ג. חשב את הזווית שבין  $AD'$  לבין הבסיס  $ABCD$ .



- 18** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן (ראה ציור). אורך גובה התיבה  $AA'$  הוא 10 ס"מ. אורך  $AB'$ , אלכסון הפאה  $ABB'A'$  הוא 14 ס"מ.  
א. חשב את אורך המקצוע  $AB$ .  
ב. הזווית שבין  $AD'$ , אלכסון הפאה  $ADD'A'$ , לבין הבסיס  $ABCD$  היא בת  $40^\circ$ .  
חשב את נפח התיבה.  
ג. חשב את שטח מעטפת התיבה.

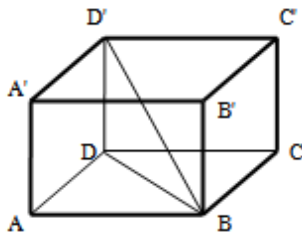


- 19** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבה  $AB = 10$  ס"מ,  $AD = 12$  ס"מ (ראה ציור). הזווית שבין אלכסון התיבה,  $AC'$ , לבין הבסיס  $ABCD$  היא בת  $38^\circ$ .  
א. חשב את אלכסון הבסיס.  
ב. חשב את גובה התיבה.  
ג. חשב את שטח פני התיבה.



- 20** נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  (ראו סרטוט) שבה:  $AB = 10$  ס"מ,  $AD = 12$  ס"מ,  $AA' = 8$  ס"מ.  
א. חשב את אורך  $AD'$ , אלכסון הפאה  $ADD'A'$ .  
ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה  $B'D$ .

## שאלות מסכמות:



(21) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן.

מעבירים את האלכסונים  $BD$  ו- $BD'$  כך שמתקיים:

$$\angle DBD' = \angle ABD = \alpha$$

אורך האלכסון  $BD$  יסומן ב- $a$ .

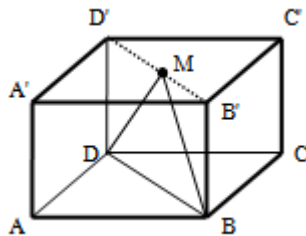
א. הבע באמצעות  $a$  ו- $\alpha$  את:

i. אורך התיבה  $AB$  –

ii. רוחב התיבה  $AD$  –

iii. גובה התיבה  $AA'$  –

ב. מצא את  $\alpha$  אם ידוע כי נפח התיבה הוא  $0.64a^3$ .



(22) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן מעבירים את

האלכסון  $B'D'$  בבסיס העליון. מאמצע האלכסון  $M$

מעבירים את הקטעים  $DM$  ו- $BM$  כך שנוצר המשולש

ישר הזווית  $BMD$  ( $\angle BMD = 90^\circ$ ).

אורך מקצוע הבסיס  $AB$  הוא  $5a$  ואורך הקטע  $DM$

הוא  $4a$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את אורך המקצוע  $AD$ .

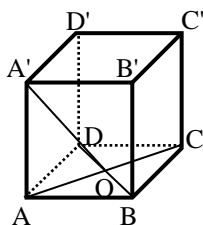
ב. מעבירים את הקטע  $AM$ . חשב את זווית  $MAD$ .

ג. מצא את  $a$  אם ידוע כי שטח המשולש  $MAD$

הוא 125 סמ"ר (עגל למספר שלם).

## הקובייה:

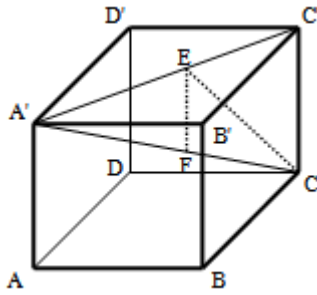
## שאלות מסכמות:



(23) בקובייה  $ABCD A'B'C'D'$  אורך המקצוע הוא 8 ס"מ.

הנקודה  $O$  היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון.

מצא את הזווית שבין  $OA'$  לפאה  $ABB'A'$ .



- (24) נתונה קובייה  $ABCD A'B'C'D'$ . מעבירים את האלכסון  $A'C'$  בבסיס העליון. מהנקודה  $E$  שעל האלכסון  $A'C'$  מותחים את הקטע  $CE$  השווה באורכו לקטע  $A'E$ . כמו כן מורידים גובה  $EF$  ממישור הבסיס העליון  $A'B'C'D'$  (מאונך ל- $A'C'$ ). הנקודה  $F$  נמצאת על האלכסון הראשי  $A'C$ . נסמן:  $\angle A'CE = \alpha$ ,  $AF = m$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $m$  את נפח הקובייה.

## תשובות סופיות:

(1) א. 10.748 ס"מ ב. 1155.2 סמ"ק,  $V = 660.959$  סמ"ר,  $S =$

ג. 14.68 ס"מ, 18.19 ס"מ ד.  $\angle AC'B = 36.21^\circ$ .

(2) א. 16.29 ס"מ ב. 11.518 ס"מ ג. 12.23 ס"מ

ד. 1622.485 סמ"ק,  $V =$

(3) א. 11 ס"מ ב.  $34.51^\circ$  ג. 11.313 ס"מ

(4) א. 8.13 ס"מ ב. 33.09 סמ"ר.

(5) א. 51 ס"מ ב.  $8.1^\circ$ .

(6) א. 4 ס"מ ב. 4.47 ס"מ.

(7) א.  $\frac{h\sqrt{2}}{\tan \alpha}$  ב.  $\frac{2h^3}{\tan^2 \alpha}$ .

(8) א.  $S_{\text{DOG}} = \frac{3ka}{4\sqrt{2}}$  ב.  $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$ .

(9) א. 16.031 ס"מ,  $BD' = 25.89^\circ$  ב.  $\angle D'BD =$

(10) א. 4.195 ס"מ,  $CC' = 13.66$  ס"מ ב. 13 ס"מ,  $AC = 17.886^\circ$  ג.

ה. 251.7 סמ"ק,  $V = 142.63$  סמ"ר,  $M =$  ד. 13.66 ס"מ,  $AC' =$

(11) א.  $\angle AC'B = 30.96^\circ$ .

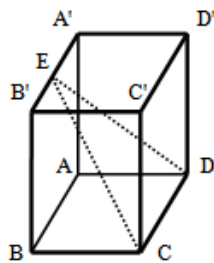
(12) א. 21.44 ס"מ,  $CC' = 1029.6$  סמ"ק,  $V = 696.96$  סמ"ר,  $P =$  ב.



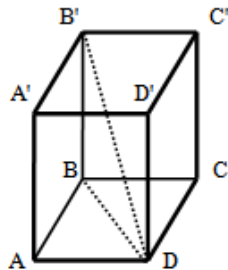
- (13) א.  $BC = 10.688$  ס"מ,  $AB = 9.82$  ס"מ  
ב.  $P = 513.43$  סמ"ר,  $M = 303.5184$  סמ"ר
- (14) א.  $AC' = 14.227$  ס"מ,  $AD' = 11.766$  ס"מ,  $AC = 10.121$  ס"מ  
ב.  $34.22^\circ$ . ג.  $496$  סמ"ק,  $V = 284$  סמ"ר,  $M =$
- (15) א.  $BC = 9$  ס"מ  
ב.  $8$  ס"מ  $h$ . ג.  $28.072^\circ$
- (16) א.  $AC = 14.42$  ס"מ  
ב.  $44.15^\circ$ . ג.  $560$  סמ"ר. ד.  $752$  סמ"ר.
- (17) א.  $BB' = 8.4$  ס"מ  
ב.  $AD' = 13.06$  ס"מ. ג.  $40.03^\circ$
- (18) א.  $AB = 9.8$  ס"מ  
ב.  $1,167.9$  סמ"ק,  $V =$ . ג.  $434.4$  סמ"ר.
- (19) א.  $15.62$  ס"מ  
ב.  $12.2$  ס"מ  $h$ . ג.  $776.8$  סמ"ר,  $P =$
- (20) א.  $AD = 14.42$  ס"מ  
ב.  $B'D = 17.55$  ס"מ.
- (21) א. i.  $a \cos \alpha$ . ii.  $a \sin \alpha$ . iii.  $a \tan \alpha$ . ב.  $53.13^\circ$ .
- (22) א.  $a\sqrt{7}$ . ב.  $70.6^\circ$ . ג.  $a = 5$ .
- (23)  $24.095^\circ$ .
- (24)  $(m \sin 2\alpha \cos \alpha)^3$ .

## תרגול נוסף – תיבה וקובייה:

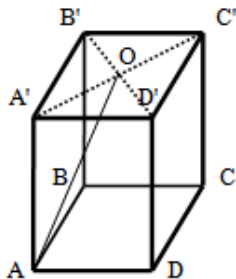
\*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.



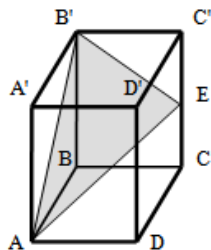
- (1) בסיס התיבה  $ABCD A'B'C'D'$  הוא ריבוע שאורך צלעו 10 ס"מ. גובה התיבה הוא 24 ס"מ. הנקודה E נמצאת על אמצע המקצוע  $A'B'$  וממנה מעבירים את הקטעים CE ו-DE.  
א. חשב את אורך הקטע CE.  
ב. חשב את זווית CED.  
ג. מורידים גובה EF במישור המשולש CDE. חשב את הזווית שהוא יוצר עם מישור הבסיס ABCD.



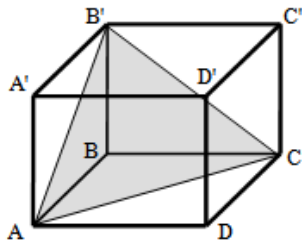
- (2) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסון  $B'D$ . הזווית שבין אלכסון התיבה לבסיס התיבה ABCD היא  $56^\circ$ .  
ידוע כי אורך אלכסון התיבה  $B'D$  הוא 24 ס"מ.  
א. חשב את גובה התיבה.  
ב. מצא את אורך בסיס הריבוע ABCD.  
ג. חשב את נפח התיבה.



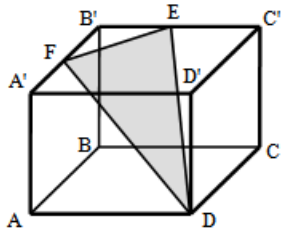
- (3) בתיבה ריבועית  $ABDCA'B'C'D'$  מעבירים אלכסונים בבסיס העליון  $A'B'C'D'$ . האלכסונים נפגשים בנקודה O וממנה מעבירים את הקטע AO שאורכו 10 ס"מ. אורך גובה התיבה הוא 8 ס"מ.  
א. חשב את הזווית שבין הקטע AO למישור הבסיס ABCD.  
ב. חשב את אורך צלע הבסיס.  
ג. חשב את נפח התיבה.



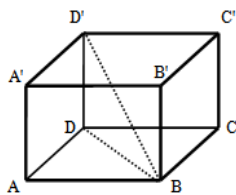
- (4) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה ריבוע מקצים נקודה E באמצע הגובה  $CC'$ . מעבירים את הקטעים  $AE$ ,  $AB'$  ו- $B'E$ . ידוע כי שטח הפנים של התיבה הוא 264 סמ"ר ושכום כל מקצועותיה הוא 80 ס"מ.  
חשב את היקף המשולש  $AB'E$ .



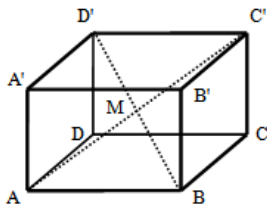
- (5) בתיבה ריבועית  $ABCD A'B'C'D'$  ידוע כי גובה התיבה גדול פי 2 ממקצוע הבסיס. מעבירים את הקטעים  $AB'$ ,  $AC$  ו- $B'C$  כך שנוצר המשולש  $AB'C$  כמתואר באיור. שטח המשולש  $AB'C$  הוא 24 סמ"ר.
- חשב את הזווית הנוצרת בין הצלע  $AB'$  של המשולש ומישור הבסיס  $ABCD$ .
  - מצא את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
  - חשב את נפח התיבה.



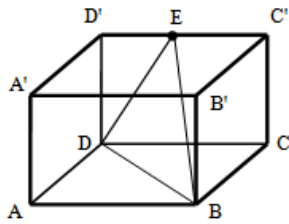
- (6) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה הוא ריבוע. מקצים נקודות E ו-F על אמצעי המקצועות  $B'C'$  ו- $A'B'$  בהתאמה כך שנוצר המשולש  $EDF$ . אורך גובה התיבה הוא 12 ס"מ והזווית הנוצרת בין הקטע  $FD$  להיטלו על מישור הבסיס  $ABCD$  היא  $50^\circ$ .
- מצא את האורך של מקצוע הבסיס בתיבה.
  - מצא את הזווית הנוצרת בין הקטע  $FD$  להיטלו על הפאה הצדדית  $AA'D'D$ .



- (7) נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן. רוחב המלבן גדול פי 2 מאורכו ושווה לגובה המלבן ( $2AD = 2AA' = AB$ ). מעבירים את האלכסון  $BD$  בבסיס  $ABCD$  ואת אלכסון התיבה  $BD'$ .
- חשב את הזווית שבין האלכסון  $BD'$  למישור הבסיס  $ABCD$ .
  - מצא את שטח המעטפת של התיבה אם ידוע כי נפחה הוא 432 סמ"ק.

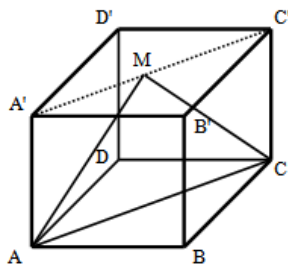


- (8) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסונים  $AC'$  ו- $BD'$  הנחתכים בנקודה M. ידוע כי המשולש  $AMB$  הוא ישר זווית ( $\angle AMB = 90^\circ$ ). אורך אלכסון התיבה הוא  $2a$  וגובה התיבה שווה באורכו למקצוע הבסיס  $BC$ .
- הבע באמצעות  $a$  את אורכי מקצועות הבסיס.
  - מצא את הזווית שבין אלכסון התיבה  $BD'$  לבין הפאה הצדדית  $ADD'A'$ .
  - מצא את  $a$  אם ידוע כי נפח התיבה הוא  $27\sqrt{2}$  סמ"ק.



- 9) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה מלבן מקצים נקודה E באמצע המקצוע  $C'D'$ . מהנקודה E מעבירים את הקטעים BE ו-DE כך שנוצר המשולש BED. מסמנים את אורכי מקצועות התיבה:  $AB = 3a$ ,  $AD = 2a$ . ידוע כי גובה התיבה שווה באורכו מקצוע הבסיס AD.

- א. מצא את הזווית הנוצרת בין הצלע BE למישור הפאה הצדדית  $BB'C'C$ .  
 ב. הבע באמצעות  $a$  את היקף המשולש BDE.  
 ג. מצא את  $a$  אם ידוע כי היקף המשולש BDE קטן ב-14 ס"מ מהיקף הבסיס ABCD.



- 10) נתונה קובייה  $ABCD A'B'C'D'$ . מעבירים את האלכסון בבסיס העליון  $A'C'$  ומקצים נקודה M באמצעו. מהנקודה M מעבירים את הקטעים AM ו-CM כך שנוצר המשולש AMC. נתון:  $AM = 6$  ס"מ,  $\angle AMC = 120^\circ$ .  
 א. הסבר מדוע המשולש AMC הוא שווה שוקיים.  
 ב. חשב את אורך הגובה של הקובייה.  
 ג. חשב את נפח הקובייה.

## תשובות סופיות:

- 1) א. 26.476 ס"מ. ב.  $21.171^\circ$ . ג.  $67.38^\circ$ .  
 2) א. 19.8 ס"מ. ב. 9.48 ס"מ. ג. 1791.22 סמ"ק.  
 3) א.  $53.13^\circ$ . ב. 8.48 ס"מ. ג. 576 סמ"ק.  
 4) 26.6 ס"מ או 27.6 ס"מ.  
 5) א.  $63.43^\circ$ . ב. 4 ס"מ. ג. 128 סמ"ק.  
 6) א. 9 ס"מ. ב.  $16.7^\circ$ .  
 7) א.  $24.1^\circ$ . ב. 216 סמ"ר.  
 8) א.  $a, a\sqrt{2}$ . ב.  $45^\circ$ . ג.  $a = 3$ .  
 9) א.  $27.9^\circ$ . ב.  $9.3a$ . ג.  $a = 20$ .  
 10) א. הקטעים AM ו-CM שווים וזאת ניתן לראות בשני המשולשים AMO ו-CMO כאשר O אמצע האלכסון AC.  
 ב. 3 ס"מ. ג. 27 סמ"ק.

## מנסרה ישרה:

### הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מצולעים זהים המקבילים זה לזה במרחב. המקצועות הצדדיים המחברים את קדקודי הבסיסים המתאימים נקראים גובהי המנסרה. כל גובה במנסרה ישרה מאונך למישורי הבסיס העליון והתחתון.



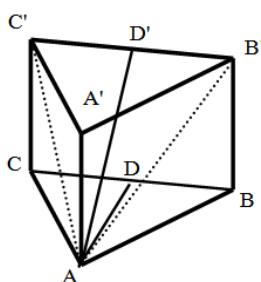
במסגרת שאלון 805 נעסוק במנסרות הבאות:

- מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.

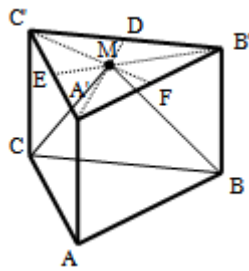
**הערה:** התיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרות ישרות שבסיסן מלבן וריבוע בהתאמה.

## מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:

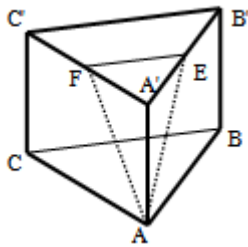
### שאלות מסכמות:



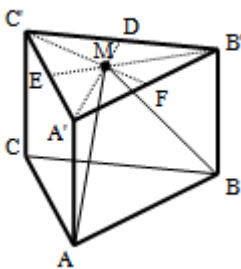
- במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים  $AB'$  ו- $AC'$  כך שנוצר המשולש  $AB'C'$ . הזווית שבין האנך לצלע  $BC$  במשולש  $ABC$  והאנך לצלע  $B'C'$  במשולש  $AB'C'$  היא  $40^\circ$ . אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ.  
א. חשב את שטח המשולש  $A'B'C'$ .  
ב. חשב את נפח המנסרה.



- (2) במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון  $A'B'C'$  את התיכונים  $A'D$ ,  $B'E$  ו- $C'F$  אשר נחתכים בנקודה  $M$ . מהנקודה  $M$  מעבירים את הקטעים  $MC$  ו- $MB$  כך שנוצר המשולש  $MCB$ . גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה. חשב את הזווית שבין האנך לצלע  $BC$  במשולש  $MCB$  למישור הבסיס  $ABC$ .



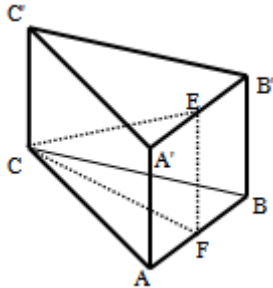
- (3) במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות הנקודות  $E$  ו- $F$  הן בהתאמה אמצעי המקצועות  $A'B'$  ו- $A'C'$ . מעבירים את הקטעים  $AE$  ו- $AF$ , כך שנוצר המשולש  $AEF$ . אורך מקצוע הבסיס של המנסרה הוא 10 ס"מ וגובה המנסרה הוא 12 ס"מ.  
א. חשב את אורכי הצלעות של המשולש  $AEF$ .  
ב. חשב את הזווית שבין גובה המנסרה  $AA'$  למישור המשולש  $AEF$ .



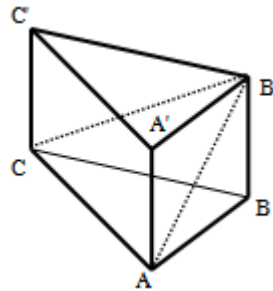
- (4) במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון  $A'B'C'$  את התיכונים  $A'D$ ,  $B'E$  ו- $C'F$  אשר נחתכים ב- $M$ . מהנקודה  $M$  מעבירים את הקטעים  $MA$  ו- $MB$  כך שנוצר המשולש  $MAB$ . גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה ויסומן ב- $2a$ .  
א. הבע באמצעות  $a$  את אורך הקטע  $MA$ .  
ב. חשב את הזווית שבין הקטע  $MA$  ומישור הבסיס  $ABC$ .  
ג. חשב את הזווית שבין הגובה למקצוע  $AB$  במישור  $MAB$  לבין מישור הבסיס  $ABC$ .  
ד. חשב את הזווית שבין  $MA$  והפאה  $AA'B'B$ .  
ה. הבע באמצעות  $a$  את שטח הפנים של המנסרה.

## מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

### שאלות מסכמות:



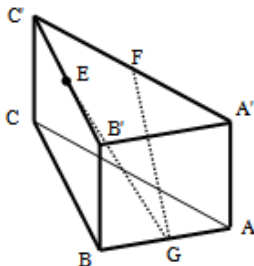
- (5) נתונה מנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ ). מאמצעי המקצועות  $A'B'$  ו- $AB$  מעבירים את הקטע  $EF$ . ידוע כי אורך מקצוע הבסיס  $AB$  הוא  $k$  ס"מ והוא קטן פי 2 מאורך שוק הבסיס  $AC$ . נסמן:  $\angle FCE = \alpha$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את נפח המנסרה.  
ב. חשב את נפח המנסרה אם ידוע כי:  $2EF = CE$ , וכי שטח הבסיס  $ABC$  הוא  $\sqrt{15}$  סמ"ר.



- (6) במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ ) מעבירים את האלכסונים  $AB'$  ו- $CB'$  כך שנוצר המשולש  $AB'C$ . ידוע כי הזווית שבין אנך למקצוע  $AC$  במשולש  $ABC$  ואנך למקצוע  $AC$  במשולש  $AB'C$  היא  $45^\circ$  (האנכים נפגשים על המקצוע  $AC$  בנקודה  $E$ ). זוויות הבסיס  $ABC$  הן  $\angle CAB = \angle ABC = 75^\circ$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ . גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.  
א. מצא את אורך המקצוע  $AC$ .  
ב. חשב את הזווית שבין האלכסון  $CB'$  למישור הבסיס.

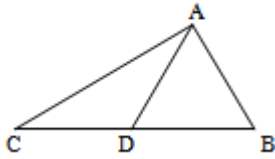
## מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:

### שאלות מסכמות:

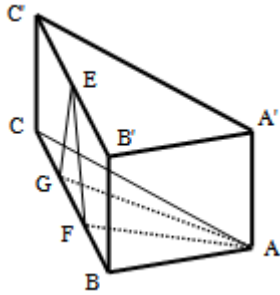


- (7) במנסרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ) הנקודות  $E$ ,  $F$  ו- $G$  הן בהתאמה אמצעי המקצועות  $A'C'$ ,  $B'C'$  ו- $AB$  כמתואר באיור. מסמנים את מידות הבסיס  $ABC$ :  $AB = 5t$ ,  $BC = 12t$ . הזווית שבין הקטע  $GE$  למישור הבסיס  $ABC$  היא  $36.86^\circ$ .  
א. הבע באמצעות  $t$  את גובה המנסרה.  
ב. חשב את הזווית שבין הקטע  $GF$  ולמישור הבסיס  $ABC$ .  
ג. מצא את  $t$  אם ידוע כי אורך הקטע  $GF$  הוא:  $\sqrt{3825}$  ס"מ.

8) ענה על הסעיפים הבאים :



- א. הוכח את הטענה : תיכון במשולש חוצה אותו לשני משולשים שווי שטח.  
כלומר, הקטע AD הוא תיכון במשולש ABC.  
הראה כי :  $S_{ABD} = S_{ACD}$ .

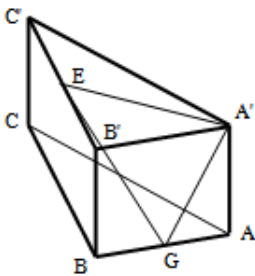


במנסרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ) הנקודות F ו-G מחלקות את מקצוע הבסיס BC לשלושה חלקים שווים.  
הנקודה E היא אמצע המקצוע  $B'C'$ . ידוע כי אורך הקטע EF הוא 10 ס"מ ואורך המקצוע BC הוא 24 ס"מ. שטח המשולש AFG הוא 40 סמ"ר.

ב. איזה משולש הוא המשולש EFG ?  
מצא את זוויותיו.

ג. מצא את גובה המנסרה.

- ד. היעזר בטענה שהוכחת בסעיף א' ומצא את אורך המקצוע AB.  
(רמז : התבונן במשולש ABF ומצא את הצלע AB באמצעות שטחו).  
ה. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.



9) לפניך מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר

זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ). ידוע כי הפאה הצדדית  $AA'B'B$  היא

ריבוע וכי אורך המקצוע BC גדול פי 3 מ-AB. הנקודות E ו-G נמצאות על אמצעי המקצועות  $B'C'$  ו-AB בהתאמה.  
מעבירים את הקטעים  $A'E$ ,  $A'G$  ו-GE.

- א. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הבסיס.  
ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הפאה  $AA'B'B$ .

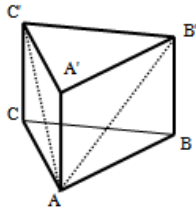
ג. נתון כי :  $\angle EGA' = 69^\circ$ . חשב את זווית  $EA'G$ .



## תשובות סופיות:

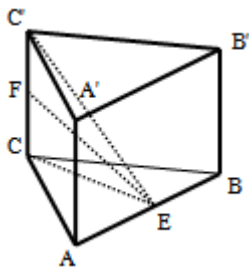
- (1) א. 160.68 סמ"ר. ב. 2250 סמ"ק.
- (2)  $73.89^\circ$ .
- (3) א. 13 ס"מ, 13 ס"מ, 5 ס"מ. ב.  $19.84^\circ$ .
- (4) א.  $MA = 2.3a$  ב.  $60^\circ$  ג.  $73.9^\circ$  ד.  $14.47^\circ$  ה.  $P = 15.46a^2$ .
- (5) א.  $V = \frac{15k^3 \tan \alpha}{8}$  ב.  $\frac{15}{\sqrt{3}}$  סמ"ק.
- (6) א. 10 ס"מ. ב.  $26.56^\circ$ .
- (7) א.  $4.875t$  ב.  $39.1^\circ$  ג.  $t = 8$ .
- (8) א. משולש שווה שוקיים.  $66.42^\circ, 47.15^\circ$  ג.  $\sqrt{84}$  ס"מ. ד. 10 ס"מ.  
ה.  $60\sqrt{84}$  סמ"ר.
- (9) א.  $\angle EGH = 32.31^\circ$  ב.  $\angle B'GE = 53.3^\circ$  ג.  $\angle GAE = 75.6^\circ$

## תרגול נוסף – מנסרה ישרה:

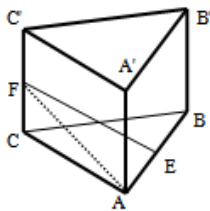


- (1) במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים  $AB'$  ו- $AC'$  ואת הקטע  $AD$  (אמצע  $B'C'$ ). הזווית שבין  $AD$  למישור הבסיס  $ABC$  היא  $40^\circ$ . אורך גובה המנסרה הוא 14 ס"מ. א. חשב את אורך מקצוע בסיס המנסרה.

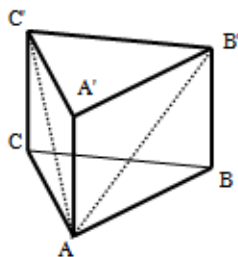
- ב. חשב את הזווית הנוצרת בין האלכסון  $AB'$  למישור הבסיס  $ABC$ .  
ג. חשב את שטח המשולש  $AB'C'$ .  
ד. חשב את נפח המנסרה.



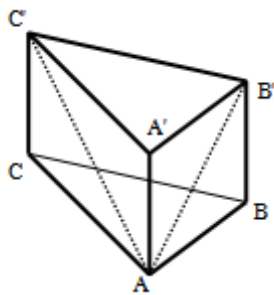
- (2) במנסרה ישרה ומשולשת  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות מסמנים את אמצע מקצוע הבסיס  $AB$  בנקודה  $E$  וממנה מעבירים את הקטעים  $CE$ ,  $FE$  ו- $C'E$ , כך ש- $FE$  הוא חוצה זווית במשולש  $CEC'$ . זווית  $FEC'$  תסומן ב- $\alpha$ . מקצוע הבסיס של המנסרה הוא  $k$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את גובה המנסרה.  
ב. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש  $FEC'$ .  
ג. נתון:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $k = 6$ . חשב את נפח המנסרה.



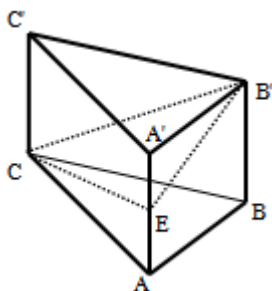
- (3) במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות מסמנים את אמצעי המקצועות  $AB$  ו- $CC'$  בנקודות  $E$  ו- $F$  בהתאמה. ידוע כי גובה המנסרה שווה למקצוע הבסיס ומסומן ב- $2x$ . אורך הקטע  $FE$  הוא 16 ס"מ והזווית  $EAF$  היא  $63.434^\circ$ .  
א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הקטע  $AF$  ממשולש  $AFE$ .  
ב. מצא את  $x$  (עגל למספר שלם).  
ג. (רמז: השתמש במשפט פיתגורס במשולש  $ACF$ ).  
ד. חשב את נפח המנסרה.



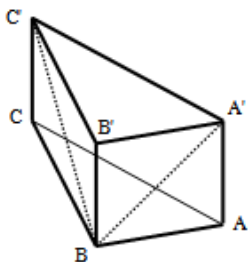
- (4) במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את אלכסוני הפאות  $AB'$  ו- $AC'$  ומסמנים:  $\angle B'AC' = 2\alpha$ . אורך כל אלכסון הוא  $k$ .  
א. ענה על הסעיפים הבאים:  
i. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.  
ii. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את אורך גובה המנסרה.  
iii. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את נפח המנסרה.  
ב. חשב את נפח המנסרה כאשר:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $k = 5$ .



- (5) במנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ ) אורך המקצוע  $AC$  הוא 8 ס"מ. ידוע כי זווית הראש  $ACB$  היא  $20^\circ$  וכי גובה המנסרה הוא 4 ס"מ. מעבירים את האלכסונים  $AC'$  ו- $AB'$ .
- חשב את אורכי האלכסונים  $AC'$  ו- $AB'$ .
  - חשב את הזווית שבין האלכסונים  $AB'$  ו- $AC'$  למישור הבסיס  $ABC$ .
  - חשב את נפח המנסרה.



- (6) נתונה מנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ ). מאמצע הגובה  $AA'$  מעבירים את הקטעים  $CE$  ו- $B'E$ , כך שנוצר המשולש  $CEB'$ . נתון:  $\angle ACB = 40^\circ$ ,  $AC = 5t$ ,  $BB' = 2t$ .
- חשב את הזוויות הנוצרות בין כל אחת מצלעות המשולש  $CEB'$  למישור הבסיס  $ABC$ .
  - חשב את היקף המשולש  $CEB'$ .



- (7) במנסרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ) מעבירים את האלכסונים  $A'B'$  ו- $BC'$ . כך שנוצר המשולש  $A'BC'$ . ידוע כי:  $BC' = 15.6$  ס"מ,  $A'B = 10$  ס"מ וכי:  $AB + BC = 22.4$  ס"מ.
- מצא את גובה המנסרה  $AA'$ .
  - חשב את הזווית שבין האלכסון  $BC'$  למישור הבסיס  $ABC$ .
  - חשב את נפח המנסרה.

## תשובות סופיות:

(1) א. 19.26 ס"מ. ב.  $36^\circ$ . ג. 209.7 סמ"ר. ד. 2250 סמ"ק.

(2) א.  $0.5k\sqrt{3}\tan 2\alpha$  ב.  $\frac{3k^2}{8}(\tan 2\alpha - \tan \alpha)$  ג.  $81\sqrt{3}$  סמ"ק.

(3) א.  $\sqrt{x^2 + 256}$  ב.  $x = 8$  ג.  $1024\sqrt{3}$  סמ"ק.

(4) א.i.  $2k\sin \alpha$  ii.  $k\sqrt{1-4\sin^2 \alpha}$  iii.  $k^3\sin^2 \alpha\sqrt{3}\sqrt{1-4\sin^2 \alpha}$

ב. 12.4 סמ"ק.

(5) א.  $\sqrt{80}$ , 4.87 ב.  $26.56^\circ$ ,  $55.21^\circ$  ג. 43.77 סמ"ק.

(6) א.  $11.3^\circ$ ,  $16.29^\circ$ ,  $21.8^\circ$  ב.  $14.04t$

(7) א. 6 ס"מ. ב.  $22.61^\circ$  ג. 345.6 סמ"ק.


## פירמידה ישרה:

### הגדרה:


גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה. בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.

במסגרת שאלון 805 נעסוק בפירמידות הישרות הבאות:

קדקוד הפירמידה



קדקוד הפירמידה



- פירמידה שבסיסה מלבן.
- פירמידה שבסיסה ריבוע.
- פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.

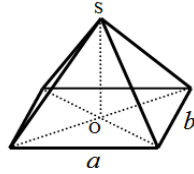
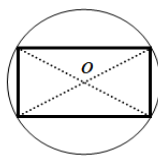
### הגדרה:

גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

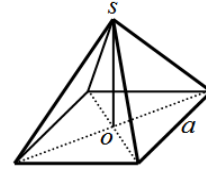
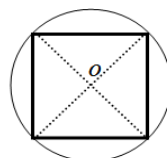
### משפט:

בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

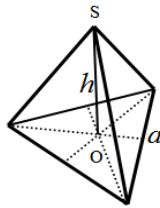
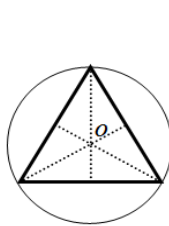
באיורים הבאים מופיע חתך מישורי של בסיסי הפירמידות ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



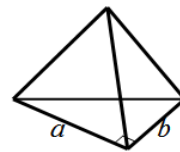
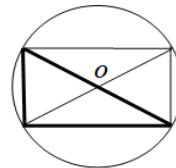
תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.



תיאור פירמידה שבסיסה ריבוע. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הריבוע.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).



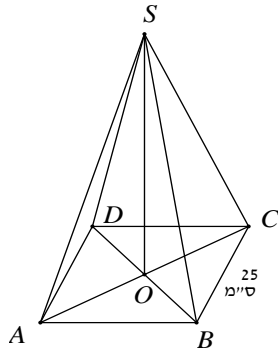
תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית. ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

## נפח פירמידה:

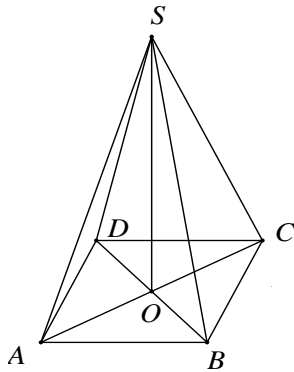
נפח פירמידה ששטח בסיסה הוא  $S$  וגובהה  $h$  הוא:  $V = \frac{S \cdot h}{3}$ .

## פירמידה שבסיסה ריבוע:

### שאלות יסודיות:

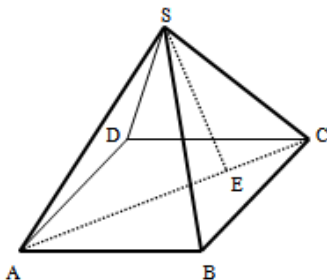


- (1) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע)  $SABCD$ . אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ. הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת  $35^\circ$ .
- חשב את אלכסון הבסיס.
  - חשב את גובה הפירמידה.
  - סמן נקודה  $E$  כאמצע  $BC$  וחשב את הזווית שבין  $SE$  לבסיס הפירמידה.



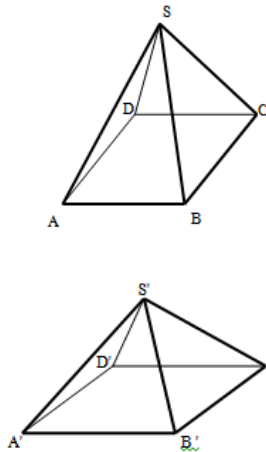
- (2) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת  $SABCD$ . אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ. אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.
- חשב אורך גובה של פאה צדדית.
  - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
  - חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

### שאלות מסכמות:



- (3) נתונה פירמידה ישרה  $SABCD$  שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע  $a$ . אורך מקצועות הפירמידה הוא  $3a$ . מעבירים את האלכסון  $AC$  ועליו מסמנים את הנקודה  $E$  המחלקת אותו ביחס של  $1:3$   $\left(\frac{CE}{AE} = \frac{1}{3}\right)$ . מהקדקוד  $S$  מעבירים את הקטע  $SE$ .
- הבע באמצעות  $a$  את גובה הפירמידה.

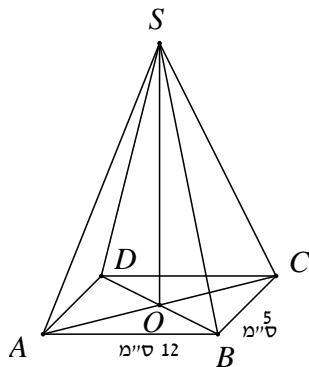
- חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע  $SE$  לגובה הפירמידה.
- מצא את  $a$  אם ידוע כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא  $\sqrt{560}$  סמ"ר.



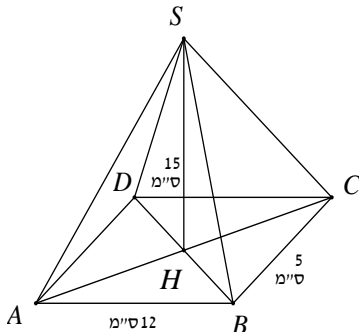
- 4 נתונות שתי פירמידות ריבועיות ישרות:  $SABCD$  ו- $S'A'B'C'D'$ . אורך מקצוע הבסיס בפירמידה הראשונה הוא  $a$  וגובהה הוא  $2a$ . אורך מקצוע הבסיס בפירמידה השנייה הוא  $2a$  וגובהה הוא  $a$ .
- קבע לאיזו פירמידה יש נפח גדול יותר.
  - כעת משנים את הגובה של כל פירמידה כך שנפחן יהיה זהה והוא:  $a^3$ . מצא את יחס בין המקצוע הצדדי של הפירמידה  $SABCD$  למקצוע הצדדי של הפירמידה  $S'A'B'C'D'$ .
  - דנה טוענת כי מאחר שנפח שתי הפירמידות זהה, הרי גם שטח הפנים שלהן זהה. האם דנה צודקת? הוכח את טענתך באמצעות חישוב מתאים.

## פירמידה שבסיסה מלבן:

### שאלות יסודיות:

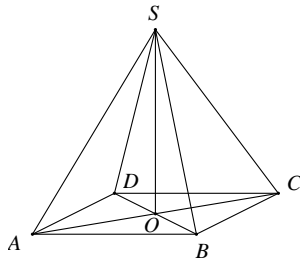


- 5 נתונה פירמידה מרובעת וישרה  $SABCD$  שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם:  $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 5$  ס"מ. אורך גובה הפירמידה הוא:  $SO = 15$  ס"מ.
- חשב את נפח הפירמידה.
  - חשב את אורך אלכסון הבסיס.
  - חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

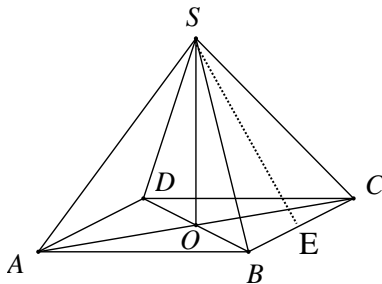


- 6 נתונה פירמידה מרובעת ישרה  $SABCD$  שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם:  $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 5$  ס"מ. אורך גובה הפירמידה הוא:  $SH = 15$  ס"מ.
- חשב את גובה הפאה הצדדית  $SBC$ .
  - חשב את גובה הפאה הצדדית  $ABS$ .
  - חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
  - הנקודה  $E$  היא אמצע  $BC$ . חשב את הזווית שבין  $SE$  לבסיס  $ABCD$ .

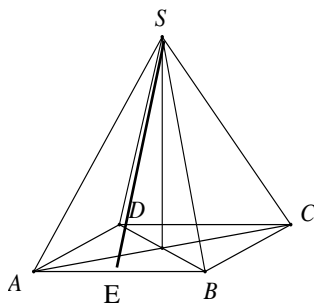




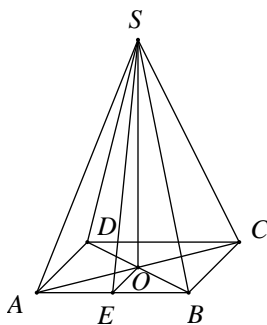
- (7) נתונה פירמידה ישרה ומרובעת שבסיסה ABCD הוא מלבן.  
נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס"מ.  
גובה הפירמידה SO הוא 12 ס"מ.
- חשב את אורך המקצוע הצדדי.
  - חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
  - נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא  $40^\circ$ . חשב את אורך מקצוע הבסיס BC.
  - חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.



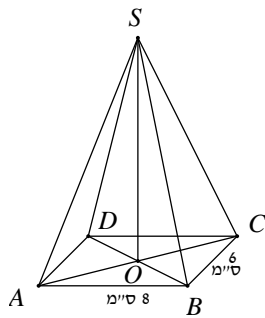
- (8) נתונה פירמידה SABCD, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. E אמצע BC.  $AB = 16$  ס"מ.  $SO = 10$  ס"מ.  
גובה הפירמידה:  $SO = 10$  ס"מ.
- חשב את הזווית שבין הקטע SE לבסיס הפירמידה ABCD.
  - חשב את מקצוע BC אם נתון כי נפח הפירמידה הוא 480 סמ"ק.
  - סמן ב-F את אמצע המקצוע AB. חשב את הזווית שבין SF לבסיס הפירמידה.



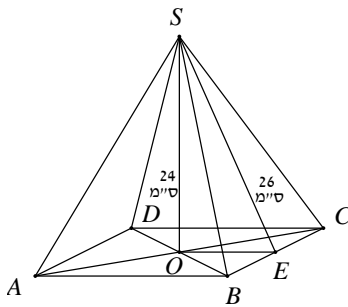
- (9) נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מלבן. זווית הראש של פאה צדדית SAB היא  $56^\circ$ . אורך מקצוע הבסיס AB שווה ל-12 ס"מ.
- חשב את אורך הגובה SE של הפאה SAB.
  - חשב את אורך המקצוע הצדדי SA.
  - נתון כי אורך המקצוע AD הוא 8 ס"מ. חשב את גובה הפירמידה.
  - חשב את נפח הפירמידה.
  - חשב את הזווית בין הקטע SE לבסיס הפירמידה.
  - חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



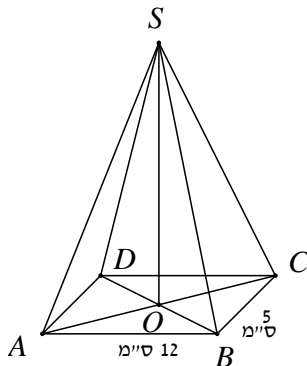
- (10) נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. אורך המקצוע AB הוא 15 ס"מ. הגובה SE של הפאה הצדדית SAB הוא 20 ס"מ. גובה הפירמידה SO הוא 18 ס"מ.
- חשב את אורך מקצוע הבסיס AD.
  - חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.
  - חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.



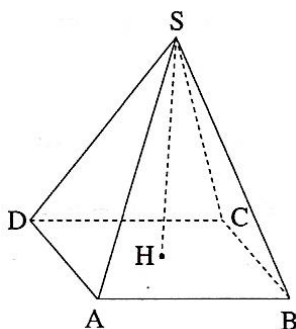
- 11 נתונה פירמידה ישרה SABCD. הבסיס ABCD הוא  
הוא מלבן שבו:  $AB = 8$  ס"מ,  $BC = 6$  ס"מ.  
אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.  
א. חשב את הזווית  $\angle CSA$ .  
ב. חשב את הזווית  $\angle CSB$ .  
ג. חשב את נפח הפירמידה.



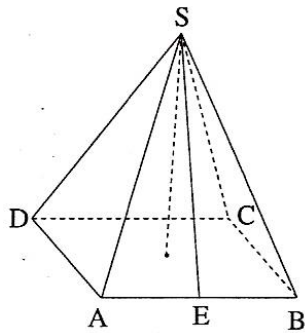
- 12 נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה  
שבסיסה מלבן. גובה הפירמידה שווה  
ל-24 ס"מ. הגובה SE בפאה הצדדית SBC  
שווה ל-26 ס"מ. חשב את:  
א. אורך המקצוע AB.  
ב. הזווית בין הקטע SE לבסיס ABCD.  
ג. נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק.  
ד. חשב את אורך המקצוע BC.



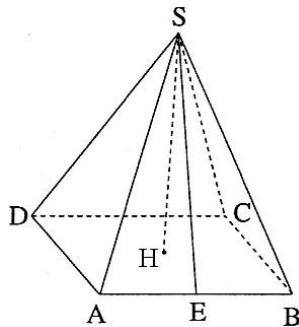
- 13 נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD.  
בסיס הפירמידה הוא מלבן. אורכי  
צלעות הבסיס הם:  $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 5$  ס"מ.  
זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא  $42^\circ$ .  
א. חשב אורך מקצוע צדדי.  
ב. חשב את שטח הפאה SBC.  
ג. חשב את גובה הפירמידה, SO.



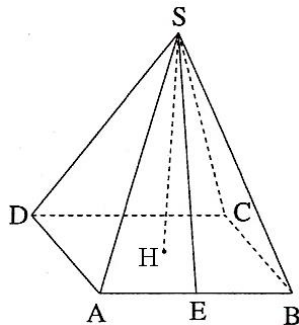
- 14 הבסיס ABCD של פירמידה ישרה  
ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).  
נתון:  $AD = 17$  ס"מ,  $AB = 25$  ס"מ,  $SH = 12$  ס"מ.  
א. חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.  
ב. חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.  
ג. חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין  
בסיס הפירמידה.



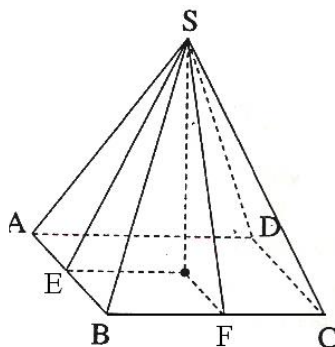
- 15) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).  
נתון:  $AD = 15$  ס"מ,  $AB = 20$  ס"מ. הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא  $SE = 22$  ס"מ.
- חשב את גובה הפירמידה.
  - חשב את נפח הפירמידה.
  - חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.



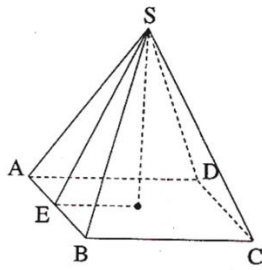
- 16) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).  
נתון:  $AD = 16$  ס"מ,  $AB = 17$  ס"מ. הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא  $SE = 12$  ס"מ.
- חשב את גובה הפירמידה.
  - חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
  - חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.



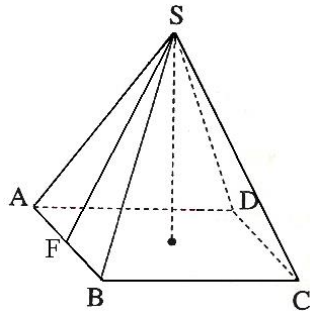
- 17) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).  
נתון:  $AB = 20$  ס"מ,  $SH = 8$  ס"מ. הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא  $SE = 12$  ס"מ.
- חשב את האורך AD.
  - חשב את אורך DH.
  - חשב את נפח הפירמידה.



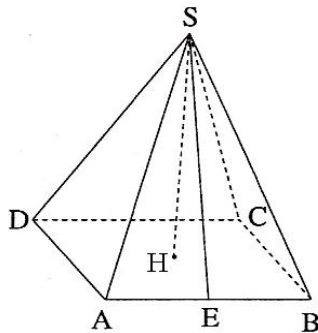
- 18) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).  
נתון:  $AB = 15$  ס"מ,  $BC = 20$  ס"מ. E היא האמצע של BC. הזווית שבין הישר SE לבסיס היא  $55^\circ$ .
- חשב את גובה הפירמידה.
  - F היא האמצע של BC. חשב את זווית שבין הישר SF לבין בסיס הפירמידה.
  - חשב את גובה הפאה הצדדית SAB.
  - חשב את שטח הפאה SAB.



- 19** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ. הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ  $SE$ .  
 א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.  
 ב. חשב את מקצוע הבסיס, BC.  
 ג. חשב את מקצוע הבסיס, AB, אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.

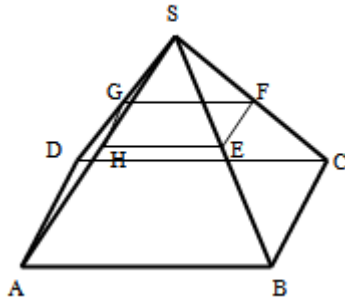


- 20** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון:  $AD = 15$  ס"מ,  $AB = 20$  ס"מ. זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא  $38^\circ$ .  
 א. חשב את הגובה של הפאה הצדדית SAB.  
 ב. חשב את הזווית שבין SF לבין בסיס הפירמידה.  
 ג. חשב את גובה הפירמידה.

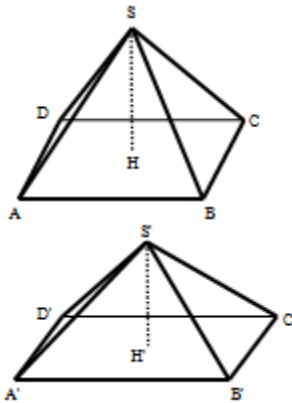


- 21** הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור). נתון:  $AD = 15$  ס"מ,  $AB = 20$  ס"מ. זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא  $38^\circ$ .  
 א. חשב את גובה הפאה SAB.  
 ב. חשב את גובה הפירמידה.  
 ג. חשב את זווית הראש של הפאה SAD.

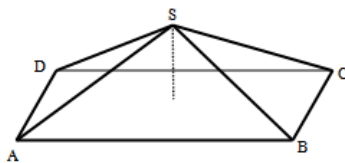
## שאלות מסכמות:



- (22) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מאמצעי המקצועות הצדדיים מעבירים קטעים כך שנוצר המלבן EFGH. ידוע כי שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר וכי אורך האלכסון שלו הוא 10 ס"מ. הזווית HSF היא בת  $50^\circ$ .
- מצא את מידות הבסיס ABCD.
  - מצא את גובה הפירמידה.
  - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.



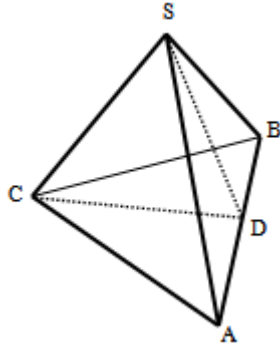
- (23) נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן: האחת - SABCD והשנייה - S'A'B'C'D'. הקטעים SH ו-S'H' הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות. ידוע כי:  $AB = 2k$ ,  $BC = k$ ,  $HS = 3k$  וכי:  $A'B' = 3k$ ,  $B'C' = k$ ,  $H'S' = 2k$ .
- לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות. נמק.
  - i. לשתי הפירמידות אותו שטח פנים.
  - ii. לשתי הפירמידות אותו הנפח.
  - iii. בשתי הפירמידות הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה שווה.
  - iv. אורך מקצוע צדדי בפירמידה SABCD גדול יותר מאורך מקצוע צדדי בפירמידה S'A'B'C'D'.
- ב. מצא את הערך של  $k$  בעבורו סכום הנפחים של שתי הפירמידות יהיה שווה לנפחה של קובייה בעלת אורך מקצוע של 4 ס"מ.



- (24) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. ידוע כי מקצוע הבסיס BC שווה באורכו לגובה הפירמידה ויסומן ב- $t$ . כמו כן נתון כי אלכסון הבסיס AC גדול פי 4 מהמקצוע BC.
- הבע באמצעות  $t$  את אורך המקצוע AB.
  - הורד גובה SH למקצוע BC במישור הפאה SBC וחשב את הזווית הנוצרת בינו לבין מישור הבסיס ABCD.
  - חשב את הזווית שבין שני מקצועות צדדיים שאינם סמוכים.
  - מסמנים את פגישת התיכונים בפאה SBC ב-N. מעבירים קטע היוצא מנקודת פגישת האלכסונים במישור הבסיס ABCD לנקודה N. חשב את הזווית שהוא יוצר עם הבסיס.

## פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

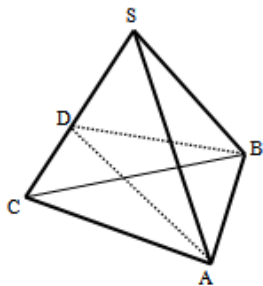
### שאלות מסכמות:



- 25 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מעבירים את הגובה SD בפאה הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC. זווית הבסיס של פאה צדדית במנסרה היא  $50^\circ$  ושטח המעטפת הוא: 89.38 סמ"ר.
- מצא את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.
  - מצא את גובה המנסרה.
  - חשב את הזווית SDC.
  - חשב את הזווית שבין המקצוע SC לבסיס הפירמידה.

## פירמידה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

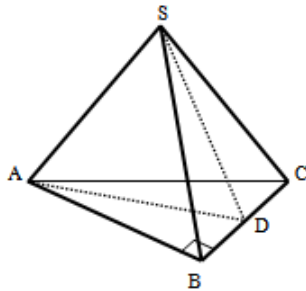
### שאלות מסכמות:



- 26 נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ ).
- מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו-SBC כך שהזווית הנוצרת בין מישורים אלו היא  $\angle ADB = 42^\circ$ .
- ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ.
- הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC ביחס:  $\frac{DC}{SD} = \frac{2}{3}$ .
- חשב את אורך הגובה AD.
  - חשב את זווית הראש בפאה SAC.
  - חשב את שטח משולש הבסיס ABC.

## פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:

### שאלות מסכמות:



(27) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא

משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ).

בפירמידה זו מעבירים גובה SD בפאה הצדדית

SBC כך שנוצר המשולש SAD.

ידוע כי משולש זה הוא שווה שוקיים ובו

נסמן:  $SA = AD = 2m$ .

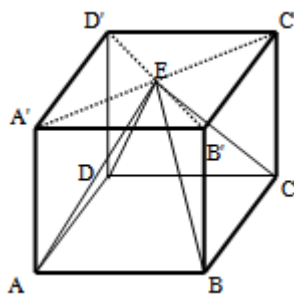
הזווית הנוצרת בין הגובה SD והקטע AD

תסומן ב- $\alpha$ :  $\angle SDA = \alpha$ .

א. הראה כי הגובה SD בפאה SBC שווה באורכו למקצוע הבסיס AB.

ב. מה ניתן לומר על המשולשים SAB ו-SAD במקרה זה?

ג. הבע באמצעות  $m$ ,  $\alpha$  את גובה הפירמידה.



(28) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D'. מעבירים את

האלכסונים A'C' ו-B'D' בבסיס העליון ומסמנים

ב-E את פגישתם. מהנקודה E מעבירים את

הקטעים AE, BE, CE ו-DE כך שנוצרת הצורה

המרחבית ABCDE.

א. איזו צורה היא ABCDE? נמק.

ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הקטע AE

ומישור הפאה AA'D'D'.

ג. חשב את הנפח הכלוא בתוך הקובייה ומחוץ לצורה ABCDE

אם ידוע כי שטח הפנים של הקובייה הוא 384 סמ"ר.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 35.36 ס"מ ב. 12.378 ס"מ ג.  $44.72^\circ$
- (2) א. 19.079 ס"מ ב. 601.89 ס"מ ג.  $64.896^\circ$
- (3) א.  $a\sqrt{8.5}$  ב.  $6.9^\circ$  ג.  $a = 2$
- (4) א.  $V_{S'ABCD} = \frac{4}{3}a^3 > V_{SABCD} = \frac{2}{3}a^3$  ב. פי  $4\sqrt{\frac{19}{82}}$  ג. דנה טועה -  $P_{S'ABCD} = 9a^2 \neq P_{SABCD} \approx 7a^2 dy$
- (5) א. 300 סמ"ק ב. 13 ס"מ ג.  $66.57^\circ$
- (6) א. 16.115 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. 263.26 סמ"ר ד.  $68.2^\circ$
- (7) א. 13 ס"מ ב.  $67.38^\circ$  ג. 8.89 ס"מ BC  
ד.  $AB = 4.579$  ס"מ,  $V = 162.32$  סמ"ק
- (8) א.  $51.34^\circ$  ב. 9 ס"מ BC ג.  $65.77^\circ$
- (9) א. 11.284 ס"מ SE ב. 12.78 ס"מ SA ג. 10.551 ס"מ h  
ד. 337.632 סמ"ק V ה.  $69.24^\circ$  ו.  $55.65^\circ$
- (10) א. 17.435 ס"מ AD ב. 19.5 ס"מ SF ג. 640 סמ"ר M
- (11) א.  $34.21^\circ$  ב.  $20.328^\circ$  ג. 260 סמ"ק V
- (12) א. 20 ס"מ AB ב.  $67.38^\circ$  ג. 15 ס"מ BC
- (13) א. 6.796 ס"מ ב. 16.282 סמ"ר  $S_{\Delta SBC}$  ג. 2.533 ס"מ h
- (14) א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג.  $38.44^\circ$
- (15) א. 20.68 ס"מ h ב. 2068.2 סמ"ק V ג.  $70.07^\circ$
- (16) א. 8.94 ס"מ h ב. 14.7 ס"מ ג.  $37.45^\circ$
- (17) א. 17.89 AD ב. 13.42 ס"מ DH ג. 954.1 סמ"ק V
- (18) א. 14.28 ס"מ h ב.  $62.29^\circ$  ג. 17.43 ס"מ  
ד. 130.7 סמ"ר
- (19) א.  $50.6^\circ$  ב. 27.93 ס"מ BC ג. 6.32 ס"מ AB
- (20) א. 29.04 ס"מ ב.  $75.03^\circ$  ג. 28.05 ס"מ h
- (21) א. 29.04 ס"מ ב. 28.05 ס"מ h ג.  $28.27^\circ$
- (22) א. 12 ס"מ ו-16 ס"מ ב. 21.44 ס"מ ג. 823 סמ"ר



(23) א. i. לא נכון. שטח הפנים הוא שונה:  $P_{SABCD} \approx 11.245k^2$ ,  $P_{S'A'B'C'D'} \approx 11.68k^2$ .

ii. נכון. הנפח הוא:  $V = 2k^3$ .

iii. לא נכון. הזוויות המתקבלות הן:  $51.67^\circ$ ,  $69.56^\circ$ .

vi. נכון. מתקבל:  $k\sqrt{10.25} > k\sqrt{6.5}$  ב.  $k = \sqrt[3]{16}$ .

(24) א.  $AB = t\sqrt{15}$  ב.  $\angle SHM = 27.31^\circ$  ג.  $\angle ASC = 126.86^\circ$

ד.  $\angle NMH = 14.47^\circ$ .

(25) א. 10 ס"מ. ב. 5.21 ס"מ. ג.  $61^\circ$  ד.  $42^\circ$ .

(26) א. 11.16 ס"מ. ב.  $53.13^\circ$  ג. 47.27 סמ"ר.

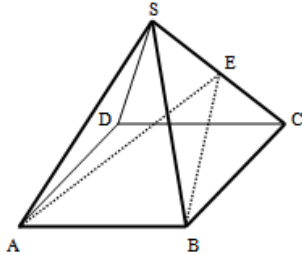
(27) א.  $SD = AB = 4m \cos \alpha$  ב. המשולשים חופפים. ג.  $2\sqrt{3}m \cos \alpha$ .

(28) א. הצורה היא פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע.

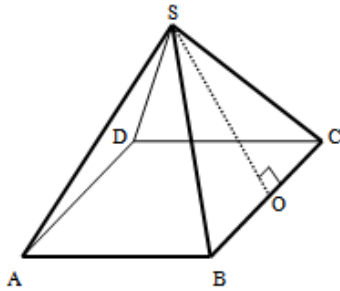
ב.  $24.1^\circ$  ג.  $341\frac{1}{3}$  סמ"ק.

## תרגול נוסף – פירמידה ישרה:

\*הערה: לשאלות בחוצץ זה אין פתרון בסרטונים.



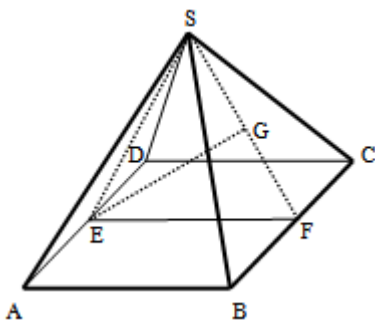
- (1) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע. מידות גובה הפירמידה ומקצוע הפירמידה הצדדי הם בהתאמה: 14 ס"מ ו-18 ס"מ.
- חשב את אורך מקצוע הבסיס.
  - חשב את נפח הפירמידה.
  - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
  - חשב את זווית הראש של פאה צדדית בפירמידה.
  - חשב את הזווית שבין המקצועות SB ו-SD.



- (2) בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע מעבירים את הגובה SO למקצוע הבסיס BC בפאה הצדדית SBC וידוע כי הזווית שהוא יוצר עם מישור הבסיס ABCD היא  $75^\circ$ .
- פי כמה גדול גובה הפירמידה מאורך מקצוע הבסיס שלה?

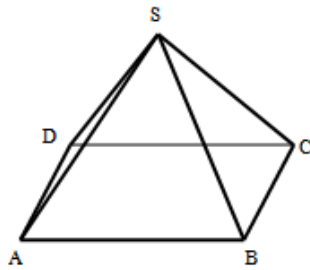
ידוע כי גובה הפירמידה הוא 18.66 ס"מ.

- חשב את הזווית הנוצרת בין גובה הפירמידה ובין אחד המקצועות הצדדיים.
- חשב את זווית הראש של אחת הפאות הצדדיות.
- חשב את הזווית הנוצרת שבין שני המקצועות SD ו-SB.

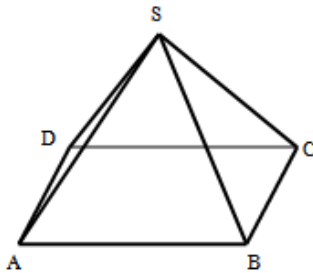


- (3) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע. מאמצעי המקצועות AD ו-BC מעבירים את הקטע EF ויוצרים את המשולש SEF. הנקודה G נמצאת על אמצע SF וידוע כי המשולש SEF הוא שווה צלעות. מסמנים:  $GE = k$ .

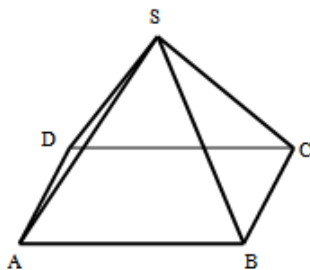
- הבע באמצעות  $k$  את נפח הפירמידה.
- חשב את זווית הבסיס של פאה צדדית.
- חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה. מעבירים את הקטעים BE ו-BG כך שנוצר המשולש BEG.
- ידוע כי היקפו הוא: 28.17 ס"מ. מצא את  $k$ .



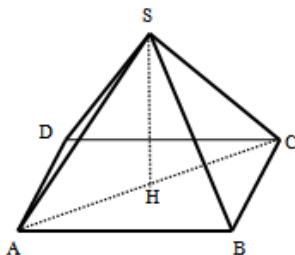
- (4) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. ידוע כי:  $8 \text{ ס"מ} = BC$ ,  $12 \text{ ס"מ} = AB$ .  
הזווית שבין המקצוע SB ומישור הבסיס היא:  $60^\circ$ .  
א. חשב את האורך של אלכסון בסיס הפירמידה.  
ב. חשב את אורך גובה הפירמידה.  
ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.  
ד. חשב את נפח הפירמידה.



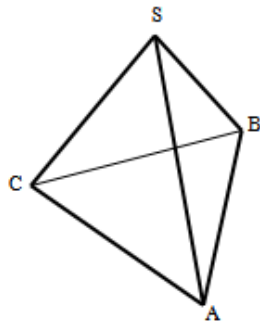
- (5) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. ידוע כי אורך המקצוע AB של המלבן הגדול פי 2 מאורך המקצוע BC. הזווית הנוצרת בין מקצוע צדדי למישור בסיס הפירמידה היא  $60^\circ$ . נפח הפירמידה הוא:  $72\sqrt{15} \text{ סמ"ק}$ .  
א. מצא את מידות בסיס הפירמידה (AB ו-BC).  
ב. חשב את זווית הראש של הפאה הצדדית SAB.  
ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.



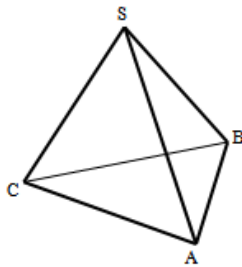
- (6) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מקצועות הפירמידה מקיימים:  $SB = 3k$ ,  $AB = 2k$ ,  $BC = k$ .  
א. מצא את זוויות הבסיס של הפאות SAB ו-SBC.  
ב. הבע באמצעות  $k$  את גובה הפירמידה.  
ג. מצא את  $k$  בעבורו נפח הפירמידה יהיה שווה ל- $232 \text{ סמ"ק}$ .



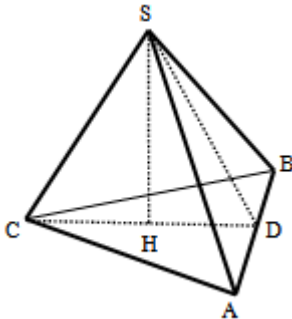
- (7) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן. מעבירים את האלכסון AC ומורידים את הגובה SH. אורך מקצוע צדדי הוא  $k$  ומסמנים את הזווית:  $\angle ACB = \alpha$  וכן זווית הראש של הפאה SBC היא:  $2\alpha$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את מידות הבסיס ABCD.  
ב. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את גובה הפירמידה.  
ג. מצא את  $\alpha$  אם ידוע כי אורך גובה הפירמידה שווה למחצית מאורך האלכסון AC.



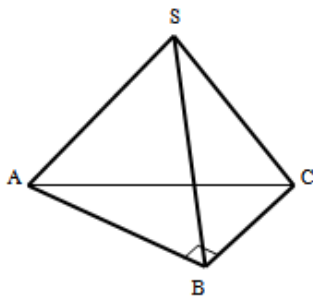
- (8) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. ידוע כי אורך מקצוע הבסיס שלה הוא 12 ס"מ וכי אורך מקצוע צדדי שלה הוא 14 ס"מ.
- חשב את שטח בסיס הפירמידה ABC.
  - חשב את גובה הפירמידה.
  - חשב את נפח הפירמידה.
  - חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
  - חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי למישור הבסיס ABC בפירמידה.



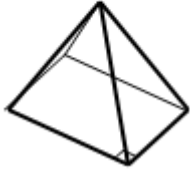
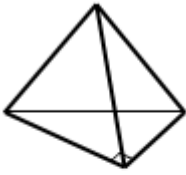
- (9) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ ). ידוע כי משולש הפאה SAC הוא שווה צלעות שאורך צלעו היא 16 ס"מ. זווית הראש של הפאה SAB היא  $30^\circ$ .
- מצא את אורך המקצוע AB.
  - חשב את הזווית שבין המקצוע SC למישור הבסיס ABC.
  - חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
  - חשב את נפח הפירמידה.



- (10) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ ). מורידים גובה SD בפאה הצדדית SAB ואת גובה הפירמידה SH. ידוע כי המשולש SCD הוא שווה שוקיים שבו  $SC = CD = 12$  ס"מ ו- $\angle SCD = 50^\circ$ .
- מצא את אורך גובה הפירמידה.
  - מצא את אורך המקצוע AB.
  - חשב את הזווית שבין המקצועות AS ו-CS.
  - חשב את הזווית שבין המקצועות AS ו-BS.



- (11) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ). ידוע כי אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא 8 ס"מ וכי שטח משולש הבסיס הוא 24 סמ"ר. הפאה הצדדית SAB היא משולש שווה צלעות.
- מצא את מידות מקצועות הבסיס.
  - חשב את אורך גובה הפירמידה.
  - חשב את הזווית שבין המקצוע SB למישור הבסיס ABC.



**12) לפניך שתי הצורות המרחביות הבאות:**

1. פירמידה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית בעל

מקצועות ניצבים במידות  $2a$ ,  $a$  וגובה  $2a$ .

2. פירמידה ישרה שבסיסה מלבן במידות  $2a$ ,  $a$  וגובה  $2a$

א. לפניך מספר טענות, קבע אלו מהן נכונות ואלו שגויות

ונמק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים.

i. הנפח של פירמידה 2 גדול פי 2 מהנפח של

פירמידה 1.

ii. הזווית שיוצר גובה הפירמידה עם כל אחד

מהמקצועות הצדדיים בשתי הפירמידות שווה.

iii. שטח המעטפת של פירמידה 2 גדול פי 2 משטח המעטפת של

פירמידה 1.

ב. הבע באמצעות  $a$  את אורך מקצוע קובייה שנפחה שווה לסכום הנפחים

של פירמידות 1 ו-2.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 16 ס"מ. ב. 1194.66 סמ"ק. ג. 772 סמ"ר. ד.  $52.7^\circ$ . ה.  $77.88^\circ$ .
- (2) א. פי 1.86. ב.  $20.75^\circ$ . ג.  $29^\circ$ . ד.  $41.5^\circ$ .
- (3) א.  $\frac{4k^3}{9}$ . ב.  $63.43^\circ$ . ג.  $50.76^\circ$ . ד.  $k = 10$ .
- (4) א.  $\sqrt{208}$  ס"מ. ב. 12.48 ס"מ. ג. 364.23 סמ"ר. ד. 399.36 סמ"ק.
- (5) א. 12 ס"מ, 6 ס"מ. ב.  $53.13^\circ$ . ג. 294.46 סמ"ר.
- (6) א.  $70.52^\circ, 80.4^\circ$ . ב.  $k\sqrt{7.75}$ . ג.  $k = 5$ .
- (7) א.  $2k \sin \alpha, 2k \sin \alpha \tan \alpha$ . ב.  $k\sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$ . ג.  $\alpha = 35.56^\circ$ .
- (8) א.  $36\sqrt{3}$  סמ"ר. ב.  $\sqrt{148}$  ס"מ. ג.  $24\sqrt{111}$  סמ"ק. ד.  $60.33^\circ$ .
- (9) א. 8.28 ס"מ. ב.  $70.52^\circ$ . ג. 285.7 סמ"ר. ד. 321.27 סמ"ק.
- (10) א. 9.19 ס"מ. ב. 12.83 ס"מ. ג.  $69^\circ$ . ד.  $64.6^\circ$ .
- (11) א.  $10 \times 8 \times 6$  ס"מ. ב.  $\sqrt{39}$  ס"מ. ג.  $51.31^\circ$ .
- (12) א. i. הטענה נכונה. ii. הטענה נכונה. iii. הטענה אינה נכונה. ב.  $a\sqrt[3]{2}$ .

## תוכן העניינים:

פרק 3.....69

חוקי החזקות והשורשים.....69

69..... סיכום חוקי החזקות והשורשים :

69..... סיכום חוקי החזקות :

69..... סיכום חוקי השורשים :

70..... שאלות לפי נושאים :

70..... שאלות בחוקי חזקות :

73..... שאלות בחוקי שורשים :

76..... שאלות העוסקות בכתיבה מדעית של מספרים :

77..... תשובות סופיות :

## פרק 3

# חוקי החזקות והשורשים

### סיכום חוקי החזקות והשורשים:

#### סיכום חוקי החזקות:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ .3	$a^1 = a$ .2	$a^0 = 1$ .1
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ .6	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .5	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ .4
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$ .9	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ .8	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ .7

#### סיכום חוקי השורשים:

$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$ .3	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ .2	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ .1
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ .6	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ .5	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ .4



## שאלות לפי נושאים:

### שאלות בחוקי חזקות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ .

א. $a^2 a^6$	ב. $t^3 t^5 t^7$	ג. $b^2 b^5 b^{12} b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$	ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$	ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3 a^{19}}{a^{15}}$	ח. $\frac{x^{30}}{x^9 x^{18}}$	ט. $\frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}}$
י. $3^2 3^3 3^4$	יא. $\frac{2^{16} 2^2}{2^{10}}$	יב. $\frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ .

א. $\frac{3^4 2^7}{2^6 3^2}$	ב. $\frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}}$	ג. $\frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}$
------------------------------	---	--------------------------------------

(3) לפי הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $243 \cdot 2^n$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$
ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ד. $2^3 + 2^5$

5 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$
י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

6 לפניך הביטויים הבאים:  $\left((3^6)^n\right)^2$  ו-  $\left((3^2)^3\right)^4$ . מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$
------------------------------	--	--

8 פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^2 9 \cdot 81^2$	ב. $64^2 2^3 8^2$	ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$
ד. $\frac{2^4 16^5}{8 \cdot 512}$	ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

9 פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{(2a^2 b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$	ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$
ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$	ד. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

א.  $(a^2 b)^3$       ב.  $(m^4 n^3)^5$       ג.  $(x^{12} y^3)^3$

ד.  $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$       ה.  $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$       ו.  $\left(\frac{a^{14} b^4}{a^6 ab^3}\right)^3$

ז.  $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6$       ח.  $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2$       ט.  $\left(\frac{(b^{12} c)^2 c^{14}}{c(c^3 b^5)^4 b^3}\right)^2$

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א.  $\left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2$       ב.  $\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2$       ג.  $\left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3$

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א.  $\frac{1}{4^6}$       ב.  $\frac{1}{5^3}$       ג.  $\frac{1}{2^{10}}$   
ד.  $\frac{1}{8}$       ה.  $\frac{1}{81}$       ו.  $\frac{1}{125}$

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א.  $\frac{1}{4^{-3}}$       ב.  $\frac{1}{3^{-2}}$       ג.  $\frac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים :

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$	ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$	ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$
ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$	ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$	ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$	ב. $\frac{(4^4)^{-4} \cdot 3^{-11}}{(3^{-2} \cdot 4^3)^{-6}}$	ג. $\frac{2^{-3} \cdot 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 \cdot 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$
---	---	---

16) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$	ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$	ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$
---	---	---

שאלות בחוקי שורשים:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

א. $3^{\frac{1}{4}}$	ב. $2^{\frac{3}{5}}$	ג. $6^{\frac{5}{6}}$
ד. $-12^{\frac{2}{7}}$	ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$	ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$
ז. $5^{-\frac{1}{4}}$	ח. $27^{\frac{1}{3}}$	ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

א. $\sqrt{49}$	ב. $-\sqrt{25}$	ג. $\sqrt[3]{8}$
ד. $-\sqrt[7]{128}$	ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$	ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$
ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$	ח. $\sqrt[4]{-16}$	ט. $\sqrt[4]{-25^2}$
י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$		

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

- |   |   |   |
|---|---|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$                          | ב. $32^{-\frac{3}{5}}$                          | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$   |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$         | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$           | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$                     |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא :  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

- |   |  |  |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$                            | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$  | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$                   |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$                         | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$                                      | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$                          |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

- |                   |                |                          |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$    | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ |                          |

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

- |                          |                             |                                 |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$           | ב. $4\sqrt[3]{2}$           | ג. $2\sqrt[5]{3}$               |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$       | ח. $-5\sqrt[4]{2}$          | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$             |

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$   
 ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$   
 ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[5]{160}$   
 ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$   
 ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$   
 ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$   
 ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

### שאלות העוסקות בכתיבה מדעית של מספרים:

**(28)** בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

- |                    |                  |
|--------------------|------------------|
| א. 15,000,000      | ב. 1,500,000     |
| ג. 150,000,000,000 | ד. 23,400,000    |
| ה. 0.0003          | ו. 0.00000042    |
| ז. 0.000000042     | ח. 0.00000000042 |

**(29)** בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $(3,000,000)^2$ | ב. $(2,000,000)^2$   |
| ג. $(5,000)^3$     | ד. $(50,000)^3$      |
| ה. $(0.0012)^4$    | ו. $(0.00004)^3$     |
| ז. $(0.000005)^3$  | ח. $(0.000000007)^3$ |

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$  ב.  $t^{15}$  ג.  $b^{22}$  ד.  $k^5$  ה.  $n^5$  ו.  $c^4$   
 ז.  $a^7$  ח.  $x^3$  ט. 1 י.  $3^9$  יא.  $2^8$  יב.  $5^5$
- (2) א. 18 ב.  $ab$  ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n = 16$
- (4) א. 2 ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{5}{8}$  ד. 40
- (5) א.  $a^8$  ב.  $c^{30}$  ג.  $x^{26}$  ד.  $b$  ה.  $n^3$  ו.  $d^{10}$   
 ז. 2 ח. 9 ט.  $8^{18}$  י.  $3^7$  יא. 3 יב.  $3^5$
- (6)  $n = 2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$  ב.  $2^{21}$  ג.  $5^{10}$  ד.  $2^{12}$  ה.  $2^7$  ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$  ב.  $k$  ג.  $3\frac{1}{5}$  ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$  ב.  $m^{20} n^{15}$  ג.  $x^{36} y^9$  ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$  ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$  ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$  ח.  $t^4 r^{12}$  ט.  $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$  ב.  $5^{-3}$  ג.  $2^{-10}$  ד.  $2^{-3}$  ה.  $3^{-4}$  ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד.  $\frac{1}{9}$  ה. 1000 ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$  ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$  ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$  ב.  $k$  ג.  $m^{2n+12}$
- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$  ב.  $\sqrt[5]{2^3}$  ג.  $\sqrt[6]{6^5}$  ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$  ה.  $-\sqrt[3]{-4}$  ו.  $\phi$   
 ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$  ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$  ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$



18. א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16 ז.  $\phi$  ח.  $\phi$  ט.  $\phi$  י. -27
19. א. 4 ב.  $\frac{1}{8}$  ג.  $\frac{1}{4}$  ד. 125 ה.  $\frac{32}{243}$  ו.  $\frac{49}{16}$  ז.  $\frac{1}{2}$  ח.  $\frac{10}{49}$  ט.  $\frac{27}{4}$  י.  $\sqrt{2}$
20. א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו.  $\sqrt{2}$  ז.  $\sqrt{5}$  ח.  $\sqrt{2}$  ט.  $\sqrt{x^3}$  י.  $\sqrt[3]{24}$
21. א.  $\sqrt{18}$  ב.  $\sqrt{75}$  ג.  $\sqrt{9}$  ד.  $\sqrt[3]{24}$  ה.  $\sqrt{x^3}$  ו.  $\sqrt{20}$  ז.  $\sqrt[3]{128}$  ח.  $\sqrt[5]{96}$  ט.  $\sqrt[3]{6}$  י.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
22. א.  $\sqrt[4]{40 \frac{1}{2}}$  ב.  $\sqrt[3]{-250}$  ג.  $-\sqrt[4]{1250}$  ד.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$  ה.  $2\sqrt{3}$  ו.  $4\sqrt{3}$  ז.  $3\sqrt{7}$  ח.  $3\sqrt[3]{2}$  ט.  $x^2\sqrt{x}$  י.  $2\sqrt{10}$
23. א.  $3\sqrt[4]{2}$  ב.  $3\sqrt[3]{4}$  ג.  $2\sqrt[3]{3}$  ד.  $8\sqrt{5}$  ה.  $3\sqrt[3]{4}$  ו.  $2\sqrt[3]{7}$  ז.  $2\sqrt[3]{5}$  ח.  $2\sqrt{2}$  ט.  $2\sqrt[3]{3}$  י.  $2\sqrt[3]{4}$
24. א.  $\sqrt{2}$  ב.  $4\sqrt{7}$  ג.  $6\sqrt[3]{2}$  ד.  $\sqrt[4]{5}$  ה.  $4\sqrt{5}$  ו.  $\sqrt{2}$  ז.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  או  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  ח.  $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$  ט.  $8\sqrt{2}$  י.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$  או  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$
25. א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$  ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$  ד. 27 ה.  $\frac{1}{7}$  ו.  $\sqrt[8]{2^5}$  ז.  $1.5 \cdot 10^7$  ח.  $1.5 \cdot 10^6$  ט.  $1.5 \cdot 10^{11}$  י.  $1.5 \cdot 10^4$
26. א.  $4.2 \cdot 10^{-7}$  ב.  $4.2 \cdot 10^{-8}$  ג.  $4.2 \cdot 10^{-10}$  ד.  $4.2 \cdot 10^{-15}$  ה.  $1.25 \cdot 10^{14}$  ו.  $1.25 \cdot 10^{11}$  ז.  $1.25 \cdot 10^{12}$  ח.  $9 \cdot 10^{12}$  ט.  $6.4 \cdot 10^{-14}$  י.  $3.43 \cdot 10^{-25}$
27. א.  $1.5 \cdot 10^7$  ב.  $1.5 \cdot 10^6$  ג.  $1.5 \cdot 10^{11}$  ד.  $2.34 \cdot 10^7$  ה.  $3 \cdot 10^{-4}$  ו.  $1.6 \cdot 10^{-15}$  ז.  $1.25 \cdot 10^{14}$  ח.  $1.25 \cdot 10^{11}$  ט.  $1.25 \cdot 10^{12}$  י.  $9 \cdot 10^{12}$
28. א.  $1.5 \cdot 10^7$  ב.  $1.5 \cdot 10^6$  ג.  $1.5 \cdot 10^{11}$  ד.  $2.34 \cdot 10^7$  ה.  $3 \cdot 10^{-4}$  ו.  $1.6 \cdot 10^{-15}$  ז.  $1.25 \cdot 10^{14}$  ח.  $1.25 \cdot 10^{11}$  ט.  $1.25 \cdot 10^{12}$  י.  $9 \cdot 10^{12}$
29. א.  $1.5 \cdot 10^7$  ב.  $1.5 \cdot 10^6$  ג.  $1.5 \cdot 10^{11}$  ד.  $2.34 \cdot 10^7$  ה.  $3 \cdot 10^{-4}$  ו.  $1.6 \cdot 10^{-15}$  ז.  $1.25 \cdot 10^{14}$  ח.  $1.25 \cdot 10^{11}$  ט.  $1.25 \cdot 10^{12}$  י.  $9 \cdot 10^{12}$

## תוכן העניינים:

פרק 4.....	80
משוואות מעריכיות.....	80
סיכום כללי :	80
שאלות יסודיות :	80
תשובות סופיות :	81
מערכת משוואות מעריכיות :	82
תשובות סופיות :	82
אי שוויונים מעריכיים :	83
תשובות סופיות :	83
תירגול נוסף :	84
תשובות סופיות :	90

## פרק 4

# משוואות מעריכיות

### סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = 1 = a^0$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות יסודיות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} \quad (3) \quad 2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \quad (2) \quad 3^{5x-3} = 3^{3x+7} \quad (1)$$

$$3^x = 5^x \quad (6) \quad \sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3} \quad (5) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x} \quad (4)$$

$$2^x + 2^x = 16 \quad (9) \quad e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x} \quad (8) \quad 5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{2x/3-2} \quad (7)$$

$$2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227 \quad (12) \quad 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162 \quad (11) \quad e^x + 2e^x = 3e^4 \quad (10)$$

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \quad (15) \quad e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad (14) \quad 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145 \quad (13)$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3} \quad (18) \quad 6^x - 4 \cdot 6^x + 3 = 0 \quad (17) \quad 5 \cdot 25^x - 26 \cdot 5^x + 5 = 0 \quad (16)$$

$$e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1 \quad (21) \quad e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad (20) \quad \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1} \quad (19)$$

## תשובות סופיות:

$x = 1$ (3	$x = 1$ (2	$x = 5$ (1
$x = 0$ (6	$x = -\frac{1}{2}$ (5	$x = -2$ (4
$x = 3$ (9	$x = 1, \frac{1}{6}$ (8	$x = 3$ (7
$x = 1$ (12	$x = 4$ (11	$x = 4$ (10
$x = 1, 2$ (15	$x = -1$ (14	$x = -2$ (13
$x = 0, 1$ (18	$x = 0$ (17	$x = \pm 1$ (16
$x = \pm 1$ (21	$x = 0$ (20	$x = 1, -\frac{1}{2}$ (19

## מערכת משוואות מעריכיות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^y - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3 \cdot 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

## תשובות סופיות:

(1,3) (4)	(1,2) (3)	(0,2) , (2,4) (2)	(2,9) (1)
(1,2) , (-1,0) (7)	(-1,-2) (6)	(3,2) (5)	

## אי שוויונים מעריכיים:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$e^x > 3 \quad (4)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (6)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (8)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x} \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (5)$$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (7)$$

## תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \cup 1\frac{1}{4} \leq x \quad (2)$$

$$x > \ln 3 \quad (4)$$

$$0 < x < 1 \quad (6)$$

$$x = 0 \quad (8)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (5)$$

$$x < 0 \cup \ln 4 < x \quad (7)$$

## תירגול נוסף:

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

$$\begin{array}{lll} 5^x \cdot 25^{x-1} = 625 & \text{(3)} & 3^{2x} = 27 & \text{(2)} & 2^x = 32 & \text{(1)} \\ 32^{\frac{x}{3}+5} = 4^{\frac{x}{2}-1} & \text{(6)} & 3^x \cdot 81^{x+2} = 9^{2x-1} & \text{(5)} & (4^{x-1})^2 = 8 & \text{(4)} \\ (3^x \cdot 27)^4 = 9 & \text{(9)} & 6^{x^2-4} = 1 & \text{(8)} & 100^x = 10000^{x+1} & \text{(7)} \\ 25 \cdot 5^{x^2+x} = 5^x & \text{(12)} & (2^{x^2})^4 \cdot 8^x = 2 & \text{(11)} & (5^{2x} \cdot 125^{x-3})^3 = \frac{1}{25} & \text{(10)} \\ 10^x (10^x)^x = 100 & \text{(15)} & \frac{3^{x^2}}{3^{6(x+1)}} = 3 & \text{(14)} & 4^{x^2} = 2^{x+1} & \text{(13)} \\ & & & & \frac{(3^x)^{3x}}{27} = \frac{3^x}{3} & \text{(16)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

$$\begin{array}{lll} 27^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} & \text{(19)} & \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot 8^x & \text{(18)} & 3^x = \frac{1}{27} & \text{(17)} \\ \frac{2^x}{8^{3x-2}} \left(\frac{2^{3-x}}{2^{x-4}}\right) = \frac{1}{4} & \text{(22)} & 16 \cdot (2^{3x+5} \cdot 8^{x+5})^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+8} & \text{(21)} & \frac{8}{32^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} & \text{(20)} \\ 8 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = 27 & \text{(25)} & 27 \left(\frac{3}{2}\right)^{4x+1} = 8 & \text{(24)} & \left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = \frac{4}{25} & \text{(23)} \\ 27 \left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2+9x} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+7} = 125 & \text{(27)} & 4 \left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} \left(\frac{7}{2}\right)^{3-x} = 49 & \text{(26)} \\ & & 49 \left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2+x} \left(\frac{7}{5}\right)^{4-6x} = 25 & \text{(28)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי שורשים):

תזכורת:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$(\sqrt{5^x})^3 = 125 \quad (30)$$

$$\sqrt{3^{x+2}} = 81 \quad (29)$$

$$(9\sqrt{27})^x \cdot 3^{x+2} = \frac{1}{9} \quad (32)$$

$$2^{2x-1} \cdot \sqrt{4^x \cdot 64} = 256 \quad (31)$$

$$\left(\frac{1}{49}\right)^x = \sqrt{7 \cdot 343^x \cdot \sqrt{7^x}} \quad (34)$$

$$\frac{125 \cdot 5^{x+1}}{\sqrt{25^x}} = \frac{\sqrt{5}}{5^{3-x}} \quad (33)$$

$$\sqrt[5]{256} = \frac{\sqrt{2^x}}{4 \cdot 8^x} \quad (36)$$

$$\sqrt[3]{8^x} \cdot (2 \cdot 32^x) = \sqrt[5]{1024} \quad (35)$$

$$\sqrt{10^{2x+1}} = 1000 \cdot \sqrt[3]{10^x} \quad (38)$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[5]{27^x}} = 1 \quad (37)$$

$$\sqrt{5^{4x+3}} = \frac{\sqrt[4]{25^{x-2}}}{125} \quad (40)$$

$$81 \cdot \sqrt[8]{3^x} = 27^{x+9} \quad (39)$$

$$27 \cdot \sqrt[3]{81} = 3^x \quad (42)$$

$$x+1 \sqrt{5^x} = 25 \quad (41)$$

$$9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt[3]{3} \quad (44)$$

$$100 \cdot \sqrt[3]{10^{x^2-3}} = 10,000 \quad (43)$$

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt[3]{8}}}} = 1 \quad (46)$$

$$\sqrt{32} \cdot 2^{x^2+4x} = \sqrt{\frac{1}{8}} \quad (45)$$

פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

$$5^{x+1} \cdot 3^{x-2} = 125 \quad (49)$$

$$4 \cdot 3^x \cdot 2^x = 144 \quad (48)$$

$$2^x \cdot 5^x = 1000 \quad (47)$$

$$2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392 \quad (52)$$

$$5 \cdot 3^{x+4} = 2187 \cdot 5^{x-2} \quad (51)$$

$$3^{x+2} \cdot 20 = 405 \cdot 2^x \quad (50)$$

$$\sqrt[3]{3^{x-1} \cdot 2^{x-2} \cdot 5^{x-3}} = 0.02 \quad (55)$$

$$7^{x^2-1} \cdot 10^{x^2+4} = 7 \cdot 10^6 \quad (54)$$

$$3^x \cdot 2^x = \sqrt{729} \cdot 10^3 \cdot 5^{-x} \quad (53)$$



פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחיסור):

$$\begin{array}{lll}
 2^x + 4 \cdot 2^x = 80 & \text{(58)} & 5^x + 6 \cdot 5^x = 875 & \text{(57)} & 3^x + 3^x = 18 & \text{(56)} \\
 8^x + 8^{x+2} = 1040 & \text{(61)} & 7 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = \frac{5}{27} & \text{(60)} & 7 \cdot 10^x - 10^x = 600 & \text{(59)} \\
 2^{x+3} + 2^{x-1} = \frac{17}{16} & \text{(64)} & 3^{x+2} - 3^{x-2} = 240 & \text{(63)} & 2^x + 2^{x+5} = 1056 & \text{(62)} \\
 5^{3x+2} + 3 \cdot 125^x = 28 & \text{(67)} & 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 245 & \text{(66)} & 3^{x-2} - 3^{x-3} = 54 & \text{(65)} \\
 (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 3.75 & \text{(70)} & 16^{x+\frac{1}{2}} - 4^{2x-\frac{1}{2}} = 14 & \text{(69)} & 2^{2x-1} + 4^{x+2} = 66 & \text{(68)} \\
 3^{3x+1} + 2178 = 27^{x+2} & \text{(73)} & 25^{2-x} - 5^{1-2x} = 124 & \text{(72)} & 3^{2-x} + 3^{1-x} = 4 & \text{(71)} \\
 8^{x+2} \cdot 3^{x-1} + 410 \frac{2}{3} = 4^{x+\frac{1}{2}} \cdot 6^{x+3} & \text{(75)} & 468 - 6^x = 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} & \text{(74)} \\
 10^{x+1} \cdot 2^{x-1} + 6 \cdot 10^3 = 5^{x+1} \cdot 4^{x+1} & \text{(76)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחיסור):

$$\begin{array}{lll}
 3^x - 3^{2-x} = 8 & \text{(78)} & 2^{x+2} + 2^{x-2} = 8.5 & \text{(77)} \\
 7^{x+4} + 7^{-x} = 350 & \text{(80)} & 5^x + 5^{2-x} = 26 & \text{(79)} \\
 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0 & \text{(82)} & 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0 & \text{(81)} \\
 36^{-x} - 7 \cdot 6^{-x} + 6 = 0 & \text{(84)} & 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0 & \text{(83)} \\
 2 \cdot 2^{4x+1} + 3 \cdot 4^x = 1 & \text{(86)} & 16^{x+2} + 96 \cdot 4^{x-1} = 1 & \text{(85)} \\
 2^{\frac{2}{3}x+3} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} = -1 & \text{(88)} & 4^{1.5x+1} + 3 \cdot 2^{6x-3} = 56 & \text{(87)} \\
 \frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3 & \text{(90)} & \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x-2} - 26 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}x} = 3 & \text{(89)} \\
 \frac{3^{x+2}}{3^{2x}+3^x-2} - \frac{6}{3^x+2} = \frac{3^x}{3^x-1} & \text{(92)} & \frac{8}{9^x+4} + 3 = -\frac{77}{81^x-16} & \text{(91)} \\
 \frac{25 \cdot 2^x - 68}{2^x - 2} = \frac{5 \cdot 2^{x+2} + 82}{2^x + 3} & \text{(93)}
 \end{array}$$

פתור את מערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} 2x-1=y \\ 4 \cdot 3^x - 3^{y+2} = -15 \end{cases} & (96) & \begin{cases} x+y-3=0 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} & (95) & \begin{cases} y=x+1 \\ 3^x + 3^y = 36 \end{cases} & (94) \\ \begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = -1 \end{cases} & (99) & \begin{cases} 7^{3x-7y} = 7 \\ 2^{2x-12y} = 256 \end{cases} & (98) & \begin{cases} 2^{x+3y} = 8 \\ 3^{2x+7y} = 81 \end{cases} & (97) \\ \begin{cases} 2^x + 5^y = 29 \\ 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^y = 1298 \end{cases} & (102) & \begin{cases} 3^x - 7^y = 20 \\ 9^x - 3 \cdot 49^y = 582 \end{cases} & (101) & \begin{cases} 2^{x+1} + 3^{y+1} = 17 \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 3^y = 21 \end{cases} & (100) \end{array}$$

103 פתור את המשוואות המעריכיות הבאות (משוואות עם בסיס טבעי  $(e)$ ) :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } e^{2x} = e^{x-1} & \text{ב. } e^{3x-5} = (e^{x+1})^2 \\ \text{ג. } e^{x^2-1} \cdot e^{6x} = e^6 & \text{ד. } e^{4x-5} = e \cdot e^{x^2} \\ \text{ה. } (e^x)^2 \cdot e^{5x+2} \cdot e^{-4x^2} = 1 & \text{ו. } \sqrt[3]{e^x} = e^{1-x} \\ \text{ז. } \sqrt[5]{e^{4x+7}} \cdot \sqrt{e} = e^5 \cdot e^x & \text{ח. } \sqrt[3]{e^{x^2+2}} = e^2 \cdot e^x \\ \text{ט. } e^{-x} \cdot \sqrt[4]{e^{4-x}} = 1 & \text{י. } \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} = e^2 \cdot e^{x^2} \\ \text{יא. } \frac{e^{x^2+6x-16}}{e^{4x}} = (e^2)^x & \text{יב. } \sqrt[4]{\frac{e^x}{e^{3x-2}}} = e^{5+x} \\ \text{יג. } e^x + e^{x+2} = e^4 & \text{יד. } e^{-x-1} + e^{3-x} = e^3 \\ \text{טו. } e^{2x} - e^{2x-3} = \sqrt{e} & \text{טז. } e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 \\ \text{יז. } e^{2x} - e^x - 6 = 0 & \text{יח. } e^{2x} + 11e^x + 30 = 0 \\ \text{יט. } e^x - 1 = 6e^{-x} & \text{כ. } e^{3x} - 18e^{-3x} = 3 \\ \text{כא. } 2 \cdot \sqrt[4]{e^x} + 4 \cdot \sqrt[4]{e^{-x}} = 9 & \text{כב. } e^x - \sqrt[3]{e^x} = 1 \\ \text{כג. } \frac{e^{2x}}{\sqrt[2]{e^x}} - 28 = 3 \cdot \sqrt[4]{e^{3x}} & \text{כד. } \frac{4 \cdot \sqrt[5]{e^x}}{e} - e^{-2} \cdot \sqrt[5]{e^{2x}} + 12 = 0 \end{array}$$

פתור את אי-השוויונים המעריכיים הבאים :

תזכורת : אם :  $a > 1$  אז :  $a^x > a^y \rightarrow x > y$  ; ואם :  $0 < a < 1$  אז :  $a^x > a^y \rightarrow x < y$  .

$$3^{x-2} > 27 \quad (105)$$

$$2^x < 16 \quad (104)$$

$$5^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x \quad (107)$$

$$16^x < 8^{x+1} \quad (106)$$

$$2 \cdot 16^{x^2} \cdot 32^x > 1 \quad (109)$$

$$27 \cdot 3^{x^2} > 3^{x+3} \quad (108)$$

$$0.3^{6x-1} < 0.3^{13-x} \quad (111)$$

$$64^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 1024 \quad (110)$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2x} \quad (113)$$

$$0.6^{x+1} \geq 0.6^{x^2-1} \quad (112)$$

$$\left(\frac{1}{625}\right)^x < 5^{x^2} \quad (115)$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2} \cdot \sqrt{27^{x+1}} \geq 3 \quad (114)$$

$$27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{3x-1} < 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} \quad (117)$$

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{x^2-1} \geq 1000^{1-x} \quad (116)$$

$$81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+3x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} < 16 \quad (119)$$

$$4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-1} < 5 \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^x \quad (118)$$

$$\frac{1}{9} \leq 3^{x+2} \leq 27 \quad (121)$$

$$125 \cdot \sqrt[3]{5^x} > \sqrt[3]{5^{8x^2}} \quad (120)$$

$$1 \leq 125 \cdot 5^x \leq 5^{x^2+1} \quad (123)$$

$$1 \leq 4^{2x-1} \cdot 2^{x-1} \leq 128 \quad (122)$$

$$0 < 25^x \cdot 5^{x^2} < 5 \cdot \sqrt{625^x} \quad (125)$$

$$0 < 8^x \cdot 2^{x^2} < 16 \quad (124)$$

$$9^x - \frac{10}{9} \cdot 3^{x+2} + 9 < 0 \quad (127)$$

$$16^x - 4^x - 12 > 0 \quad (126)$$

$$2^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{16}{x-6}} \geq 5^x \quad (129)$$

$$2^x - 3 \cdot 2^{4-x} > 2 \quad (128)$$

$$7^{\frac{2x-3}{x-2}} < 343 \quad (130)$$

131) פתור את אי-השוויונים המעריכיים הבאים:

א.  $e^x > 2$       ב.  $e^{2x+1} > e^{4-x}$

ג.  $e^{3x-1} < 4$       ד.  $e^{x^2+3} \geq (e^x)^4$

ה.  $(e^x)^6 \cdot e^{-x^2} \leq e^5$       ו.  $e^{5x-27} < e^{x^3} \cdot (e^x)^5$

ז.  $e^{x^2-4x} \cdot e^7 < e^{2-x}$       ח.  $\sqrt[2]{e^{x+1}} > e^{x^2} \cdot e^1$

ט.  $e^{3x^2} (e^x)^6 \leq e^{-3}$       י.  $e^{2x} - 13e^x + 30 > 0$

יא.  $e^{2x} + 7e^x + 12 > 0$       יב.  $6e^{2x} - 5e^x - 1 < 0$

יג.  $e^{2x} - 13e^x + 22 < 0$       יד.  $e^x - 30\sqrt{e^x} + 81 \leq 0$

טו.  $-\sqrt{e^x} + 20 \cdot \sqrt[4]{e^x} - 64 \geq 0$

## תשובות סופיות:

2 (3	1.5 (2	5 (1
-40.5 (6	-10 (5	1.75 (4
-2.5 (9	$\pm 2$ (8	-2 (7
$\emptyset$ (12	$-1, \frac{1}{4}$ (11	$1\frac{2}{3}$ (10
1, -2 (15	, -1 (14	-0.5, 1 (13
-0.5 (18	-3 (17	$1, -\frac{2}{3}$ (16
-4 (21	2 (20	0.8 (19
-1 (24	$\frac{2}{3}$ (23	1.5 (22
$-4, \frac{1}{2}$ (27	$\frac{2}{3}$ (26	$\emptyset$ (25
2 (30	6 (29	$-3, \frac{2}{3}$ (28
6.5 (33	$-\frac{8}{9}$ (32	2 (31
-1.44 (36	$\frac{1}{6}$ (35	$-\frac{2}{15}$ (34
-8 (39	3.75 (38	$\frac{5}{17}$ (37
-1, 4 (42	-2 (41	$-3\frac{2}{3}$ (40
-2 (45	$\emptyset$ (44	-1, 3 (43
2 (48	3 (47	-3, 1 (46

3 (51	2 (50	2 (49
$\pm\sqrt{2}$ (54	3 (53	2 (52
3 (57	2 (56	1 (55
-3 (60	2 (59	4 (58
3 (63	5 (62	$\frac{4}{3}$ (61
$\frac{1}{4}$ (66	6 (65	-3 (64
0 (69	1 (68	0 (67
0.5 (72	1 (71	0 (70
0 (75	2 (74	2 (73
2 (78	1 (77	2 (76
3 (81	-3,-1 (80	0, 2 (79
0,-1 (84	1,-2 (83	2,3 (82
1 (87	-1 (86	-2.5 (85
1 (90	-4 (89	-3, -6 (88
3 (93	1 (92	-0.5 (91

- (1,1) (96) (2,1) (95) (2,3) (94)
- (1,1) (99) (-2,-1) (98) (9,-2) (97)
- (2,2) ; (4.26,1.41) (102) (3,1) ; (3.182,1.318) (101) (2,1) (100)
- 0.75 .א -0.25 ,2 .ה  $\phi$  .ז 1 , -7 .ג 7 .ב -1 .א (103)  
 -3 .ב -4 ,4 .א -1 ,2 .י 0.8 .ט 4 , -1 .ח -15.5 .ז  
 $1.75 - \ln \sqrt{e^3 - 1}$  .ט  $\ln(e^4 + 1) - 4$  .ד  $4 - \ln(e^2 + 1)$  .ג  
 $\frac{\ln 6}{3}$  .כ  $\ln 3$  .ט  $\phi$  .ח  $\ln 3$  .ז  $2 \ln 2$  ,  $\ln 2$  .ט  
 $.5(\ln 6 + 1)$  .כ  $\frac{2}{3} \ln 7$  .ג 0 .ב  $4 \ln 4, -4 \ln 2$  .א
- $x < 3$  (106)  $x > 5$  (105)  $x < 4$  (104)
- $x < -1, x > -0.25$  (109)  $x < -3, x > 1$  (108)  $x \leq 0.25$  (107)
- $x \leq -1, x \geq 2$  (112)  $x > 2$  (111)  $x > 2$  (110)
- $x < -4, x > 0$  (115)  $-\frac{1}{4} \leq x \leq 1$  (114)  $x \leq \frac{1}{9}$  (113)
- $x > 1.5$  (118)  $x > 1$  (117)  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  (116)
- $-4 \leq x \leq 1$  (121)  $-1 < x < \frac{9}{8}$  (120)  $x < -4, x > \frac{1}{2}$  (119)
- $-4 < x < 1$  (124)  $-3 \leq x \leq 1, x \geq 2$  (123)  $\frac{3}{5} \leq x \leq 2$  (122)
- $0 < x < 2$  (127)  $x > 1$  (126)  $x < 1$  (125)
- $x < 1, x > 2$  (130)  $x < 6$  (129)  $x > 3$  (128)
- $x \leq 1, x \geq 3$  .ז  $x < 0.795$  .ג  $x > 1$  .ב  $x > \ln 2$  .א (131)  
 $x$  .א  $\phi$  .ז  $x > -3$  .ג  $x \leq 1, x \geq 5$  .ה  
 $x < 0$  .ב  $x$  כל .א  $x < \ln 3, x > \ln 10$  .י  $x = -1$  .ט  
 $8 \ln 2 \leq x \leq 16 \ln 2$  .ט  $2 \ln 3 \leq x \leq 6 \ln 3$  .ד  $\ln 2 < x < \ln 11$  .ג

## תוכן העניינים:

94	פרק 5.....
94	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים.....
94	הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות :
94	סיכום כללי :
95	שאלות יסודיות – הגדרת הלוג וחוקי הלוגריתמים :
96	שאלות – משוואות לוגריתמיות :
98	תשובות סופיות :
99	מערכת משוואות לוגריתמיות :
99	שאלות :
99	תשובות סופיות :
100	מערכת משוואות לוגריתמיות-מעריכיות :
100	שאלות :
100	תשובות סופיות :
101	אי-שוויונים לוגריתמיים :
101	תשובות סופיות :
102	תרגול נוסף :
102	הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות :
105	תשובות סופיות :
107	חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות :
109	תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים :
111	תשובות סופיות :
113	מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות :
114	תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים :
117	תשובות סופיות :
118	אי-שוויונים לוגריתמיים :
119	תשובות סופיות :



## פרק 5

# חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות:

### סיכום כללי:

- הגדרת הלוגריתם:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ .  
לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר כחזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ . ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.  
נפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### דוגמאות כלליות:

- $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$
- $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$
- $10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$
- $\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow \log_{16} 4 = 0.5$
- $5^{-2} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2$
- $6^0 = 1 \Leftrightarrow \log_6 1 = 0$

### חוקי יסוד בלוגריתמים:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$

### חוקי הלוגריתמים:

- מכפלה לסכום:  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- מנה להפרש:  $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$

- חזקה לוגריתמית:  $a^{\log_a x} = x$ .
- מעבר מבסיס לבסיס:  $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$ , כאשר:  $a, m > 0$ ;  $a, m \neq 1$ ;  $b > 0$ .
- לוגריתם על בסיס  $e$  נקרא הלוגריתם הטבעי ומסומן:  $\log_e x = \ln x$ .

### שאלות יסודיות – הגדרת הלוג וחוקי הלוגריתמים:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$	ב. $\log 1000$	ג. $\log_{25} 5$
ד. $\log_8 4$	ה. $\log_4 \frac{1}{16}$	ו. $\log_a a^4$
ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$		

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$	ב. $\ln \frac{1}{e^4}$	ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$
--------------	------------------------	------------------------------

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$	ב. $\log_2 x = 16$
ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$	ד. $\log_x 64 = 3$
ה. $\log_x 25 = 2$	ו. $\log_x (3x+4) = 2$
ז. $\ln x = 2$	ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$	ב. $2\log 2 + \log 25$
ג. $\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3\log_3 6 - (2 + \log_3 12)}$	

(5) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$	ב. $\log_3 6$
ג. $\log_3 24$	ד. $\log_3 1.5$

(6) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$	ב. $\log_2 60$	ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$
----------------	----------------	------------------------

(7) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$	ב. $4^{\log_2 5}$
ג. $e^{\ln 3}$	ד. $e^{2 \ln 3}$

(8) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$	ב. $\log_2 \sqrt{30}$	ג. $\log_5 22.5$
----------------	-----------------------	------------------

### שאלות – משוואות לוגריתמיות:

(9) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$	ב. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$
ג. $\log_5 (\log_2 (x^2 - 7)) = 0$	ד. $\log_5 (25^x - 20) = x$

(10) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln \left( e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$	ב. $\log_5 (4x - 3) = \log_5 7$
ג. $2 \log_2 (2x - 2) - \log_2 (16 - x) = \log_2 (x - 1) + 1$	

**(11)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבת  $t$  וקבלת משוואה ריבועית):

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0 \quad \text{א.}$$

$$3 \ln^2 x + \ln x = 2 \quad \text{ב.}$$

$$\log_4 x + \log_x 4 = 2.5 \quad \text{ג.}$$

$$\log x \cdot \log(10x) = 2 \quad \text{ד.}$$

$$\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \quad \text{ה.}$$

**(12)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה):

$$x^{\log_5 x} = \frac{25}{x} \quad \text{ב.}$$

$$x^{\log_3 x} = 81 \quad \text{א.}$$

$$x^{\frac{\log_2 x - 6}{4}} = \frac{4}{x} \quad \text{ד.}$$

$$x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)} \quad \text{ה.}$$

**(13)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (בסיסים שונים):

$$2^x = 5 \quad \text{א.}$$

$$5^x = 8 \quad \text{ב.}$$

$$e^x = 2 \quad \text{ג.}$$

$$e^x = \frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

$$e^x = -1 \quad \text{ה.}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2
- א. 4    ב. -1.5
- (2) א. 2    ב. -4    ג. -1.5
- (3) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$
- ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$     ז.  $x = e^2$     ח.  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (4) א. 2    ב. 2    ג. 3
- (5) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (6) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (7) א. 8    ב. 25    ג. 3    ד. 9
- (8) א.  $2b + \frac{1}{a}$     ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$     ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$
- (9) א.  $x = 3$     ב.  $x = 3$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = 1$
- (10) א.  $x = 0$     ב.  $x = 2.5$     ג.  $x = 6$
- (11) א.  $x = 4, \frac{1}{2}$     ב.  $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$     ג.  $x = 16, 2$     ד.  $x = 10, \frac{1}{100}$
- ה.  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$
- (12) א.  $x = 9, \frac{1}{9}$     ב.  $x = 5, \frac{1}{25}$     ג.  $x = e^3, \frac{1}{e^2}$     ד.  $x = 16, \frac{1}{4}$
- ה.  $x = 3$     ו.  $x = \sqrt{e}, e$
- (13) א.  $x = 2.322$     ב.  $x = 1.292$     ג.  $x = 0.693$     ד.  $x = -0.693$
- ה.  $\emptyset$

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות-מעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

## תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array} \quad \begin{matrix} (3) & (2) & (1) \\ (6) & (5) & (4) \end{matrix}$$

## אי-שוויונים לוגריתמיים:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא:  $x > y$  עבור:  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור:  $0 < a < 1$ .

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15x - 2)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

## תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
$x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)



## תרגול נוסף:

### הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות:

חשב את ערכי הלוגריתמים הבאים:

תזכורת: הגדרת הלוגריתם:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  (כאשר:  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ).

- |   |   |  |
|---|---|--|
| $\log_5 5$ (3                                     | $\log_3 81$ (2                                | $\log_2 8$ (1                          |
| $\log_{125} 5$ (6                                 | $\log_{32} 8$ (5                              | $\log_9 243$ (4                        |
| $\log_{\frac{1}{2}} 16$ (9                        | $\log_{32} 64$ (8                             | $\log_{49} 7$ (7                       |
| $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$ (12              | $\log_{\frac{1}{25}} 625$ (11                 | $\log_{\frac{1}{3}} 27$ (10            |
| $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}} \frac{1}{9}$ (15    | $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125}$ (14       | $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ (13   |
| $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3}$ (18             | $\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{343}$ (17        | $\log_{\sqrt[5]{5}} 125$ (16           |
| $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{25}}} \sqrt[5]{125}$ (21 | $\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \sqrt[3]{81}$ (20 | $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{128}$ (19 |
| $\log_{0.01} \frac{10}{\sqrt[4]{1000}}$ (24       | $\log \frac{\sqrt[5]{100}}{\sqrt{10}}$ (23    | $\log \frac{\sqrt{10}}{100}$ (22       |

מצא את  $x$  במשוואות הלוגריתמיות הבאות:

- |  |                                |                                 |
|--|--------------------------------|---------------------------------|
| $\log_6 x = 1$ (27                       | $\log_2 x = 5$ (26             | $\log_3 x = 2$ (25              |
| $\log_7 x = 0$ (30                       | $\log_4 x = -2$ (29            | $\log_3 x = -3$ (28             |
| $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3}$ (33 | $\log_{\frac{3}{5}} x = 4$ (32 | $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ (31 |
| $\log_{\sqrt{5}} x + 2 = 0$ (36          | $7 \log_{128} x - 3 = 0$ (35   | $4 \log_9 x - 2 = 0$ (34        |

מצא את  $x$  במשוואות הלוגריתמיות הבאות :

$$\log_x 25 = 2 \quad (39)$$

$$\log_x 6 = -1 \quad (38)$$

$$\log_x 3 = 1 \quad (37)$$

$$\log_x 64 = 3 \quad (42)$$

$$\log_x 625 = 4 \quad (41)$$

$$\log_x 64 = 2 \quad (40)$$

$$\log_x \frac{1}{81} = 4 \quad (45)$$

$$\log_x \frac{4}{9} = -2 \quad (44)$$

$$\log_x \frac{1}{8} = 3 \quad (43)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם) :

$$\log_5 (6-7x) = 3 \quad (48)$$

$$\log_2 (x+5) = 4 \quad (47)$$

$$\log_5 (x+1) = 1 \quad (46)$$

$$\log_{64} (x+3) = \frac{1}{3} \quad (51)$$

$$\log_4 (4x+1) = \frac{1}{2} \quad (50)$$

$$\log_6 (3x-2) = 0 \quad (49)$$

$$\log_{0.2} (2x+1) = -2 \quad (54)$$

$$\log_{\sqrt{3}} (7x+2) = 2 \quad (53)$$

$$\log_{\sqrt{5}} (3x+1) = 4 \quad (52)$$

$$\log_3 \left( x^2 - \frac{2x}{9} \right) = -3 \quad (57)$$

$$\log_6 (13x - x^2) = 2 \quad (56)$$

$$\log_4 (10x - x^2) = 2 \quad (55)$$

$$\log_3 (x - 2x^2 + 28) \quad (60)$$

$$\log_2 (x^2 - 6x + 13) = 3 \quad (59)$$

$$\log_2 (x^2 - 6x + 10) = 1 \quad (58)$$

$$\log_7 (x^4 - 80) = 0 \quad (63)$$

$$\log_3 (x^3 - 44) = 4 \quad (62)$$

$$\log_4 (x^3 - 11) = 2 \quad (61)$$

$$\log_2 \frac{x^2 - 5}{x} = 2 \quad (66)$$

$$\log_3 \frac{20x + 68}{5x + 2} = 2 \quad (65)$$

$$\log_4 \frac{3x - 1}{x + 2} = 1 \quad (64)$$

$$\log_x (2x^2 - 6x^2 + 5) = 2 \quad (69)$$

$$\log_x (3x^2 - 5x + 3) = 2 \quad (68)$$

$$\log_x (2x^2 - 9x) = 2 \quad (67)$$

$$\log_{x+2} (4x+5) = 2 \quad (72)$$

$$\log_x (2x^2 + x - 6) = 2 \quad (71)$$

$$\log_x (4x^2 - 3x) = 2 \quad (70)$$

$$\log_{\sqrt{x+1}} (x^2 - x - 2) = 2 \quad (75)$$

$$\log_{\sqrt{x}} \left( \frac{8}{x} \right) = 4 \quad (74)$$

$$\log_{x-3} (3x-11) = 2 \quad (73)$$

$$\log_{\sqrt{x^2+3}} (4+3x+3x^2) = 2 \quad (78)$$

$$\log_{\sqrt{x+3}} (x+5) = 4 \quad (77)$$

$$\log_4 (10x - x^2) = 2 \quad (76)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם מספר פעמים):

$$2\log_9(\log_5(2x-1))=1 \quad (80)$$

$$\log_3(\log_2 x)=1 \quad (79)$$

$$\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(x^2-7.5x))=-\frac{1}{2} \quad (82)$$

$$\log_2(\log_3(x+3)+30)=5 \quad (81)$$

$$\log_{25}(2-5^{x+2})=x+2 \quad (84)$$

$$\log_2\left(\log_{0.25}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right)=-1 \quad (83)$$

$$\log_5\left(4+\log_6\left(3+\log_4(x^2+15)\right)\right)=1 \quad (86)$$

$$\log_5(\log_3(\log_3(5x^2+7)))=0 \quad (85)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(5 \cdot 2^x + 1) = 4 \quad (88)$$

$$\log_2(5^x + 3) = 7 \quad (87)$$

$$\log_5(5^x + 120) - x = 2 \quad (90)$$

$$\log_2(12 - 2^x) = x + 1 \quad (89)$$

$$\log_9(10 \cdot 3^x - 9) = x \quad (92)$$

$$\log_4(5 \cdot 2^{x+1} - 16) = x \quad (91)$$

$$\log_4(17 - 4^x) + x = 2 \quad (94)$$

$$\log_5(30 - 5^x) + x = 3 \quad (93)$$

$$\log_2(5 \cdot 2^{x+1} - 1) = 2x + 4 \quad (96)$$

$$\log_5(49 \cdot 5^x - 120) = 2x + 1 \quad (95)$$

$$3\log_2\left(9 \cdot 2^{\frac{x}{2}+1} - 1\right) = 15 + 2x \quad (98)$$

$$\log_8(3 - 23 \cdot 8^{3x}) = 6x + 1 \quad (97)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות:

הדרכה: היעזר בהצבה של:  $\log_a x = t$ , פתור משוואה עבור  $t$  והחזר את ההצבה למציאת  $x$  עפ"י הגדרת הלוגריתם.

$$(\log_2 x)^2 + 2 \cdot \log_2 x - 15 = 0 \quad (100)$$

$$(\log_3 x)^2 = 16 \quad (99)$$

$$\log_7 x - \frac{6}{\log_7 x} = 1 \quad (102)$$

$$2 \cdot (\log_4 x)^2 - 5 \cdot \log_4 x = 3 \quad (101)$$

$$\frac{5 \cdot \log_{64} x - 1}{(\log_{64} x)^2} = 6 \quad (104)$$

$$\frac{12}{\log_3 x + 1} - \frac{2}{\log_3 x} = 3 \quad (103)$$

$$\sqrt{\log_{16} x} + \sqrt{\log_{16} x + 2} = 2 \quad (106)$$

$$\log_3 x + \sqrt{\log_3 x} = 2 \quad (105)$$

$$(\log_3 x)^2 - \sqrt{(\log_3 x)^2 + 27} = 3 \quad (107)$$

## תשובות סופיות:

2.5 (4	1 (3	4 (2	3 (1
$\frac{6}{5}$ (8	$\frac{1}{2}$ (7	$\frac{1}{3}$ (6	0.6 (5
1.5 (12	-2 (11	-3 (10	-4 (9
9 (16	6 (15	-3 (14	-2 (13
$-\frac{8}{9}$ (20	$-\frac{7}{15}$ (19	$-\frac{1}{12}$ (18	-9 (17
$-\frac{1}{8}$ (24	-0.1 (23	-2.5 (22	-0.9 (21
$\frac{1}{27}$ (28	6 (27	32 (26	9 (25
$\frac{81}{625}$ (32	9 (31	1 (30	$\frac{1}{16}$ (29
0.2 (36	8 (35	3 (34	0.5 (33
8 (40	5 (39	$\frac{1}{6}$ (38	3 (37
1.5 (44	0.5 (43	4 (42	5 (41
-17 (48	11 (47	4 (46	$\frac{1}{3}$ (45
8 (52	1 (51	0.25 (50	1 (49
9, 4 (56	8, 2 (55	12 (54	$\frac{1}{7}$ (53
$1, -\frac{1}{2}$ (60	1, 5 (59	4, 2 (58	$\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$ (57
-9 (64	$\pm 3$ (63	5 (62	3 (61
1.5 (68	9 (67	5, -1 (66	2 (65
1 (72	2 (71	$\emptyset$ (70	5 (69
2, 8 (76	3 (75	2 (74	5 (73

63 (80	8 (79	$-1, -\frac{1}{2}$ (78	-1 (77
-2 (84	$\pm\frac{1}{2}$ (83	13.5, -6 (82	6 (81
4 (88	3 (87	$\pm 7$ (86	$\pm 2$ (85
0, 2 (92	3, 1 (91	1 (90	2 (89
-3, -1 (96	0.974, 1 (95	0, 2 (94	2, 1 (93
$8, \frac{1}{32}$ (100	$81, \frac{1}{81}$ (99	-12, -3 (98	$-\frac{1}{3}$ (97
8, 4 (104	$\sqrt[3]{3}, 9$ (103	$343, \frac{1}{49}$ (102	$64, \frac{1}{2}$ (101
	$27, \frac{1}{27}$ (107	2 (106	3 (105

## חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

### תזכורת – חוקי הלוגריתמים:

$$\log_x (x)^n = n \cdot \log_a x \quad \log_x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \quad \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |   |   |
|---|---|
| <p>(2) <math>\log_8 4 + \log_8 16</math></p> <p>(4) <math>\log_5 150 - \log_5 6</math></p> <p>(6) <math>\log_2 768 - \log_2 6</math></p> <p>(8) <math>\log_{0.2} 2 - \log_{0.2} 10</math></p> <p>(10) <math>2 \log_6 2 + \log_6 9</math></p> <p>(12) <math>3 \log_3 6 + \log_3 3.375</math></p> <p>(14) <math>\log_4 24 + \log_4 5 - \log_4 10 - \log_4 3</math></p> <p>(16) <math>\log_6 10 - \log_6 5 - \log_6 288 + \log_6 4</math></p> <p>(18) <math>\frac{1}{2} \left( \log_5 \frac{5}{2} + \log_5 2 \right) + \log_5 10 - \frac{1}{3} \log_5 8</math></p> <p>(20) <math>-\frac{1}{4} \log_{\sqrt{7}} 81 + 2 \log_{\sqrt{7}} 6 - \log_{\sqrt{7}} 84</math></p> | <p>(1) <math>\log_3 6 + \log_3 1.5</math></p> <p>(3) <math>\log_2 10 + \log_2 6.4</math></p> <p>(5) <math>\log_4 192 - \log_4 3</math></p> <p>(7) <math>\log_{81} 120 - \log_{81} 40</math></p> <p>(9) <math>\log_{0.25} 80 - \log_{0.25} 5</math></p> <p>(11) <math>\log_4 1.6 + 2 \log_4 \sqrt{10}</math></p> <p>(13) <math>\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 4</math></p> <p>(15) <math>\log_5 50 + \log_5 20 - \log_5 2 - \log_5 4</math></p> <p>(17) <math>\frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} 252 \log_{\sqrt{5}} 2 - \log_{\sqrt{5}} 60</math></p> <p>(19) <math>\frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 3 + \frac{3}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 4</math></p> |
|---|---|

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

**טיפ:** הפוך את המספרים השלמים לביטוי לוגריתמי לפי:  $k = \log_a a^k$

וחבר אותם לביטויים הנוספים לפי חוקי הלוגריתמים.

- |   |  |   |
|---|--|---|
| <p>(23) <math>\frac{\log_7 4 + \log_7 8}{\log_7 2}</math></p> <p>(26) <math>\frac{\log_7 5 + \log_7 3 - 4}{\log_7 225 - \log_2 256}</math></p> <p>(29) <math>\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}</math></p> | <p>(22) <math>\frac{\log_4 125}{\log_4 5}</math></p> <p>(25) <math>\frac{\log_2 5 - \log_2 2 + 1}{\log_2 200 - 3}</math></p> <p>(28) <math>\frac{\log_4 18 - \log_4 2 + \log_4 36}{2 \log_4 6 - 3 \log_4 8 + 4}</math></p> | <p>(21) <math>\frac{\log_3 16}{\log_3 8}</math></p> <p>(24) <math>\frac{\log_3 6 + 2}{\log_3 108 - \log_3 2}</math></p> <p>(27) <math>\frac{2 - 3 \log 5 + \log 50}{1 + \log 128 - 5 \log 2}</math></p> |
|---|--|---|

חשב את ערכי הביטויים הבאים (הלוגריתם לפי בסיס 10):

$$\begin{array}{lll} \frac{\log 8}{\log \sqrt{8}} & \text{(32)} & \frac{\log 8}{\log 16} & \text{(31)} & \frac{\log 27}{\log 9} & \text{(30)} \\ \frac{\log 36 + 0.5 \log 6}{\log 12 - \log 2} & \text{(35)} & \frac{\log 72 - \log 8}{\log \sqrt{27}} & \text{(34)} & \frac{\log 24 - \log 3}{\log 2} & \text{(33)} \\ & & & & \frac{1 + \log 5}{\log 2 + 2 \log 5} & \text{(36)} \end{array}$$

(37) הוכח את נכונות השוויונים הבאים (לפי בסיס 10):

$$\begin{array}{l} \text{א. } \frac{\log 125 - 1 + \log 2}{\log 5 + 1 - \log 2} = 1 \\ \text{ב. } \frac{2 - \log 25 + 2 \log 8}{\log \sqrt[3]{16}} = 6 \\ \text{ג. } \frac{\log 9 + 2 \log 5 + \log 4}{\log 10 - \log 2 + \log 6} = 2 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (איחוד ביטויים באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\begin{array}{ll} \log_{15} x + \log_{15} (x-2) = 1 & \text{(39)} & \log_4 x + \log_4 (x-6) = 2 & \text{(38)} \\ \log_{35} (x-8) + \log_{35} (x-6) = 1 & \text{(41)} & \log_2 x + \log_2 (x-3) = 2 & \text{(40)} \\ \log_3 (x+105) - \log_3 (x+1) = 3 & \text{(43)} & \log_2 (x+14) - \log_2 x = 3 & \text{(42)} \\ \log_2 (2x+8) = 2 + \log_2 (5-x) & \text{(45)} & \log_2 (3x+4) - \log_2 (x-2) = 1 & \text{(44)} \\ \log_2 (11x+4) - \log_2 (2x+1) = \log_2 (2x+3) & \text{(47)} & \log_3 (x^2 + 11) = 1 + \log_3 (2x+1) & \text{(46)} \\ & & \log_5 (30x+9) - \log_5 (4x+5) = \log_5 (3x+2) & \text{(48)} \\ & & 2 \log_5 (x+1) = \log_5 (2x+3.5) + \log_5 x & \text{(49)} \\ & & \log_2 (x-4) + \log_2 (x+2) - \log_2 (x-3) = 3 & \text{(50)} \\ & & \frac{\log_7 (12x-35)}{2 \log_7 x} = 1 & \text{(51)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם וקבלת משוואה מעריכית) :

$$\log_2(5^x + 19) = 3 + \log_2(8 - 5^x) \quad (53) \qquad \log_3(2^x + 2) - \log_3(2^x - 14) = 2 \quad (52)$$

$$\log_3(25^x + 8) - 2 = x \log_3 5 \quad (55) \qquad 1 + (x + 2) \log_3 2 = \log_3(4^x + 32) \quad (54)$$

$$x \log_2 4 = \log_2(2^x + 28) + x - 3 \quad (57) \qquad \log_3(9^{x+3} - 1) = x + 5 + \log_3(3^{x+3} - 1) \quad (56)$$

פתור את המשוואות הבאות (פתיחה באמצעות חוקי הלוגריתמים) :

$$\log_4(16x) \cdot \log_4(64x) = 12 \quad (59) \qquad \log_3 x \cdot \log_3(3x) = 6 \quad (58)$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{8} = -2 \quad (61) \qquad \log_2(32x) \cdot \log_2(128x) = 48 \quad (60)$$

$$\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = \log_4(4x) \quad (63) \qquad \log_3\left(\frac{27}{x}\right) \cdot \log_3(81x) = 10 \quad (62)$$

$$(\log_3 3x)^2 = \log_3 3x^2 + 1 \quad (65) \qquad \log_2 x^2 \cdot \log_2(8x) = \log_2\left(\frac{16}{x}\right) \quad (64)$$

$$\log_3(27x^3) \cdot \log(3x^2) = \log_3\left(\frac{81}{x}\right) + 3 \quad (67) \qquad (\log_5 25x)^2 = \log_5 25x^2 + 1 \quad (66)$$

$$2 \log_5 x \cdot \log_5\left(\frac{125}{x^2}\right) = 2 \quad (69) \qquad \log_2\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \log_2(32x^2) = \log_2\left(\frac{x}{128}\right) + 2 \quad (68)$$

$$\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2(2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9} \quad (71) \qquad \frac{\log_7\left(\frac{343}{x^2}\right)}{(\log_7 x)^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad (70)$$

### תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים :

(72) נתון :  $\log_2 7 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את הביטויים הבאים :

א.  $\log_2 14$       ב.  $\log_2 49$

(73) נתון :  $\log_3 5 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את הביטויים הבאים :

א.  $\log_3 125$       ב.  $\log_3 0.2$

(74) נתון :  $\log_{24} 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את הביטויים הבאים :

א.  $\log_{24} 2$       ב.  $\log_{24} 3$



**(75)** נתון:  $\log 4 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את הביטויים הבאים:

א.  $\log 16$       ב.  $\log 2$       ג.  $\log 8$

**(76)** נתון:  $\log_3 5 = b$ ,  $\log_3 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 30$       ב.  $\log_3 1.2$       ג.  $\log_3 150$

**(77)** נתון:  $\log_4 3 = a$ ,  $\log_4 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את הביטויים הבאים:

א.  $\log_4 0.12$       ב.  $\log_4 2.4$

**(78)** נתון:  $\log_7 8 = a$ ,  $\log_7 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את הביטויים הבאים:

א.  $\log_7 40$       ב.  $\log_7 320$

**(79)** נתון:  $\log_5 3 = a$ ,  $\log_5 2 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את הביטויים הבאים:

א.  $\log_5 \sqrt{6}$       ב.  $\log_5 \sqrt[3]{72}$

**(80)** נתון:  $\log_8 10 = a$ ,  $\log_8 3 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את הביטויים הבאים:

א.  $\log_8 \sqrt{0.03}$       ב.  $\log_8 \sqrt[5]{\frac{10}{27}}$

**(81)** נתון:  $\log_3 7 = a$ ,  $\log_3 8 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 \frac{64}{343}$       ב.  $\log_3 \sqrt[4]{\frac{49}{512}}$

חשב את ערכי הביטויים הבאים באמצעות הנוסחה:  $a^{\log_a b} = b$ :

**(82)**  $2^{\log_2 3}$       **(83)**  $5^{\log_5 12}$       **(84)**  $0.24^{\log_{0.24} 6}$       **(85)**  $10^{\log 2}$

**(86)**  $2^{2\log_2 3}$       **(87)**  $3^{3\log_3 4}$       **(88)**  $9^{\log_3 4}$       **(89)**  $27^{\log_3 2}$

**(90)**  $8^{\log_2 3}$       **(91)**  $32^{\log_2 3}$       **(92)**  $125^{-\log_5 3}$       **(93)**  $\sqrt{6}^{\log_{36} 4}$

**(94)**  $\sqrt{3}^{\log_3 16}$       **(95)**  $\sqrt[5]{8}^{\log_2 243}$       **(96)**  $\sqrt[3]{5}^{\log_5 64}$       **(97)**  $3^{\log_9 2}$

**(98)**  $64^{\log_2 5}$       **(99)**  $5^{\log_{125} 8}$       **(100)**  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{9}} 4}$       **(101)**  $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\sqrt{49}} 81}$

**(102)**  $5^{1+\log_5 2}$       **(103)**  $3^{2-\log_3 6}$       **(104)**  $4^{\frac{\log_4 9}{2}}$       **(105)**  $\sqrt{27^{1+\log_3 2}}$

**(106)**  $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

## תשובות סופיות:

3 (5	2 (4	6 (3	2 (2	2 (1
2 (10	-2 (9	1 (8	0.25 (7	7 (6
3 (15	1 (14	3 (13	6 (12	2 (11
-2 (20	10.5 (19	-1.5 (18	-2 (17	-2 (16
0.5 (25	1 (24	5 (23	3 (22	$\frac{4}{3}$ (21
1.5 (30	0.5 (29	2 (28	1 (27	0.5 (26
2.5 (35	$\frac{4}{3}$ (34	3 (33	2 (32	0.75 (31
13 (40	4 (39	5 (38	8 (37	1 (36
2 (45	$\emptyset$ (44	3 (43	3 (42	2 (41
8 (50	0.5 (49	$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (48	$1, -\frac{1}{4}$ (47	4, 2 (46
1.292, 0 (55	3, 2 (54	1 (53	4 (52	5, 7 (51
$2, \frac{1}{2^{13}}$ (60	$4, \frac{1}{4^6}$ (59	$9, \frac{1}{27}$ (58	2 (57	$\emptyset$ (56
$3, \frac{1}{3}$ (65	$\sqrt{2}, \frac{1}{16}$ (64	2 (63	$\frac{1}{9}, 3$ (62	2, 4 (61
$49, 7^6$ (70	$\sqrt{5}$ (69	1, 0.2973 (68	$\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}$ (67	0.2 (66
				$3, 2\frac{1}{7}$ (71
		ב. $2a$		א. $a+1$ (72
		ב. $-a$		א. $3a$ (73
		ב. $\frac{3a-1}{2}$		א. $\frac{1-a}{2}$ (74
	א. $1.5a$	ב. $0.5a$		א. $2a$ (75
	א. $a+2b$	ב. $a-b$		א. $a+b$ (76

			$a+1-b$ .ב	$1-2b$ .א (77
			$2a+b$ .ב	$a+b$ .א (78
			$b+\frac{2}{3}a$ .ב	$\frac{b+a}{2}$ .א (79
			$\frac{a-3b}{5}$ .ב	$\frac{b-2a}{2}$ .א (80
			$\frac{2a-3b}{4}$ .ב	$2b-3a$ .א (81
9 (86	2 (85	6 (84	12 (83	3 (82
243 (91	27 (90	8 (89	16 (88	64 (87
4 (96	27 (95	4 (94	$\sqrt[4]{4}$ (93	$\frac{1}{27}$ (92
$\frac{1}{81}$ (101	0.25 (100	2 (99	$5^6$ (98	$\sqrt{2}$ (97
$\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$ (106	$\sqrt{216}$ (105	3 (104	1.5 (103	10 (102

## מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

תזכורת:  $a, m > 0 \neq 1, \log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$

$\log_2 5 \cdot \log_{25} 4$ <b>(2)</b>	$\log_3 6 \cdot \log_6 3$ <b>(1)</b>
$\log_{0.1} 5 \cdot \log_{25} 100$ <b>(4)</b>	$\log_{27} 4 \cdot \log_2 3$ <b>(3)</b>
$\log_5 8 \cdot \log_7 25 \cdot \log_2 49$ <b>(6)</b>	$\log_{\sqrt{3}} 7 \cdot \log_{\sqrt{343}} 9$ <b>(5)</b>
$\log_{81} 49 \cdot \log_{32} 3 \cdot \log_7 2$ <b>(8)</b>	$\log_4 169 \cdot \log_9 64 \cdot \log_{13} 243$ <b>(7)</b>

הוכח את השוויוניים שלפניך:

$\log_6 \frac{1}{8} \cdot \log_2 6 = -3$ <b>(10)</b>	$\log_7 25 \cdot \log_5 7 = 2$ <b>(9)</b>
$\log_3 8 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 = 3$ <b>(12)</b>	$\log_4 25 \cdot \log_5 4 = 2$ <b>(11)</b>
$\log_{16} 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 25 = 1$ <b>(14)</b>	$\log_7 2 \log_5 7 \log_{16} 5 = 0.25$ <b>(13)</b>
$\log_a b \cdot \log_c a + \log_b a \cdot \log_c b = \log_c ab$ <b>(16)</b>	$\log_2 25 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{81} 2 = 1$ <b>(15)</b>

פתור את המשוואות הבאות:

$\log_{81} x + \log_3 x = 5$ <b>(18)</b>	$\log_2 x + \log_8 x = 4$ <b>(17)</b>
$\log_3 x + 3 \log_{27} x^2 = 3$ <b>(20)</b>	$5 \log_5 x - \log_{\frac{1}{25}} x = 11$ <b>(19)</b>
$\log_5 x \cdot \log_{125} x = 3$ <b>(22)</b>	$\log_2 x^3 + 4 \log_{16} x = 8$ <b>(21)</b>
$\log_3 (81x) \cdot \log_{27} \left( \frac{x}{9} \right) = \frac{7}{3}$ <b>(24)</b>	$\log_2 (8x) \cdot \log_{16} x = 17$ <b>(23)</b>
$\log_x 2 + \log_2 x = 2$ <b>(26)</b>	$\log_2 (32x^2) \cdot \log_8 \left( \frac{4}{x^3} \right) = -12$ <b>(25)</b>
$4 \log_x 5 = 3 + 2 \log_{25} x$ <b>(28)</b>	$\log_x 3 - 6 \log_{27} x = 1$ <b>(27)</b>
$\log_6 (16x - 3) \cdot \log_{x\sqrt{5}} 6 = 2$ <b>(30)</b>	$\log_3 (6 - x) \cdot \log_x 3 = 2$ <b>(29)</b>
$\log_2 (4x) + \log_{8x} 4 = 3.5$ <b>(32)</b>	$\log_5 x = 4.5 + \log_{5x} 125$ <b>(31)</b>

$$\log_x (27x) \cdot \log_{81x} \left( \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5} = 0 \quad (34)$$

$$\log_x 4 + 3\log_{4x} 16 = 4 \quad (33)$$

$$3 \cdot \log_{\sqrt{x}} (6x) - \log_{36} x = 4 \quad (36)$$

$$2\log_{4x} 8 \cdot \log_{\frac{x}{2}} (16x) = 9 \quad (35)$$

$$\log_x 5 \cdot \log_{5x} (5x^2) = 2 \cdot \log_{25x} 5 \quad (37)$$

### תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים:

(38) נתון:  $\log_2 5 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_5 2$

ב.  $\log_4 5$

ג.  $\log_{16} 5$

(39) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 3$

ב.  $\log_{32} 36$

ג.  $\log_{216} 96$

(40) נתון:  $\log_3 5 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 15$

ב.  $\log_{15} 3$

ג.  $\log_9 25$

(41) נתון:  $\log 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log 80$

ב.  $\log_8 40$

ג.  $\log_{80} 2000$

**(42)** נתון:  $\log_5 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_{36} 30$

ב.  $\log_{216} 180$

ג.  $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{125}$

**(43)** נתון:  $\log 2 = 0.3$ . חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_{\sqrt{2}} 100$

ב.  $\log_8 40$

ג.  $\log_{\frac{1}{4}} 5$

**(44)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לכל  $a, b > 0 \neq 1$  מתקיימת הטענה הבאה:  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .

ב. נתון:  $\log_a 5 = b$ . הוכח כי מתקיים:  $\log_a b = \frac{b}{\log_b 5}$ .

ג. נתון:  $2 \cdot \log_3 a \cdot \log_{(b+c)} 3 = 1$ .

הוכח כי לכל:  $a, b, c > 0 \neq 1$  מתקיים:  $a^2 = b + c$ .

פתור את המשוואות הבאות (הוצאת לוג משני אגפים):

**(47)**  $x^{1+\log_3 x} = 729$

**(46)**  $x^{\log_3 x} = 3$

**(45)**  $x^{\log_2 x} = 16$

**(50)**  $x^{9-3\log_2 x} = \frac{x}{8}$

**(49)**  $x^{2\log_3 x + 8} = x$

**(48)**  $x^{3\log_5 x + 2} = 5$

51 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם לוגריתם טבעי  $(\ln)$ ):

ב.  $\ln(5-x) = 2$

א.  $\ln(x+1) = 3$

ד.  $\ln(x^2 - 2x - 2) = 0$

ג.  $\ln(1-3x) = 4$

ו.  $\ln(e^x - 1) = 0$

ה.  $\ln(x^2 + 5x + 5) = 0$

ח.  $\ln(6-x) + \ln(x+2) = \ln 15$

ז.  $\ln(x-3) + \ln(x+4) = -\ln 10$

י.  $\frac{\ln(4x+3)}{\ln(x^2)} = \frac{1}{2}$

ט.  $\frac{\ln(2x^2 - 6x - 7)}{\ln(3-x)} = 2$

יב.  $\ln(1-e^x) - \ln(6+e^x) = 6$

יא.  $\ln(e^{2x} + 5) - \ln(e^x + 1) = \ln 3$

יד.  $x \ln x = 2x$

יג.  $x \ln x = 3 \ln x$

טז.  $2 \ln^2 x + 2 = 2.5 \ln x^2$

טו.  $5 \ln^2 x - 3 = \ln x^2$

## תשובות סופיות:

(1) 1	(2) 1	(3) $\frac{2}{3}$	(4) -1
(5) $2\frac{2}{3}$	(6) 12	(7) 15	(8) 0.1
(17) 8	(18) 81	(19) 25	(20) 3
(21) 4	(22) $125, \frac{1}{125}$	(23) $16, \frac{1}{128}$	(24) $27, \frac{1}{243}$
(25) 0.07, 4	(26) 2	(27) $\sqrt{3}, \frac{1}{3}$	(28) $5, \frac{1}{625}$
(29) 2	(30) 0.2, 3	(31) $\frac{1}{5\sqrt{5}}, 5^5$	(32) $\frac{1}{4\sqrt{2}}, 2$
(33) 4	(34) 3	(35) $4, \frac{1}{\sqrt[3]{128}}$	(36) $6^6, \frac{1}{36}$
(37) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$	(38) $\frac{1}{a} \cdot \aleph$	ב. $\frac{a}{2}$	ג. $\frac{a}{4}$
(39) $2a-1 \cdot \aleph$	ב. $0.8a$	ג. $\frac{a+2}{3a}$	
(40) $a+1 \cdot \aleph$	ב. $\frac{1}{a+1}$	ג. $a$	
(41) $3a+1 \cdot \aleph$	ב. $\frac{2a+1}{3a}$	ג. $\frac{a+3}{3a+1}$	
(42) $\frac{a+1}{2a} \cdot \aleph$	ב. $\frac{2a+1}{3a}$	ג. $-\frac{1.5}{a}$	
(43) $13\frac{1}{3} \cdot \aleph$	ב. $1\frac{7}{9}$	ג. $-1\frac{1}{6}$	
(45) 0.25, 4	(46) $3, \frac{1}{3}$	(47) $9, \frac{1}{27}$	(48) $\frac{1}{5}, \sqrt[3]{5}$
(49) $\frac{1}{81}, \sqrt{3}$	(50) $8, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		
(51) $e^3-1 \cdot \aleph$	ב. $5-e^2$	ג. -17.87	ה. -4, -1
ג. $\ln 2$	ז. $\phi$	ח. 3, 1	ט. -0.6
יא. $0, \ln 2$	יב. $\ln \frac{1-6e^6}{e^6+1}$	יג. 1, 3	יד. $e^2$
טז. $e^2, 1.649$			טז. $e, 0.548$



### אי-שוויוניים לוגריתמיים:

פתור את אי-השוויוניים הבאים:

- |   |   |
|---|---|
| $\log_5(x-2) \leq 1$ (2)                                  | $\log_4(x-3) < 0$ (1)                             |
| $\log(x+4) \geq \log(10-2x)$ (4)                          | $\log_{0.5}(3-x) < -2$ (3)                        |
| $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3) > \log_{\frac{1}{3}}(x+5)$ (6) | $\log_2(x+2) < \log_2(2x-3)$ (5)                  |
| $\log_2(x^2-3x)-2 > 0$ (8)                                | $\log_{0.5}\left(x^2-\frac{1}{2}x\right) > 1$ (7) |
| $\log_4\left(\frac{x+3}{x-2}\right) > \frac{1}{2}$ (10)   | $\log_2\left(x^2-\frac{9}{16}\right) < 0$ (9)     |
| $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 > 0$ (12)                     | $\log_2\left(\frac{x-5}{x+2}\right) \geq 1$ (11)  |

(13) פתור את אי-השוויוניים הבאים (שימוש בלוגריתם הטבעי  $(\ln)$ ):

- |                                |                                  |
|--------------------------------|----------------------------------|
| $\ln(x+1) > \ln(2-x)$ .ב       | $\ln x > \ln 3$ .א               |
| $\ln(x^2+4) > \ln(2x+3)$ .ד    | $2\ln x > 3$ .ג                  |
| $\ln(9x+1) \geq \ln(1+x^3)$ .ו | $\ln(4x-x^2) \leq \ln(6x+3)$ .ה  |
| $6\ln x - (\ln x)^2 \leq 0$ .ח | $\ln^2 x - 8\ln x + 7 > 0$ .ז    |
|                                | $2 - 3\ln x + \ln^2 x \leq 0$ .ט |

## תשובות סופיות:

- (1)  $3 < x < 4$  (2)  $2 < x \leq 7$  (3)  $x < -1$
- (4)  $2 \leq x < 5$  (5)  $x > 5$  (6)  $-1 < x < 2$
- (7)  $-\frac{1}{2} < x < 0, \frac{1}{2} < x < 1$  (8)  $x < -1, x > 4$  (9)  $-\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$
- (10)  $2 < x < 7$  (11)  $-9 \leq x < -2$  (12)  $0 < x < 4, x > 16$
- (13) א.  $x > 3$  ב.  $0.5 < x < 2$  ג.  $x > e^{1.5}$  ד.  $x > -1.5, x \neq 1$
- ה.  $0 < x < 4$  ו.  $0 \leq x \leq 3$  ז.  $0 < x < e, x > e^7$  ח.  $0 < x \leq 1, x \geq e^6$
- ט.  $e \leq x \leq e^2$

## תוכן העניינים:

פרק 6.....	121
בעיות גדילה ודעיכה.....	121
הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מעריכית :	121.....
שאלות חימום :	121.....
תשובות סופיות :	124.....
שאלות לפי נושאים :	125.....
שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית :	125.....
שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית :	125.....
שאלות העוסקות במציאת אחוז גידול דעיכה :	125.....
שאלות העוסקות במציאת הזמן :	125.....
שאלות שונות (כל הנושאים יחד) :	126.....
תשובות סופיות :	127.....
תרגול נוסף :	128.....
תשובות סופיות :	133.....

## פרק 6

# בעיות גדילה ודעיכה

### הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מעריכית:

הכמות לאחר פרק זמן  $t$ , המסומנת  $M_t$ , כאשר הכמות ההתחלתית היא  $M_0$  וקצב הגידול/דעיכה הוא  $q$  ניתנת ע"י הנוסחה הבאה:  $M_t = M_0 \cdot q^t$ .  
כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי:  $q = \frac{100 \pm p}{100}$ .

### שאלות חימום:

(1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

- מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
- מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

- |               |               |
|---------------|---------------|
| א. $q = 1.2$  | ב. $q = 1.6$  |
| ג. $q = 0.85$ | ד. $q = 0.72$ |

(3) מצא את  $M_0$ :

- |                                |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$  | ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$ |
| ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$ |                              |

(4) מצא את  $q$  :

ב.  $512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40}$

א.  $25 = 10 \cdot q^6$

ד.  $9.35 = 7 \cdot q^{10.5}$

ג.  $10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25}$

ו.  $13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3}$

ה.  $6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{\frac{1}{3}}$

(5) מצא את  $t$  :

ב.  $62.08^t = 39.68$

א.  $10 \cdot 1.05^t = 70$

ג.  $7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5$

(6) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2. בשעה 30:10 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.

א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?

ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?

ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

(7) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%. במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.

א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?

ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?

ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

(8) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה. מה היה מחירו ההתחלתי?

(9) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם. ידוע כי שרון רצה ביום השישי מרחק של 2.5 ק"מ. כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

(10) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה. כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.

א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?

ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

- 11** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית.  
בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה.  
כיום יש באגם  $2 \cdot 10^5$  ק"ג אצות.  
א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?  
ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?  
ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?
- 12** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.  
א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?  
ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?
- 13** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.  
א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?  
ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?
- 14** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה  $5 \cdot 10^4$  טון עצים ובשנת 1990 הייתה  $10^7$  טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?
- 15** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג.  
בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.  
א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?  
ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?
- 16** מכונית מאבדת  $\frac{5}{8}$  מערכה במשך 10 שנים.  
א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?  
ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?
- 17** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.  
א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.  
ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

## תשובות סופיות:

1.15 ד.	1.05 ג.	0.6 ב.	1.2 א. (1
	0.5 ח.	0.75 ז. 3. ו.	ה. 2.
28% דעיכה. ד.	15% דעיכה ג.	60% גדילה ב.	20% גדילה א. (2
	150 ג.	45 ב.	80 א. (3
1.028 ד.	0.732 ג.	0.7469 ב.	1.165 א. (4
		1.03 ו.	0.22 ה.
	33.01 ג.	2 ב.	39.88 א. (5
	52,428,800 ג.	200 ב.	100 א. (6
	456.747 ג. כן.	1422.4 ב. ג'.	1889.56 א. ג'.
			592.6 נח. (8
			1.41 ק"מ. (9
	467,304 ב. תושבים.		578,642 א. תושבים. (10
	4,525,483.4 ק"ג. ג.	50,000 ק"ג. ב.	3,200,000 ק"ג. א. (11
		9.6 מיליון תושבים. ב.	1.029 א. (12
		2117 תוכים. ב.	1.032 א. (13
			14.16% (14
		70.35 גרם. ב.	0.9671 א. (15
		77.1% ב.	0.90657 א. (16
		6.15 ב.	3.18% א. (17

## שאלות לפי נושאים:

### שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

- (1) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?
- (2) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

### שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

- (3) מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

### שאלות העוסקות במציאת אחוז גידול דעיכה:

- (4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
- (5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
- (6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

### שאלות העוסקות במציאת הזמן:

- (7) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
- (8) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?



- (9) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?
- (10) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
- (11) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
- (12) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

### שאלות שונות (כל הנושאים יחד):

- (13) בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?
- (14) נתונות שתי תרבויות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבות א' היו 4,000 חיידקים ובתרבות ב' היו 500 חיידקים. נסמן:
- $t_1$  - הזמן שחלף עד שבתרבות א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות ב'.
- $t_2$  - הזמן שחלף עד שבתרבות ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות א'.
- חשב את היחס  $\frac{t_1}{t_2}$ .
- (15) מספר החיידקים בתרבות גדל ב-  $p\%$  בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה  $m$ . כעבור  $t$  שעות הוציאו  $m$  חיידקים מהתרבות וכעבור עוד  $t$  שעות היו  $6m$  חיידקים בתרבות. הבע את  $t$  באמצעות  $p$ .
- (16) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$ . מצא את ערך ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

17) נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

## תשובות סופיות:

- |                            |                                     |   |
|----------------------------|-------------------------------------|---|
| 1) 5,062 חסידות.           | 2) 101,342 תושבים.                  | 3) 34,907 זכרות.  |
| 4) 2.3%.                   | 5) 3.5%.                            | 6) 921 חיידקים.   |
| 7) 9.41 שנים               | 8) 7.47 שנים.                       | 9) 16.43 שעות.  |
| 10) 12.43 שעות.            | 11) 9.43 ימים.                      | 12) 16:00   |
| 13) בנק א'                 | 14) $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2}$ | 15) $t = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)}$ |
| 16) $x = 17.04$ , מינימום. |                                     |   |
| 17) 11 חודשים.             |                                     |   |

## תרגול נוסף:

- (1) בבריכת דגים נספרו 20,000 דגים.  
כשלוש שנים לאחר מכן התבצעה ספירה נוספת ובה היו 28098 דגים.  
א. מצא את אחוז הגדילה השנתי של הדגים.  
ב. Kאחר 4 שנים נוספות הוציאו מהבריכה 40,000 דגים.  
מצא כמה דגים יישארו בבריכה לאחר שנה מהוצאת ה-40,000 דגים.
- (2) כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה.  
בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים  
ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים.  
מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.
- (3) מדען שוקל כמות חומר רדיואקטיבית 3 פעמים ביום מסוים.  
בשקילה הראשונה כמות החומר היא 120 גרם.  
לאחר שלוש שעות כמות החומר הייתה 61.44 גרם.  
בשקילה השלישית 31.457 גרם.  
א. מצא את אחוז הדעיכה של החומר הרדיואקטיבי.  
ב. מצא לאחר כמה שעות מהשקילה השנייה התבצעה השקילה השלישית.
- (4) אחוז ריבוי אוכלוסייה בעיר מטרופולין הוא כזה שכל 30 שנים מכפילה העיר את  
כמות תושביה.  
א. מצא את קצב הגידול השנתי של תושבי העיר.  
ב. אחוזי הריבוי בעיר גוטהם ובעיר מטרופולין זהה, אך ידוע כי כל 10 שנים  
עוזבים את העיר גוטהם כ-10,000 תושבים. בשנת 1970 היו בעיר  
גוטהם 40,000 תושבים. מצא כמה אנשים יהיו בעיר גוטהם בשנת 1988.
- (5) הערך של משאית הובלה יורד מדי שנה באחוז קבוע. ידוע כי ערך המשאית  
לאחר 4 שנים מיום מכירתה נמוך ב-20,000 ממחירה המקורי.  
כמו כן, ערך המשאית לאחר 8 שנים הוא 56,000 ₪.  
מצא את המחיר המקורי של המשאית ואת האחוז שבו ערכה יורד מדי שנה.

- 6) ערך של מכונית היום הוא 45,000. המכונית יצאה לשוק לפני 3 שנים וערכה קטן מדי שנה באחוז קבוע של 8%.
- א. מה המחיר המקורי של המכונית?
  - ב. מה יהיה מחיר המכונית לאחר 3 שנים מהיום?
  - ג. מצא תוך כמה שנים המכונית תרד עד לרבע מערכה בזמן שיצאה לשוק.
- 7) ערכן של אדמה עידית ואדמה זיבורית גדל בצורה מעריכית מדי שנה. ידוע כי הערך של דונם אדמה עידית גדול פי 5 מהערך של דונם אדמה זיבורית. הערך של האדמה הזיבורית גדל ב-8% והערך של האדמה העידית גדל ב-4% לשנה. מצא בעוד כמה שנים ישתוו המחירים של דונם אדמה מכל סוג.
- 8) ערכן של אדמה עידית ואדמה זיבורית גדל בצורה מעריכית מדי שנה. ידוע כי הערך של דונם אדמה עידית גדול פי 6 מהערך של דונם אדמה זיבורית. הערך של האדמה הזיבורית גדל באחוז קבוע הגדול פי 2 מהאחוז שבו גדל הערך של האדמה העידית. מצא את אחוז הגדילה של האדמה הזיבורית אם ידוע כי המחירים של דונם אדמה מכל סוג ישתוו לאחר 62.4 שנים.
- 9) ערכן של שתי מכוניות, האחת חדשה והשנייה ישנה, מתנהג בצורה מעריכית. ערך המכונית החדשה גדול פי 2 מערך המכונית הישנה ויורד באחוז מסוים מידי שנה. כמו כן, ידוע כי ערך המכונית הישנה גדל באותו האחוז מדי שנה. לאחר 20 שנים מהיום שבו הוצעו המכוניות למכירות פומביות ערכן השתווה. מצא את אחוז הגדילה או הדעיכה של כל מכונית.
- 10) אדם מפקיד לתכנית חיסכון סכום מסוים לפי ריבית דריבית של 3%. ערך מכונית יורד בכל שנה ב-3%. ידוע כי סכום המכונית גדול פי 3 מהסכום שהפקיד האדם בתכנית החיסכון. מצא לאחר כמה זמן יוכל האדם למשוך את הכסף שיעמוד לרשותו ולקנות את המכונית.

- 11** כמות חומר רדיואקטיבי מאבד 60% ממשקלו תוך 8 שעות.  
קצב הדעיכה של החומר הוא מעריכי.
- א. מצא את קצב הדעיכה של החומר לשעה.  
ב. מצא תוך כמה זמן יאבד החומר 90% ממשקלו.  
ג. ידוע כי לאחר 3.5 שעות איבד החומר 10 גרם ממשקלו.  
מצא את כמות החומר הרדיואקטיבי ההתחלתית.  
ד. מה הייתה כמות החומר הרדיואקטיבי 3 שעות לפני שנערכה המדידה הראשונה.  
ה. בכמה אחוזים קטן החומר הרדיואקטיבי מ-3 שעות לפני המדידה הראשונה עד למדידה הראשונה?
- 12** לשרון שתי חוות נמלים שבהן קצב ריבוי הנמלים הוא מעריכי וגדל ב-4% ליום. בסוף כל שבוע (לאחר 7 ימים) שרון לוקחת כמות נמלים קבועה מחווה א' ומעבירה אותם לחווה ב'. שרון סופרת את כמות הנמלים בכל חווה ביום מסוים ומגלה כי כמויות הנמלים בשתי החוות הן 3,000 נמלים בכל חווה. בספירה נוספת שערכה שרון לאחר שבועיים מיום מדידתה הקודם (ולאחר ההעברה) מצאה שרון כי בחווה ב' יש 1,500 נמלים יותר מבחווה א'. מצא כמה נמלים מעבירה שרון מחווה א' לחווה ב' לאחר כל 7 ימים.
- 13** תרבות חיידקים גדלה בצורה מעריכית. מדען שקל את כמות החיידקים בשעה 10:00 בבוקר ומצא כי יש בתרבות  $k$  חיידקים. בשעה 14:00 ערך המדען שקילה נוספת ומצא כי משקל החיידקים הוא  $1.35k$ . בשעה 20:00 ערך המדען שקילה נוספת ומצא כי משקל החיידקים הוא 741.14 גרם.
- א. מצא את קצב הגידול של החיידקים בכל שעה.  
ב. מצא את המשקל של התרבות בשעה 10:00 בבוקר.  
ג. מצא את המשקל של התרבות בשעה 6:00 בבוקר.  
ד. כדי שהמדען יצליח בניסוי משקל התרבות חייב לעבור משקל של 1 ק"ג במהלך יום המדידות הנ"ל (עד שעה 12 בלילה - 24:00). האם המדען יצליח או ייכשל בניסוי?

- 14** סוחר קנה בריכת דגים ובה 1000 דגי סלמון. ידוע כי כל שבוע כמות הדגים בבריכה גדלה ב-7%. לאחר 5 שבועות מוכר הסוחר 500 דגי סלמון.
- א. מצא כמה דגים יהיו לסוחר בבריכה לאחר חודשיים (חודש בן 4 שבועות) מזמן הקנייה.
- ב. מצא כמה דגים יהיו לסוחר בבריכה לאחר חודשיים מזמן הקנייה, אם ידוע כי לאחר הוצאת 500 הדגים מהבריכה קצב הגידול של דגים עלה ל-10%.
- 15** סוללה בעלת קיבולת מקסימלית של 9 וולט נטענת בקצב של 14% לדקה.
- א. חשב תוך כמה זמן תטען הסוללה אם ידוע כי מטען הסוללה ההתחלתי הוא 3 וולט.
- ב. חשב תוך כמה זמן תטען הסוללה אם ידוע כי לאחר שהגיעה ל-6 וולט מוציאים ממנה 2 וולט (באופן חד-פעמי) ואוגרים אותו בקבל.
- 16** בתרביית  $4 \cdot 10^4$  חיידקים. לאחר 4 שעות כמות החיידקים היא  $5 \cdot 10^5$ .
- א. מצא את קצב הגידול של החיידקים בכל שעה.
- ב. מדען גילה כי לאחר שבתרביית יש  $10^6$  חיידקים אז קצב הגדילה שלהם יורד ב-30%. תוך כמה זמן יהיו בתרביית  $10^7$  חיידקים מאז המדידה הראשונה?
- 17** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
- א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
- ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים מהכוורת וידוע כי נשארו 1,500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.
- 18** ידוע כי לאחר שמקום השורץ נמלים עובר ריסוס אז הן מתות בצורה מעריכית. המדביר אומר ללקוח כי לאחר 3 שעות כ-90% מהנמלים וודאי ימותו.
- א. מצא את הקצב בו מתות הנמלים בכל שעה.
- ב. חשב כמה זמן צריך הלקוח לחכות כדי שלפחות מחצית מהנמלים ימותו.
- 19** ענה על השאלות הבאות:
- א. זמן מחצית החיים של חומר הוא 30 שנים. כמה אחוזים מאבד החומר ממשקלו מידי שנה?
- ב. זמן מחצית החיים של חומר מסוים הוא 22 שנים. כמה אחוזים מאבד החומר ממשקלו מדי שנה?
- ג. זמן מחצית החיים של חומר מסוים הוא שנה. כמה אחוזים מאבד החומר ממשקלו מדי חודש?

- ד. ערכה של מכונית יורד ב-50% לאחר 4 שנים.
- כמה אחוזים מערכה המקורי של המכונית יישארו לאחר שנה?
  - לאחר כמה שנים תאבד המכונית 75% מערכה?
- ה. ערכה של מנייה מסוימת מאבד 50% לאחר 6 שנים.
- כמה אחוזים מערך המנייה המקורי יישארו לאחר שנתיים?
  - לאחר כמה שנים תאבד המנייה 75% מערכה?
- ו. חומר מאבד ממשקלו 2% מדי שנה. מהו זמן מחצית החיים שלו?
- ז. חומר מאבד ממשקלו 4% מדי שנה. מהו זמן מחצית החיים שלו?
- ח. מכונית מאבדת 5% מערכה מדי שנה. מהו זמן מחצית החיים שלה?
- ט. מנייה מסוימת מאבדת 3% מערכה מדי שנה.
- מהו זמן מחצית החיים של המנייה?
  - לאחר כמה שנים ערך המנייה ירד ב-40%?
  - לאחר כמה שנים ערך המנייה יהיה 40% מערכה ההתחלתי?
- י. מוצר מסוים מאבד 1% מערכו מדי שנה.
- מהו זמן מחצית החיים של המוצר?
  - לאחר כמה שנים ערך המוצר ירד ב-30%?
  - לאחר כמה שנים ערך המוצר יהיה 30% מערכו ההתחלתי?

**(20)** חומר רדיואקטיבי המתפרק בצורה מעריכית מגיע למחצית מהכמות שהיה בתחילתו תוך 6 שעות.

א. מצא תוך כמה זמן יגיע החומר הרדיואקטיבי לשליש מהכמות שהיה בתחילה.

ב. מצא כמה חומר רדיואקטיבי יישאר מ-600 גרם לאחר 12 שעות.

**(21)** ערכה של מכונית יורד בצורה מעריכית. ידוע כי המכונית מאבדת 6500 ₪ מערכה לאחר שנה ועוד 5850 ₪ לאחר שנה נוספת.

א. מצא באיזה אחוז יורד ערך המכונית מדי שנה.

ב. מצא תוך כמה שנים יגיע ערך המכונית למחצית מערכו המקורי.

**(22)** מדען ביצע ניסוי ובו הזריק חיסון כימי לתוך תרבית חיידקים. המדען גילה כי לאחר 3 שעות נותרו פעילים בדיוק מחצית מכמות החיידקים שהיו בהתחלה.

א. מצא את אחוז הדעיכה של החיידקים לשעה.

ב. לאחר כמה זמן יהיו בתרבית 10% של חיידקים פעילים בלבד?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 12% ב. 4719 דגים.
- (2) 100000 עצים.
- (3) א. דועך ב-20%. ב. 3 שעות.
- (4) א. 1.023 ב. 48,598 תושבים.
- (5) 91,634.8 ₪, יורד ב-6% לשנה.
- (6) א. 57,789 ₪ ב. 35,040 ₪ ג. 16.62 שנים.
- (7) 42.64 שנים.
- (8) 6%
- (9) 1.73%
- (10) 18.3 שנים.
- (11) א. 0.891 ב. 20.1 שעות. ג.  $k = 30.278$  ד. 42.79 ג'.
- (12) 323 נמלים.
- (13) א. 1.078 ב. 350 גרם ג. 259.25 גרם ד. יצליח.
- (14) א. 1105 דגים. ב. 1201 דגים.
- (15) א. 8.38 דקות. ב. 11.47 דקות.
- (16) א. 1.88 ב. 10.1 שעות.
- (17) א. ב-4.1%. ב. 3000 דבורים.
- (18) א. בקצב של 1.535 לשעה. ב. כ-54 דקות ( $t = 0.903$ ).
- (19) א. 2.285% ב. 3.1% ג. 5.612% ד. i. 84% ii. 7.95 שנים. ה. i. 79.37% ii. 11.98 שנים. ו. 34.3 שנים.
- ז. 16.979 שנים. ח. 13.513 שנים. ט. i. 22.75 שנים. ii. 16.77 שנים.
- iii. 30.08 שנים. י. i. 68.96 שנים. ii. 35.48 שנים. iii. 119.794 שנים.
- (20) א. 9.5 שעות. ב. 150 גרם.
- (21) א. ב-10%. ב. 6.57 שנים.
- (22) א. 20.6% ב. לאחר 10 שעות.



## תוכן העניינים:

135	פרק 7.....
135	משוואות טריגונומטריות.....
135	פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות) :
135	שאלות:
138	פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום נתון :
138	שאלות:
139	פתרון של משוואות טריגונומטריות (ברדיאנים) :
139	הגדרת הרדיאן :
139	קשר בין רדיאנים למעלות :
139	פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים :
140	שאלות:
142	תשובות סופיות :

## פרק 7

# משוואות טריגונומטריות

## פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות  
כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k$ , $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

כאשר  $k$  מספר שלם.

### שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הסינוס):

$$\text{א. } \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ג. } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ד. } \sin x = -\frac{1}{2}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הקוסינוס):

$$\text{א. } \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקצית הטנגנס):

$$\text{א. } \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ב. } \tan x = -1$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א.  $\sin x = 0.7$       ב.  $\cos x = -0.6$       ג.  $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$       ב.  $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג.  $\tan 5x = -1$       ד.  $3 \sin 2x = 2$

ה.  $3 \cos 3x = 1$       ו.  $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א.  $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       ב.  $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$       ג.  $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א.  $\sin x = \sin 3x$       ב.  $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג.  $\sin x = \sin(120^\circ - x)$       ד.  $\cos x = \cos 3x$

ה.  $\cos x = \cos(40^\circ - x)$       ו.  $\tan x = \tan 3x$

ז.  $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א.  $\sin x = 0$       ב.  $\sin x = 1$

ג.  $\sin x = -1$       ד.  $\cos x = 0$

ה.  $\cos x = 1$       ו.  $\cos x = -1$

ז.  $\tan x = 0$       ח.  $\tan x = 1$

9) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

א. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$	ב. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$
ג. $\tan^2 2x = 3$	ד. $\sin x \cos 3x = 0$
ה. $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$	ו. $2\cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0$
ז. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	ח. $3\sin^2 x - \sin x = 2$
ט. $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	י. $\cos^2 x + 2\cos x = 3$
יא. $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$	יב. $\tan^2 x = 4\tan x - 1$
יג. $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$	יד. $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$
טו. $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$	

10) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות יסוד):

א. $\sin x = \cos x$	ב. $\sin x = \cos(x + 45^\circ)$
ג. $\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x$	ד. $2\cos^2 x = 3\sin x$
ה. $\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4}$	ו. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$
ז. $\sin^2 x + 2\cos^2 x = 1.5$	ח. $\sin x - \tan x = 0$

11) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $\sin x = -\sin 3x$	ב. $\cos 2x = -\cos 3x$
ג. $\sin(x + 30^\circ) = -\cos x$	ד. $\sin 3x = -\cos(180^\circ - x)$

12) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (חלוקה בקוסינוס):

א. $\sin x = 2\cos x$	ב. $3\sin x = \cos x$
ג. $4\sin x = 7\cos x$	ד. $2\sin x = -5\cos x$
ה. $\sin^2 x = 8\cos^2 x$	ו. $3\sin^2 x = \cos^2 x$

13) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זהויות של זווית כפולה):

- |                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| א. $\sin x - \sin 2x = 0$   | ב. $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$ |
| ג. $4 \cos x = \sin 2x$     | ד. $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$       |
| ה. $3 \cos x - \cos 2x = 0$ | ו. $\cos 2x = 2 \sin x$            |
| ז. $\sin x + \cos 2x = 1$   | ח. $2 \sin^2 x + \cos 2x + 2 = 0$  |

## פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום נתון:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- $k$  ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

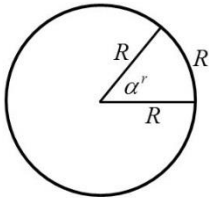
### שאלות:

14) מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידך:

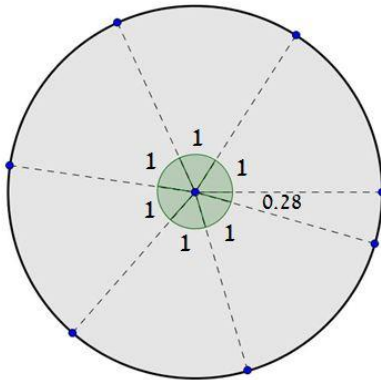
- א.  $8 \sin x - 4 = 0$  ,  $[0^\circ : 180^\circ]$
- ב.  $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$  ,  $[-90^\circ : 90^\circ]$
- ג.  $3 \cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$  ,  $[-90^\circ : 90^\circ]$
- ד.  $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$  ,  $[0^\circ : 360^\circ]$
- ה.  $2 \sin 3x - 5 \cos 3x = 0$  ,  $[-30^\circ : 30^\circ]$
- ו.  $2 \cos^2 3x = \sin 6x + 1$  ,  $[0^\circ : 180^\circ]$
- ז.  $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$  ,  $[-180^\circ : 180^\circ]$
- ח.  $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$  ,  $[-180^\circ : 180^\circ]$

## פתרון של משוואות טריגונומטריות (ברדיאנים):

### הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל. עבור מעגל שרדיוסו  $R$ , תימצאנה  $2\pi$  רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא  $P = 2\pi \cdot R$ .



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$  קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל- $0.28$  מרדיאן. מקבלים  $2\pi$  רדיאנים.

### קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות) לזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים):  $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$ .
- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים) לזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות):  $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$ .

### פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k$ , $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר  $k$  מספר שלם.

## שאלות:

15) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. $30^\circ$	ב. $90^\circ$	ג. $75^\circ$	ד. $120^\circ$
ה. $210^\circ$	ו. $315^\circ$	ז. $18^\circ$	ח. $285^\circ$
ט. $-15^\circ$	י. $-80^\circ$	יא. $510^\circ$	יב. $-390^\circ$

16) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. $\pi$	ב. $2\pi$	ג. $4\pi$	ד. $1.5\pi$
ה. $\frac{1}{2}\pi$	ו. $\frac{\pi}{4}$	ז. $\frac{\pi}{6}$	ח. $\frac{1}{18}\pi$
ט. $\frac{13}{18}\pi$	י. $\frac{19}{12}\pi$	יא. $1\frac{1}{6}\pi$	יב. $2\frac{1}{4}\pi$

17) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1$ , $\left[0: \frac{1}{3}\pi\right]$	ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$ , $[0: \pi]$
ג. $3 - 3\tan \frac{x}{2} = 0$ , $[0: 2\pi]$	ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $[0: \pi]$
ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$ , $\left[0: \frac{1}{2}\pi\right]$	ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$ , $\left[-\frac{5\pi}{18}: \frac{5\pi}{18}\right]$
ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$ , $\left[0: \frac{\pi}{3}\right]$	ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$ , $\left[-\frac{\pi}{4}: \frac{\pi}{4}\right]$

18) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ , $\left[0: \frac{\pi}{2}\right]$	ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{8}: \frac{\pi}{8}\right]$
ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$ , $[0: \pi]$	ד. $3\sin x \cos x + 3\cos x = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{3}: \frac{\pi}{3}\right]$
ה. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$ , $\left[-\frac{\pi}{2}: \frac{\pi}{2}\right]$	ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ , $[-\pi: \pi]$
ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ , $[-\pi: 0]$	ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$ , $[0: 2\pi]$

**19) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):**

א.  $0 \leq x \leq \pi, \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב.  $0 \leq x \leq \pi, \tan x = 4 \sin x$

ג.  $0 \leq x \leq 2\pi, 2 \sin^2 x = 3 \cos x$

**20) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):**

א.  $[-\pi : \pi], \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב.  $[0 : \pi], \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג.  $[0 : \pi], \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד.  $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right], \tan x = -\tan 2x$

**21) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):**

א.  $-\pi \leq x \leq \pi, \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב.  $[-\pi : \pi], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג.  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד.  $0 \leq x \leq \pi, \cos 4x + \sin^2 x = 1$



## תשובות סופיות:

$$\text{א. } x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad \text{ב. } x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, x_2 = 135^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$\text{ג. } x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 240^\circ + 360^\circ k \quad \text{ד. } x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{א. } x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \text{ב. } x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$\text{א. } x = 30^\circ + 180^\circ k \quad \text{ב. } x = 135^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$\text{א. } x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k, x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$\text{ב. } x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k \quad \text{ג. } x = 78.69^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{א. } x_1 = 10^\circ + 120^\circ k, x_2 = 50^\circ + 120^\circ k \quad \text{ב. } x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 105^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$\text{ג. } x = -9^\circ + 36^\circ k \quad \text{ד. } x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k, x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{ה. } x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k \quad \text{ו. } x = 6.64^\circ + 45^\circ k$$

$$\text{א. } x_1 = 105^\circ + 180^\circ k, x_2 = -45^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$\text{ב. } x_1 = 10^\circ + 120^\circ k, x_2 = 40^\circ + 120^\circ k \quad \text{ג. } x = -2.431^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{א. } x_1 = 180^\circ k, x_2 = 45^\circ + 90^\circ k \quad \text{ב. } x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 50^\circ + 120^\circ k \quad (7)$$

$$\text{ג. } x = 60^\circ + 180^\circ k \quad \text{ד. } x = 90^\circ k$$

$$\text{ה. } x = 20^\circ + 180^\circ k \quad \text{ו. } x = 180^\circ k \quad \text{ז. } x = 20^\circ + 60^\circ k$$

$$\text{א. } x = 180^\circ k \quad \text{ב. } x = 90^\circ + 360^\circ k \quad \text{ג. } x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$\text{ד. } x = 90^\circ + 180^\circ k \quad \text{ה. } x = 360^\circ k \quad \text{ו. } x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{ז. } x = 180^\circ k \quad \text{ח. } x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{א. } x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$\text{ב. } x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{ג. } x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad \text{ד. } x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k$$

$$\text{ה. } x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{ו. } x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{ז. } x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{ח. } x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{ט. } x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad \text{א} \quad x = 360^\circ k \quad \text{ב} \\
 & x = 360^\circ k \quad \text{ג} \quad x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad \text{ד} \\
 & x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad \text{ה} \quad x = 180^\circ + 360^\circ k \quad \text{ו} \\
 & x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad \text{ז} \quad x = 45^\circ + 180^\circ k \quad \text{ח} \quad \textbf{(10)} \\
 & x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad \text{ט} \quad x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \text{י} \\
 & x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad \text{יא} \quad x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \text{יב} \\
 & x = 180^\circ k \quad \text{יג} \quad x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad \text{יד} \\
 & x = 180^\circ + 360^\circ k \quad \text{יז} \quad x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k \quad \text{יח} \quad \textbf{(11)} \\
 & x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k \quad \text{יט} \quad x = 120^\circ + 180^\circ k \quad \text{כ} \\
 & x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad \text{כא} \quad x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad \text{כב} \quad \textbf{(12)} \\
 & x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad \text{כג} \quad x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad \text{כד} \\
 & x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad \text{כה} \\
 & x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad \text{כו} \\
 & x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k \quad \text{כז} \quad \textbf{(13)} \\
 & x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad \text{כח} \\
 & x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k \quad \text{כט} \quad x = 90^\circ + 180^\circ k \quad \text{ל} \\
 & x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k \quad \text{לא} \quad x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k \quad \text{לב} \\
 & x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k \quad \text{לג} \\
 & x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k \quad \text{לד} \\
 & x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ \quad \text{לה} \quad x = 30^\circ, 150^\circ \quad \text{לו} \quad \textbf{(14)} \\
 & x = 22.733^\circ \quad \text{לז} \quad x = 115^\circ, 295^\circ \quad \text{לח} \quad x = 39.736^\circ, -69.736^\circ \quad \text{לט} \\
 & x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ \quad \text{לא} \\
 & x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ \quad \text{לב} \quad x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ \quad \text{לג}
 \end{aligned}$$

$$\frac{7\pi}{6} \text{ .ה} \quad \frac{2\pi}{3} \text{ .ז} \quad \frac{5\pi}{12} \text{ .ג} \quad \frac{\pi}{2} \text{ .ב} \quad \frac{\pi}{6} \text{ .א (15)}$$

$$-\frac{4\pi}{9} \text{ .ו} \quad -\frac{\pi}{12} \text{ .ט} \quad \frac{19\pi}{12} \text{ .ח} \quad \frac{\pi}{10} \text{ .י} \quad \frac{7\pi}{4} \text{ .י}$$

$$-\frac{13\pi}{6} \text{ .יב} \quad \frac{17\pi}{6} \text{ .יג}$$

$$90^\circ \text{ .ה} \quad 270^\circ \text{ .ז} \quad 720^\circ \text{ .ג} \quad 360^\circ \text{ .ב} \quad 180^\circ \text{ .א (16)}$$

$$285^\circ \text{ .ו} \quad 130^\circ \text{ .ט} \quad 10^\circ \text{ .ח} \quad 30^\circ \text{ .י} \quad 45^\circ \text{ .י}$$

$$.405^\circ \text{ .יב} \quad 210^\circ \text{ .יג}$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \text{ .ז} \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ .ג} \quad x = \frac{5\pi}{6} \text{ .ב} \quad x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18} \text{ .א (17)}$$

$$.x = 0.224\pi \text{ .ח} \quad x = 0.0875\pi \text{ .י} \quad x = \frac{2\pi}{9} \text{ .י} \quad x = 0 \text{ .ה}$$

$$x = 0.398\pi, 0.602\pi \text{ .ג} \quad \phi \text{ .ב} \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ .א (18)}$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{ .י} \quad x = 0, 0.437\pi \text{ .ה} \quad \phi \text{ .ז}$$

$$.x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi \text{ .ח} \quad x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi \text{ .י}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \text{ .ג} \quad x = 0, 0.42\pi, \pi \text{ .ב} \quad x = \frac{\pi}{8} \text{ .א (19)}$$

$$x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72} \text{ .ב} \quad x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12} \text{ .א (20)}$$

$$.x = \pm \frac{\pi}{3}, 0 \text{ .ז} \quad x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{10} \text{ .ג}$$

$$x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \text{ .ב} \quad x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi \text{ .א (21)}$$

$$.x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi \text{ .ז} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} \text{ .ג}$$

## תוכן העניינים:

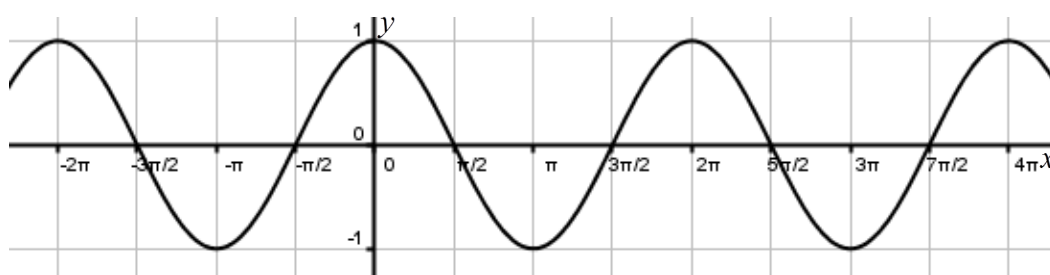
פרק 8.....	146
חקירת פונקציות טריגונומטריות.....	146
הגדרות כלליות :	146
הנגזרות הטריונומטריות היסודיות :	147
זוגיות של פונקציות :	147
מחזוריות של פונקציות :	147
שאלות :	148
שאלות העוסקות בגזירה של פונקציות טריגונומטריות :	148
שאלות שונות עם משיקים :	149
שאלות עם מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות :	150
שאלות עם מציאת נקודות קיצון :	150
שאלות עם מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים :	150
שאלות העוסקות בחקירת פונקציה טריגונומטרית :	151
שאלות העוסקות בהזזות ומתיחות של פונקציות טריגונומטריות :	152
שאלות שונות מבחינות :	154
תשובות סופיות :	158
תרגול נוסף :	163
שאלות העוסקות במעבר בין מעלות לרדיאנים :	163
שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות :	165
שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :	167
שאלות עם פרמטרים :	170
שאלות העוסקות בחקירת פונקציה טריגונומטרית :	172
תשובות סופיות :	180

## פרק 8

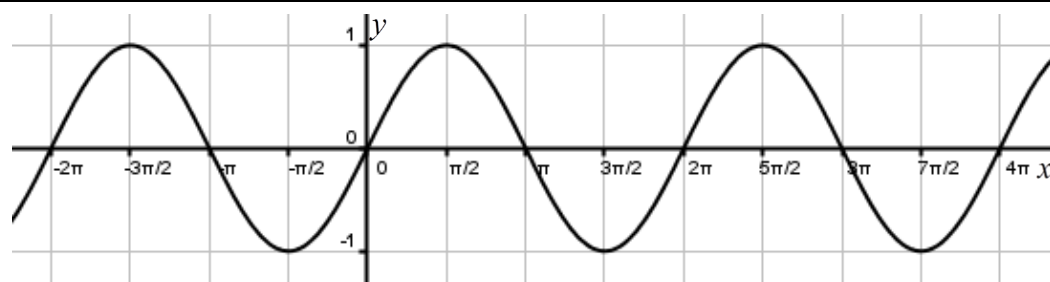
# חקירת פונקציות טריגונומטריות

### הגדרות כלליות:

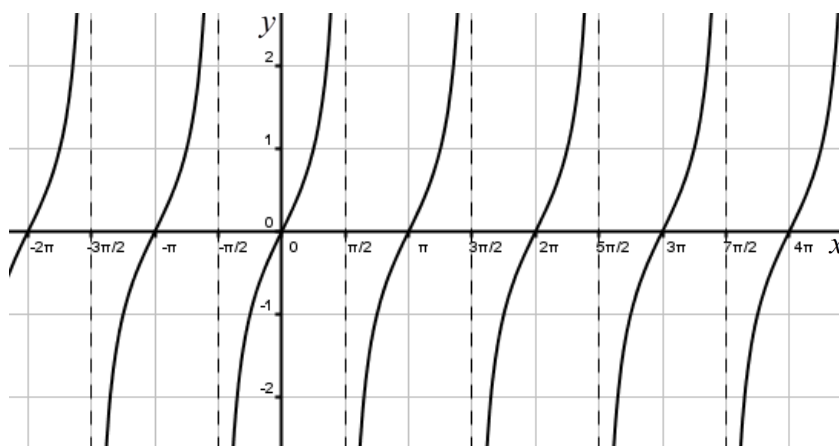
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס :  $y = \sin x$



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס :  $y = \cos x$



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס :  $y = \tan x$



### הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

### זוגיות של פונקציות:

1. פונקציה  $f(x)$  תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה:  $f(x) = f(-x)$ .
2. פונקציה  $f(x)$  תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה:  $f(x) = -f(-x)$ .
3. פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

### מחזוריות של פונקציות:

1. פונקציה  $f(x)$  תיקרא מחזורית במחזור  $T$  אם היא מקיימת:  $f(x+T) = f(x)$  לכל  $x$  בתחום הגדרתה.
2. מחזור של פונקציות טריגונומטריות:
  - הפונקציה  $f(x) = \sin x$  מחזורית במחזור  $T = 2\pi$  שכן:  $\sin(x+2\pi) = \sin x$ .
  - הפונקציה  $f(x) = \cos x$  מחזורית במחזור  $T = 2\pi$  שכן:  $\cos(x+2\pi) = \cos x$ .
  - הפונקציה  $f(x) = \tan x$  מחזורית במחזור  $T = \pi$  שכן:  $\tan(x+\pi) = \tan x$ .
  - הפונקציה  $f(x) = \cot x$  מחזורית במחזור  $T = \pi$  שכן:  $\cot(x+\pi) = \cot x$ .

3. מחזור של פונקציות מהצורה:  $y = a + c \cdot f(mx + n)$  (כאשר  $f(x)$  מחזורית במחזור  $T$ )

תלוי רק במקדם של  $x$  והוא:  $\frac{T}{m}$ . דוגמאות:

- הפונקציה  $f(x) = \sin(3x)$  מחזורית במחזור  $T = \frac{2\pi}{3}$ .
- הפונקציה  $f(x) = 5 - \cos(2x - \pi)$  מחזורית במחזור  $T = \pi$ .
- הפונקציה  $f(x) = \tan(0.1x)$  מחזורית במחזור  $T = \frac{\pi}{0.1} = 10\pi$ .

## שאלות:

### שאלות העוסקות בגזירה של פונקציות טריגונומטריות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin x + 3\cos x + x$

ב.  $f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x$

ג.  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin 3x + 2\cos 5x$

ב.  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin^3 x$

ב.  $f(x) = 2\cos^4 x$

ג.  $f(x) = \sin^2 x$

ד.  $f(x) = \sin^3 2x$

ה.  $f(x) = \cos^2 2x$

ו.  $f(x) = \tan^2 4x$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

ב.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

ג.  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

ב.  $f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x$

(6) מצא את המחזור של הפונקציות הבאות:

א.  $y = 2 \sin x$

ג.  $y = \tan \frac{x}{3}$

ב.  $y = 5 + 3 \sin(4x + 1)$

ד.  $y = \sin^2 x$

### שאלות שונות עם משיקים:

(7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \cos x$  בנקודה  $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

(8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \sin 2x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{2}$ .

(9) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \tan 3x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{9}$ .

(10) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה:  $f(x) = 4 \sin^2 x$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = 1$  בתחום  $[0, \pi]$ .

(11) שיפוע המשיק לפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$  ( $a$  פרמטר) בנקודה שבה  $y = 1$

בתחום  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  הוא  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . מצא את ערך הפרמטר  $a$ .



## שאלות עם מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

(12) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

ב.  $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ ,  $[-\pi : \pi]$

א.  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$ ,  $[0 : 2\pi]$

ג.  $f(x) = \tan x$ ,  $[0 : 2\pi]$

## שאלות עם מציאת נקודות קיצון:

(13) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = \sin x + \cos x$  בתחום:  $[0 : 2\pi]$ .

(14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$  בתחום:  $[0 : 2\pi]$ .

(15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$  בתחום:  $[0 : 2\pi]$ .

(16) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{3} \sin^3 x - 2 \sin x$  בתחום:  $[0 : 1.5\pi]$ .

(17) לפונקציה:  $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ ,  $(a, b)$  פרמטרים יש נקודת קיצון

ששיעוריה  $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

## שאלות עם מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

(18) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$  בתחום:  $[0 : \pi]$ .

(19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$  בתחום:  $[0 : \pi]$ .

(20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \tan x$  בתחום:  $[-\pi : \pi]$ .

### שאלות העוסקות בחקירת פונקציה טריגונומטרית:

**(21)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\cos x$  בתחום  $[0: 2\pi]$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

**(22)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$  בתחום  $[0: \pi]$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(23)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- א. מצא בתחום  $[0, \pi]$  את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- ב. הוכח שהפונקציה זוגית.
- ג. שרטט את הפונקציה בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

**(24)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x - 3\tan x$  בתחום  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

- א. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$  בתחום  $[0, 4]$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

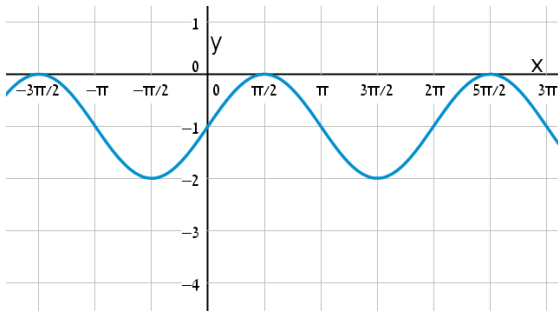
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

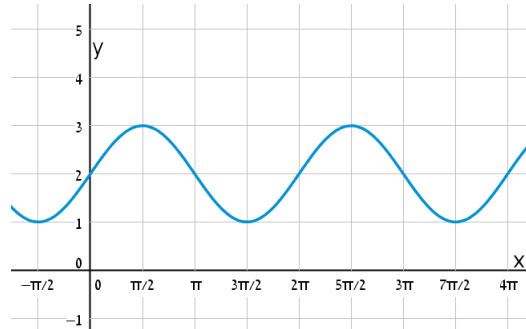
### שאלות העוסקות בהזזות ומתיחות של פונקציות טריגונומטריות:

26 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin x + b$ . קבע את הערך של  $b$  בכל אחד מהמקרים הבאים:

ב.

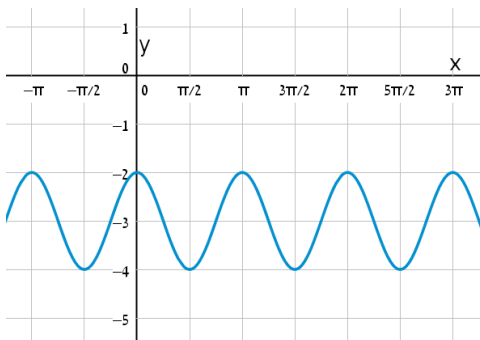


א.

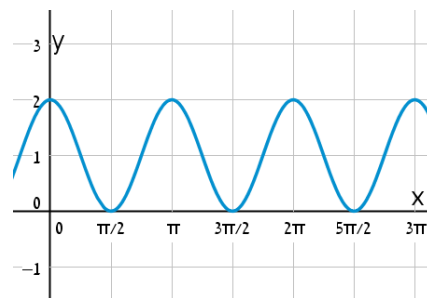


27 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos 2x + b$ . קבע את הערך של  $b$  בכל אחד מהמקרים הבאים:

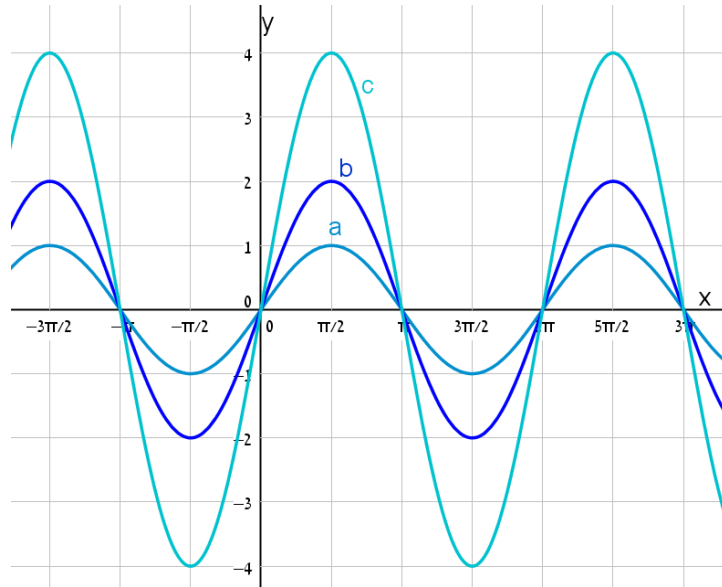
ב.



א.



- (28) נתונה הפונקציה:  $f(x) = k \sin x$ . באיור שלפניך 3 גרפים שונים.  
קבע מה צריך להיות ערכו של הפרמטר  $k$  עבורו כל גרף יתאים לפונקציה  $f(x)$ :



- (29) סרטט את הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \tan x$  ו-  $g(x) = |\tan x|$ .

- (30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$  בתחום  $[-2\pi : 2\pi]$ .

- הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה בתחום הנתון?
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- קבע בכמה נקודות חותך הישר  $y = 1$  את גרף הפונקציה  $|f(x)|$  בתחום הנתון.  
מצא את נקודות החיתוך.

## שאלות שונות מבחינות:

31 נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \sin^2 x - 5 \sin x + ax$ , (פרמטר  $a$ ) בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .

ידוע כי הישר:  $y = ax - 2$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{6}$ .

- מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא:  $m = 2$ .
- האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.
- כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

32 נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = x^2 + \cos^2 x$ ,  $g(x) = x^2 + \sin^2 x$ .

- הוכח כי ההפרש:  $f(x) - g(x)$  שווה ל- $\cos 2x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום:  $-\pi < x < \pi$ .
- ישר  $x = t$ , ( $0 < t < 1$ ) חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה  $g(x)$  לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה  $f(x)$  הוא 1. מצא את כל הערכים האפשריים עבור  $t$ .

33 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4 \sin 2x - 2$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר  $y = k$  היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי  $k$  הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר  $x$ .
- מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

34 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(35)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$ ,  $1 < m < 3$ , ( $m$  פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר:  $x = -\frac{\pi}{2}$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $m$ .
- ב. האם הנקודה שבה:  $x = -\frac{\pi}{2}$  היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה. אם לא נמק מדוע.
- ג. מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום:  $0 < x < 2\pi$ .
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.

**(36)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \cos x \cdot (\sin x + 1)$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$  בתחום הנתון?

**(37)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$  בתחום:  $-0.25\pi < x < 0.25\pi$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

**(38)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cos x - x$  בתחום:  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ב. ענה על הסעיפים הבאים:
  - i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  מאפסות את הנגזרת של הפונקציה.
  - ii. קבע אלו נקודות מנקודות החיתוך הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון ומצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

**(39)** נתונה הפונקציה:  $y = (\cos x + k)^2$ , פרמטר, בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

- מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

**(40)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$ ,  $(m)$  פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \pi$  שמשוואתו:  $y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $k$  ו- $m$ .
- מצא את נקודות הקיצון בתחום:  $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בתחום הנ"ל.

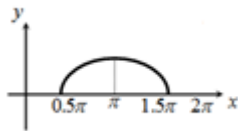
**(41)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan x + kx$ ,  $(k)$  פרמטר בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .

- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.
- הפונקציה:  $g(x) = \tan^2 x + kx$  חותכת את הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מצא את ערך הפרמטר  $k$ ,  $(k \neq 0)$ .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

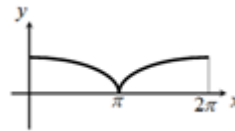
42 לפניך הפונקציות הבאות:  $f(x) = \sqrt{-\cos x}$ ,  $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$ .

הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$  והפונקציה  $g(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

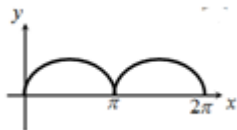
- האם הגרפים חותכים את ציר ה- $x$  בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
  - האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
  - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון וקבע את סוגה.
  - לפניך ארבעה איורים: i, ii, iii, iv.
- קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של  $f(x)$  ואיזה מתאר את הגרף של  $g(x)$ . נמק.



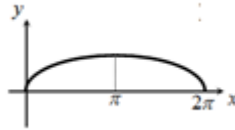
ii



i



iv



iii



## תשובות סופיות:

\* הערה: כל הסרטוטים מופיעים במרוכז בסוף דף התשובות.

$$\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} \cdot \lambda \quad 2 \sin x + 2x \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} \cdot \text{ב.} \quad \cos x - 3 \sin x + 1 \cdot \text{א.} \quad (1)$$

$$\cdot -\frac{2}{1 + \sin 2x} \cdot \text{ב.} \quad 3 \cos 3x - 10 \sin 5x \cdot \text{א.} \quad (2)$$

$$\sin 2x \cdot \lambda \quad -8 \cos^3 x \sin x \cdot \text{ב.} \quad 3 \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \text{א.} \quad (3)$$

$$\cdot \frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x} \cdot \lambda \quad -2 \sin 4x \cdot \text{ה.} \quad 6 \sin^2 2x \cos 2x \cdot \text{ד.}$$

$$\cdot \frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}} \cdot \text{ב.} \quad \frac{3 \cos 3x}{2 \sqrt{\sin 3x}} \cdot \text{א.} \quad (4)$$

$$\cdot -\sin 4x \cdot \lambda \quad 4 \sin 4x \cdot \text{ב.} \quad 2 \sin 2x \cdot \text{א.} \quad (5)$$

$$\cdot \pi \cdot \text{ד.} \quad 3\pi \cdot \text{ג.} \quad 0.5\pi \cdot \text{ב.} \quad 2\pi \cdot \text{א.} \quad (6)$$

$$\cdot y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$\cdot y = -2x + \pi \quad (8)$$

$$\cdot y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (9)$$

$$\cdot y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1, y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1 \quad (10)$$

$$\cdot a = \frac{1}{2} \quad (11)$$

$$\cdot x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \quad \text{וגם} \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad \text{ב.} \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{וגם} \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$\cdot x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{וגם} \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad \text{ג.}$$

$$\cdot \max(2\pi, 1), \min\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right), \max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right), \min(0, 1) \quad \text{קצה.} \quad (13)$$

$$\cdot \max(2\pi, -\pi), \min\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi\right), \max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right), \min(0, 0) \quad \text{קצה.} \quad (14)$$

$$(15) \max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right) \text{ מוחלט.}$$

$$(16) \max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right), \min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$$

$$(17) b = -4, a = 3$$

$$(18) x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi$$

$$(19) x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

$$(20) x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$$

$$(21) 0 < x < 2\pi \text{ א.}$$

$$\text{ב. } \max(2\pi, 2\pi + 2) \text{ קצה, } \min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right), \max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right), \min(0, 2) \text{ קצה.}$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi \text{ או } 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ , תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi \text{ . ד. } (0, 2)$$

$$(22) \text{ א. } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ . ב. } \min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ , תחומי ירידה: } 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ד. } \left(\frac{3}{4}\pi, 0\right) \text{ . ה. אנכית: } x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

$$(23) \text{ א. חיתוך: } (0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ , קיצון: } \min(\pi, -2) \text{ קצה, } \max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right), \min(0, 0) \text{ קצה.}$$

$$(24) \text{ א. } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ב. } \min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right) \text{ קצה, } \max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right), \min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right) \text{ קצה}$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ , תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ד. } (0, 0) \text{ . ה. אנכית: } x = \frac{\pi}{2}$$

**(25)** א.  $0 \leq x \leq 4$  וגם  $x \neq 0.44, x \neq 3.56$

ב.  $\max(0,0)$  קצה,  $\min(2,-1.16)$ ,  $\max(4,0)$  קצה.

**(26)** א.  $b = 2$  ב.  $b = -1$

**(27)** א.  $b = 1$  ב.  $b = -3$

**(28)**  $a:k=1, b:k=2, c:k=4$

**(29)** סרטוט בסוף.

**(30)** א. הוכחה. ב.  $(0,1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right)$  ג.  $x = \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

ד. סרטוט בסוף ה. 2 נקודות:  $(\pi, -1), (-\pi, -1)$ .

**(31)** א.  $f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x, a = 2$  ב.  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right)$  ג. לא.

ד.  $y = 2x - 3$

**(32)** ב.  $\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right)$  ג.  $t = \frac{\pi}{12}$

**(33)** א.  $\min(0, -2), \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right), \max(\pi, -2)$  ב.  $(0, -2), \left(\frac{\pi}{12}, 0\right), \left(\frac{5}{12}\pi, 0\right)$

ד.  $-6 < k < 2$  וגם  $k \neq 2$  ה.  $\frac{\pi}{2}$

**(34)** א.  $(\pi, 0), (0, -2)$

ב.  $\max\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(2\pi, -2), \max(0, -2), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(\pi, 0)$

ג. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \pi, 1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ ; יורדת:  $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi, 0 < x < \frac{\pi}{3}$

**(35)** א.  $m = 2$  ב. נקודת פיתול ג. 2 נקודות ד.  $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$

**(36)** א.  $(0,1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$  ב.  $(1.5\pi, 0), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right)$

ד. 2 פתרונות.

**(37)** א.  $(0,0), (\pm 0.23\pi, 0)$  ב.  $x = \pm 0.25\pi$

ג.  $\min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$

38 א.  $(0,0), (2\pi,0), (-2\pi,0)$

ב. ii.  $\max(2\pi,0), \min(-2\pi,0)$  ;  $(0,0)$  אינה קיצון.

39 א.  $y = (\cos x + 0.5)^2$ ,  $k = 0.5$  ב.  $(\pi, 0.25)$  ג. לא.

40 א.  $m = 6$ ,  $k = \sqrt{7}$  ב.  $(-0.5\pi, -6), (0.5\pi, 6), (1.5\pi, -6)$  ג. בשתי נקודות.

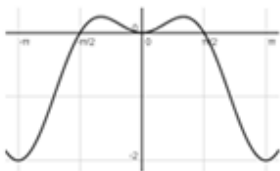
41 א.  $x = 0.5\pi$  ב.  $k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$

ג.  $\max(0,0), \min(0.15\pi, -0.07), \max(0.84\pi, -3.9), \min(\pi, -4)$

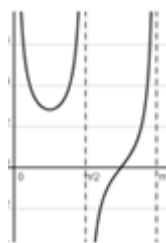
42 א. כן.  $f(x): (0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$ ,  $g(x): (\pi, 0)$  ב. כן,  $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ג.  $\max(0.5\pi, 0), \min(1.5\pi, 0), \max(\pi, 1)$  ד. איור I -  $g(x)$ , איור II -  $f(x)$ .

### סקיצות לשאלות החקירה:



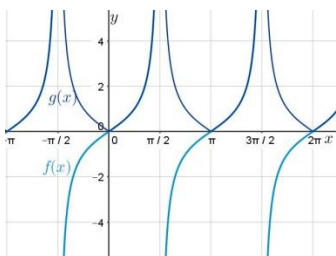
(23)



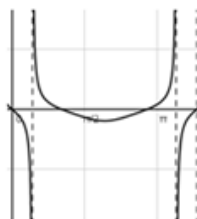
(22)



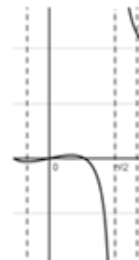
(21)



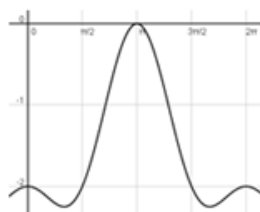
(29)



(25)



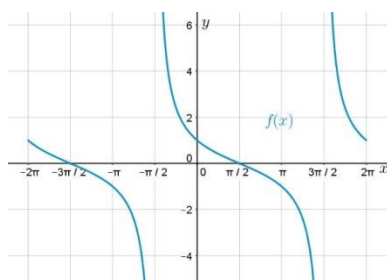
(24)



(34



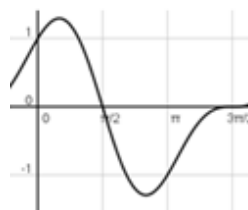
(33



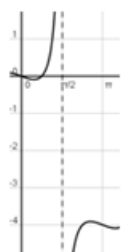
(30



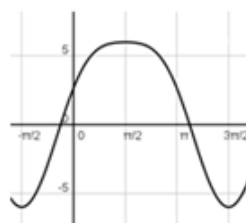
(37



(36



(41



(40

## תרגול נוסף:

### שאלות העוסקות במעבר בין מעלות לרדיאנים:

להלן נוסחאות המעבר בין זווית הנתונה במעלות לזווית הנתונה ברדיאנים ולהיפך:

$a^R = \frac{\pi}{180} a^\circ$	<b>ממעלות לרדיאנים:</b>
$a^\circ = \frac{180}{\pi} a^R$	<b>מרדיאנים למעלות:</b>

(1) לפניך מספר זוויות הנתונות ברדיאנים, כתוב את ערכן במעלות:

א. $\pi$	ב. $0.5\pi$	ג. $\frac{\pi}{3}$	ד. $\frac{\pi}{4}$
ה. $\frac{\pi}{5}$	ו. $\frac{\pi}{6}$	ז. $\frac{\pi}{9}$	ח. $\frac{\pi}{12}$
ט. $\frac{5\pi}{12}$	י. $\frac{3\pi}{2}$	יא. $\frac{7\pi}{3}$	יב. $\frac{7\pi}{6}$

(2) לפניך מספר זוויות הנתונות במעלות, כתוב את ערכן ברדיאנים:

א. $90^\circ$	ב. $45^\circ$	ג. $30^\circ$	ד. $20^\circ$
ה. $10^\circ$	ו. $115^\circ$	ז. $135^\circ$	ח. $225^\circ$
ט. $315^\circ$	י. $345^\circ$		

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	ב. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	ג. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	ד. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
ה. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	ו. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	ז. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$	ח. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
ט. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$	י. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	יא. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$	יב. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4) הצב בכל פונקציה את הערכים שלידה וחשב (הזווית נתונה ברדיאנים):

א.  $x = \pi, -\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{2} : y = 2 \sin x$

ב.  $x = \pi, -\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{2} : y = 3 \cos x$

ג.  $x = -\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{8} : y = \sin 2x$

ד.  $x = -\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{8} : y = \cos 2x$

ה.  $x = \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} : y = 3 \sin x$

ו.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = 4 \cos x + \sin 4x$

ז.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin^2 x$

ח.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos^2 x$

ט.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin^2 2x$

י.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos^2 2x$

יא.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan x$

יב.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan 2x$

יג.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \tan^2 x$

יד.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \sin x + \tan x$

טו.  $x = \pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} : y = \cos x + \tan x$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים (הזווית נתונה ברדיאנים):

- |  |  |
|--|--|
| א. $x = 1, 2, 3 : y = \sin x$            | ב. $x = 1, 2, 3 : y = \cos x$                |
| ג. $x = 1, 2, 3 : y = \tan x$            | ד. $x = -1, -2.5, -5 : y = \sin x$           |
| ה. $x = -1, -2.5, -5 : y = \cos x$       | ו. $x = -1, -2.5, -5 : y = \tan x$           |
| ז. $x = 2, 4, 5 : y = \tan 2x - \sin 3x$ | ח. $x = -1, -0.5, 3 : y = \cos 2x + \sin 2x$ |

(6) הצב בפונקציות הבאות את ערכי הזוויות שלידן (הזוויות ברדיאנים):

- |  |  |
|--|--|
| א. $x = 0, 1, 2 : y = x + \sin x$              | ב. $x = 0, 1, 2 : y = x + \cos x$              |
| ג. $x = 1.5, 2.5, -3 : y = x^2 - \sin x$       | ד. $x = 1.5, 2.5, -3 : y = x^2 - \cos x$       |
| ה. $x = 1, -3, 0.5 : y = x^2 + \tan x + 1$     | ו. $x = -6, -0.3, 0.25 : y = (x - \sin x)^2$   |
| ז. $x = -0.5, 1, 2.6 : y = (2x + \cos 2x)^2$   | ח. $x = 1, 2, 3 : y = x \sin x$                |
| ט. $x = 1, 2, 3 : y = x \cos x$                | י. $x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x \tan x$    |
| יא. $x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x^2 \sin x$ | יב. $x = 1, -1, 2, -2, 3, -3 : y = x^2 \cos x$ |

### שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות:

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                              |                                |
|------------------------------|--------------------------------|
| א. $y = 3 \sin x$            | ב. $y = 2 \cos x$              |
| ג. $y = 2 \tan x$            | ד. $y = \cos x + 5 \sin x$     |
| ה. $y = 4 \sin x - 3 \cos x$ | ו. $y = \tan x + 3 \sin x$     |
| ז. $y = \sin x + 2x$         | ח. $y = x^2 - 2 \cos x$        |
| ט. $y = 3x - 3 \tan x$       | י. $y = \sin x + 3 \cos x + x$ |



8) גזור את הפונקציות הבאות :

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| א. $y = \sin 3x$             | ב. $y = \cos 4x$             |
| ג. $y = \tan 2x$             | ד. $y = \sin 3x + 2 \cos 5x$ |
| ה. $y = 4 \sin 3x - \cos 2x$ | ו. $y = \tan 5x + \sin 3x$   |
| ז. $y = \sin 3x + x^2 - 3x$  | ח. $y = 3x - 3 \cos 2x$      |
| ט. $y = \sin(3x - \pi)$      | י. $y = \cos(0.4\pi - 4x)$   |

9) גזור את הפונקציות הבאות :

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| א. $y = x \sin x$                        | ב. $y = x \cos x$                     |
| ג. $y = 2x \tan x$                       | ד. $y = x^2 \cos x$                   |
| ה. $y = 2x \sin x + 4 \tan x$            | ו. $y = x(3 - \sin x)$                |
| ז. $y = \cos x \sin x$                   | ח. $y = (\cos x + 1)(\sin x - 2)$     |
| ט. $y = \cos x(\sin x + 1)$              | י. $y = (\cos x - 1)(\tan x - 1)$     |
| יא. $y = \sin 3x(\cos 2x - 1)$           | יב. $y = (x^2 - 3) \tan 4x$           |
| יג. $y = \frac{\sin x}{x}$               | יד. $y = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$   |
| טו. $y = \frac{\cos x}{\tan x - 3}$      | טז. $y = \frac{\sin x}{\sin x - 5}$   |
| יז. $y = \frac{\cos x + 2}{\sin x}$      | יח. $y = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$ |
| יט. $y = \frac{\cos 3x + 1}{\sin x + 2}$ | כ. $y = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$    |

**10) גזור את הפונקציות הבאות :**

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| א. $y = \sin^2 x$                     | ב. $y = \cos^2 x$                     |
| ג. $y = \tan^2 x$                     | ד. $y = \sin^3 x$                     |
| ה. $y = 2\cos^4 x$                    | ו. $y = \tan^2 4x$                    |
| ז. $y = \sin^3 2x$                    | ח. $y = \cos^2 2x$                    |
| ט. $y = (x \cos x)^2$                 | י. $y = x \sin^2 x$                   |
| יא. $y = x^2 \sin x - \cos^2 x$       | יב. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$         |
| יג. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$         | יד. $y = \sin^4 2x - \cos^4 2x$       |
| טו. $y = (x + \sin x)^2$              | טז. $y = x(3 - \sin x)^2$             |
| יז. $y = \frac{\cos^2 x + 1}{\sin x}$ | יח. $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}$ |

**שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:**

**11) מצא את שיפוע הפונקציה :  $y = \sin x$  בנקודות הבאות :**

- א.  $x = 0$       ב.  $x = \pi$       ג.  $x = -0.5\pi$

**12) מצא את שיפוע הפונקציה :  $y = 3\cos 2x$  בנקודות הבאות :**

- א.  $x = 0$       ב.  $x = 0.5\pi$       ג.  $x = \pi$

**13) מצא את שיפוע הפונקציה :  $y = \tan x - \cos x$  בנקודות הבאות :**

- א.  $x = 0$       ב.  $x = \frac{\pi}{3}$       ג.  $x = \frac{\pi}{4}$

**14) מצא את שיפוע הפונקציה :  $y = x + \sin 3x$  בנקודות הבאות :**

- א.  $x = \frac{\pi}{6}$       ב.  $x = -\frac{2\pi}{3}$       ג.  $x = \frac{\pi}{4}$

**(15)** חשב את הזווית הנוצרת בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \frac{x}{2} - \cos 2x$  בנקודה

שבה:  $x = \frac{\pi}{3}$  וציר ה- $x$ .

**(16)** חשב את הזווית הנוצרת בין שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \sin x - \tan x$  בנקודה

שבה:  $x = \frac{\pi}{4}$  והכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

**(17)** מצא את הזווית הנוצרת בין המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \sin x - \cos x$  בנקודות הבאות והכיוון החיובי של ציר ה- $x$ :

א.  $x = 0$       ב.  $x = \frac{\pi}{2}$       ג.  $x = \frac{\pi}{4}$       ד.  $x = \frac{\pi}{6}$

**(18)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \cos x$  בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{6}$ .

**(19)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \sin 2x$  בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**(20)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \tan 3x$  בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{9}$ .

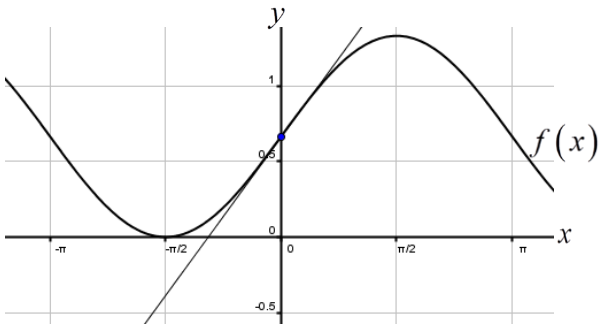
**(21)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \frac{\sin x + 1}{2}$  בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{4}$ .

**(22)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \tan 3x - x$  בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{4}$ .

**(23)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = x^2 \cos x$  בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**(24)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = (\sin x + \cos x)^2$  בנקודה שבה:  $x = \pi$ .

**(25)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$  בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{4}$ .



**(26)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \frac{2 \sin x + 2}{3} \quad \text{בתחום: } [-\pi, \pi]$$

מעבירים משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .

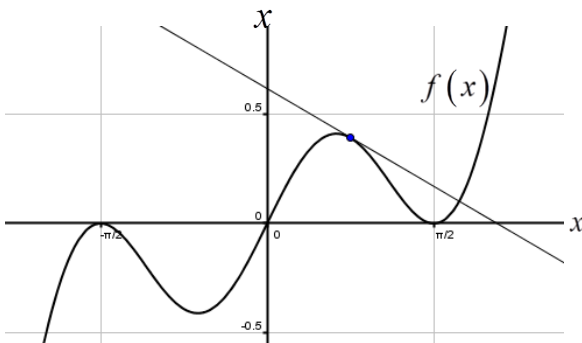
א. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של

הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מצא את נקודת החיתוך של המשיק

עם ציר ה- $x$ .



**(27)** נתונה הפונקציה:  $y = x \cos^2 x$

$$\text{בתחום: } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

מעבירים משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$

$$\text{מהנקודה שבה: } x = \frac{\pi}{4}$$

א. כתוב את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק

עם הצירים.

**(28)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 4 \sin^2 x$  בנקודות החיתוך של

הפונקציה עם הישר  $y = 1$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

**(29)** נתונות הפונקציות:  $f(x) = 4 \cos x$ ,  $g(x) = \sin 2x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א. מצא את נקודות החיתוך שלהן בתחום הנתון.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x)$  העוברים דרך נקודות

החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

**(30)** נתונות הפונקציות:  $f(x) = 2 \sin^2 x$ ,  $g(x) = \sin x + 1$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

א. מצא את נקודות החיתוך שלהן בתחום הנתון.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x)$  העוברים דרך נקודות

החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

**31** מצא את משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות הבאות בעלי השיפוע הנתון :

א.  $f(x) = 2 \sin x$ ,  $m = 2$  בתחום:  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ב.  $f(x) = \sin 4x$ ,  $m = 2$  בתחום:  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

ג.  $f(x) = 3x - \cos x$ ,  $m = 2$  בתחום:  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ד.  $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$ ,  $m = 1.5\sqrt{3}$  בתחום:  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

**32** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 1 - \sin 2x$ . מצא עבור אלו ערכים של  $x$  בתחום:  $[0, 2\pi]$  שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא -1.

**33** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = \cos 2x + 3$  המקביל לישר:  $y = x\sqrt{3} + \pi$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

**34** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = 3 \tan x - 2$  המקביל לישר:  $y = 3x + 2\pi$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

**35** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{3}{2} \cos 2x$  בתחום:  $[0, \pi]$  בעלי השיפוע -1.

### שאלות עם פרמטרים :

**36** נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \sin x + \cos 3x$  (פרמטר  $a$ ) בתחום:  $[0, 2\pi]$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{3}$  הוא 2. מצא את  $a$ .

**37** נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \cos 2x + \cos 3x$  (פרמטר  $a$ ) בתחום:  $[0, 2\pi]$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{3}$  הוא  $\sqrt{3}$ . מצא את  $a$ .

**(38)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = a \tan x$  בנקודה שבה  $x = \pi$  הוא 3.

א. מצא את  $a$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \pi$ .

**(39)** לגרף הפונקציה:  $f(x) = \sin x + a \cos x$  ( $a$  פרמטר) מעבירים משיק מנקודת החיתוך

שלה עם ציר ה- $y$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את משוואת המשיק.

ב. מצא את  $a$  אם ידוע כי שטח המשולש שנוצר בין המשיק והצירים הוא 2 יחידות שטח וכתוב את משוואת המשיק.

**(40)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x + k}$  ( $k$  פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{6}$  הוא:  $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ .

א. מצא את  $k$  וכתוב את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

ג. חשב את שטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים.

**(41)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{k}{\cos x} + 2 \sin 2x$  ( $k$  פרמטר חיובי).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

א. הבע באמצעות  $k$  את שיפוע המשיק.

ב. המשיק מאונך לישר:  $8y = x + 4$ . מצא את  $k$ .

ג. כתוב את משוואת המשיק.

**(42)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{2}{a \tan x}$  ( $a$  פרמטר).

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא:  $f'(x) = -\frac{2}{a \sin^2 x}$ .

ב. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = -\frac{\pi}{6}$  הוא -4.

מצא את  $a$ .

## שאלות העוסקות בחקירות פונקציה טריגונומטרית:

### תחומי הגדרה:

43) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום  $[0, 2\pi]$ :

- |  |   |
|--|---|
| א. $y = \sin 2x - 5$                                   | ב. $y = \sqrt{3} \cos x$                  |
| ג. $y = \tan x$  | ד. $y = \tan x + \sin x$                  |
| ה. $y = \tan 2x - 2 \cos x$                            | ו. $y = \tan^2 x + \tan x$                |
| ז. $y = \frac{1}{\sin 2x}$                             | ח. $y = \frac{3}{\cos x}$                 |
| ט. $y = \frac{x}{\sin x - 1}$                          | י. $y = \frac{\sin x}{\sin 2x + 0.5}$     |
| יא. $y = \frac{\cos x}{4 \sin^2 x - 3}$                | יב. $y = \frac{\cos x + 2}{\cos^2 x - 1}$ |
| יג. $y = \frac{x^2 - 4 \sin x + \cos x}{\sin^2 x + 1}$ | יד. $y = \frac{6}{\cos^2 x + 4}$          |
| טו. $y = \frac{12}{\tan x}$                            | יז. $y = \frac{7}{\tan 2x}$               |
| יז. $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$          | יח. $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$         |

44) הפונקציה:  $y = \tan(ax) + 3$  (פרמטר  $a$  אינה מוגדרת עבור:  $x = \frac{\pi}{4}$ ). מצא את  $a$ .

45) הפונקציה:  $y = \frac{2}{\sin x + a}$  (פרמטר  $a$  אינה מוגדרת עבור:  $x = \frac{\pi}{6}$ ). מצא את  $a$ .

46) הפונקציה:  $y = \frac{\sin x}{a^2 - \cos^2 x}$  (פרמטר חיובי  $a$  אינה מוגדרת עבור:  $x = 0$ ). מצא את  $a$ .

## נקודות קיצון:

47 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| א. $[0, 2\pi], y = \sin x$           | ב. $[0, 2\pi], y = \cos x$              |
| ג. $[-\pi, \pi], y = \tan x$         | ד. $[0, \pi], y = 2 \sin 2x$            |
| ה. $[0, 0.5\pi], y = 2 \cos 3x - 3x$ | ו. $[0, \pi], y = 2 \sin x - x\sqrt{3}$ |

48 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה:  $y = \frac{2}{\sin x}$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

49 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה:  $y = \frac{4}{\cos x}$  בתחום:  $[-\pi, \pi]$ .

50 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה:  $y = \sin^2 x$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

51 מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה:  $y = \cos^2 x + 2$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

52 מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה:  $y = \sin x + \cos x$  בתחום:  $[0, 2\pi]$  וקבע את סוגן.

53 מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה:  $y = \sin x - \frac{x}{2}$  בתחום:  $[0, 2\pi]$  וקבע את סוגן.

54 מצא את נקודות הקיצון המקומיות וקיצון הקצה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

- |                                 |                                      |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| א. $[0, \pi], y = 3 \sin 2x$    | ב. $[0, \pi], y = 2 \cos x + x$      |
| ג. $[0, \pi], y = \sin^2 x - 5$ | ד. $[0, \pi], y = \cos^2 x - \cos x$ |

55 מצא את נקודות הקיצון המקומיות וקיצון הקצה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון וקבע את סוגן.

- |  |  |
|--|--|
| א. $[0, 0.5\pi], y = \cos 4x + 3$      | ב. $[0, \pi], y = \sin x + \cos x$               |
| ג. $[0, \pi], y = \sin^2 x - 2 \cos x$ | ד. $[0, 0.5\pi], y = \cos^2 x + \sqrt{2} \sin x$ |



56 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 2x - x$  בתחום:  $\left[0, \frac{2}{3}\pi\right]$ .

57 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x$  בתחום:  $[0, 1.5\pi]$ .

58 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

59 מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה:  $f(x) = \sin 2x$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

60 מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\cos x - 1}{3}$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

61 מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה:  $f(x) = \tan x - \sin x$  בתחום:  $0 < x < \pi$ .

62 מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x$  בתחום:  $[-\pi, \pi]$ .

63 הוכח כי הפונקציה:  $f(x) = \tan x - \sin x$  אינה יורדת כלל.

64 הוכח כי הפונקציה:  $f(x) = \sin x - 2x$  יורדת לכל  $x$ .

65 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin x + ax$  ( $a$  פרמטר).

- א. מצא תחום ערכים של  $a$  עבורם הפונקציה תמיד עולה.
- ב. מצא תחום ערכים של  $a$  עבורם הפונקציה תמיד יורדת.
- ג. האם בקצוות התחומים שמצאת עבור  $a$  בסעיפים הקודמים, הנקודות שמקיימות:  $f'(x) = 0$  הן נקודות קיצון?

66 נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \cos x + x\sqrt{3}$  ( $a$  פרמטר).

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:  $x = \frac{2}{3}\pi$ . מצא את  $a$ .

67 נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \sin 2x - \cos x$  ( $a$  פרמטר).

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:  $x = \frac{\pi}{6}$ . מצא את  $a$ .

68 לפונקציה:  $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$  יש נקודת קיצון ששיעוריה הם:  $\left(\frac{7}{6}\pi, -1\right)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

### אסימפטוטות אנכיות:

69 מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציות הבאות בתחום המצוין לידן:

א.  $[0, \pi] : f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$

ב.  $[0, \pi] : f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$

ג.  $[-\pi, \pi] : f(x) = \tan x$

70 לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin ax - 0.5}$  ( $a$  פרמטר בתחום:  $[0, 3]$ ) אסימפטוטה אנכית:  $x = \frac{\pi}{6}$ .

א. מצא את  $a$ .

ב. הראה כי אם האסימפטוטה הייתה:  $x = \frac{\pi}{18}$  אז היה מתקבל ערך  $a$  הגדול

פי 3 מזה שמצאת בסעיף הקודם.

71 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\cos 2x + a}$  ( $a$  פרמטר).

א. הסבר מדוע עבור:  $a > 1$  הפונקציה מוגדרת לכל  $x$ .

ב. האם הפונקציה מוגדרת לכל  $x$  עבור תחום ערכים נוסף של  $a$ ?  
אם כן – מהו? אם לא – נמק.

ג. מצא את  $a$  אם ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית:  $x = 0.5\pi$ .

72 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\cos x}{a \sin^2 x - 3}$  ( $a$  פרמטר) בתחום:  $[-0.5\pi, 0.5\pi]$ .

א. מצא את  $a$  אם ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית:  $x = \frac{\pi}{3}$ .

ב. הראה כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית הנגדית ל- $x = \frac{\pi}{3}$  בתחום הנתון.

**חקירות חלקיות שונות ללא פרמטרים:**

**(73)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x\sqrt{3} - 2\sin^2 x$  בתחום:  $[-0.5\pi, 0.5\pi]$ .

- א. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא:  $f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin 2x$ .
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**(74)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cos x - x$  בתחום:  $[-3\pi, 3\pi]$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ב. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  מאפסות את הנגזרת של הפונקציה.
- ג. קבע אלו נקודות מנקודות החיתוך הן קיצון ואלו אינן קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

**(75)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2\sin^2 2x - \sin 4x$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

- א. בכמה נקודות חותך גרף הפונקציה את ציר ה- $x$  בתחום הנתון?
- ב. כמה נקודות קיצון יש לגרף הפונקציה בתחום הנתון? מצא אותן וקבע את סוגן.

**(76)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$  בתחום:  $[-0.5\pi, 0.5\pi]$ .

- א. מצא את כל הנקודות על גרף הפונקציה בתחום הנתון ששיפוע המשיק העובר דרכן הוא  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- ב. הראה כי הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום הנתון הוא 1.
- ג. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך נקודת המקסימום המוחלטת של הפונקציה בתחום הנתון ודרך הנקודה שמצאת בסעיף א' הנמצאת ברביע השני.

**(77)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ .

- א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה היא:  $f'(x) = 2\cos 2x$ .
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה לא יורד מתחת לציר ה- $x$ .
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום:  $[-2\pi, 2\pi]$ .

**78** נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x + \sin x)(x - \sin x)$ .

א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה היא:  $f'(x) = 2x - \sin 2x$ .

ב. הראה כי הנקודה שבה  $x = 0$  היא נקודת מינימום של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם גרף הפרבולה:  $g(x) = x^2$  בתחום:  $[-1.2\pi, 1.2\pi]$ .

### חקירות חלקיות שונות עם פרמטרים:

**79** נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \cos 2x + 2 \sin x$  ( $a$  פרמטר) בתחום:  $[0, \pi]$ .

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{4}$  הוא:  $m = \sqrt{2} - 2$ .

א. מצא את  $a$ .

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**80** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + a \sin x$  ( $a$  פרמטר) בתחום:  $[0, \pi]$ .

ידוע כי לגרף הפונקציה יש נקודת קיצון שבה:  $x = \frac{\pi}{4}$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את שאר נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.

**81** נתונה הפונקציה:  $f(x) = -\frac{1}{a} \sin x + \cos ax$  ( $a$  פרמטר שלם ושווה מ-0).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = \pi$  הוא 0.5.

א. מצא את  $a$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מצא את נקודת הקיצון המקומית של גרף הפונקציה בתחום:  $0 < x < \pi$ .

82 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^3 x + k \sin x$  ( $k$  פרמטר) בתחום:  $[-\pi, \pi]$ .

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = \frac{\pi}{3}$  הוא  $-\frac{3}{8}$ .

א. מצא את  $k$ .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע האם יש למשוואה:  $\sin^3 x - 3 \sin x = 3$  יש פתרון. אם כן מהו?

### חקירת מלאות:

83 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 1 - 2 \sin x$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

א. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

84 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2 \sin^2 x + \sin x - 1$  בתחום:  $[0, 1.5\pi]$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

85 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$  בתחום:  $\left[-\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ב. מצא את נקודות הקיצון (מקומיות וקצה) של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**86** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x + x\sqrt{2}$  בתחום:  $0 < x < \pi$ .

- א. מצא את נקודות הקיצון המקומיות של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- ג. האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בתחום הנתון?
- ד. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע כמה פתרונות יש למשוואה:  $\frac{2}{3} \sin 3x + x\sqrt{2} = 1$ .

**87** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 2}$  בתחום:  $-\pi < x < \pi$ .

- א. מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**88** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x}$  בתחום:  $-0.5\pi < x < 0.5\pi$ .

- א. מצא את האסימפטוטה אנכית של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו בתחום הנתון.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $180^\circ$  ב.  $90^\circ$  ג.  $60^\circ$  ד.  $45^\circ$  ה.  $36^\circ$  ו.  $30^\circ$   
 ז.  $20^\circ$  ח.  $15^\circ$  ט.  $75^\circ$  י.  $270^\circ$  יא.  $420^\circ$  יב.  $210^\circ$
- (2) א.  $\frac{\pi}{2}$  ב.  $\frac{\pi}{4}$  ג.  $\frac{\pi}{6}$  ד.  $\frac{\pi}{9}$  ה.  $\frac{\pi}{18}$  ו.  $\frac{23\pi}{36}$   
 ז.  $\frac{3}{4}\pi$  ח.  $\frac{5\pi}{4}$  ט.  $\frac{7\pi}{4}$  י.  $\frac{23\pi}{12}$
- (3) א.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ב.  $-1$  ג.  $\frac{1}{2}$  ד.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ה.  $\frac{1}{2}$  ו.  $0$   
 ז.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ח.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ט.  $\sqrt{3}$  י.  $\emptyset$  יא.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  יב.  $-1$
- (4) א.  $0, 0, \sqrt{3}, 2$  ב.  $-3, -3, -1.5, 0$  ג.  $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 ד.  $1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$  ה.  $1, -1, -1.59, 3, -3$  ו.  $-4, -4, 4, 0, 0, 0, 0$
- ז.  $0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1$  ח.  $1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0$   
 ט.  $0, 0, 0, 1, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0$  י.  $1, 1, 1, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0$   
 יא.  $0, 0, 0, 1, -1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$  יב.  $0, 0, 0, \emptyset, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0, 0, 0, 0$   
 יג.  $0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$   
 יד.  $0, 0, 0, 1.707, -1.707, 2.59, -2.59, -1.23, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$   
 טו.  $-1, -1, 1, 1.707, -0.2928, 2.23, -1.23, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset$   
 ג.  $1.55, -2.18, -0.142$  ב.  $0.54, -0.416, -0.989$  א.  $0.841, 0.9, 0.141$
- (5) ד.  $-0.841, -0.598, 0.958$  ה.  $0.54, -0.801, 0.283$  ו.  $-1.55, 0.747, 3.38$   
 ז.  $1.43, -6.26, 0$  ח.  $-1.325, -0.301, 0.68$
- (6) א.  $0, 1.84, 2.909$  ב.  $1, 1.54, 1.583$  ג.  $1.252, 5.654, 9.14$   
 ד.  $2.179, 7.05, 9.989$  ה.  $3.55, 10.14, 1.796$  ו.  $39.43, 0, 0$   
 ז.  $0.211, 2.5, 32.132$  ח.  $0.841, 1.818, 0.423$  ט.  $0.54, -0.832, -2.969$
- י.  $1.577, 1.577, -4.37, -4.37, -0.427, -0.427$   
 יא.  $0.84, -0.84, 3.63, -3.63, 1.27, -1.27$   
 יב.  $0.54, 0.54, -1.66, -1.66, -8.9, -8.9$
- (7) א.  $y' = 3\cos x$  ב.  $y' = -2\sin x$  ג.  $y' = \frac{2}{\cos^2 x}$   
 ד.  $y' = -\sin x + 5\cos x$  ה.  $y' = 4\cos x + 3\sin x$  ו.  $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + 3\cos x$

$$y' = 3 - \frac{3}{\cos^2 x} \quad \text{ו.}$$

$$y' = 2x + 2\sin x \quad \text{נ.}$$

$$y' = \cos x + 2 \quad \text{י.}$$

$$y' = \cos x + 3\sin x + 1 \quad \text{י.}$$

$$y' = \frac{2}{\cos^2 2x} \quad \text{א.}$$

$$y' = -4\sin 4x \quad \text{ב.}$$

$$y' = 3\cos 3x \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$y' = \frac{5}{\cos^2 5x} + 3\cos 3x \quad \text{א.}$$

$$y' = 12\cos 3x + 2\sin 2x \quad \text{ה.}$$

$$y' = 3\cos 3x - 10\sin 5x \quad \text{ה.}$$

$$y' = 3\cos(3x - \pi) \quad \text{ו.}$$

$$y' = 3 + 6\sin 2x \quad \text{נ.}$$

$$y' = 3\cos 3x + 2x - 3 \quad \text{י.}$$

$$y' = 4\sin(0.4\pi - 4x) \quad \text{י.}$$

$$y' = 2\tan x + \frac{2x}{\cos^2 x} \quad \text{א.}$$

$$y' = \cos x - x\sin x \quad \text{ב.}$$

$$y' = \sin x + x\cos x \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$y' = 2(\sin x + x\cos x) + \frac{4}{\cos^2 x} \quad \text{ה.}$$

$$y' = 2x\cos x - x^2\sin x \quad \text{ה.}$$

$$y' = \cos 2x + \cos x + 2\sin x \quad \text{נ.}$$

$$y' = \cos 2x \quad \text{י.}$$

$$y' = 3 - \sin x - x\cos x \quad \text{א.}$$

$$y' = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} + \sin x \quad \text{י.}$$

$$y' = \cos 2x - \sin x \quad \text{ו.}$$

$$y' = 2x\tan 4x + \frac{4(x^2 - 3)}{\cos^2(4x)} \quad \text{ב.}$$

$$y' = 3\cos 3x(\cos 2x - 1) - 2\sin 3x\sin 2x \quad \text{א.}$$

$$y' = \frac{3\sin x\cos x - \sin^2 x - 1}{\cos x(\tan x - 3)^2} \quad \text{ו.}$$

$$y' = \frac{1 + 2\cos x}{(\cos x + 2)^2} \quad \text{ה.}$$

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$y' = \frac{-2(\sin 2x + 1)}{(1 + \sin 2x)^2} \quad \text{ה.}$$

$$y' = \frac{1 + 2\cos x}{\sin^2 x} \quad \text{ה.}$$

$$y' = \frac{-5\cos x}{(\sin x - 5)^2} \quad \text{ו.}$$

$$y' = \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} \quad \text{ב.}$$

$$y' = -\frac{3\sin 3x\sin x + 6\sin 3x + \cos x\cos 3x + \cos x}{(\sin x + 2)^2} \quad \text{ו.}$$

$$y' = 3\sin^2 x\cos x \quad \text{ה.}$$

$$y' = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{א.}$$

$$y' = -\sin 2x \quad \text{ב.}$$

$$y' = \sin 2x \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$y' = 6\sin^2 2x\cos 2x \quad \text{י.}$$

$$y' = \frac{8\sin 4x}{\cos^3 4x} \quad \text{א.}$$

$$y' = -8\cos^3 x\sin x \quad \text{ה.}$$

$$y' = 2(x\cos x)(\cos x - x\sin x) \quad \text{ו.}$$

$$y' = -2\sin 4x \quad \text{נ.}$$

$$y' = 2\sin 2x \quad \text{ב.}$$

$$2x\sin x + x^2 + x^2\cos x + \sin 2x \quad \text{א.} \quad y' = x\sin 2x + \sin^2 x \quad \text{י.}$$

$$y' = 2(x + \sin x)(1 + \cos x) \quad \text{ו.}$$

$$y' = 4\sin 4x \quad \text{ה.}$$

$$y' = -\sin 4x \quad \text{א.}$$

$$y' = \frac{\sin 2x\sin x + \cos^3 x + \cos x}{\sin^2 x} \quad \text{ה.}$$

$$y' = (3 - \sin x)^2 - 2x(3 - \sin x)\cos x \quad \text{ו.}$$

$$y' = \frac{\cos^3 x + \cos x + \sin 2x\sin x}{(\cos^2 x + 1)^2} \quad \text{ה.}$$

$$0 \quad \text{א.}$$

$$-1 \quad \text{ב.}$$

$$1 \quad \text{א.} \quad (11)$$



$$.0 \text{ .ג} \quad 0 \text{ .ב} \quad 0 \text{ .א} \quad (12)$$

$$.2.7 \text{ .ג} \quad 4.866 \text{ .ב} \quad 1 \text{ .א} \quad (13)$$

$$-1.12 \text{ .ג} \quad 4 \text{ .ב} \quad 1 \text{ .א} \quad (14)$$

$$.65.86^\circ \quad (15)$$

$$.127.72^\circ \quad (16)$$

$$.53.8^\circ \text{ .ד} \quad 54.73^\circ \text{ .ג} \quad 45^\circ \text{ .ב} \quad 45^\circ \text{ .א} \quad (17)$$

$$. y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (18)$$

$$. y = -2x + \pi \quad (19)$$

$$. y = 12x + \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \quad (20)$$

$$. y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + 0.603 \quad (21)$$

$$. y = 5x - 1 - 1.5\pi \quad (22)$$

$$. y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^2}{8} \quad (23)$$

$$. y = 2x + 1 - 2\pi \quad (24)$$

$$. y = 0.2426x + 0.2236 \quad (25)$$

$$.(-1,0) \text{ .ג} \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \text{ .ב} \quad \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ .א} \quad (26)$$

$$.(2.164,0) , (0,0.6168) \text{ .ב} \quad y = -0.285x + 0.6168 \text{ .א} \quad (27)$$

$$. y = 2\sqrt{3}x - 0.813 , y = -2\sqrt{3}x + 10.06 \quad (28)$$

$$. y = 4x - 6\pi , y = -4x + 2\pi \text{ .ב} \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) , \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \text{ .א} \quad (29)$$

$$. y = 2 , y = x\sqrt{3} - 5.848 \text{ .ב} \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\right) , \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2}\right) \text{ .א} \quad (30)$$

$$y = 2x - 0.5\pi \text{ .ג} \quad y = 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \text{ .ב} \quad y = 2x \text{ .א} \quad (31)$$

$$. y = 1.5\sqrt{3}x + 3.97 , y = 1.5\sqrt{3}x - 1.51 \text{ .ד}$$

$$. x = \frac{\pi}{6} , \frac{5\pi}{6} \quad (32)$$

$$. y = \sqrt{3}x - 1.034 , y = \sqrt{3}x + 2.5 - \frac{2}{\sqrt{3}}\pi \quad (33)$$

$$. y = 3x - 2 , y = 3x - 3\pi - 2 \quad (34)$$

$$. y = -x - 0.009 , y = -x + 1.657 \quad (35)$$

$a = 4$  (36)

$a = -1$  (37)

$a = 3$  א. (38)      ב.  $y = 3x - 3\pi$

$a = 2$  ,  $y = x + 2$  ב. (39)      א.  $y = x + a$

$S = 0.868$  א.      ב.  $(0, 0.613)$  ,  $(2.83, 0)$       א.  $y = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi$  ,  $k = 1.5$  (40)

$y = -8x + \frac{16}{3}\pi - 3\sqrt{3}$  א.      ב.  $k = \sqrt{3}$       א.  $-2(k\sqrt{3} + 1)$  (41)

$a = 2$  ב. (42)

$x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$  ז.      א.  $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$  ג.      א. כל  $x$       ב. כל  $x$  (43)

$x \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  ח.      א.  $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$  ו.      ה.  $x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$x \neq \frac{19}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$  ט.      ח.  $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$       ו.  $x \neq \frac{\pi}{2}$

$x \neq 0, \pi, 2\pi$  יב.      א.  $x \neq \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$  יא.

$x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi$  טז.      טו.  $x \neq 0, \pi, 2\pi$       יד. כל  $x$

$x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi$  יח.      יז.  $x \neq 0, 0.5\pi, \pi, 1.5\pi, 2\pi$

$a = 2$  (44)

$a = -\frac{1}{2}$  (45)

$a = 1$  (46)

אין ג.      ב.  $(0, 1), (2\pi, 1), (\pi, -1)$       א.  $\left(\frac{3}{2}\pi, -1\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  (47)

$\left(\frac{\pi}{6}, 0.09\right)$  ו.      ה.  $\left(\frac{7}{18}\pi, -5.39\right)$       ז.  $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \left(\frac{3}{4}\pi, -2\right)$

$\left(\frac{3}{2}\pi, -2\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$  (48)

$(-\pi, -4), (\pi, -4), (0, 4)$  (49)

$(\pi, 0), (0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  (50)

$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right), (\pi, 3), (0, 3)$  (51)

$\max(2\pi, 1)$  ,  $\min\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$  ,  $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$  ,  $\min(0, 1)$  קצה. (52)

53)  $\max(2\pi, -\pi)$  ,  $\min\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi\right)$  ,  $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$  , קצה  $\min(0, 0)$  קצה.

54) א.  $\max(\pi, 0)$  קצה ,  $\min\left(\frac{3}{4}\pi, -3\right)$  ,  $\max\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$  ,  $\min(0, 0)$  קצה.

ב.  $\max(\pi, \pi - 2)$  קצה ,  $\min\left(\frac{5}{6}\pi, 0.886\right)$  ,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, 2.25\right)$  ,  $\min(0, 2)$  קצה.

ג.  $\min(\pi, -5)$  קצה ,  $\max\left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$  ,  $\min(0, -5)$  קצה

ד.  $\max(\pi, 2)$  קצה ,  $\min\left(\frac{\pi}{3}, -0.25\right)$  ,  $\max(0, 0)$  קצה.

55) א.  $\max(0, 4)$  קצה ,  $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$  ,  $\max\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$  קצה.

ב.  $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$  ,  $\min(0, 1)$  קצה ,  $\min(\pi, -1)$  קצה.

ג.  $\min(0, -2)$  קצה ,  $\max(\pi, 2)$  קצה.

ד.  $\min\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right)$  קצה ,  $\max\left(\frac{\pi}{4}, 1.5\right)$  ,  $\min(0, 1)$  קצה.

56)  $\max\left(\frac{5}{24}\pi, 0.28\right)$  מוחלט ,  $\min\left(\frac{13}{24}\pi, -1.63\right)$  מוחלט.

57)  $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$  מוחלט ,  $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right)$  מוחלט

58)  $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$  מוחלט.

59) עולה:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  ,  $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$  , יורדת:  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$  .

60) יורדת בכל התחום.

61) עולה בכל התחום.

62) עולה:  $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$  ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$  ,  $-\frac{3}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$  ,

יורדת:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$  ,  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  ,  $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$  .

65) א.  $a > 1$  ב.  $a < -1$  ג. לא.

66)  $a = 2$

67)  $a = -\frac{1}{2}$

68)  $b = -4, a = 3$  .

69 א.  $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$  ב.  $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  ג.  $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

70 א.  $a = 1$  ב.  $a = 3$

71 א. היות ו-  $|\cos 2x| \leq 1$  ב. כן -  $a < -1$  ג.  $a = 1$

72 א.  $a = 4$

73 ב.  $\min\left(-\frac{\pi}{2}, -4.72\right), \max\left(\frac{\pi}{6}, 0.4\right), \min\left(\frac{\pi}{3}, 0.314\right), \max\left(\frac{\pi}{2}, 0.72\right)$

ג. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ , יורדת:  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

74 א.  $(0,0), (2\pi,0), (-2\pi,0)$  ג.  $\max(2\pi,0), \min(-2\pi,0)$  פיתול.  $(0,0)$

75 א. 5 נקודות שונות.

ב.  $\min\left(\frac{\pi}{16}, -0.414\right), \max\left(\frac{5\pi}{16}, 2.41\right), \min\left(\frac{9\pi}{16}, -0.414\right), \max\left(\frac{13\pi}{16}, 2.41\right)$

76 א.  $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{4}\right)$  ג.  $y = \frac{9}{7\pi} + \frac{5}{14}$

77 ג.  $(-1.25\pi, 0), (-0.25\pi, 0), (0.75\pi, 0), (1.75\pi, 0)$

78 ג.  $(\pi, \pi^2), (-\pi, \pi^2)$

79 א.  $a = 1$

ב.  $\min(0,1), \max\left(\frac{\pi}{6}, 1.5\right), \min\left(\frac{\pi}{2}, -1\right), \max\left(\frac{5\pi}{6}, 1.5\right), \min(\pi, 1)$

ג. עולה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$ ,  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ , יורדת:  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{5}{6}\pi < x < \pi$

80 א.  $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x$ ,  $a = -\sqrt{2}$

ב.  $\max(0,0), \min\left(\frac{\pi}{4}, -0.5\right), \max\left(\frac{\pi}{2}, -0.414\right), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -0.5\right), \max(\pi, 0)$

ג.  $(0,0), (\pi, 0)$

81 א.  $a = 2$  ב.  $y = 0.5x - 0.57$  ג.  $(0.5\pi, -1.5)$

82 א.  $k = -3$  ב.  $\min(-\pi, 0), \max(-0.5\pi, 2), \min(0.5\pi, -2), \max(\pi, 0)$  ג. לא.

83 א.  $\max\left(\frac{5}{3}\pi, 7.96\right), \min(2\pi, 7.28), \max(0, 1), \min\left(\frac{\pi}{3}, 0.315\right)$

ב. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ , יורדת:  $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{3}$

84 א.  $(0, -1), \left(\frac{\pi}{6}, 0\right), \left(\frac{5}{6}\pi, 0\right), (1.5\pi, 0)$ .

ב.  $\min(0, -1), \max(0.5\pi, 2), \min(1.08\pi, -1.24), \max(1.5\pi, 0)$ .

ג. עולה:  $0 < x < 0.5\pi, 1.08\pi < x < 1.5\pi$ ; יורדת:  $0.5\pi < x < 1.08\pi$ .

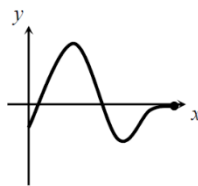
85 א.  $\left(-\frac{3}{8}\pi, 0\right), \left(\frac{\pi}{8}, 0\right), \left(\frac{5}{8}\pi, 0\right)$ . ב.  $\min\left(-\frac{\pi}{8}, -1.41\right), \max\left(\frac{3}{8}\pi, 1.41\right)$ .

86 א.  $\max\left(\frac{\pi}{4}, 1.58\right), \min\left(\frac{5\pi}{12}, 1.38\right), \max\left(\frac{11\pi}{12}, 4.54\right)$ . ג. לא. ד. פתרון אחד.

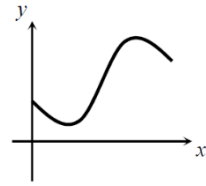
87 א.  $\min(-0.5\pi, -1), \max\left(0.5\pi, \frac{1}{3}\right)$ . ב.  $(0, 0)$ .

88 א.  $x = 0$ .

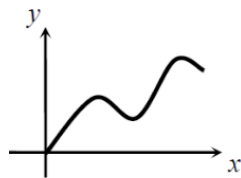
סרטטים עבור שאלות 83-88:



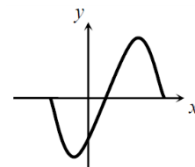
(84)



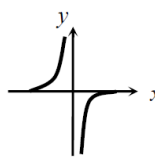
(83)



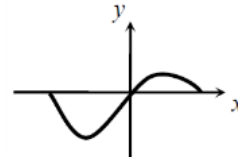
(86)



(85)



(88)



(87)

## תוכן העניינים:

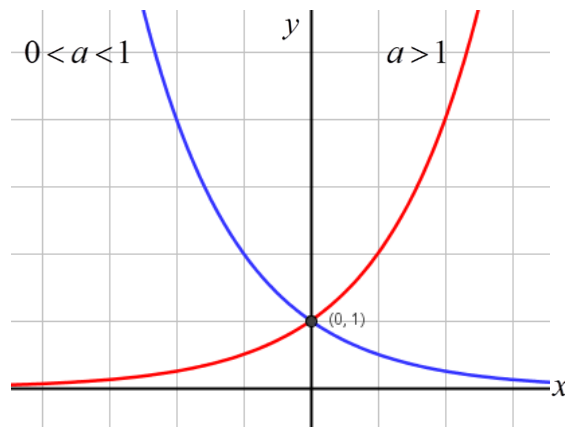
188	פרק 9.....
188	חקירת פונקציה מעריכית.....
188	הגדרות כלליות:.....
188	תכונות כלליות:.....
189	תכונות נוספות:.....
189	נגזרות של פונקציות מעריכיות:.....
190	תזכורת – כללי הגזירה:.....
191	שאלות לפי נושאים:.....
191	שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:.....
191	שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:.....
192	שאלות שונות העוסקות בחקירה של פונקציות מעריכיות:.....
194	שאלות שונות מבחינות:.....
197	תשובות סופיות:.....
200	תירגול נוסף:.....
205	תשובות סופיות:.....
207	סקיצות לשאלות:.....

## פרק 9

# חקירת פונקציה מעריכית

### הגדרות כלליות:

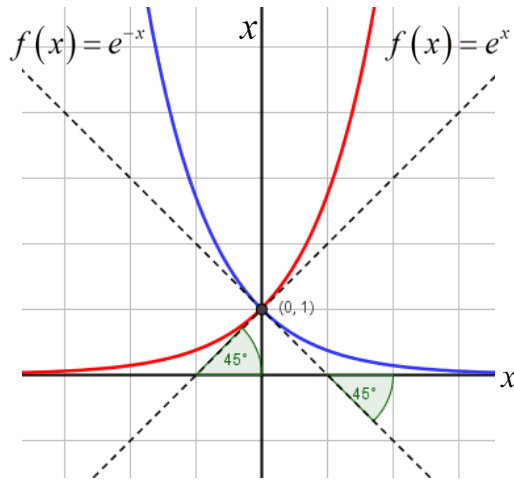
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה:  $f(x) = a^x$   
עבור:  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :



### תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל  $x$ .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$  בנקודה:  $(0, 1)$ .
4. עבור:  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור:  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות  $f(x) = e^x$  ו-  $f(x) = e^{-x}$  נקבל:



### תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודת החיתוך עם ציר ה-  $y$  הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^{-x}$  בנקודת החיתוך עם ציר ה-  $y$  הוא -1.

### נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$



תזכורת – כללי הגזירה:

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

## שאלות לפי נושאים:

### שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$$

### שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

(5) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודה:  $A(1, e)$ .

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  בנקודה שבה:  $x = 0$ .

(7) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .

(8) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  בנקודה  $(1, 15)$  הוא  $21 \ln 3$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### שאלות שונות העוסקות בחקירה של פונקציות מעריכיות:

(9) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\ \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \end{array}$$

(10) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 e^x$ .

(11) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$ .

(12) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$ .

הפונקציה משיקה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=1.5$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$ . לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה  $(\log_2 3, -19)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $p$  ו- $q$ .

(14) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-3)e^x$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**16** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$  . חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**17** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$  . חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**18** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \cdot 3^x$  . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

## שאלות שונות מבחינות:

(19) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(20) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2 + 6x + k}}$  בנקודה שבה  $x = 1$  הוא  $-\frac{12}{e^{10}}$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא:  $0 < \frac{1}{e^{3x^2 + 6x + 1}} \leq e^2$ .

(21) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר  $x = \ln \frac{2}{3}$  הנגזרות מקיימות:  $f'(x) + f''(x) = 8$ .

- מצא את  $a$ .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.
- מצא את  $b$ .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

(22) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = 6x - e^x$  ו-  $f(x) = ae^x - e^{2x} + b$ . ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור  $x$  וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- $y$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

**(23)** לגרף הפונקציה:  $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$  יש נקודת קיצון:  $\left(2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $a, b \neq 0$ .

- א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מעבירים ישר:  $y = k$ . באיזה תחום ערכים צריך להימצא  $k$  כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

**(24)** לפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$  יש קיצון בנקודה שבה:  $x = 1$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(25)** הישר  $x = \sqrt{6}$  הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $m$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ .

- א. מצא את הנקודות המקיימות:  $f'(x) = 0$  וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. בכמה נקודות חותך הישר  $y = -0.01$  את גרף הפונקציה?

**(27)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר  $x = \ln \frac{2}{3}$  הנגזרות מקיימות:  $f'(x) + f''(x) = 12$ .

א. מצא את  $a$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$ .

ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.

ג. מצא את  $b$ .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? אם כן מצא את הנקודות.

**(28)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cdot a^x$ ,  $(a > 0)$ .

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:  $x = -\frac{1}{\ln 2}$ .

א. מצא את  $a$ .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה  $x = 2$  היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

עם גרף הפונקציה:  $g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$ .

ג. מצא את  $k$ .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

**(29)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- $y$ .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- $x$ .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$       ב.  $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$
- ג.  $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$       ד.  $2x\ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$
- (2) א.  $(1+x)e^x$       ב.  $2xe^{4x}(1+2x)$       ג.  $2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$
- (3) א.  $\frac{x(2-x)}{e^x}$       ב.  $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
- (4) א.  $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$       ב.  $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$
- (5)  $y = ex$
- (6)  $y = 3x+1$
- (7)  $y = (-e^2 + e)x + e^2$  ,  $y = (e-1)x + e$
- (8)  $b = -1$  ,  $a = 2$
- (9) א. כל  $x$       ב.  $x \neq 0$       ג.  $x \neq \ln 5$       ד.  $x \neq \ln 2$  ,  $x \neq 0$       ה. כל  $x$       ו.  $0 \leq x \neq \frac{2}{5}$
- (10)  $\min(0,0)$  ,  $\max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$
- (11)  $\min(3, e^3)$
- (12)  $\min(1.5, 0)$  ,  $\max(3.5, 0.483)$  ,  $b = -12$  ,  $a = 4$
- (13)  $p = -27$  ,  $q = 35$
- (14) א. כל  $x$       ב.  $\min(2, -e^2)$       ג. תחומי עלייה:  $x < 2$       ד. תחומי ירידה:  $x > 2$
- ד.  $(3,0)$  ,  $(0,-3)$
- (15) א. כל  $x$       ב.  $\max(0,3)$  ,  $\min(\ln 3, 1.59)$
- ג. תחומי עלייה:  $x > \ln 3$  או  $x < 0$       ד.  $\ln 0 < x < \ln 3$       ד.  $(0,3)$
- (16) א. כל  $x$       ב.  $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$  ,  $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$
- ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$       ד.  $(0,0)$       ג. תחומי ירידה:  $x > 1$  או  $x < -1$
- (17) א. כל  $x$       ב.  $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$       ג. עולה:  $x < 3$  , יורדת:  $x > 3$       ד.  $(0,0)$



(18) א. כל  $x$  ב.  $\min(-0.91, -0.67)$  ג. עולה:  $x > -0.91$  יורדת:  $x < -0.91$  ד.  $(0, 0)$

(19) א. כל  $x$  ב.  $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$

ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}, x < \frac{1}{6}$  יורדת:  $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$  ד.  $(0, 1)$

(20) א.  $k=1, f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$  ב.  $(-1, e^2)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה  $f(x)$  נמצא בתחום  $0 < f(x) \leq e^2$

(21) א.  $a=4$  ב.  $x=\ln 2$  ג.  $b=-5$  ד.  $(0, 0)$

(22) א.  $a=12, b=-12$  ב. עולות:  $x < \ln 6$  יורדות:  $x > \ln 6$

(23) א.  $a=1, b=0.25, f(x) = x^2 e^{\frac{1}{4}x^2}$  ב.  $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right), \min(0, 0)$

ג.  $(0, 0)$  ה.  $0 < k < \frac{4}{e}$

(24) א.  $a = \frac{1}{3}$  ב. כן:  $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$  ג. עולה:  $1 < x < 11$  יורדת:  $x < 1, x > 11$

ד.  $(-1, 0), (7, 0), (0, -7e)$

(25) א.  $m=-6, f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-6}$  ב.  $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right), \min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$  ג.  $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

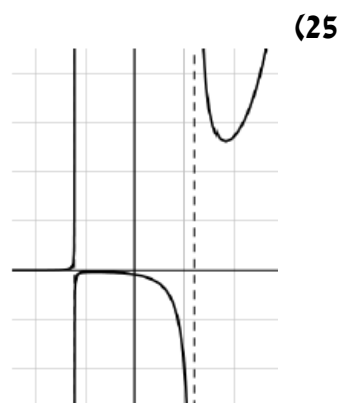
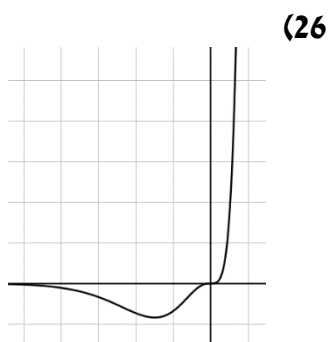
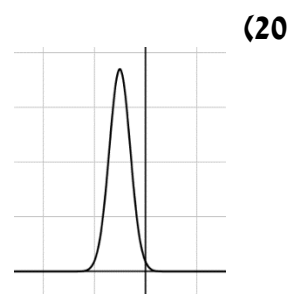
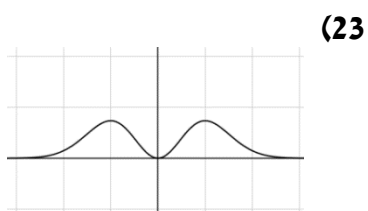
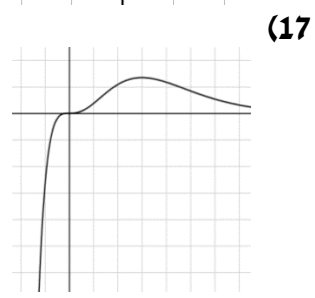
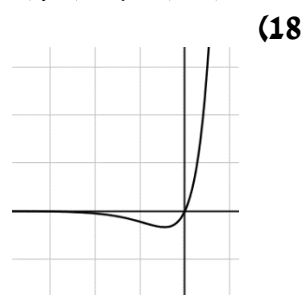
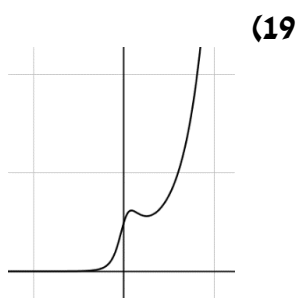
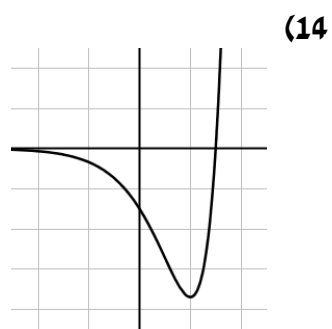
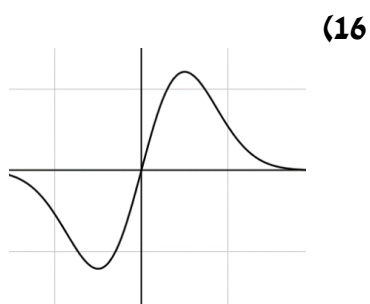
(26) א.  $x=0, -1.5$ . נקודת הקיצון היא:  $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$  ב.  $y=0$  ד. 2 נקודות

(27) א.  $a=7$  ב.  $x=\ln 2$  ג.  $b=10$  ד. לא.

(28) א.  $a=2$  ב. עולה:  $x > -\frac{1}{\ln 2}$  יורדת:  $x < -\frac{1}{\ln 2}$  ג.  $k=1$  ד.  $(0, 0)$

(29) א.  $y = -x \ln 81 + 7$  ג.  $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:



## תירגול נוסף:

(1) חקור את הפונקציה  $y = e^{4(x-1)}$  לפי הסעיפים הבאים:

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא חיתוכים עם הצירים.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) חקור את הפונקציה  $y = xe^x$  לפי הסעיפים הבאים:

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא חיתוכים עם הצירים.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) חקור את הפונקציה  $y = (x+2)e^x$  לפי הסעיפים הבאים:

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא חיתוכים עם הצירים.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) חקור את הפונקציה  $y = (x^2 - 5x + 5)e^x$  לפי הסעיפים הבאים:

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא חיתוכים עם הצירים.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) חקור את הפונקציה  $y = \frac{e^x}{x+2}$  לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6) חקור את הפונקציה  $y = \frac{x^2}{e^{x+1}}$  לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7) חקור את הפונקציה  $y = \frac{(x-4)^2}{e^x}$  לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8) חקור את הפונקציה  $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$  לפי הסעיפים הבאים :

- א. מצא תחום ההגדרה.
- ב. מצא נקודת קיצון.
- ג. מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- ד. מצא חיתוכים עם הצירים.
- ה. מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9) חקור את הפונקציה  $y = x^2 e^{x^2}$  לפי הסעיפים הבאים :

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא חיתוכים עם הצירים.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10) חקור את הפונקציה  $y = \frac{x - e^x}{x}$  לפי הסעיפים הבאים :

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא את נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

11) חקור את הפונקציה  $y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$  לפי הסעיפים הבאים :

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא חיתוכים עם הצירים.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12) חקור את הפונקציה  $y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 15}$  לפי הסעיפים הבאים :

- מצא תחום ההגדרה.
- מצא נקודת קיצון.
- מצא תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
- מצא אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש).
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

13) נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{x^3 - 3x^2 - 9x}$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

14) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (3x^2 - 4)e^{6x}$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

15) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{x^2 - 24}}{x^2 - 24}$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16) לפונקציה:  $y = \frac{ae^x}{x+b}$  יש נקודת קיצון:  $(4, 5e^4)$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

17) נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 8$ .

- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18) נתונה הפונקציה :  $f(x) = 4^x + 4^{1-x}$ .

- הישר  $y = 5$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B.
- הוכח כי אחת מהנקודות נמצאת על ציר ה- $y$ .
  - הוכח כי שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקציה שווה לממוצע של שיעורי ה- $x$  של הנקודות A ו-B.
  - כתוב את משוואת המשיק בנקודת הקיצון של הפונקציה.

19) נתונה הפונקציה :  $f(x) = x^3 \cdot e^{kx}$ .

- ידוע כי יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון שבה  $x = 1$ .
- מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה.
  - האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
  - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

- (1) א. כל  $x$  ב. אין קיצון ג. עולה בכל ת.ה. ד.  $(0, e^{-4})$
- (2) א. כל  $x$  ב.  $\min(-1, e^{-1})$  ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$  ד.  $(0, 0)$
- (3) א. כל  $x$  ב.  $\min(-3, -e^{-3})$  ג. עולה:  $x > -3$  יורדת:  $x < -3$  ד.  $(0, 2)$ ,  $(-2, 0)$
- (4) א. כל  $x$  ב.  $\max(0, 5)$ ,  $\min(3, -e^3)$  ג. עולה:  $x < 0$ ,  $x > 3$  יורדת:  $0 < x < 3$  ד.  $(0, 5)$ ,  $(3.61, 0)$ ,  $(1.38, 0)$
- (5) א.  $x \neq -2$  ב.  $\min(-1, e^{-1})$  ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$ ,  $x \neq -2$  ד.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ה.  $x = -2$
- (6) א. כל  $x$  ב.  $\min(0, 0)$ ,  $\max(2, 4e^{-3})$  ג. עולה:  $0 < x < 2$  יורדת:  $x < 0$ ,  $x > 2$  ד.  $(0, 0)$
- (7) א. כל  $x$  ב.  $\min(4, 0)$ ,  $\max(6, 4e^{-6})$  ג. עולה:  $4 < x < 6$  יורדת:  $x < 4$ ,  $x > 6$  ד.  $(0, 16)$ ,  $(4, 0)$
- (8) א.  $x \neq 0$  ב. אין קיצון ג. יורדת בכל ת.ה. ד. אין חיתוכים עם הצירים כלל. ה.  $x > 0: y = 1$ ,  $x < 0: y = 0$ ,  $x = 0$
- (9) א. כל  $x$  ב.  $\min(0, 0)$  ג. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$  ד.  $(0, 0)$
- (10) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max(1, 1 - e)$  ג. עולה:  $x < 1$ ,  $x \neq 0$  יורדת:  $x > 1$  ד. אין חיתוכים ה.  $x < 0: y = 1$
- (11) א. כל  $x$  ב.  $\max(0, 0.5)$  ג. עולה:  $x < 0$  יורדת:  $x > 0$  ד.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ה.  $y = 0$
- (12) א.  $x \neq \pm\sqrt{15}$  ב.  $\min\left(-5, \frac{e^5}{10}\right)$ ,  $\max\left(3, -\frac{1}{6e^3}\right)$  ג. עולה:  $-5 < x < 3$ ,  $x \neq -\sqrt{15}$  יורדת:  $x < -5$ ,  $x > 3$  ד.  $\left(0, -\frac{1}{15}\right)$  ה.  $x = \pm\sqrt{15}$
- (13) א. כל  $x$  ב.  $\min(3, e^{-27})$ ,  $\max(-1, e^5)$  ג. עולה:  $x < -1$ ,  $x > 3$  יורדת:  $-1 < x < 3$  ד.  $(0, 1)$



**(14)** א. כל  $x$  ב.  $\min(1, -e^6), \max\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3e^8}\right)$

ג. עולה:  $x < -\frac{4}{3}, x > 1$  יורדת:  $-\frac{4}{3} < x < 1$  ד.  $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), (0, -4)$

**(15)** א.  $x \neq \pm\sqrt{24}$  ב.  $\max\left(0, -\frac{1}{24e^{24}}\right), \min(-5, e), \min(5, e)$

ג. עולה:  $x > 5, -5 < x < 0, x \neq -\sqrt{24}$  יורדת:  $0 < x < 5, x < -5$

ד.  $\left(0, -\frac{1}{24e^{24}}\right)$  ה.  $x = \pm\sqrt{24}$

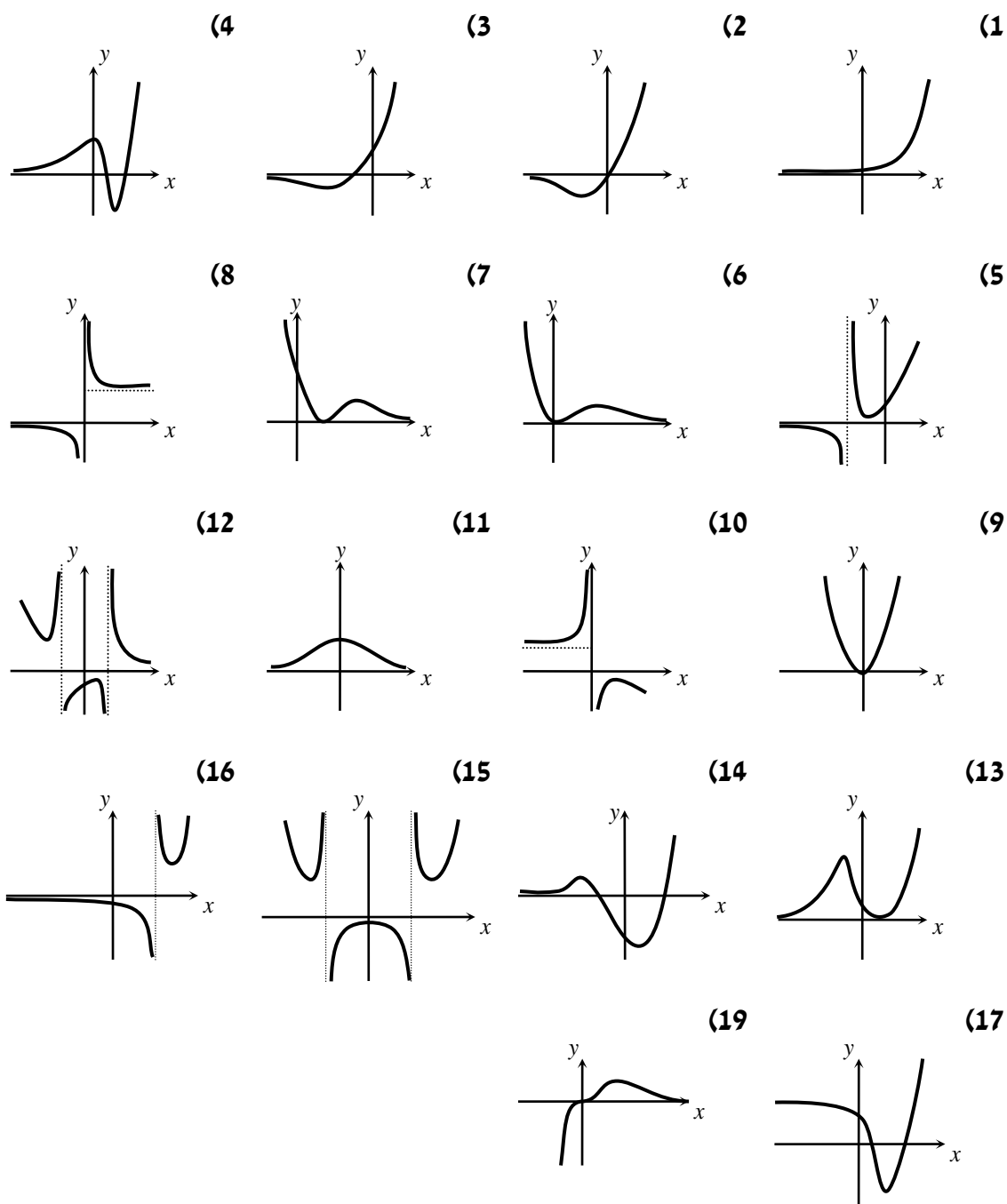
**(16)** א.  $a = 5, b = -3$  ב.  $x \neq 3$  ג. עולה:  $x > 4$  יורדת:  $x < 4$  ד.  $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

**(17)** א.  $\min(\ln 3, -1)$  ב. עולה:  $x > \ln 3$  יורדת:  $x < \ln 3$  ג.  $(\ln 2, 0), (\ln 4, 0), (0, 3)$

**(18)** ג.  $y = 4$

**(19)** א.  $f(x) = x^3 e^{-3x}, k = -3$  ב. לא ג. עולה:  $x < 1, x \neq 0$  יורדת:  $x > 1$

## סקיצות לשאלות:



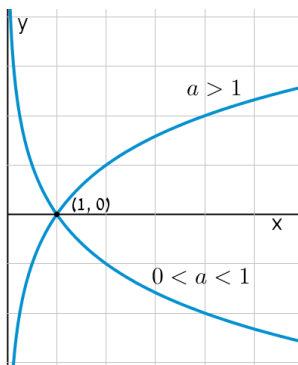
## תוכן העניינים:

209	פרק 10
209	חקירת פונקציה לוגריתמית
209	הגדרות כלליות :
209	תכונות כלליות :
209	תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית :
210	נגזרות של פונקציות לוגריתמיות :
211	שאלות יסודיות – חישובי נגזרות :
211	שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :
212	שאלות שונות העוסקות בחקירה :
213	שאלות שונות מבחינות :
217	תשובות סופיות :
220	תרגול נוסף :
225	תשובות סופיות :

# פרק 10

## חקירת פונקציה לוגריתמית

### הגדרות כלליות:



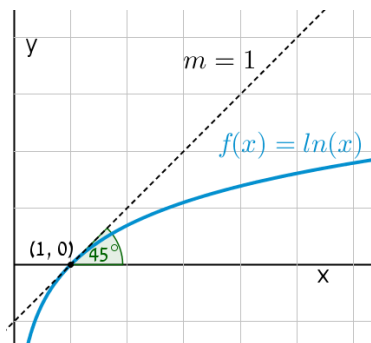
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית

כללית מהצורה:  $f(x) = \log_a x$

עבור  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :

### תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה  $x > 0$ .
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה-  $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .
- עבור  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות  $f(x) = \ln x = \log_e x$  נקבל

כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה-  $x$  הוא 1:

### תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה:  $y = \log(f(x))$  הוא:  $f(x) > 0$ .

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

## שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

- (1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א.  $f(x) = 3\ln x + 4\ln(x+2) - \ln(5x-1)$

ב.  $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$       ג.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$

ד.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$       ה.  $f(x) = \ln(\cos x)$

ו.  $f(x) = \log_2 x + 5\log_3(2x-1)$

- (2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א.  $f(x) = x \ln x$       ב.  $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$

ג.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$       ד.  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$

ה.  $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

- (3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א.  $f(x) = \ln^3 x$       ב.  $f(x) = 3\ln^2 x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln^2 x$       ד.  $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

## שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

- (4) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $A(e, 1)$ .

- (5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  הוא  $\frac{e}{3}$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

## שאלות שונות העוסקות בחקירה:

- 6) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:
- א.  $f(x) = \ln x$       ב.  $f(x) = \ln(x^2)$
- ג.  $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$       ד.  $f(x) = \ln(e^x - 4)$
- ה.  $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$       ו.  $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
- ז.  $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$
- 7) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = 2 \ln x - x^2$ .
- 8) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 \ln x$ .
- 9) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$ .
- 10) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ .
- 11) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$ . הנקודה  $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- 12) נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:
- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

14 נתונה הפונקציה  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

## שאלות שונות מבחינות:

15 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \ln x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור  $x$ ,  $(x_A = x_B)$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

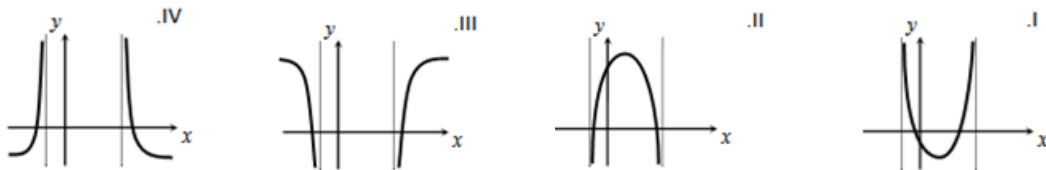


16 נתונה שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.  
נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור  $x$  זהה.
  - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- $x$  שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- $y$  של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

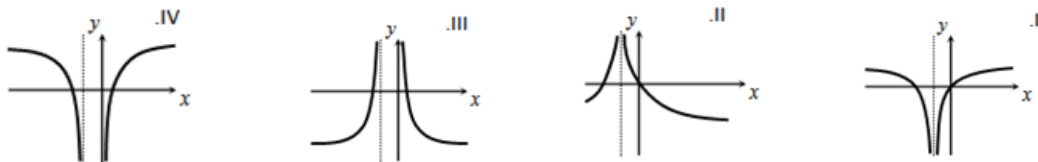
17 נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- $y$ ?  
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.
- איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



18 נתונה הפונקציה:  $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- $y$ ?  
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.
- איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



- ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

19) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ .

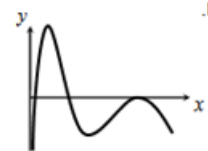
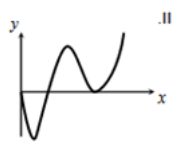
- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

20) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

21) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$ .

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא:  $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^5 x + 4\ln x$ .
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות:
  - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.
- לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה  $f(x)$  ונמק את בחירתך.



22) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$ .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הפונקציה  $g(x) = \ln x$ .

**(23)** ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה :  $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x=e$ .

**(24)** נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$  ,  $a$  פרמטר חיובי,  $a \neq 1$

א. הבע באמצעות  $a$  את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת  $y' = 0$ .

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום :  $x > e-2$ . מצא את  $a$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $x > -1$ .

ד. נתון הישר :  $y = k$ . מצא בסקיצה את תחום הערכים של  $k$  עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

**(25)** נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר  $y$ ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \text{ א. (1)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \text{ ד.} \quad f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \text{ ג.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \text{ ו.} \quad f'(x) = -\tan x \text{ ה.}$$

$$f'(x) = (3x+1) \left( 6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \text{ ב.} \quad f'(x) = \ln x + 1 \text{ א. (2)}$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \text{ ה.} \quad f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \text{ ד.} \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \text{ ג.}$$

$$f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \text{ א. (3)}$$

$$f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \text{ ד.}$$

$$a = 2, b = -2 \text{ (5)} \quad y = \frac{1}{e} x \text{ (4)}$$

$$x > \ln 4 \text{ ד.} \quad x < -2 \text{ ו.} \quad x > 10 \text{ ג.} \quad x \neq 0 \text{ ב.} \quad x > 0 \text{ א. (6)}$$

$$x \geq e \text{ ו.} \quad x \neq e^3, e^{-1} \text{ וגם } x > 0 \text{ ו.} \quad 0 < x \neq e \text{ ה.}$$

$$\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \text{ (8)} \quad \max(1, -1) \text{ (7)}$$

$$\min(4, -1) \text{ (10)} \quad \max\left(e, \frac{1}{e}\right) \text{ קצה, } \min(\sqrt{e}, 0) \text{ (9)}$$

$$a = 1, b = -1 \text{ (11)}$$

$$\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0) \text{ ב.} \quad x > 0 \text{ א. (12)}$$

$$\text{ג. עלייה: } x > 1 \text{ או } 0 < x < \frac{1}{e^2}, \text{ ירידה: } \frac{1}{e^2} < x < 1 \text{ ד. } (1, 0)$$

$$x \neq e \text{ וגם } 0 < x < e^2 \text{ ירידה, } x > e^2 \text{ עלייה: } \min(e^2, e^2) \text{ ב.} \quad 0 < x \neq e \text{ א. (13)}$$

$$\text{ד. אין.} \quad \text{ו. } k > e^2$$

**(14)** א.  $x > 0$       ב.  $\min(4, -1)$       ג. עלייה:  $x > 4$ , ירידה:  $0 < x < 4$       ד.  $(1, 0)$ ,  $(16, 0)$ .

**(15)** א.  $x \geq 1$       ב. מתקבל:  $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$       ג.  $(1, 0)$ ,  $(e, 1)$       ד.  $x = \sqrt[4]{e}$ .

**(16)** א. i. לא נכון. תחום ההגדה של  $f(x)$  הוא:  $x > 0, x \neq 1$  ותחום ההגדרה של  $g(x)$  הוא:  $x > 0$ .

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה  $x = e$  אך עבור  $f(x)$  מדובר במינימום ועבור  $g(x)$  מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור  $f(x)$ : עולה:  $x > e$  יורדת:  $0 < x < e, x \neq 1$ .

ועבור  $g(x)$ : עולה:  $0 < x < e$  יורדת:  $x > e$ .  
iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- $y$  שלה הוא:  $y = \frac{x}{\ln x}$  ו- $y = \frac{\ln x}{x}$ .

נכפול:  $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$ .

**(17)** א.  $x < -1, x > 7$       ב.  $x = -1, 7$       ג. עולה:  $x > 7$  יורדת:  $x < -1$ .  
ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

**(18)** א.  $x \neq -1$       ב.  $x = -1$       ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$ .  
ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים. באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה.  $x \neq -1, -2 < x < 0$ .

**(19)** א.  $0 < x < e$ . (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם:  $1 - \ln x > 0$  וגם  $x > 0$ ).

ב.  $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$  - ולכן הפונקציה יורדת בת.ה. ג.  $(1, 0)$ .

**(20)** א.  $x < -\frac{1}{2}, x > 1$       ב.  $x = -\frac{1}{2}, 1$       ג.  $(-2, 0)$

ד. מתקבל:  $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$ .

21) ב.  $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$ .

ג. 2 נקודות והן:  $(e^{-2}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . הנקודה שבה:  $x = 0$  לא קיימת עקב ת.ה.

ii.  $x \neq 1, x > e^{-2}$ .

ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.  
שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

22) א.  $x > 0$  ב.  $(1, 0)$ ,  $(e^{\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$ .

ג.  $\min(e, -2)$ ,  $\max(e^{-1}, 2)$  ה.  $(1, 0)$ ,  $(e^2, 2)$ ,  $(e^{-2}, -2)$ .

23) א.  $x = e$  ב. מתקבל:  $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$  ג.  $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$ .

24) א. i.  $x > -a, x \neq 1-a$  ii.  $(e-a, e)$  iii.  $(0, \frac{a}{\ln a})$ .

iv.  $x = 1-a$  ב.  $a = 2$  ד.  $k < e$ .

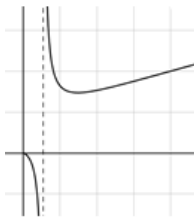
25) א. i.  $x > 0$  ii.  $x = 0$  ב.  $\min(1, 1)$ .

ג. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $0 < x < 1$ .

סקיצות לשאלות:



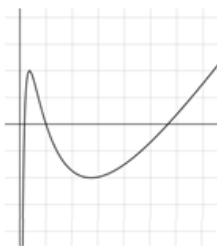
(14)



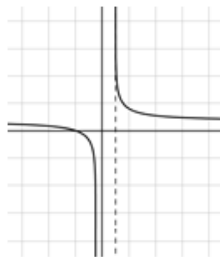
(13)



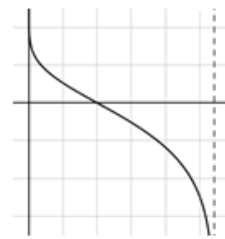
(12)



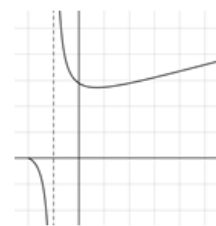
(22)



(20)



(19)



(24)

## תרגול נוסף:

(1) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = x(\ln x - 4)$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln x + \sqrt{3-2x}$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הגדרתה.
- ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
- ג. הראה כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $x$ .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln(x^2)$ .

- א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
  - i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
  - ii. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? נמק והראה חישוב מתאים.
  - iii. האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית? אם כן מהי?
  - iv. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - v. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - vi. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. נתונה הפונקציה:  $g(x) = (\ln x)^2$ .
- ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (\ln x)^2 + a \ln(x^2)$ .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = e^2$ .  
א. מצא את  $a$ .

ב. מצא האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודות נוספות.  
ג. הראה כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי שהוא -1.

(6) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln^2(x+a)$ ,  $a$  פרמטר.

א. הבע באמצעות  $a$  את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

ב. באיזה תחום צריך להימצא  $a$  עבורו האסימפטוטה של הפונקציה תהיה מימין לציר ה- $y$ ?

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי עבור התחום שמצאת בסעיף הקודם יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון עם שיעור  $x$  חיובי.

ii. הוכח כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $x$  וקבע את סוגה.

ד. מצא את  $a$  אם ידוע כי הפונקציה עולה בתחום:  $x > 4$ .

(7) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = (x+k)(\ln(x+k)-1)$ ,  $k$  פרמטר.

א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא:  $y' = \ln(x+k)$ .

ב. הבע באמצעות  $k$  את:

i. נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ii. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. ידוע כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ . מצא את  $k$ .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. העזר בסקיצה של גרף הפונקציה והוכח כי אי-השוויון

הבא:  $(x+k)(\ln(x+k)-1) \geq -1$  מתקיים עבור כל  $x$ .

(8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x(\ln x)^2$ .

א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

i. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא:  $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x$ .

ii. הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $x$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטות? נמק.

ג. נתון הישר:  $y = 4x$ . מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר.



**(9)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln \frac{x}{x+a}$ ,  $a > 0$ , פרמטר.

א. הבע באמצעות  $a$  את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

ג. נגזרת הפונקציה מקיימת:  $f'(1) = 0.5$ . מצא את  $a$ .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(10)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \ln^2(x-a)$ ,  $a > 0$ , פרמטר.

א. הראה כי הנגזרת השנייה של הפונקציה היא:  $f''(x) = \frac{[2 - 2\ln(x-a)]}{(x-a)^2}$ .

ב. הבע באמצעות  $a$  את שיעורי הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.

ג. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.

ד. הבע באמצעות  $a$  את משוואת המשיק הנ"ל.

ה. המשיק חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2e^{-1} - 1$ . מצא את  $a$ .

**(11)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = k \ln x - x^3$ .

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$  הוא  $-26$ .

א. מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ד. היעזר בסעיף הקודם והוכח את הטענות הבאות:

i. גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- $x$ .

ii. גרף הפונקציה שלילי בכל תחום הגדרתו.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(12)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה:  $\ln^2 x + 2\ln x = 0$ .

ב. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה:  $f(x) = x(\ln x)^3$

היא:  $f'(x) = (\ln x)^3 + 3(\ln x)^2$ .

ג. הוכח כי הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f''(x) = \frac{3\ln^2 x + 6\ln x}{x}$ .

ד. הראה כי אחת מהנקודות המקיימות  $f''(x) = 0$  נמצאת על ציר ה- $x$ .

**13** ענה על הסעיפים הבאים :

- א. פתור את המשוואה הבאה :  $\ln^2(10-x^2) - \sqrt{\ln(10-x^2)} = 0$  .  
(רמז : סמן  $t = \ln(10-x^2)$  ופתור עבור  $t$ ).
- ב. לפניך הפונקציות הבאות :  $f(x) = \ln^2(10-x^2)$  ,  $g(x) = \sqrt{\ln(10-x^2)}$  .  
קבע אלו מהמשפטים הבאים נכונים לגבי הפונקציות ואלו לא.  
נמק כל הסבר בחישוב מתאים.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון אחת הנמצאת על ציר ה- $y$ .
  - הגרפים של הפונקציות נחתכים ב-2 נקודות בלבד.
  - הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  באותן הנקודות.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  על סמך מה שקבעת בסעיף ב'.

**14** נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}$  .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון כלל.
  - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון הישר :  $y = k$  . האם קיימים ערכי  $k$  עבורם הישר יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד? אם כן – מצא אותם.

**15** נתונה הפונקציה :  $y = \log_2(3x+1)$  .

- כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**16** נתונה הפונקציה הבאה :  $y = x^2 \log_{0.5}(x^2)$  .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**(17)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \log_3(x^2 + ax + 9)$ .  
ידוע כי יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה אנכית:  $x = -3$ .  
א. מצא את  $a$ .

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.  
ג. הישר  $y = 6$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.  
מצא את נקודות אלו.

**(18)** נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x-2}$ ,  $g(x) = 1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של כל פונקציה.  
ב. הראה כי הגרפים של הפונקציות לא נחתכים באף נקודה.  
ג. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .

**(19)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \log_4(x-2) - \log_{16}(x^2 - 4)$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.  
ג. מעבירים ישר  $y = -1$  החותך את גרף הפונקציה.  
מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת החיתוך.

**(20)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{1}{\log_2(x-2)} + \frac{1}{\log_4 x}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 4$ .  
ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.  
ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x > 0$  ב.  $\min(e^3, -e^3)$  ג.  $(e^4, 0)$
- (2) א.  $0 < x \leq 1.5$  ב.  $(1, 1)$  ג.  $x = 0$
- (3) א.  $1 < x < 3$  ב.  $x = 1, 3$  ג.  $(2, 0)$
- (4) א. i.  $x \neq 0$  ii. לא. הנגזרת היא:  $y' = \frac{2x}{x^2}$  והרי ש-  $x \neq 0$  iii.  $x = 0$
- iv. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$  v.  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  ב.  $(e^2, 4)$ ,  $(1, 0)$
- (5) א.  $a = -1$  ב.  $(1, 0)$
- ג. לגרף הפונקציה נקודת מינימום יחידה והיא:  $(e, -1)$ . לכן ערך הפונקציה המינימלי הוא -1.
- (6) א. i.  $x > -a$  ii.  $x = -a$  ב.  $a < 0$
- ג. i. מתקבל:  $x = 1 - a = 1 - (-) > 0$  ii.  $\min(1 - a, 0)$  ד.  $a = -3$
- (7) א. i.  $(1 - k, -1)$  ii.  $(0, k(\ln k - 1))$ ,  $(e - k, 0)$ ,  $(-k, 0)$  ג.  $k = 1$
- (8) א.  $x > 0$  ב.  $(1, 0)$
- ג. לא. גרף הפונקציה שואף ל-0 בגבול שלו. ד.  $(e^2, 4e^2)$ ,  $(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2})$
- (9) א. i.  $x > -a$ ,  $x < -a$  ii.  $x = 0, -a$
- ב. מתקבלת הנגזרת:  $y' = \frac{a}{x(x+a)} > 0$  ג.  $a = 1$
- (10) א. ב.  $(a + e, 1)$  ג.  $m = \frac{2}{e}$  ד.  $y = \frac{2}{e}x - \frac{2a}{e} - 1$  ה.  $a = 1$
- (11) א.  $y = 3 \ln x - x^3$ ,  $k = 3$  ב.  $x > 0$  ג.  $\max(1, -1)$
- ד. i. + ii. הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 1- ולכן גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה- $x$  וכולו שלילי.
- (12) א.  $x = 1, e^{-2}$
- (13) א.  $x_{1,2} = \pm 3$ ,  $x_{3,4} = \pm 2.7$
- ב. i. לא. עבור:  $f(x)$  ת.ה. הוא:  $-3.16 < x < 3.16$ . עבור:  $g(x)$  ת.ה. הוא:  $-3 \leq x \leq 3$ .
- ii. כן. עבור  $f(x)$  הנקודה:  $\max(0, 5.3)$ . עבור  $g(x)$  הנקודה:  $\max(0, 1.5)$ .
- iii. לא. מסעיף א' ניתן לראות כי הגרפים חותכים זה את זה ב-4 נקודות שונות.
- iv. כן.  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$ .

**14** א.  $0 < x \leq 1, x \geq e^2$  ב. ניתן לראות כי:

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}}{2\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{2 \ln x - 2}{2x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} \rightarrow x \neq e$$

הפתרון נפסל עקב ת.ה. ולכן אין נקודות קיצון כלל.

ג. עולה:  $x \geq e^2$ . יורדת:  $0 < x \leq 1$ . ג.  $(e^2, 0)$ ,  $(1, 0)$ .

ו. לא. הגרף תמיד יחתך בשתי נקודות כאשר  $k \geq 0$  ובאף נקודה כאשר  $k < 0$ .

**15** א.  $x > -\frac{1}{3}$  ב. מתקבל:  $y' = \frac{3}{(3x+1)\ln 2} > 0$

**16** א.  $x \neq 0$  ב.  $\max(-0.606, 0.53)$ ,  $\max(0.606, 0.53)$

ג. עולה:  $0 < x < 0.606$ ,  $x < -0.606$ , יורדת:  $x > 0.606$ ,  $-0.606 < x < 0$ .

**17** א.  $a = 6$  ב.  $(-2, 0)$ ,  $(-4, 0)$  ג.  $(-30, 6)$ ,  $(24, 6)$

**18** א. עבור  $f(x)$ :  $x < 1$ ,  $x > 2$ , עבור  $g(x)$ :  $x < 0$ ,  $x > 2$ .

ב. הנקודה המתקבלת ( $x = 1.5$ ) אינה בתחום. ג.  $y = \frac{1}{2 \ln 3}x + \frac{\ln 2}{\ln 3}$

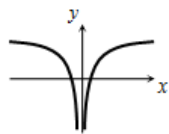
**19** א.  $x > 2$  ב. מתקבל:  $y' = \frac{2}{(x^2 - 4)\ln 4} > 0$

ג.  $x = 2\frac{4}{15} \approx 2.266$

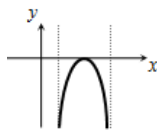
**20** א.  $x > 2, x \neq 3$  ב.  $y = -\frac{5}{4 \ln 4}x + \frac{5 + \ln 16}{\ln 4}$

ג.  $\left(0, \frac{5 + \ln 16}{\ln 4}\right)$ ,  $\left(\frac{4(5 + \ln 16)}{5}, 0\right)$  ד.  $S = \frac{2(5 + \ln 16)^2}{5 \ln 4}$

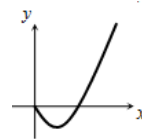
סקיצות לשאלות:



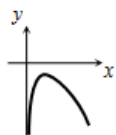
(4)



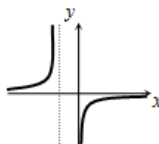
(3)



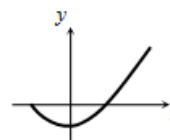
(1)



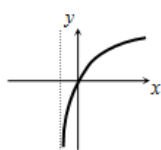
(11)



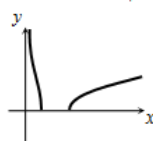
(9)



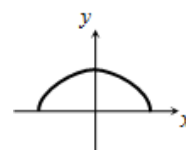
(7)



(15)



(14)



(13)

## תוכן העניינים:

229 .....	פרק 11
229 .....	חקירת פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי
229.....	הגדרות כלליות :
230.....	נגזרת של פונקצית חזקה :
230.....	שאלות יסודיות – חישובי נגזרות :
231.....	שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת :
232.....	שאלות שונות העוסקות בחקירה :
235.....	תשובות סופיות :
237.....	תרגול נוסף :
240.....	תשובות סופיות :

# פרק 11

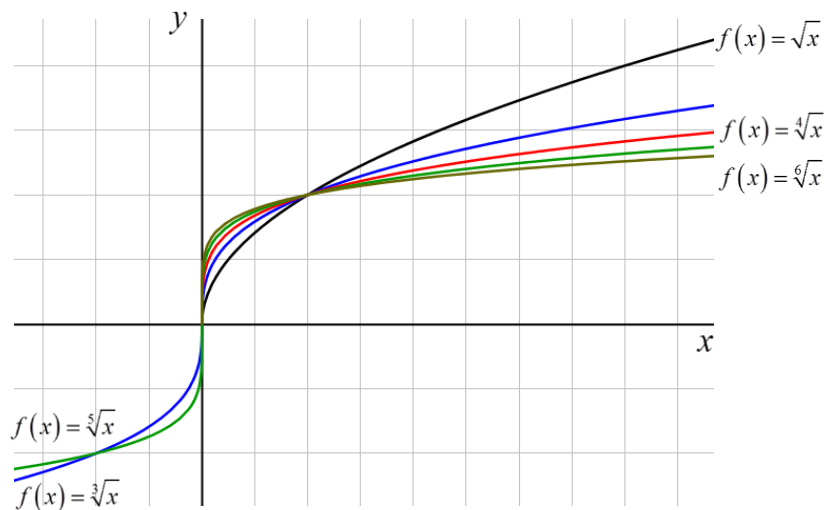
## חקירת פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי

### הגדרות כלליות:

הצורה הכללית של פונקציה חזקה עם מעריך רציונאלי:  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ .

תזכורת:  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ .

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה:  $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ .



### תכונות כלליות:

- פונקציית חזקה:  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$  מוגדרת לכל  $x$  עבור  $n$  אי-זוגי ומוגדרת לכל  $x \geq 0$  עבור  $n$  זוגי.
- הפונקציה:  $f(x) = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$  מוגדרת לכל  $x$  עבור  $n$  אי-זוגי ולכל  $x \geq -\frac{b}{a}$  עבור  $n$  זוגי.



## נגזרת של פונקציה חזקה:

הפונקציה	הנגזרת
$y = x^{\frac{m}{n}}$	$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$
$y = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$	$y' = a \cdot \frac{m}{n} (ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$

## שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

(1) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א.  $y = \sqrt[4]{x}$     ב.  $y = \sqrt[7]{x}$     ג.  $y = \sqrt[3]{x+1}$     ד.  $y = \sqrt[8]{2-3x}$   
 ה.  $y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$     ו.  $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$     ז.  $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{3x+7}}$     ח.  $y = \frac{x^2-2x}{\sqrt[20]{(2x-4)^3}}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $y = 4x + \sqrt[4]{x}$     ב.  $y = 27 - \sqrt[3]{x+1}$   
 ג.  $y = (x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x}$     ד.  $y = (3-x^3) \cdot \sqrt[6]{x}$   
 ה.  $y = \sqrt[3]{(3x+1)^5}$     ו.  $y = \sqrt[10]{(8-7x)^7}$   
 ז.  $y = (x^2-4) \cdot \sqrt[8]{(4x+3)^3}$     ח.  $y = x^3 \cdot \sqrt[7]{1-x}$   
 ט.  $y = \frac{6}{\sqrt[5]{x+2}}$     י.  $y = \frac{2}{\sqrt[7]{(4-3x)^4}}$

(3) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

ב.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

א.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

ג.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$

## שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

(4) לפניך מספר פונקציות. מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:

ב.  $y = 2x + \sqrt[3]{3x-1}; x = 3$

א.  $y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^4}}; x = 1$

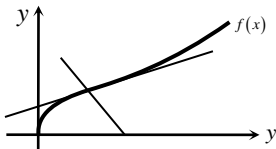
(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = (x^2 - 3x - 4) \cdot \sqrt[3]{x}$  בנקודה שבה:  $x = 1$ .

(6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = (2x+4) \cdot \sqrt[4]{x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך  $(1, 6)$ .

ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודה  $(1, 6)$ .

ג. חשב את השטח הנוצר ע"י שני הישרים והצירים.



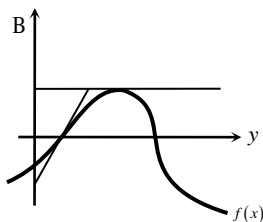
(7) באיור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה:  $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{9-x}$ .

א. מצא נקודה על הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא 0.

ב. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הקרובה יותר לראשית.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים שמצאת וציר ה- $y$ .



- (8) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt[4]{2x+7} - Ax^2$ ,  $A$  (פרמטר).  
ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 4.5$  הוא:  $m = -\frac{1}{2}$ .  
מצא את  $A$ .

- (9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1-x}}{Ax+B}$ ,  $A, B$  (פרמטרים). משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה:  $x = 2$  היא:  $45y = 2x - 19$ . מצא את  $A$  ואת  $B$ .

## שאלות שונות העוסקות בחקירה:

- (10) חקור את הפונקציה  $f(x) = (x^2 - 36)\sqrt[4]{x}$  לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
- מציאת תחומי העלייה והירידה.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה.

- (11) חקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt[5]{8x-2}}{x^2+1}$  לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
- מציאת תחומי העלייה והירידה.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה.

**12** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 6$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
  - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
  - הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = -f(x)$ .
- קבע לגבי כל טענה האם היא נכונה או שגויה. נמק.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - שתי הפונקציות חותכות את הצירים באותן הנקודות.
  - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

**13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 + k\sqrt[3]{x} + 8$ ,  $k$  פרמטר.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = -2.741$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $k$ , עגל למספר שלם.
- הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת גם היא על ציר ה- $x$ .
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- העזר בסקיצה וקבע כמה פתרונות יהיו למשוואה הבאה:  $x^3 + 9\sqrt[3]{x} = 8$ .

**14** נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = (x-2)^2$ ,  $g(x) = \sqrt[5]{2x+2.6}$ .

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- $x$ .
  - מגדירים פונקציה חדשה:  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ .
- כתוב מפורשות את הפונקציה  $h(x)$  ואת תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $h(x)$ .
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .
  - מצא עבור אלו ערכים של  $k$  יחתוך הישר  $y = k$  את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

15 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{5x^2 - 66x - 440}{\sqrt[6]{x}}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית?
- ב. האם הפונקציה חותכת את הצירים בתחום:  $[0:18]$ ? נמק ע"י חישוב.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = -f(x)$ . לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציה  $g(x)$  קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו שגויות. נמק ע"י הסבר או חישוב מתאים.
- i.  $g(x)$  חיובית בכל התחום  $[0:18]$ .
- ii. ל  $g(x)$  אותן נקודות קיצון (אותם שיעורים ואותו סוג) כמו  $f(x)$ .
- iii. ל  $g(x)$  אותו תחום הגדרה כמו ל  $f(x)$ .

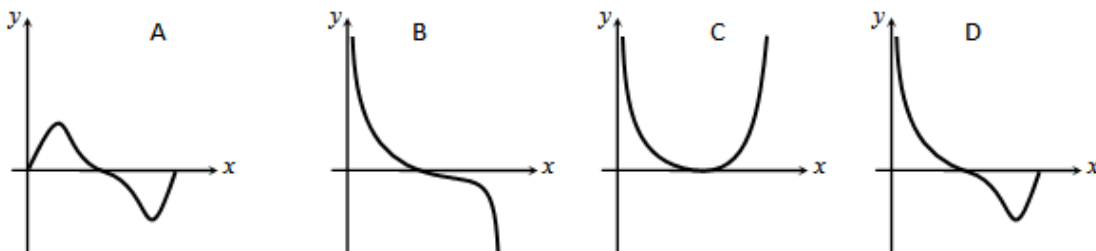
16 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x}$

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים קבע כמה פתרונות יש למשוואה הבאה:  $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x} = k$  כאשר:

i.  $k = -2$

ii.  $k = 1$

- ה. קבע איזה מבין הגרפים הבאים מתאר את הנגזרת של הפונקציה. נמק.



## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \geq 0 \quad \text{ב. כל } x \quad \text{ג. כל } x \quad \text{ד. } x \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{ה. } x > 0 \quad \text{ו. } x \neq 0 \quad \text{ז. } x \neq -\frac{7}{3} \quad \text{ח. } x > 2$$

$$(2) \quad \text{א. } y' = 4 + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad \text{ב. } y' = -\frac{1}{3\sqrt{(x+1)^2}} \quad \text{ג. } y' = \frac{(x+2)(7x+2)}{3\sqrt{x^2}}$$

$$\text{ד. } y' = \frac{3-19x^3}{6\sqrt{x^5}} \quad \text{ה. } y' = 5\sqrt{(3x+1)^2} \quad \text{ו. } y' = -\frac{49}{10\sqrt{(8-7x)^3}}$$

$$\text{ז. } y' = \frac{9.5x^2+6x-6}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}} \quad \text{ח. } y' = \frac{21x^2-22x^3}{7\sqrt{(1-x)^6}} \quad \text{ט. } y' = -\frac{6}{5\sqrt{(x+2)^6}}$$

$$\text{י. } y' = \frac{24}{7\sqrt{(4-3x)^{11}}}$$

$$(3) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, f''(x) = -\frac{2}{9} \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$(4) \quad \text{א. } -8 \quad \text{ב. } 2.25$$

$$(5) \quad y = -\frac{33}{32}x + 1\frac{11}{16}$$

$$(6) \quad \text{א. } y = 3.5x + 2.5 \quad \text{ב. } y = -\frac{2}{7}x + 6\frac{2}{7} \quad \text{ג. } 67.25 \text{ סמ"ר}$$

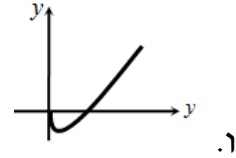
$$(7) \quad \text{א. } (7, 6\sqrt[3]{2}) \quad \text{ב. } y = 6\sqrt[3]{2} \quad \text{ג. } y = 2x - 2 \quad \text{ד. } 22.84 \text{ סמ"ר}$$

$$(8) \quad A = \frac{1}{16}$$

$$(9) \quad A = B = 1$$

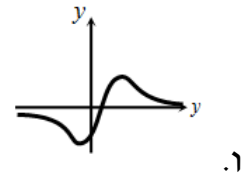
10 א.  $x \geq 0$  ב.  $(0,0)$  ,  $(6,0)$  ג.  $\min(2,-38)$

ד. יורדת:  $0 < x < 2$  , עולה:  $x > 2$  ה. אין



11 א. כל  $x$  ב.  $(0,-1.14)$  ,  $(0.25,0)$  ג.  $\max(0.5,0.91)$

ד.  $\min\left(-\frac{2}{9}, -1.24\right)$  יורדת:  $x > \frac{1}{2}$  ,  $x < -\frac{2}{9}$  , עולה:  $-\frac{2}{9} < x < \frac{1}{2}$  ה.  $y=0$



12 א.  $x \geq 0$  ב.  $(0,-6)$  ,  $(64,0)$  ג. הנגזרת:  $f'(x) = \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}} > 0$  ד. בת.ה.

ה. i. נכון ii. לא נכון, החיתוך עם ציר ה- $y$  שונה ה. iii. לא נכון.

13 א.  $k = -9$  ב.  $\min(1,0)$  ,  $\max(-1,16)$

ג. עולה:  $x < -1$  ,  $x > 1$  יורדת:  $-1 < x < 1$  ה. 2.

14 א.  $(-1.3,0)$  ,  $(2,0)$  ב.  $h(x) = (x-2)^2 \sqrt[5]{2x+2.6}$  , כל  $x$

ג.  $\min(2,0)$  ,  $\max(-1,8.126)$  ה.  $0 < k < 8.126$

15 א.  $x=0$  ,  $x > 0$  אסימפטוטה אנכית ב. לא

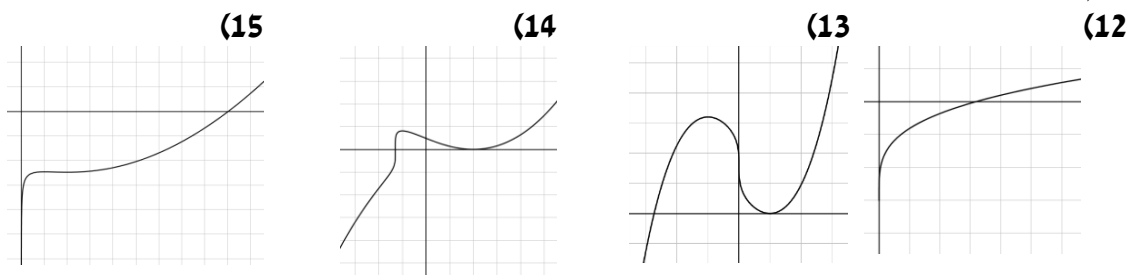
ג.  $\min(4,-495.27)$  ,  $\max(2,-491.77)$  ה. i. נכון ה. ii. לא נכון ה. iii. נכון

16 א.  $0 \leq x \leq 9$  ב.  $\min(0,0)$  קצה,  $\min(9,0)$  קצה

ג. עולה:  $0 < x < 6$  , יורדת:  $6 < x < 9$

ד. i.  $k = -2$  אין פתרון. ii.  $k = 1$  שני פתרונות ה. B.

סקיצות לשאלות:



## תרגול נוסף:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } y = \frac{4x - x^3}{\sqrt[5]{x^2}} \quad \text{ב. } y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

(2) לפניך מספר פונקציות. מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:

$$\text{א. } y = (x^2 - 81) \cdot \sqrt[4]{x}; x = 81 \quad \text{ב. } y = \frac{x+4}{\sqrt[5]{4x}}; x = 8$$

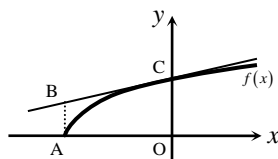
(3) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \sqrt[4]{6-x} - x$  בנקודה שבה:  $x = -10$ .

(4) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \frac{\sqrt[5]{2x}}{x^2 - 258.5}$  בנקודה שבה:  $x = 16$ .

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \frac{6}{\sqrt[3]{x+x^3}}$  בנקודה שבה:  $x = 1$ .

(6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[4]{8x+16}$ .

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .



א. מצא את משוואת המשיק.  
ב. מעלים אנך לציר ה- $x$  מקצה תחום ההגדרה של הפונקציה כך שנוצר טרפז ישר זווית ABCO. חשב את שטחו.

(7) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = 3 \cdot \sqrt[6]{x} - 2$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. קבע באלו תחומים מתקיים:  $f(x) > g(x)$ .

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$

העובר דרך נקודת החיתוך הרחוקה יותר מהראשית מבין הנקודות שמצאת.



8 נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = \sqrt[5]{32-x}$  ,  $g(x) = \sqrt[5]{32+x}$  .

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות.
- ב. כתוב את משוואות המשיקים לגרפים של הפונקציות העוברים דרך נקודת החיתוך.
- ג. חשב את שטח המשולש שנוצר בין המשיקים וציר ה- $x$ .

9 לפינך מספר פונקציות. מצא את שיעורי הנקודה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא המצוין לידה:

- |  |  |
|--|--|
| א. $f(x) = \sqrt[3]{5x-1}$ ; $m=15$                          | ב. $f(x) = \frac{6}{\sqrt[6]{x}}$ ; $m = -\frac{1}{128}$ |
| ג. $f(x) = \sqrt[5]{2x} + \frac{x}{40}$ ; $m = \frac{1}{20}$ | ד. $f(x) = \frac{x^2 + 27x}{\sqrt{x}}$ ; $m = 15$        |

10 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  .  
מצא את משוואת המשיק המקביל לישר:  $y = 3x$  .

11 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$  .  
מצא את משוואת המשיק המאונך לישר:  $2y + x = 4$  .

12 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = (x+A) \cdot \sqrt[3]{3x}$  ,  $A$  (פרמטר).  
ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=9$  הוא:  $m=6$  .  
מצא את  $A$  .

13 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{Ax+B}{\sqrt[3]{x}}$  ,  $(A, B)$  פרמטרים. משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה:  $x=1$  היא:  $3y-x=14$  . מצא את  $A$  ואת  $B$  .

14 לפינך מספר פונקציות. מצא את נקודות הקיצון הפנימיות שלהן וקבע את סוגן.

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| א. $f(x) = x \cdot \sqrt[4]{2x+8}$  | ב. $f(x) = -\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 2$ |
| ג. $f(x) = \frac{x+6}{\sqrt[3]{x}}$ | ד. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{7-x}}{x-11}$      |

15 מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציות הבאות :

א.  $f(x) = x^2 - 128\sqrt[4]{x}$       ב.  $f(x) = (x^2 - 25) \cdot \sqrt[6]{x+4}$

ג.  $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2}{x}$       ד.  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[3]{x+8}}$

16 חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

1. תחום הגדרה.
2. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
3. מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
4. מציאת תחומי העלייה והירידה.
5. מציאת אסימפטוטות אנכיות.
6. סרטוט סקיצה.

א.  $f(x) = \sqrt[4]{6-x}$       ב.  $f(x) = (x+12)\sqrt[5]{x}$

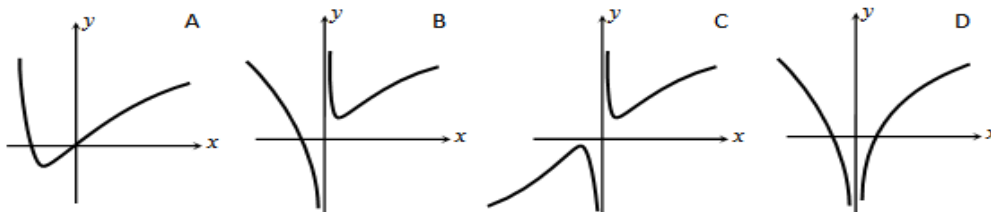
ג.  $f(x) = (x+5)\sqrt[3]{1-3x}$       ד.  $f(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{2x+3}}$

ה.  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 10 + \frac{9}{\sqrt[3]{x}}$       ו.  $f(x) = \frac{\sqrt[5]{6-3x}}{x^2-4}$

ז.  $f(x) = \frac{x+9}{\sqrt[4]{x+6}}$       ח.  $f(x) = \frac{x^2-16}{\sqrt[3]{7-x}}$

17 נתונה הפונקציה :  $f(x) = (x+1) \cdot \sqrt[7]{x^4}$  .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. לפניך 4 סרטוטים. קבע איזה סרטוט מתאר את גרף הפונקציה של הפונקציה. נמק את בחירתך.



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $y' = \frac{12x-13x^3}{5\sqrt{x^7}}$  ב.  $y' = \frac{4x\sqrt{x}+x+6\sqrt{x}+3}{6\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^4}}$
- (2) א. 546 ב. 0.35
- (3)  $y = -3x - 3$
- (4)  $y = -10.25x + 163.2$
- (5)  $y = -5x + 8$
- (6) א.  $y = 0.25x + 2$  ב. 3.5 סמ"ר
- (7) א. (1,1) , (64,4) ב.  $x < 1$  ,  $x > 64$  ג.  $y = \frac{1}{64}x + 3$
- (8) א. (0,2) ב.  $y = -\frac{1}{80}x + 2$  ;  $y = \frac{1}{80}x + 2$  ג. 320 סמ"ר
- (9) א.  $\left(\frac{28}{135}, \frac{1}{3}\right)$  ב. (64,3) ג. (16,2.4) ד. (1,28) , (81,972)
- (10)  $y = 3x + 3\frac{2}{9}$
- (11)  $y = 2x - 3\frac{3}{8}$
- (12)  $A = 18$
- (13)  $B = 3$  ,  $A = 2$
- (14) א.  $\min(-3.2, -3.59)$  ב.  $\max(1,3)$  ג.  $\min(3,6.24)$  ד.  $\min\left(6, -\frac{1}{5}\right)$
- (15) א. (0,0) , (16,0) ב. (0,-31.5) , (-4,0) , (5,0) ג. (1,0) , (0,2) ד. (0,2)
- (16) התשובות לפי סעיפים:
- א. 1.  $x \leq 6$  2. (0,1.56) , (6,0) 3.  $\min(6,0)$  קצה 4. יורדת בכל ת.ה.
5. אין
- ב. 1. כל  $x$  2. (0,0) , (-12,0) 3.  $\min(-2, -11.48)$
4. יורדת:  $x < -2$  , עולה:  $x > -2$  5. אין
- ג. כל  $x$  2. (0,5) , (-5,0) ,  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$  3.  $\max(-1, 6.35)$
4. יורדת:  $x > -1$  , עולה:  $x < -1$  5. אין

ד. 1.  $x > -1.5$  2.  $(0, 3.03)$  3. אין 4. יורדת בכל ת.ה.

5.  $y = 0, x = -1.5$

ה. 1.  $x \neq 0$  2.  $(-1, 0), (-729, 0)$  3.  $\min(27, 16), \max(-27, 4)$

4. יורדת:  $-27 < x < 27$ , עולה:  $x < -27, x > 27$  5.  $x = 0$

ו. 1.  $x \neq \pm 2$  2.  $(0, -0.357)$  3.  $\max\left(\frac{2}{9}, -0.353\right)$

4. יורדת:  $x > \frac{2}{9}, x \neq 2$ , עולה:  $x < \frac{2}{9}, x \neq -2$  5.  $y = 0, x \neq \pm 2$

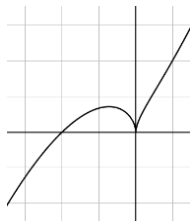
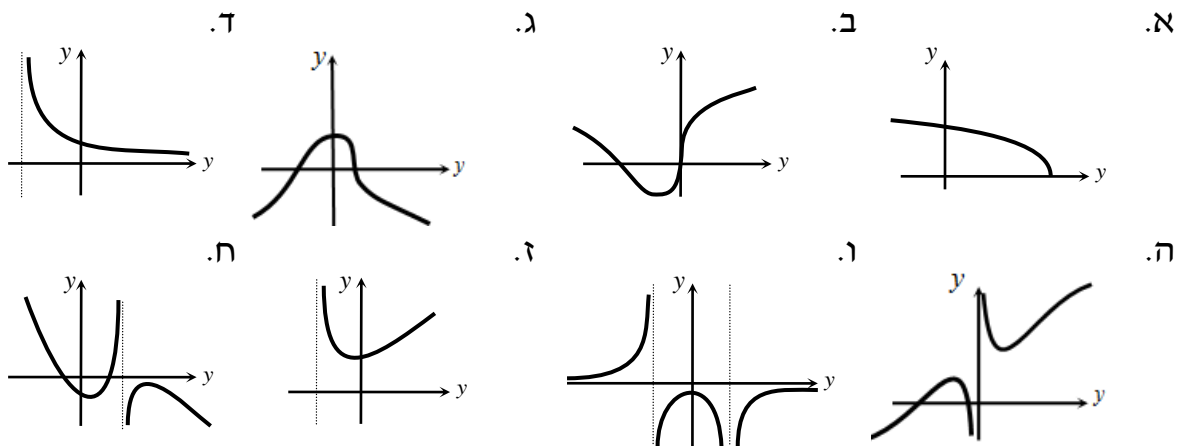
ז. 1.  $x > -6$  2.  $(0, 5.75)$  3.  $\min(-5, 4)$

4. יורדת:  $-6 < x < -5$ , עולה:  $x > -5$  5.  $x = -6$

ח. 1.  $x \neq 7$  2.  $(4, 0), (-4, 0)$  3.  $\min(0.4, -8.44), \max(8, -48)$

4. יורדת:  $x < 0.4, x > 8$ , עולה:  $0.4 < x < 28$  5.  $x = 7$

### סקיצות לסעיפים א'-ח':



17) א. כל  $x$  ב.  $(-1, 0), (0, 0)$  ג.  $\max\left(-\frac{4}{11}, 0.356\right)$  ה.

## תוכן העניינים:

243	פרק 12
243	חשבון אינטגרלי
243	פונקציות טריגונומטריות :
243	שאלות יסודיות – אינטגרל כללי :
244	שאלות העוסקות במציאת פונקציה קדומה :
244	שאלות העוסקות בחישובי שטחים :
247	תרגול נוסף :
251	תשובות סופיות :
253	פונקציות מעריכיות :
253	שאלות יסודיות – אינטגרל כללי :
253	שאלות העוסקות במציאת פונקציה קדומה :
254	שאלות עם חישובי שטחים :
256	תרגול נוסף :
262	תשובות סופיות :
264	פונקציות לוגריתמיות :
264	שאלות יסודיות – אינטגרל כללי :
264	שאלות העוסקות במציאת פונקציה קדומה :
264	שאלות העוסקות בחישובי שטחים :
267	תרגול נוסף :
271	תשובות סופיות :
273	פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי :
273	שאלות יסודיות – אינטגרל כללי :
274	שאלות העוסקות במציאת פונקציה קדומה :
274	שאלות העוסקות בחישובי שטחים :
277	תרגול נוסף :
280	תשובות סופיות :

# פרק 12

## חשבון אינטגרלי

### פונקציות טריגונומטריות:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות טריגונומטריות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int (\sin x) dx = -\cos x + c$	$\int (\sin(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int (\cos x) dx = \sin x + c$	$\int (\cos(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

### שאלות יסודיות – אינטגרל כללי:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \left( \sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$

ב.  $\int \left( \cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$

ג.  $\int \left( \sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות):

א.  $\int (2 \sin x \cos x) dx$       ב.  $\int (\sin 3x \cos 3x) dx$

ג.  $\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$

### שאלות העוסקות במציאת פונקציה קדומה:

(3) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = \cos x + 4 \sin 2x$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2}\right)$ .

(4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ .

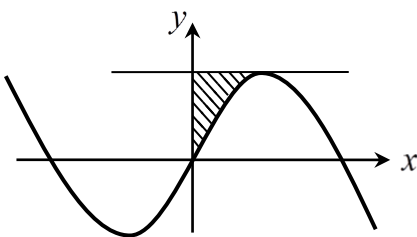
(5) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = -\cos x - 4 \sin 2x$ .

שיפוע הפונקציה בנקודה  $(\pi, \pi)$  הוא 3. מצא את הפונקציה.

### שאלות העוסקות בחישובי שטחים:

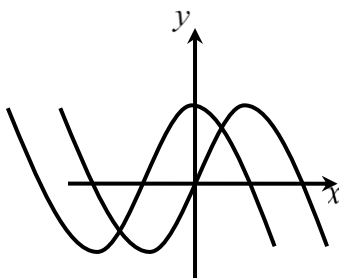
(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin x$ .

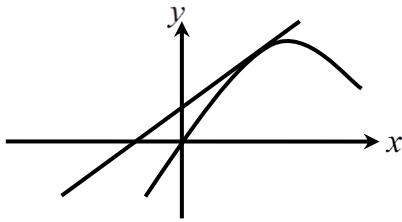
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום שלה הקרובה ביותר לציר ה- $y$  וציר ה- $x$ .



(7) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- $y$  ברביע הראשון.

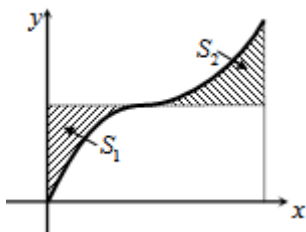




(8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2 \sin x$ .

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

- מצא את משוואת המשיק.
- חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$  ברביעים הראשון והשני.

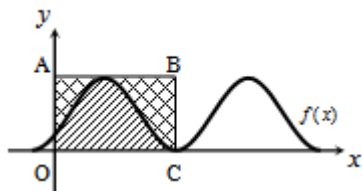


(9) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $y = \sin x + x$

בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?
- מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 2\pi$ .

מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה שמאפסת את הנגזרת. הראה כי השטחים  $S_1$  ו- $S_2$  המסומנים בסרטוט שווים.



(10) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:

$$f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2} \quad \text{בתחום: } -0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$$

מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- $x$  מנקודת

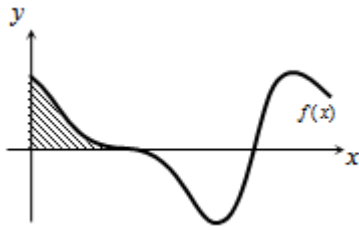
החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון המסומנת ב- $C$  כך שנוצר המלבן ABCO.

- השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (המקווקו).
- השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .

א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .





**11** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא :

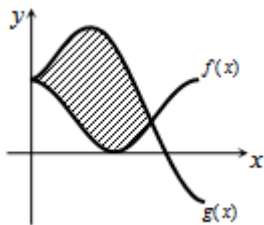
$$f'(x) = -\cos 2x - \sin x$$

א. מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות המקיימות :  $f'(x) = 0$  בתחום :  $0 < x < 2\pi$ .

ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$  אשר אינה קיצון נמצאת על ציר ה- $x$ .

ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



**12** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה

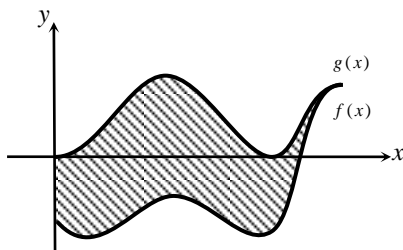
$$f(x) = \cos^2 x \quad \text{ו-} \quad g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$$

בתחום :  $0 \leq x \leq \pi$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



**13** נתונות הנגזרות הבאות :  $g'(x) = \sin 2x$

$$\text{ו-} \quad f'(x) = \sin 2x - \cos x + k$$

ידוע כי לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  יש משיק

משותף בנקודה שבה :  $x = 1.5\pi$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

ידוע כי משוואת המשיק המשותף

$$\text{היא : } y = 1$$

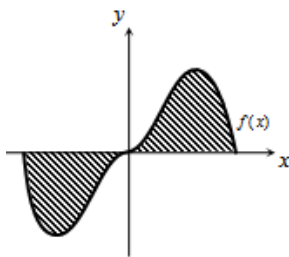
ב. הראה כי :  $f(x) = -\cos^2 x - \sin x$  ו-  $g(x) = \sin^2 x$ .

ג. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שתי הפונקציות בתחום :  $[0; 1.5\pi]$ .

חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים בתחום הנתון.

14 הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = \cos x + \sin x$ .

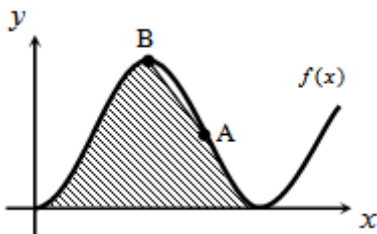
- א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים.  
הוכח כי הנגזרת  $f'(x)$  והפונקציה המקורית  $f(x)$  מקיימות את המשוואה:  $f(x) + f'(x) = 2 \sin x + 1$ .
- ב. מגדירים פונקציה חדשה  $g(x)$  באופן הבא:  $g(x) = f(x) + f'(x)$ .
- i. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- $y$  של הפונקציה  $g(x)$ .
- ii. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה- $y$  של הפונקציה  $f(x)$ .
- iii. כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת.



15 ענה על הסעיפים הבאים:

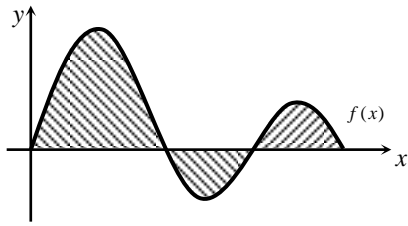
- א. נתונה הפונקציה:  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$   
הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא:  $y' = x^2 \sin x$   
באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 \sin x$   
בתחום:  $-\pi \leq x \leq \pi$ .
- ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  בתחום הנתון.

## תרגול נוסף:



16 ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח את הזהות:  $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ .
- באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה:  $f(x) = 2 \sin^2 x$ .
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ושיעוריה:  $A(0.75\pi, 1)$ . מחברים את הנקודה A עם נקודת המקסימום של הפונקציה B.
- ב. כתוב את משוואת הישר AB.
- ג. חשב את השטח הכלוא שבין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ .



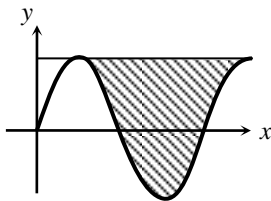
17) ענה על הסעיפים הבאים :

א. חשב את האינטגרל המסוים

$$\int_0^{\frac{4}{3}\pi} (\sin x + \sin 2x) dx$$

נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin x + \sin 2x$ ,  $x \in \left[0; \frac{4}{3}\pi\right]$ .

- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.  
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לציר ה- $x$  (המקווקו בשרטוט).  
ד. הסבר מדוע התוצאות של סעיף א' ו-ג' שונות.



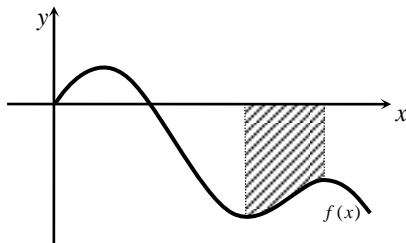
18) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $y = \sin x$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מצא את נקודת המקסימום של הפונקציה בתחום:  $0 < x < \pi$ .

ii. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה למשיק שמצאת בסעיף הקודם.



19) באיור שלפניך נתונה הפונקציה :

$$f(x) = \frac{\sin 2x - x}{2} \quad \text{בתחום: } 0 \leq x \leq 1.5\pi$$

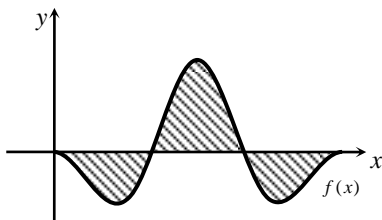
א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה

בתחום הנתון וקבע את סוגן.

מעלים אנכים לציר ה- $x$  משתי נקודות

הקיצון האחרונות בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, אנכים אלו וציר ה- $x$ .



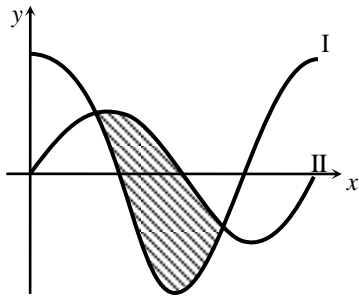
20) באיור שלפניך מתואר גרף

$$f(x) = \cos 2x - \cos x$$

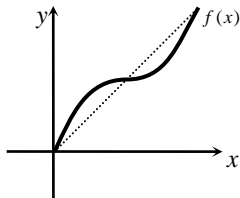
בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.

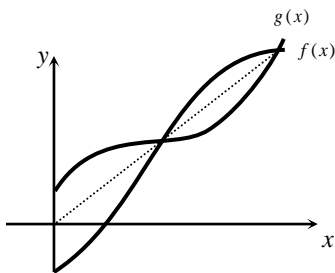
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לציר ה- $x$  בתחום הנתון.



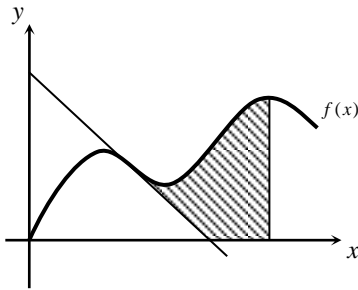
- (21)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = 2 \cos x$  ו-  $g(x) = \sin x - 1$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
- מצא איזה גרף מבין הגרפים I ו-II שייך לכל פונקציה.
  - מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
  - חשב את השטח הכלוא שבין שני הגרפים (המקווקו).



- (22)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x + \sin 2x$  בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .
- מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון המקיימת:  $f'(x) = 0$ .
  - כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה שמצאת עם ראשית הצירים.
  - האם הישר שאת משוואתו כתבת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה בנקודות נוספות בתחום הנתון? אם כן, מצא אותן.
  - חשב את השטח הכלוא בין הישר לפונקציה.



- (23)** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות:  $f(x) = x + \cos x$  ו-  $g(x) = x - \cos x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום:  $0 < x < 2\pi$ . מעבירים ישר דרך נקודות החיתוך של הגרפים שמצאת בסעיף הקודם.
  - ענה על הסעיפים הבאים:
    - כתוב את משוואת הישר הנ"ל.
    - הראה כי השטח הכלוא בין הישר לגרף הפונקציה  $f(x)$  שווה לשטח הכלוא בין הישר לגרף הפונקציה  $g(x)$  ומצא את שטח זה.



24 באיור שלפניך מתואר גרף

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}x$$

בתחום:  $0 < x < 3\pi$ . מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \pi$  ומורידים אנך לציר ה- $x$  דרך נקודת הקיצון האחרונה בתחום הנתון, כך שנוצר שטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, האנך וציר ה- $x$ .

- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את נקודת הקיצון האחרונה בתחום הנתון.
- ג. חשב את השטח המבוקש (היעזר באיור הסמוך).

## תשובות סופיות:

$$\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4 \tan 3x}{3} + c \quad \text{ב.} \quad -\cos x - 3 \sin x + 4 \tan x + 5x + c \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\cos(\pi - x) + \tan x + x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\frac{\sin 2x}{2} + c \quad \text{ג.} \quad -\frac{\cos 6x}{12} + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$f(x) = \sin x - 2 \cos 2x + 2 \quad (3)$$

$$f(x) = -2 \cos x + \tan x + 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \sin x - 2 \cos 2x + 2 \quad (5)$$

$$S = \text{יח"ש} \frac{\pi}{2} - 1 \quad (6)$$

$$S = \text{יח"ש} 0.41 \quad (7)$$

$$y = x + 2 \quad \text{א.} \quad S = \text{יח"ש} \pi \quad \text{ב.} \quad (8)$$

$$\text{א. אין נקודות קיצון, הנקודה: } (\pi, \pi) \text{ היא נקודת פיתול.} \quad (9)$$

$$\text{ב. השטח המתקבל הוא: } S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538 \quad \text{ב.} \quad y = 1 \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad \text{א.} \quad f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \quad \text{ב.} \quad S = \text{יח"ש} \frac{1}{2} \quad \text{ג.} \quad (11)$$

$$(0, 1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{א.} \quad 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.99 \quad \text{ב.} \quad S = \text{יח"ש} \quad (12)$$

$$k = 0 \quad \text{א.} \quad S = \text{יח"ש} 1.5\pi + 1 \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$(0.5\pi, 3) \quad \text{א.} \quad (0.75\pi, \sqrt{2} + 1) \quad \text{ב.} \quad y = -0.746x + 4.172 \quad \text{ג.} \quad (14)$$

$$2(\pi^2 - 4) \approx 11.74 \quad \text{ג.} \quad S = \text{יח"ש} \quad (15)$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \quad \text{א. הזהות מתקבלת מ-} \quad (16)$$

$$y = -\frac{4}{\pi} + 4 \quad \text{ב.} \quad \frac{9\pi}{8} - \frac{1}{2} = 3.03 \quad \text{ג.} \quad S = \text{יח"ש} \quad (17)$$

(17) א. 2.25. ב.  $(0,0), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), (\pi, 0), \left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ . ג. 2.75 יח"ש  $S =$

ד. השטח המבוקש חלקו מעל לציר ה- $x$  וחלקו מתחת. האינטגרל מחשב שטח הכלוא מתחת לציר ה- $x$  כשטח שלילי ולכן בחישוב של סעיף א' האינטגרל חיסר את חלק זה.

פירוט נוסף: ערכי השטחים הם:  $S_1 = 2.25, S_2 = 0.25, S_3 = 0.25$ .

מאחר ש- $S_2$  נמצא מתחת לציר הרי שהוא שלילי. האינטגרל שחושב בסעיף א'

ביצע:  $S_1 - S_2 + S_3 = 2.25 - 0.25 + 0.25 = 2.25$  ואילו חישוב השטח שבוצע

בסעיף ג' התייחס לשטח  $S_2$  כאל גודל חיובי, ולכן השטח הכללי

הוא:  $S_1 + S_2 + S_3 = 2.25 + 0.25 + 0.25 = 2.75$ .

(18) א. i.  $(0.5\pi, 1)$  ii.  $y = 1$  ב.  $2\pi$  יח"ש  $S =$

(19) א.  $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.17\right), \min\left(\frac{5\pi}{6}, -1.74\right), \max\left(\frac{7\pi}{6}, -1.4\right)$  ב. 1.65 יח"ש  $S =$

(20) א.  $(0,0), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{4\pi}{3}, 0\right), (2\pi, 0)$  ב.  $3\sqrt{3} = 5.196$  יח"ש  $S =$

(21) א. I:  $f(x) = 2\cos x$ , II:  $g(x) = \sin x$

ג. 4.472 יח"ש  $S =$  ב.  $(0.352\pi, 0.89), (1.352\pi, -0.89)$

(22) א.  $(0.5\pi, \pi)$  ב.  $y = 2x$  ג.  $(0,0), (\pi, 2\pi)$

ד. 2 יח"ש  $S =$

(23) א.  $(0.5\pi, 0.5\pi), (1.5\pi, 1.5\pi)$  ב. i.  $y = x$  ii. 2 יח"ש  $S =$

(24) א.  $y = -0.5x + \pi$  ב.  $\left(2\frac{2}{3}\pi, 5.05\right)$  ג.  $1\frac{5}{18}\pi^2 - \frac{1}{2} = 12.111$  יח"ש  $S =$

## פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

### שאלות יסודיות – אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx & \text{ב. } \int (3^x + 5^{2x}) dx \\ \text{ג. } \int (6\sqrt{e^{4x}-1}) dx & \text{ד. } \int (e^x + e^{-x})^2 dx \end{array}$$

### שאלות העוסקות במציאת פונקציה קדומה:

(2) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$ .

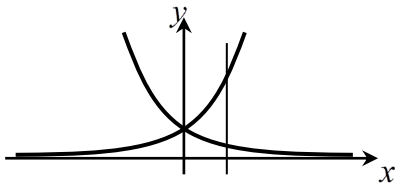
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(\ln 2, 3\frac{1}{4})$ .

(3) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$ .

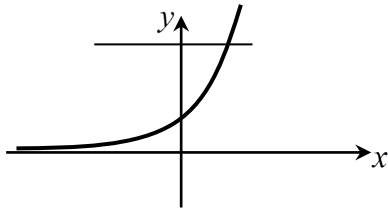
מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא  $\frac{1}{2}$ .



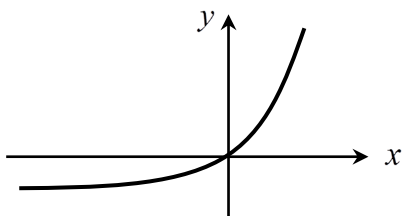
## שאלות עם חישובי שטחים:



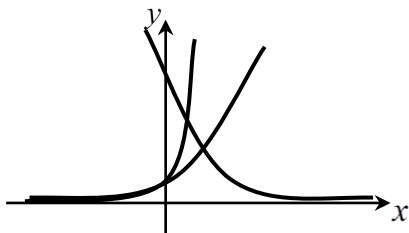
- (4) נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .  
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות  
לישר  $x = \ln 3$ .



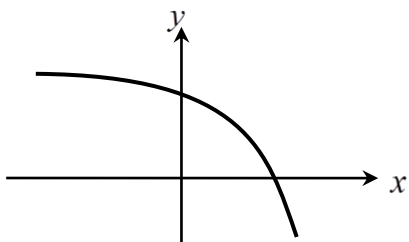
- (5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^x$ .  
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,  
הישר  $y = 9$  וציר ה- $y$ .



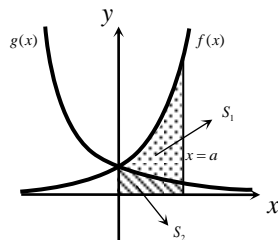
- (6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x} - e^x$ .  
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.  
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,  
המשיק והישר  $x = 2$ .



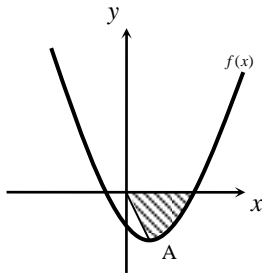
- (7) נתונות הפונקציות:  
 $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{3x}$ ,  $h(x) = 16e^{-x}$ .  
חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש  
הפונקציות.



- (8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 5 - e^x$ .  
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
חשב את גודל השטח הכלוא בין  
הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.



- (9) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  
 $f(x) = e^{2x}$  ו- $g(x) = e^{-2x}$ .  
מעבירים אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x = a$ ,  $a > 0$ .  
כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .  
ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ .  
מצא את  $a$ .



**10** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ .

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

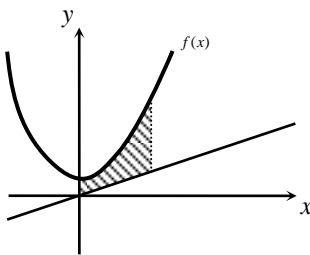
ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה

A עם הראשית.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



**11** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ .

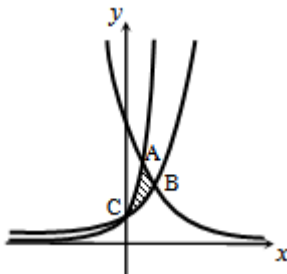
ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה:  $\left(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2}\right)$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$

והישר:  $y = 0.1x$ . חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר,

ציר  $y$  והאנך:  $x = 2$ .



**12** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש

פונקציות:

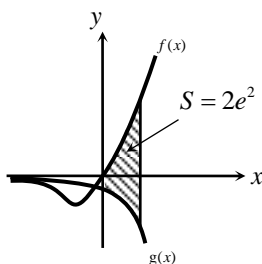
$$h(x) = 2^{4-2x} \quad \text{II} \quad g(x) = 4^x \quad \text{II} \quad f(x) = 2^x \quad \text{I}$$

א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C

(נקודות החיתוך שבין הגרפים).

ג. חשב את השטח המסומן באיור.



**13** ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה:  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות:  $f(x) = xe^x$ ,  $g(x) = -e^x$ .

מעבירים ישר  $x = a$  ( $a > 0$ ), החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

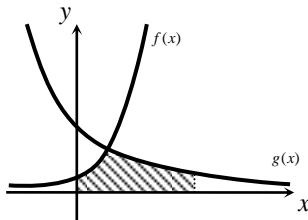
השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $a$  והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ . מצא את  $a$ .

## תרגול נוסף:

**14** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x-1}$ .

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר  $x=2$  והצירים.



**15** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:

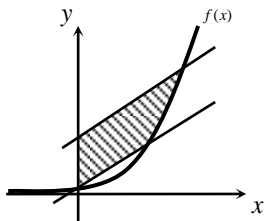
$$f(x) = e^x \text{ ו- } g(x) = ke^{-x} + 2$$

ידוע כי הגרפים חותכים זה את זה בנקודה שבה  $x = \ln 3$ .

א. מצא את  $k$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של

הפונקציות, הצירים והישר:  $x = \ln 4$ .



**16** באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה:  $f(x) = e^x$ .

מעבירים ישר דרך נקודת החיתוך של גרף

הפונקציה עם ציר ה- $y$  ודרך הנקודה שבה  $x=1$ .

א. מצא את משוואת הישר.

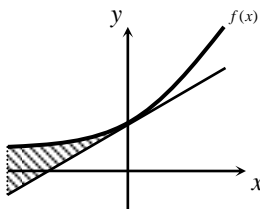
מעבירים ישר נוסף המקביל לישר שמצאת קודם

וחותך את ציר ה- $y$  בנקודה:  $y=3$ .

ב. מצא את משוואת הישר השני.

ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הישרים, ציר ה- $y$  וגרף הפונקציה

אם ידוע כי הישר השני חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1.8$ .



**17** ענה על הסעיפים הבאים:

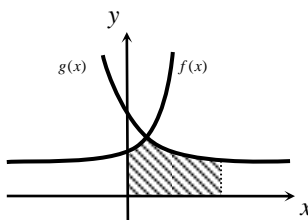
א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

$$f(x) = e^x \text{ בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- } y.$$

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה  $f(x)$  והמשיק. חשב את השטח

הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר:  $x = -3$ .



**18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

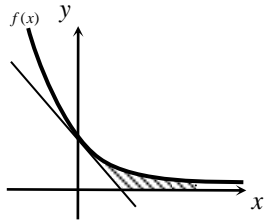
$$f(x) = e^{ax-1} + 2 \text{ ו- } g(x) = e^{1-ax} + 2$$

ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה  $x = \frac{1}{3}$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציות.

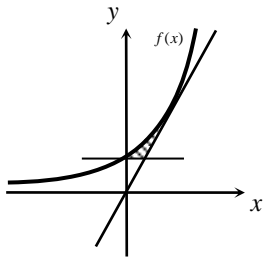
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של

שתי הפונקציות, ציר ה- $x$  והישר  $x=2$ .



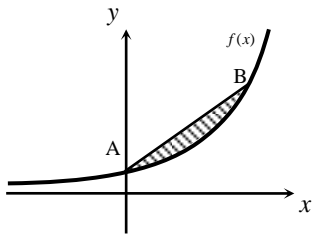
**19** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{-2x} + 1$ .

- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .
- מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$  והישר:  $x = 3$ .



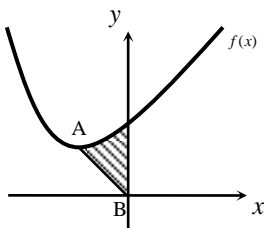
**20** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = e^{x+2}$ .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  ומעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  ויוצא מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- כתוב את משוואת המשיק והראה כי הוא עובר דרך ראשית הצירים.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



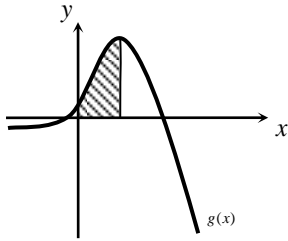
**21** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^x - x + 1$ .

- הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה ובה  $x_B = 1$ .
- מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.
- חשב את השטח הכלוא בין הישר AB וגרף הפונקציה.



**22** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{x+2} - 2x - 1$ .

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה B נמצאת בראשית הצירים.
- מצא את שיעורי הנקודה A.
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר AB וציר ה- $y$ .



**(23) נתונה הפונקציה:**  $f(x) = (a-x)e^x$ .

א. הוכח כי:  $f'(x) = (a-1-x)e^x$ .

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$

בנקודה שבה  $x=3$  הוא אפס. מצא את  $a$ .

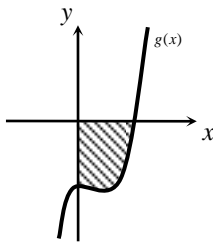
ג. באיור שלפניך מתואר גרף

הפונקציה:  $f(x) = (3-x)e^x$ .

מורידים אנך לציר ה- $x$  מנקודת הקיצון של

הפונקציה. חשב את השטח המוגבל בין גרף

הפונקציה  $g(x)$ , הצירים והאנך.



**(24) נתונה הפונקציה:**  $f(x) = e^{x^2-2x+k}$ . ידוע ששיפוע המשיק

לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=3$  הוא  $4e^3$ .

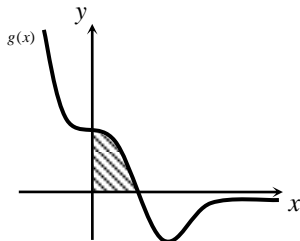
א. כתוב את נגזרת הפונקציה  $f(x)$ .

ב. באיור שלפניך מתואר גרף

הפונקציה:  $g(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$ .

מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g(x)$

והצירים.



**(25) נתונה הפונקציה:**  $f(x) = x \cdot e^{-9x^3}$ .

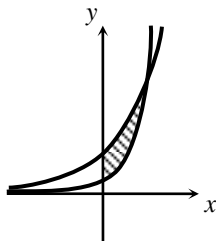
א. הוכח:  $f'(x) = (1-27x^3)e^{-9x^3}$ .

ב. באיור שלפניך נתונה הפונקציה:

$g(x) = (1-27x^3)e^{-9x^3}$ .

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והצירים.



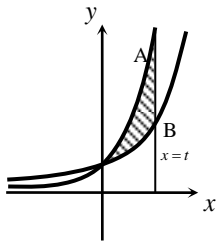
**(26) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:**

$f(x) = 9^x$  ו-  $g(x) = 9 \cdot 3^x$ .

א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

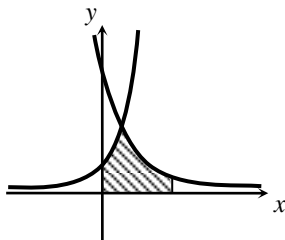
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים וציר

ה- $y$ .

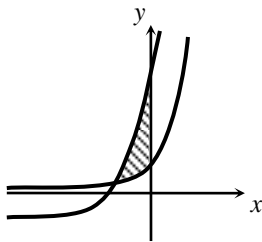


- 27** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  
 $f(x) = 2^x$  ו-  $g(x) = 4^x$ . ישר  $x = t$  חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור. ידוע כי אורך הקטע AB הוא 240.  
 א. מצא את  $t$ .  
 ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה-  $y$ .

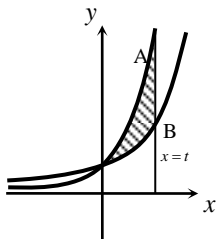
ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.



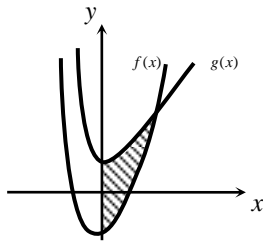
- 28** נתונות הפונקציות:  $f(x) = 2^x$  ו-  $g(x) = 4^{k-x}$ .  
 ידוע כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 4$ .  
 א. מצא את  $k$ .  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, הישר  $x = 8$  וציר ה-  $x$ .



- 29** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  
 $f(x) = 3^{x+2}$  ו-  $g(x) = 3^{x+5} - 26$ .  
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.  
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה-  $y$ .  
 ג. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה-  $y$ .



- 30** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  
 $f(x) = 3^x$  ו-  $g(x) = 9^x$ . ישר  $x = t$ ,  $(t > 0)$ , חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור. ידוע כי אורך הקטע AB הוא 702.  
 א. מצא את  $t$ .  
 ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה-  $y$ .  
 ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.



**(31)** באיור שלפניך נתונות הפונקציות :

$$f(x) = e^{2x} + x^2 + k \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2e^x + x^2 - 1$$

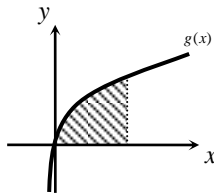
ידוע כי המרחק בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- $y$  הוא 4.

א. מצא את  $k$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך שבין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של

שתי הפונקציות וציר ה- $y$ .



**(32)** ענה על הסעיפים הבאים :

א. גזור את הפונקציה הבאה :  $f(x) = -(x+1)e^{-x}$

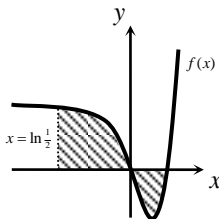
נתונה הפונקציה :  $g(x) = xe^{-x} + kx$

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1$  הוא 1.

ב. מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה.

ג. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח המוגבל בין

גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x=2$ .



**(33)** ענה על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. חשב את האינטגרל : } \int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 4} (e^{2x} - 5e^x + 4) dx$$

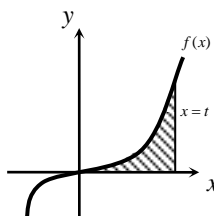
באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה :

$$f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$$

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והישר  $x = \ln 0.5$  (המקווקו).

ג. הסבר מדוע התוצאות שקיבלת בסעיפים א' וב' שונות.



**(34)** נתונה הפונקציה :  $f(x) = e^x - e^{-x}$

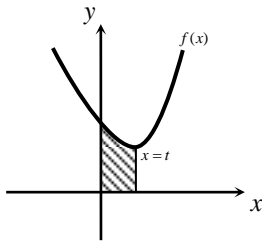
א. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים ישר  $x=t$  ,  $(t > 0)$  המאונך לציר ה- $x$

וחותך את גרף הפונקציה.

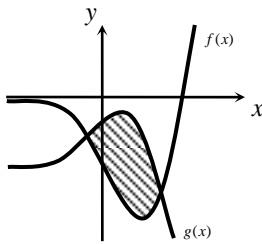
ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והאנך הוא :  $S = 1\frac{1}{3}$ . מצא את  $t$ .



**(35)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x} + 16e^{-2x}$ .

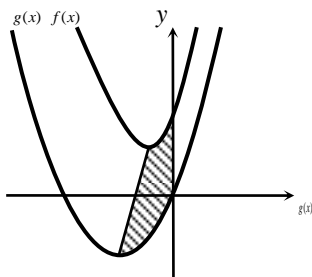
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- מעבירים ישר  $x=t$ ,  $(t > 0)$  כמתואר באיור. ידוע כי השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה והצירים הוא:  $S = 7.5$ . הוכח כי ישר זה יוצא מנקודת הקיצון שמצאת בסעיף א'.



**(36)** באיור שלפניך נתונות הפונקציות:

$$f(x) = 2e^{2x} - 7e^{-x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = 3e^x - e^{2x} - 3$$

- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים.

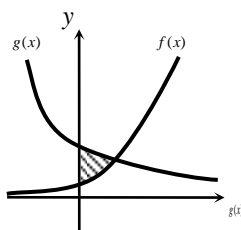


**(37)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 4e^{2x} + e^{-x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = x^2 + 2x$$

- מצא את נקודות הקיצון של כל פונקציה וקבע את סוגן.
- מעבירים ישר המחבר את נקודות הקיצון של שני הגרפים כמתואר באיור. כתוב את משוואת הישר הנ"ל (עגל תוצאות למספרים שלמים).

ג. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $y$  והישר הנ"ל.



**(38)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה:  $9 \cdot 3^x = \frac{243}{9^x}$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות:  $f(x) = 3^{x+2}$  ו-  $g(x) = 3^{5-2x}$ .

הוכח כי השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר

ה- $y$  שווה ל-  $\frac{90}{\ln 3}$ .



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$  ב.  $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5}$  ג.  $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$  ד.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2)  $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (3)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (4)  $S = \text{יח"ש} 1\frac{1}{3}$
- (5)  $S = \text{יח"ש} 10.72$
- (6)  $S = \text{יח"ש} 18.41$
- (7)  $S = \text{יח"ש} 3\frac{1}{3}$
- (8)  $S = \text{יח"ש} 0.192$
- (9)  $a = \ln 2$
- (10) א.  $A(1, -e-2)$  ב.  $y = -(e+2)x$  ג.  $S = \text{יח"ש} 4.744$
- (11) א.  $a = -2$ ,  $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$  ב.  $1.52$
- (12) א.  $A(1, 4)$ ,  $B(1\frac{1}{3}, 2.52)$ ,  $C(0, 1)$  ב.  $S = \text{יח"ש} 1.03$
- (13) א.  $y' = xe^x$  ב.  $a = 2$
- (14)  $S = \frac{e^4 - 1}{2e}$
- (15) א.  $k = 3$  ב.  $S = \text{יח"ש} 2.825$
- (16) א.  $y = (e-1)x + 1$  ב.  $y = (e-1)x + 3$  ג.  $S \sim \text{יח"ש} 3$
- (17) א.  $y = x + 1$  ב.  $S = \text{יח"ש} 2.45$
- (18) א.  $a = 3$ ,  $f(x) = e^{3x-1} + 2$ ,  $g(x) = e^{1-3x} + 2$  ב.  $S \sim \text{יח"ש} 4.54$
- (19) א.  $y = -2x + 2$  ב.  $(1, 0)$  ג.  $S \sim \text{יח"ש} 2.5$
- (20) א.  $y = e^3 x$  ב.  $S = \frac{e^3 - 2e^2 - e}{2} \sim 1.3$
- (21) א.  $y = (e-2)x + 2$  ב.  $S = \text{יח"ש} 1.5 - \frac{e}{2} \approx 0.14$

- (22) א.  $A(\ln 2 - 2, 5 - \ln 4)$  ב.  $y = \frac{5 - \ln 4}{\ln 2 - 2}x \sim y = -2.76x$  ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (23) א.  $a = 4$  ב.  $2e^2 - 4 \approx 10.78$  יח"ש ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (24) א.  $f'(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$  ב.  $S = \frac{e-1}{e}$  ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (25) א.  $S = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$  ב.  $S = \frac{32}{\ln 3}$  ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (26) א.  $(2, 81)$  ב.  $S = \frac{32}{\ln 3}$  ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (27) א.  $t = 4$  ב.  $S = \frac{225}{\ln 4}$  ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (28) א.  $k = 6$  ב.  $S = \frac{735}{32 \ln 2}$  ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (29) א.  $(-2, 1)$  ב.  $(0, 9), (0, 217)$  ג.  $S = 52 \cdot \frac{4 - \ln 3}{\ln 3}$  יח"ש
- (30) א.  $t = 3$  ב.  $S = \frac{338}{\ln 3}$  יח"ש ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (31) א.  $k = -3$  ב.  $(\ln 3, 7.2)$  ג.  $S = \ln 27$  יח"ש
- (32) א.  $f'(x) = xe^{-x}$  ב.  $k = 1, g(x) = xe^{-x} + x$  ג.  $S = 3 - \frac{3}{e^2}$  יח"ש
- (33) א.  $4 \ln 8 - 9 \frac{5}{8} \approx 1.3$  ב.  $S \sim 2.6$  ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- ג. בסעיף א' חושב ערך האינטגרל בלבד. בסעיף ב' ניתן לראות כי חלקו שלילי ולכן יש לפצל אותו כדי לקבל ערך מקסימלי.
- (34) א.  $t = \ln 3$  ב.  $S = 3.433$  יח"ש
- (35) א.  $(\ln 2, 8)$  ב.  $S = 3.433$  יח"ש
- (36) א.  $(\ln 3, -3), \left(\ln \frac{1}{3}, -2 \frac{1}{9}\right)$  ב.  $S = 13 \frac{1}{3} - 2 \ln 27 \sim 6.74$  ג.  $S = 3.433$  יח"ש
- (37) א.  $\min(-1, -1), \min\left(\ln \frac{1}{2}, 3\right)$  ב.  $y = 13x + 12$  ג.  $S \sim 3.46$  יח"ש
- (38) א.  $x = 1$  ב.  $S = 3.433$  יח"ש

## פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$

### שאלות יסודיות – אינטגרל כללי:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \left( \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx$     ב.  $\int \frac{x^2+3x-4}{x} dx$     ג.  $\int \frac{x+3}{x^2-9} dx$

### שאלות העוסקות במציאת פונקציה קדומה:

2) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

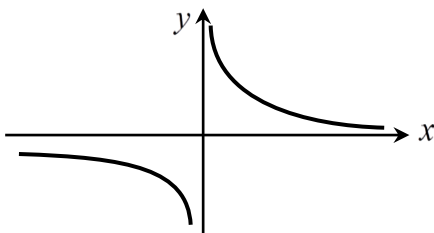
3) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$ . מצא את הפונקציה אם

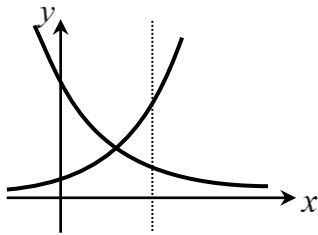
ידוע שהיא עוברת בנקודה (1, -2) ושיפועה בנקודה זו הוא 3.

### שאלות העוסקות בחישובי שטחים:

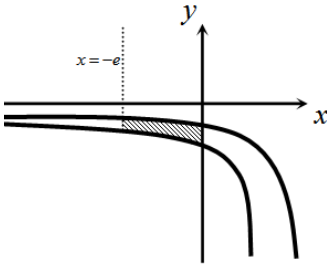
4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -1$ ,  $x = -4$  וציר ה- $x$ . ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.





- (5) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ,  $f(x) = \frac{4}{8-x}$   
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,  
הישר  $x=4$  והצירים.

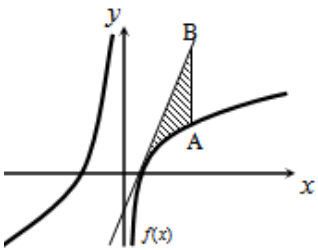


- (6) באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו-  $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$  בתחום:  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה  
שבה  $x=3$ .

- א. מצא את  $a$  וכתוב את שתי הפונקציות.  
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של  
שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x=-e$ .

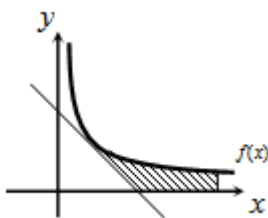


- (7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת  
החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא:  $y=18x-9$ .  
א. מצא את  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$  שחותך את  
גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק  
בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין  
לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



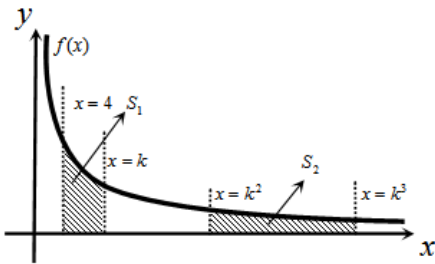
- (8) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  
שבה:  $x=2$  היא:  $y=4-x$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  
 $f(x)$  והמשיק בתחום:  $x > 0$ .

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,  
המשיק, ציר ה- $x$  והישר  $x=e^2$ .



9 באיור שלפניך נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{בתחום: } x > 0.$$

מעבירים את הישרים:  $x = k^2$ ,  $x = k^3$ ,

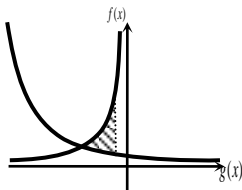
$x = 4$ ,  $x = k$  כמתואר  $x > 4$ .

א. הבע באמצעות  $k$  את

השטחים:  $S_1$  ו- $S_2$ .

ב. הראה כי ההפרש:  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$  וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצא את  $k$ .



10 נתונות הפונקציות:  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו-  $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

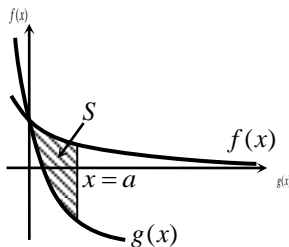
גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה

שבה  $y = 0.4$ .

א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



11 באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1) \quad \text{ו-} \quad g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$$

בתחום:  $(x \geq 0)$ .

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

ב. מעבירים ישר  $x = a$ ,  $(a > 1)$  המאונך

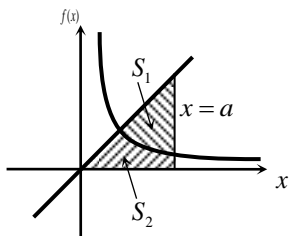
לציר ה- $x$  אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (איור).

מצא את  $a$  עבורו מתקיים:  $S = 4$ .

12 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר:  $y = x$ .

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.



מעבירים אנך לציר ה- $x$  -  $x = a$  הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים

$S_1$  ו- $S_2$  המתוארים האזור.

ב. מצא את הערך של  $a$  עבורו השטח  $S_2$

יהיה שווה ל- $0.5 + (2/3)\ln 7$ .

ג. עבור ערך ה- $a$  שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים:  $S_1 : S_2$ .

## תרגול נוסף:

**13** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 8x - \frac{k}{x}$ .

ידוע כי יש לפונקציה נקודת מינימום  $(1,1)$ .

א. מצא את  $k$  ואת הפונקציה  $f(x)$ .

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? נמק את תשובתך.

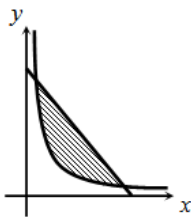
**14** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x+a}{x}$ .

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1$  הוא 6.

א. מצא את  $a$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x=e$ .

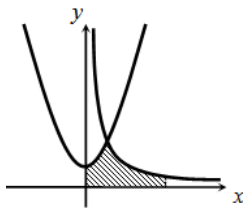


**15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{10}{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = -x + 7$$

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.



**16** באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{a}{x}$

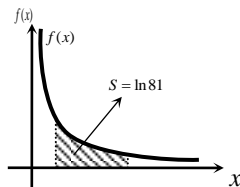
ו-  $g(x) = x^2 + 2$ . ידוע כי הגרפים נחתכים בנקודה

שבה  $x=2$ .

א. מצא את  $a$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים,

הצירים והישר  $x=e^2$ .

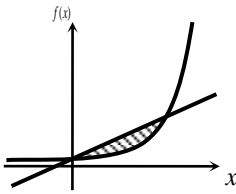


**17** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x}$ .

ידוע כי השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$

והישרים:  $x=4$  ו-  $x=4+t$  הוא  $\ln 81$ .

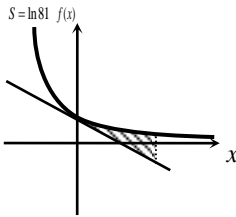
מצא את  $t$ .



**(18)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{4e-x}$

והישר:  $g(x) = \frac{3}{4e^2}x + \frac{3}{4e}$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.  
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות.



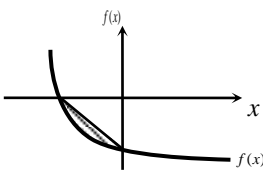
**(19)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{ax+5}$ , פרמטר  $a$ .

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  הוא  $-0.12$ .

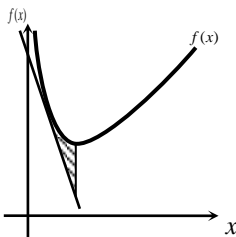
- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.  
ב. כתוב את משוואת המשיק.  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר  $x=2$ .

**(20)** גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x+5} - m$ , פרמטר  $m$ , חותך את ציר ה- $x$  בנקודה

שבה  $x = -4$ .



- א. מצא את ערך הפרמטר  $m$ .  
ב. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר שמצאת בסעיף הקודם.

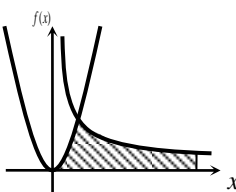


**(21)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x} + x + 5$  בתחום:  $x > 0$ .

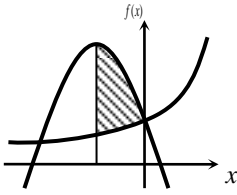
- א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1$ .  
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$  מנקודת המינימום של הפונקציה.  
הישר חותך את משוואת המשיק בנקודה A.  
ב. מצא את שיעורי הנקודה A.  
ג. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**(22)** באיור שלפניך נתונות הפונקציות:

$f(x) = 3x^2$  ו-  $g(x) = \frac{3}{x}$ .



- א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.  
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $x$  והישר:  $x = e^3$ .



**(23)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6}{6-x}$

בתחום:  $x < 0$ .

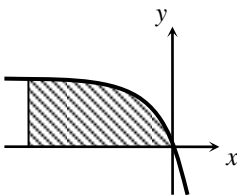
מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר

ה- $y$  מעבירים את הפרבולה:  $g(x) = -x^2 - 4x + 1$ .

א. מצא את נקודת הקדקוד של הפרבולה.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים ואנך

היוצא מנקודת הקדקוד של הפרבולה.



**(24)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:

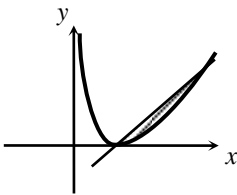
$$f(x) = \frac{8}{x-2} + k \quad \text{בתחום: } x < 0$$

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את הישר:  $y = x + 4$

בנקודה שבה:  $x = 4$ .

א. מצא את  $k$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר:  $x = -6$ .



**(25)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$

א. מצא את נקודת המינימום של הפונקציה.

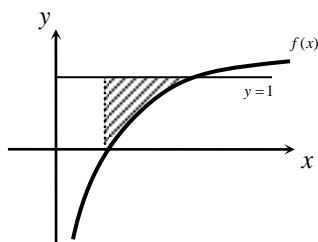
מעבירים ישר דרך נקודת המינימום של הפונקציה

והנקודה שבה  $x = 4$ .

ב. מצא את משוואת הישר.

ג. חשב את השטח המוגבל בין הישר וגרף

הפונקציה (העזר באיור).



**(26)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה:  $y = 2x - x \ln x$

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \ln x$

מעבירים ישר  $y = 1$  החותך את גרף הפונקציה

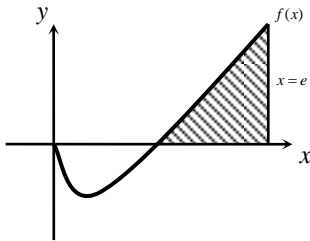
בנקודה A.

מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  מעלים אנך לישר.

ב. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

האנך והישר.





**(27) ענה על הסעיפים הבאים :**

א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה :

$$y = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) \quad \text{היא : } y' = x \ln x$$

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה :

$f(x) = x \ln x$  . מעלים את הישר  $x = e$  המאונך

לציר ה- $x$  החותך את גרף הפונקציה.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- $x$ .

**(28) ענה על הסעיפים הבאים :**

א. גזור את הפונקציה הבאה :  $y = \frac{x^3}{3} + x - x \ln x$

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות :

$$f(x) = \ln x \quad g(x) = x^2 - 1$$

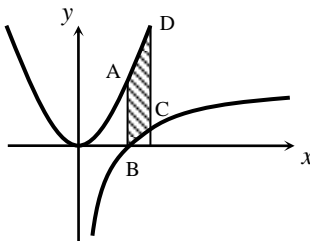
מעבירים את הישרים  $x = 1$  ו- $x = 2$  המקבילים

לציר ה- $y$ .

ישרים אלו חותכים את הגרפים של הפונקציות

בנקודות A, B, C, D בהתאמה.

ב. חשב את השטח ABCD.



**(29) ענה על הסעיפים הבאים :**

א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה :  $y = 2 \ln(x-2) + x \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$

$$\text{היא : } y' = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות :  $f(x) = \ln x$

$$\text{ו- } g(x) = \ln(x-2)$$

ב. קבע איזה מבין הגרפים I, II מתאר את  $f(x)$  ואיזה את  $g(x)$ . נמק.

ג. מצא את נקודת החיתוך של כל גרף עם

ציר ה- $x$ .

ד. מנקודת החיתוך הגדולה יותר שמצאת

בסעיף הקודם מעלים אנך לציר ה- $x$

מהנקודה D, החותך את הגרף השני בנקודה

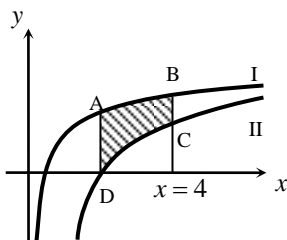
A (ראה איור).

מעבירים אנך נוסף  $x = 4$  החותך את הגרפים

בנקודות B ו-C.

העזר בסעיף א' וחשב את השטח ABCD -

הכלוא בין שני הגרפים.



## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \ln|x-3|+c \quad \text{ב. } \frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c \quad \text{ג. } 3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$$

$$(2) \quad f(x) = x^2 - \ln|x-4| + 3$$

$$(3) \quad f(x) = x^3 + \ln|x| - x - 2$$

$$(4) \quad S = \ln 4 \text{ יח"ש}$$

$$(5) \quad S = 2.17 \text{ יח"ש}$$

$$(6) \quad \text{א. } a=2, \quad f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{ב. } 1.76 \text{ יח"ש}$$

$$(7) \quad \text{א. } a=2, \quad b=-4, \quad f(x) = 7+2x-\frac{4}{x} \quad \text{ב. } x=2$$

$$\text{ג. } 11.54 \text{ יח"ש} \approx 6 + \ln 256$$

$$(8) \quad \text{א. } f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{ב. } 6-4\ln 2 \text{ יח"ש}$$

$$(9) \quad \text{א. } S_1 = 2\ln k - \ln 16, \quad S_2 = 2\ln k \quad \text{ב. } S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ג. } k=8$$

$$(10) \quad \text{א. } g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{ב. } (-2, 2) \quad \text{ג. } \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \text{ יח"ש}$$

$$(11) \quad \text{ב. } a=2$$

$$(12) \quad \text{א. } (1, 1) \quad \text{ב. } a=5 \quad \text{ג. } \frac{S_1}{S_2} = 5.955$$

$$(13) \quad \text{א. } k=8, \quad f(x) = 4x^2 - 8\ln x - 3 \quad \text{ב. } x > 0$$

ג. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $0 < x < 1$

ד. לא. הנקודה הנמוכה ביותר בתחום הגדרתה נמצאת מעל לציר ה- $x$  ולכן גם כל גרף הפונקציה.

$$(14) \quad \text{א. } a=-6 \quad \text{ב. } (2, 0) \quad \text{ג. } 3e + \ln 64 - 12 \text{ יח"ש}$$

$$(15) \quad \text{א. } (2, 5), (5, 2) \quad \text{ב. } 10.5 + 10(\ln 2 - \ln 5) \text{ יח"ש}$$

$$(16) \quad \text{א. } a=12 \quad \text{ב. } 30\frac{2}{3} - 12\ln 2 \text{ יח"ש}$$

$$(17) \quad t=8$$

$$(18) \quad \text{א. } \left(0, \frac{3}{4e}\right), \left(3e, \frac{3}{e}\right) \quad \text{ב. } 5\frac{5}{8} - \ln 64 \text{ יח"ש}$$

$$(19) \quad \text{א. } a=3, \quad f(x) = \frac{1}{3x+5} \quad \text{ב. } y = -0.12x + 0.2 \quad \text{ג. } 0.1 \text{ יח"ש}$$

$$(20) \quad \text{א. } m=2 \quad \text{ב. } y = -\frac{2}{5}x - 1\frac{3}{5} \quad \text{ג. } 4.8 - \ln 25 \approx 1.58 \text{ יח"ש}$$

21) א.  $y = -3x + 13$  ב.  $(2, 7)$  ג.  $S = \text{יח"ש} \ln 16 - 2 \approx 0.772$

22) א.  $(1, 3)$  ב.  $S = \text{יח"ש} 10$

23) א.  $(-2, 5)$  ב.  $S = \text{יח"ש} 7\frac{1}{3} - 6(\ln 8 - \ln 6) \approx 5.6$

24) א.  $k = 4$  ב.  $S = \text{יח"ש} 24 - 16 \ln 2$

25) א.  $(2, 0)$  ב.  $y = \frac{1}{2}x - 1$  ג.  $S = \text{יח"ש} 3 - \ln 16$

26) א.  $y' = 1 - \ln x$  ב.  $S = \text{יח"ש} e - 2$

27) ב.  $S = \frac{e^2 + 1}{4}$

28) א.  $y' = x^2 - \ln x$  ב.  $S = \text{יח"ש} 3\frac{1}{3} - \ln 4 \approx 1.94$

29) א.  $f(x) = I$  ,  $g(x) = II$  ב.  $(1, 0)$  ,  $(3, 0)$  ג.  $S = \text{יח"ש} 3 \ln \frac{4}{3} \approx 0.863$  ד.

## פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרלים מיידיים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה:  $\frac{m}{n} \neq -1$ .

### שאלות יסודיות – אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \int \sqrt[3]{x} dx & \text{ב. } \int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx & \text{ג. } \int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx \\
 \text{ד. } \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{ה. } \int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx & \text{ו. } \int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx \\
 \text{ז. } \int \sqrt[3]{2x-3} dx & \text{ח. } \int \sqrt[4]{5-x} dx & \text{ט. } \int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx \\
 \text{י. } \int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx & & 
 \end{array}$$

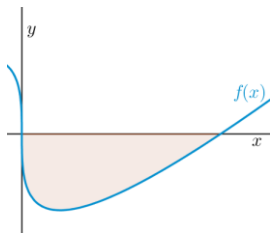
(2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx & \text{ב. } \int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx & \text{ג. } \int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx
 \end{array}$$

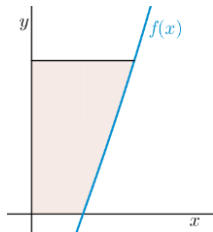
### שאלות העוסקות במציאת פונקציה קדומה:

- (3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ . ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ . מצא את הפונקציה.
- (4) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ . ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ . מצא את הפונקציה.
- (5) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ . ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ . מצא את הפונקציה.

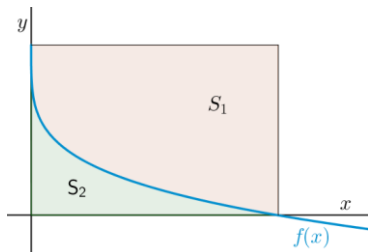
### שאלות העוסקות בחישובי שטחים:



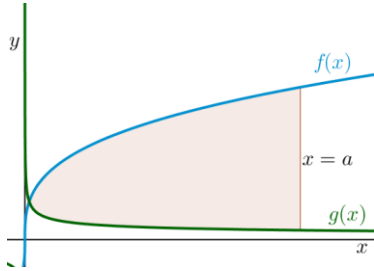
- (6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה:  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$ .  
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



- (7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .  
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. מעבירים אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4, 6)$ . חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.



- (8) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ . מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר המלבן  $ABCO$ . מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$  ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$ . מצא את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .



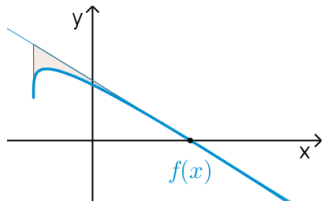
9) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום:  $x > 0$ .

ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , (פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת החיתוך שלהם ועד

לאנך הוא:  $42\frac{3}{16}$  סמ"ר. מצא את  $a$ .



10) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$

( $a$  פרמטר). ידוע כי גרף הפונקציה חותך את

ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

א. מצא את הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.

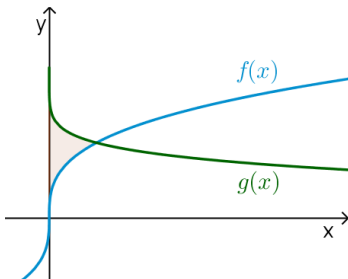
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.



11) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:

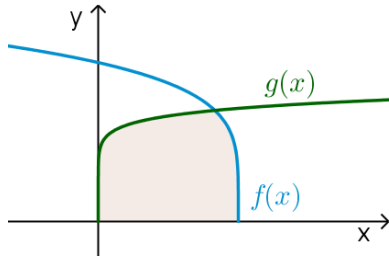
$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = 2 - \sqrt[5]{x}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

**12** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$ .

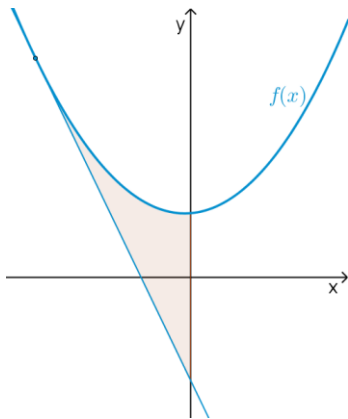
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 1.2$ .



א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה:

$$g(x) = \sqrt[10]{x} \text{ וציר ה-} x.$$

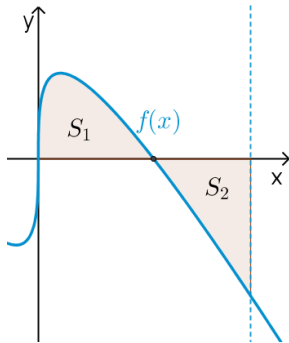


**13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף

הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



**14** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה

עם ציר ה- $x$ .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע

הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ . מעבירים ישר  $x = k$

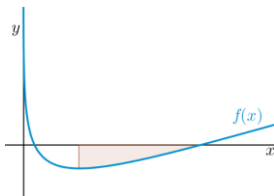
אשר יוצר את השטח  $S_2$  כמתואר.

מצא את  $k$  אם ידוע כי:  $S_1 = S_2$ .

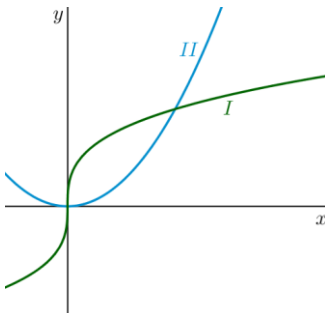
## תרגול נוסף:

**15** נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}$ .  
ידוע כי הישר  $y = 6x - 380$  משיק לגרף הפונקציה.  
מצא את הפונקציה.

**16** נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x}}$ .  
ידוע כי שיעור ה- $y$  של נקודת הקיצון של הפונקציה הוא 4.  
מצא את הפונקציה.



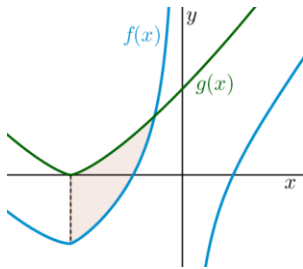
**17** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  
 $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2$   
מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים אנך לציר ה- $x$ .  
מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- $x$ .



**18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = x^2$  ו- $g(x) = 32\sqrt[3]{x}$  בתחום:  $x \geq 0$ .  
א. קבע איזה מבין הגרפים I ו-II שייך לכל פונקציה.  
ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.  
ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.



\*הערה: בתרגיל הבא יש שימוש גם באינטגרל לוגריתמי.



(19) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$

היא:  $f'(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x+2}$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי הישר:

$4y - 8x = 7$  חותך אותה כאשר:  $x = -1$ .

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$

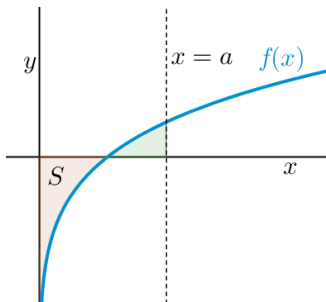
בתחום:  $x < 0$ .

מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+2)^4}$

ואף היא מסורטטת באיור.

i. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות.

ii. חשב את השטח הכלוא ביניהן והישר:  $x = -2$ .



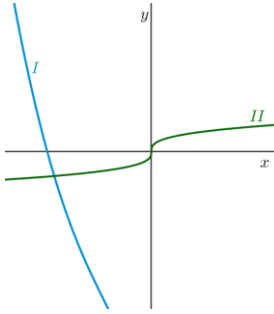
(20) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt[5]{x} + 2\sqrt[10]{x} - 3$ .

א. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ( $a$  פרמטר). מצא את הערך של  $a$  עבורו השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  בין נקודת החיתוך

שלם ועד לאנך הוא:  $S - \frac{7}{66} a^{1.2}$  כאשר  $S$

הוא השטח שמצאת בסעיף הקודם.



**21** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^3 + B}{\sqrt[4]{x}}$ ,

( $a, B$  פרמטרים טבעיים).

מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt[4]{x}$ .

ידוע כי מכפלת הפונקציות שווה לביטוי

הבא:  $f(x) \cdot g(x) = x^3 + 8$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $B$ .

מגדירים את פונקציית ההפרש הבאה:  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

ב. מצא את ערך הפרמטר  $a$  אם ידוע כי  $h(8) = 258$ .

ג. באיור שלפניך מצוירים הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

i. התאם לכל גרף את הפונקציה המתאימה: I ו-II.

ii. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .

iii. מורידים אנך לציר ה- $x$  מנקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $g(x)$ , האנך וציר ה- $x$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$     ב.  $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$     ג.  $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$
- ד.  $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$     ה.  $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$
- ו.  $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$     ז.  $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$
- ח.  $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$     ט.  $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7} + c$     י.  $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$
- (2) א.  $45\frac{1}{3}$     ב. 33.76    ג.  $18\frac{2}{3}$
- (3)  $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (4)  $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
- (5)  $f(x) = 12.5\sqrt[3]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
- (6) א.  $(0,0) ; (8,0)$     ב.  $S = 16$  יח"ש"
- (7) א.  $x > 0$     ב.  $(2,0)$
- ג.  $S = 27.2 - 6.4\sqrt{2} \approx 18.14$  יח"ש"
- (8)  $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (9) א.  $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$     ב.  $a = 8$
- (10) א.  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x$ ,  $a = 1$     ב.  $x \geq -1.2$     ג.  $(-1.2, 1.2)$
- ד.  $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$     ה.  $S = 4.56$  יח"ש"
- (11) א.  $(1,1)$     ב.  $S = \frac{11}{28}$  יח"ש"

$$f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א. (12)} \quad \text{ב. } S = \text{יח"ש} 1\frac{5}{66}$$

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א. (13)} \quad \text{ב. } S = \text{יח"ש} 4.56$$

$$(0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב. (14)} \quad \text{א. כל } x$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} - 297\frac{5}{7} \quad \text{(15)}$$

$$f(x) = 0.4\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + 8\frac{4}{15} \quad \text{(16)}$$

$$S = \text{יח"ש} 1\frac{301}{480} \sim 1.627 \quad \text{(17)}$$

$$I - g(x); \quad \Pi - f(x) \quad \text{א. (18)} \quad \text{ב. } (0,0); (8,64) \quad \text{ג. } S = \text{יח"ש} 213\frac{1}{3}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4} - 2 \quad \text{א. (19)} \quad \text{ב. i. } (-0.5, 1.28)$$

$$S = \text{יח"ש} 3 - \ln 4 \quad \text{ב. ii.}$$

$$a = \left(\frac{33}{31}\right)^{10} \quad \text{ב. (20)} \quad \text{א. } S = \text{יח"ש} \frac{23}{66}$$

$$\Pi - g(x); \quad I - f(x) \quad \text{א. i. (21)} \quad \text{ב. } a = 3 \quad \text{א. } B = 8$$

$$S = \text{יח"ש} 0.75 \quad \text{א. iii. (22)} \quad \text{ב. ii. } (1,9)$$