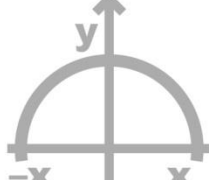


# מתמטיקה

שאלון 804

4 יחידות לימוד



## **הקדמה כללית:**

ספר התרגילים של גול הינו פרי של שנות ניסיון רבות בהוראת חומרי הלימוד ובהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי הפרקים התואמים את תכנית הלימודים הנוכחית של משרד החינוך ומכיל את כל חומר הלימוד הנדרש. תוכן הפרקים מורכב מחלק תיאורטי ותרגול. החלק התיאורטי מכיל הסברים ופתרונות מלאים בסרטונים באתר הבגרות של גול, וחלק התרגול נועד לאפשר לתלמיד לתרגל את החומר הנלמד. השאלות שמופיעות תחת הנושאים הקרויים 'תרגול נוסף' אינן פתורות בסרטונים היות והן ניתנות כבונוס למורה ולתלמיד.

הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותנו היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

**בהצלחה!**

**צוות האתר גול**

**ספר זה בנוי לפי הפרקים הבאים:**

1	מבוא לאלגברה
16	משוואות אלגבריות
27	אי-שוויונים אלגבריים
35	בעיות מילוליות
82	גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר
114	גיאומטריה אנליטית - המעגל
143	הסתברות
199	מבוא לגיאומטריה של המישור
206	גיאומטריה אוקלידית - משולשים
227	גיאומטריה אוקלידית - מרובעים
252	גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים
265	גיאומטריה אוקלידית - המעגל
287	גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון
305	גיאומטריה אוקלידית - שאלות מסכמות
323	טריגונומטריה במשולש ישר זווית
328	זהויות טריגונומטריות
338	טריגונומטריה במישור
359	חשבון דיפרנציאלי – נגזרות ומשיקים
368	חשבון דיפרנציאלי – חקירת פונקציות
457	חשבון דיפרנציאלי – הזזות ומתיחות של פונקציות
473	חשבון דיפרנציאלי – הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת
479	חשבון דיפרנציאלי – בעיות קיצון
513	חשבון אינטגרלי

כל פרק פותח בתוכן עניינים מפורט בו תוכלו להתרשם מהסידור הפנימי והנושאים הכלולים בפרק זה. סדר הצגת הנושאים בספר זה ובאתר הבגרות של גול הינו עקבי ומאפשר עבודה שוטפת במהלך הלימוד.



## תוכן העניינים:

פרק 1.....	2
מבוא לאלגברה.....	2
חזרה על סדר פעולות חשבון ומספרים מכוונים :.....	2
בסרטון זה הסבר על פעולות חשבון במספרים :.....	2
בסרטון זה הסבר על כפל וחילוק במספרים מכוונים :.....	2
חזרה על פעולות עם חזקות ושורשים :.....	3
בסרטון זה הסבר על חזקה ושורש :.....	3
בסרטון זה הסבר על סדר פעולות חשבון :.....	4
חזרה על שברים ואחוזים :.....	4
בסרטון זה הסבר על שברים :.....	4
בסרטון זה הסבר על חיבור וחיסור שברים :.....	5
בסרטון זה הסבר על כפל וחילוק שברים :.....	6
בעיות יסודיות באחוזים :.....	7
חזרה על תבניות מספר :.....	8
בסרטון זה הסבר על הצבה בתבנית מספר :.....	8
בסרטון זה הסבר על כינוס איברים :.....	8
בסרטון זה הסבר על פתיחת סוגריים :.....	9
חזרה על פירוקים ונוסחאות הכפל המקוצר :.....	9
בסרטון זה הסבר על נוסחאות כפל מקוצר :.....	9
בסרטון זה הסבר על פירוק לגורמים :.....	10
בסרטון זה הסבר על פירוק לפי נוסחאות :.....	10
בסרטון זה הסבר על פירוק הטרינום :.....	11
תשובות סופיות :.....	12

# פרק 1

## מבוא לאלגברה

### חזרה על סדר פעולות חשבון ומספרים מכוונים:

בסרטון זה הסבר על פעולות חשבון במספרים:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 2$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} 6-1 & (3) \\ 6+1 & (2) \\ -6+1 & (5) \\ -6-1 & (4) \\ -5-13+9 & (6) \end{array}$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} 5+7-23+1 & (7) \\ 5-8-12+17 & (8) \end{array}$$

בסרטון זה הסבר על כפל וחילוק במספרים מכוונים:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} -2 \cdot (-5) & (10) \\ 2 \cdot (-5) & (12) \\ (-2) \cdot 3 \cdot (-4) & (14) \\ -50 : -10 & (16) \\ 6 : -2 & (18) \\ 2 \cdot 5 & (9) \\ -2 \cdot 5 & (11) \\ (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) & (13) \\ 8 : 4 & (15) \\ -15 : 3 & (17) \end{array}$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

- (19)  $(-25):(-5)$  (20)  $(-30):3$  (21)  $-7:(-2)$   
 (22)  $\frac{32}{-4}$  (23)  $\frac{-12}{-3}$  (24)  $0:5$   
 (25)  $(-2) \cdot 0$

## חזרה על פעולות עם חזקות ושורשים:

בסרטון זה הסבר על חזקה ושורש:

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

- (26)  $2^4$  (27)  $2^6$   
 (28)  $2^3$  (29)  $(-2)^4$   
 (30)  $(-2)^3$  (31)  $-2^4$   
 (32)  $-2^3$  (33)  $(-2^4)$   
 (34)  $\sqrt{64}$  (35)  $\sqrt[3]{64}$   
 (36)  $\sqrt[5]{32}$  (37)  $\sqrt{-16}$   
 (38)  $\sqrt[4]{64}$  (39)  $\sqrt[4]{-64}$   
 (40)  $\sqrt[3]{-64}$  (41)  $-3^4 + \sqrt[3]{-8}$

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

- (42)  $\sqrt{169}$  (43)  $-4^2$   
 (44)  $(-4)^2$  (45)  $(-3)^3$   
 (46)  $\sqrt[3]{-27}$  (47)  $\sqrt[4]{625}$   
 (48)  $\sqrt[4]{-16}$  (49)  $\sqrt[5]{-32}$   
 (50)  $-(-5)^2$

## בסרטון זה הסבר על סדר פעולות חשבון:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} (51) & \sqrt{196} + 5 \cdot 2^2 - 20 : 2 \\ (52) & (-2)^4 : 2 - 10 \cdot (-2)^3 \\ (53) & -3^2 - 4[5 + 4 \cdot (7 - 2)] + \sqrt{900} \\ (54) & \sqrt{64} : (-4 + 2) - 4^2 \cdot (-3^2 + 10) \end{array}$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} (55) & \sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2 \\ (56) & 3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6} \\ (57) & (-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3 \\ (58) & -\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3 \\ (59) & -2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5 \\ (60) & \sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 \\ (61) & [6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5 \\ (62) & (8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243}) \\ (63) & \frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\} \end{array}$$

## חזרה על שברים ואחוזים:

בסרטון זה הסבר על שברים:

המירו את השברים המדומים לשברים מעורבים:

$$\begin{array}{ll} (64) & \frac{3}{2} \\ (65) & \frac{8}{5} \end{array}$$

המירו את השברים המעורבים לשברים מדומים:

$$\begin{array}{ll} (66) & 2\frac{3}{8} \\ (67) & 12\frac{2}{5} \end{array}$$

איזה שבר גדול יותר?

$$\begin{array}{lll} (68) & \frac{3}{7} \text{ או } \frac{5}{7} & (69) & \frac{3}{5} \text{ או } \frac{3}{7} & (70) & \frac{3}{4} \text{ או } \frac{4}{5} \end{array}$$

המירו את השברים העשרוניים לשברים פשוטים:

$$\begin{array}{ll} (71) & 0.3 \\ (72) & 0.02 \\ (73) & 1.012 \\ (74) & 2.75 \end{array}$$

המירו את השברים הפשוטים לשברים עשרוניים :

$\frac{12}{1000}$ (78	$\frac{3}{1000}$ (77	$\frac{1}{100}$ (76	$\frac{1}{10}$ (75
$\frac{5}{6}$ (82	$\frac{7}{20}$ (81	$\frac{3}{50}$ (80	$1\frac{12}{1000}$ (79

המירו את האחוזים לשברים פשוטים :

25% (84	50% (83
---------	---------

המירו את השברים הפשוטים לאחוזים :

$\frac{5}{20}$ (86	$\frac{4}{10}$ (85
--------------------	--------------------

המירו את השברים המדומים לשברים מעורבים :

$\frac{19}{4}$ (88	$-\frac{20}{3}$ (87
--------------------	---------------------

איזה שבר גדול יותר?

$\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$ (90	$\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$ (89
$\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$ (92	$\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$ (91

בסרטון זה הסבר על חיבור וחיסור שברים :

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$\frac{5}{2} + \frac{7}{4}$ (94	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ (93
$\frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{1}{6}$ (96	$\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{8}$ (95
$1\frac{1}{8} - \frac{11}{12}$ (98	$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{5}$ (97
$1\frac{2}{21} - \frac{3}{14} - 3$ (100	$1\frac{1}{9} - \frac{23}{27} + 2$ (99

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$ (102)	$\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ (101)
$2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$ (104)	$\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$ (103)
$3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$ (106)	$\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$ (105)
	$5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$ (107)

בסרטון זה הסבר על כפל וחילוק שברים :

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$4 \cdot \frac{2}{5}$ (109)	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ (108)
$3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{5}$ (111)	$2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}$ (110)
$\frac{2}{5} : 4$ (113)	$\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$ (112)
$2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{5}$ (115)	$6 : \frac{3}{4}$ (114)
$\left(\frac{3}{4}\right)^3$ (117)	$\frac{5}{9} : 3\frac{1}{3}$ (116)
$\frac{9}{20} \cdot 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ (119)	$\frac{3^3}{4}$ (118)

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$5\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ (121)	$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$ (120)
$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ (123)	$\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$ (122)
$3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ (125)	$\frac{5}{6} : 3$ (124)
	$8 \cdot \frac{3}{2} : \frac{12}{20}$ (126)

**בעיות יסודיות באחוזים:**

**(127)** בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.

א. כמה בנות בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

**(128)** בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.

א. כמה תלמידים בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

**(129)** מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.

א. מהו מחירו בסוף העונה?

ב. מה גודל ההנחה?

**(130)** מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.

א. מה מחירו הסופי?

ב. מה גודל ההתייקרות?

**(131)** מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.

בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

**(132)** מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.

מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

**(133)** באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים. מה אחוז הבנים בקהל?

**(134)** בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?

**(135)** מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

**(136)** מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

**137** מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?

**138** מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

## חזרה על תבניות מספר:

**בסרטון זה הסבר על הצבה בתבנית מספר:**

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$$a^5 - 3a^4 - a^3 + 7, \quad a = -1 \quad \textbf{(140)} \qquad (x+y)^3, \quad x=5, \quad y=-4 \quad \textbf{(139)}$$

$$16m^2 - 9n^2, \quad m = \frac{1}{2}, \quad n = -\frac{1}{3} \quad \textbf{(141)}$$

הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר :

$$\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2, \quad a=2, c=-2 \quad \textbf{(143)} \qquad \frac{4a^2-3b}{c}, \quad a=-1, b=2, c=-4 \quad \textbf{(142)}$$

$$(x-3)^2 + 3x^2b, \quad x=5, b=-1 \quad \textbf{(145)} \qquad a^2 + 2ab + b^2, \quad a=3, b=-5 \quad \textbf{(144)}$$

$$-x^3 - 2xy + y^4, \quad x=-2, y=-1 \quad \textbf{(146)}$$

**בסרטון זה הסבר על כינוס איברים:**

כנס איברים דומים :

$$a^5 + a^5 \quad \textbf{(148)} \qquad 5x + 3x - 12x \quad \textbf{(147)}$$

$$1 + b^2 - 2b - 3 - 2b^2 \quad \textbf{(150)} \qquad 7m + 11 - 9m - 2 \quad \textbf{(149)}$$

$$x^2y - xy + 3y^2x + 9xy - 5xy^2 \quad \textbf{(152)} \qquad 4ab - 3a^2b + 3b^2a - 5ab \quad \textbf{(151)}$$

$$10m^2n - \{3mn^2 - [m^2n - 2m]5\} \quad \textbf{(153)}$$

כנס איברים דומים :

$$5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2 \quad \textbf{(155)} \qquad 8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2 \quad \textbf{(154)}$$



**בסרטון זה הסבר על פתיחת סוגריים:**

פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

$x(x+5)$ (157	$2(x+4)$ (156
$-2(b-2x)$ (159	$7(a-3)$ (158
$\frac{2}{3}(6x-3y)$ (161	$x(x^2+3x-2)$ (160
$(3x+2y)5$ (163	$-(5y-7)$ (162
$x+5(2x-1)$ (165	$-3x(2x-y)$ (164
$(x+3)(5-x)$ (167	$(x+4)(x+5)$ (166
$(2x-5)(2x+5)$ (169	$3(x-1)(x-3)$ (168
$a(a-2b+c)$ (171	$4(3x-2)-(2x-1)(3x+5)$ (170

## חזרה על פירוקים ונוסחאות הכפל המקוצר:

**בסרטון זה הסבר על נוסחאות כפל מקוצר:**

פשט את הביטויים הבאים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

$(a+3)^2$ (173	$(x+2)^2$ (172
$\left(c+\frac{1}{4}\right)^2$ (175	$(b+1)^2$ (174
$(5y+4t)^2$ (177	$(2m+5)^2$ (176
	$(x^2y+11)^2$ (178

פשט את הביטויים הבאים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר :

- |                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
| $(5-x)^2$ <b>(180)</b>    | $(x-4)^2$ <b>(179)</b>      |
| $(2m-4c)^2$ <b>(182)</b>  | $(4x-2)^2$ <b>(181)</b>     |
| $(9-x)(9+x)$ <b>(184)</b> | $(x-7)(x+7)$ <b>(183)</b>   |
|                           | $(3x-4)(3x+4)$ <b>(185)</b> |

**בסרטון זה הסבר על פירוק לגורמים :**

פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| $3x-6$ <b>(187)</b>       | $2x-4$ <b>(186)</b>     |
| $64+8a$ <b>(189)</b>      | $80-4x$ <b>(188)</b>    |
| $x^3-x$ <b>(191)</b>      | $x^2+3x$ <b>(190)</b>   |
| $4x^3+12x^2$ <b>(193)</b> | $x^5-2x^2$ <b>(192)</b> |

**בסרטון זה הסבר על פירוק לפי נוסחאות :**

פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ושימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| $9a^2+12a+4$ <b>(195)</b>   | $x^2+6x+9$ <b>(194)</b>     |
| $x^2-16x+64$ <b>(197)</b>   | $12x^2+60x+75$ <b>(196)</b> |
| $2x^2-36x+162$ <b>(199)</b> | $a^2-10a+25$ <b>(198)</b>   |
| $x^2-16$ <b>(201)</b>       | $a^2-9$ <b>(200)</b>        |
| $100x^2-49$ <b>(203)</b>    | $81-x^2$ <b>(202)</b>       |
| $x^3-x$ <b>(205)</b>        | $49x-x^3$ <b>(204)</b>      |
| $m^2-9$ <b>(207)</b>        | $x^2-10x+25$ <b>(206)</b>   |

**בסרטון זה הסבר על פירוק הטרינום:**

**פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:**

$$3x^2 - 11x + 6 \quad \textbf{(210)}$$

$$x^2 + 5x + 4 \quad \textbf{(213)}$$

$$2x^2 + 7x - 15 \quad \textbf{(209)}$$

$$2x^2 + x - 6 \quad \textbf{(212)}$$

$$x^2 - 33x + 62 \quad \textbf{(215)}$$

$$4x^2 + 8x + 3 \quad \textbf{(208)}$$

$$6x^2 + 5x + 1 \quad \textbf{(211)}$$

$$x^2 - 8x + 15 \quad \textbf{(214)}$$

**פרק את הביטויים הבאים:**

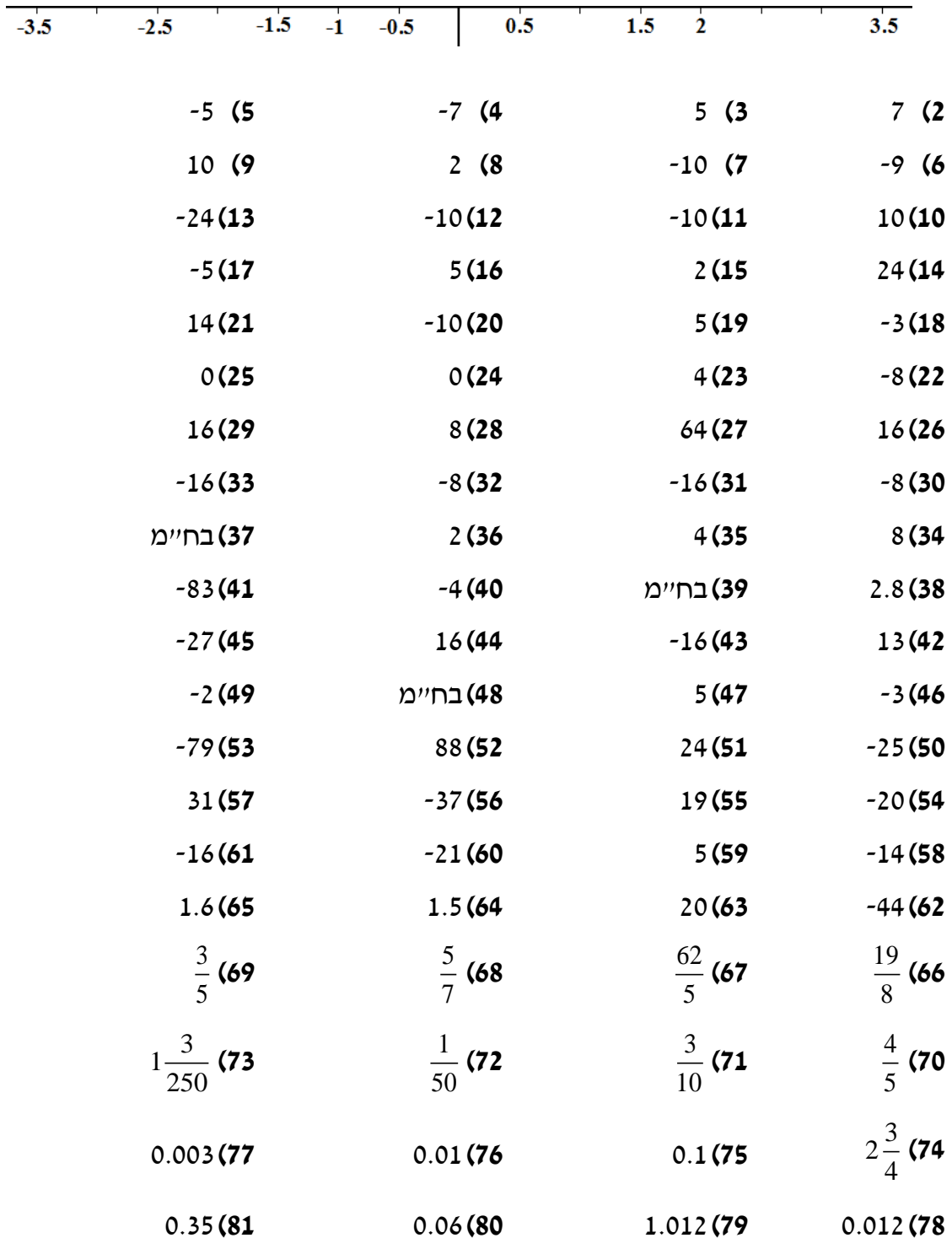
$$4x^2 + 8x + 3 \quad \textbf{(216)}$$

$$6x^2 + 5x + 1 \quad \textbf{(217)}$$

$$x^2 + 5x + 4 \quad \textbf{(218)}$$

## תשובות סופיות:

1) להלן פתרון על ציר המספרים:



40% (85	$\frac{1}{4}$ (84	$\frac{1}{2}$ (83	0.833 (82
$\frac{4}{10}$ (89	$4\frac{3}{4}$ (88	$-6\frac{2}{3}$ (87	25% (86
$1\frac{5}{8}$ (93	$\frac{7}{12}$ (92	$\frac{5}{6}$ (91	$\frac{7}{6}$ (90
$-\frac{1}{20}$ (97	$2\frac{13}{18}$ (96	5 (95	$1\frac{5}{6}$ (94
$\frac{13}{8}$ (101	$-2\frac{5}{42}$ (100	$2\frac{7}{27}$ (99	1 (98
$-\frac{1}{20}$ (105	$\frac{49}{18}$ (104	5 (103	$\frac{11}{6}$ (102
$1\frac{3}{5}$ (109	$\frac{4}{15}$ (108	$-\frac{5}{8}$ (107	$7\frac{11}{12}$ (106
$\frac{1}{10}$ (113	$\frac{4}{5}$ (112	8 (111	$2\frac{11}{12}$ (110
$\frac{27}{64}$ (117	$\frac{1}{6}$ (116	$2\frac{2}{9}$ (115	8 (114
32 (121	$\frac{8}{21}$ (120	$3\frac{1}{10}$ (119	$6\frac{3}{4}$ (118
$\frac{2}{3}$ (125	$\frac{5}{18}$ (124	$15\frac{2}{5}$ (123	$1\frac{4}{5}$ (122
.12 .ג .40 .א (128	.12 .ג .18 .א (127	20 (126	
4.9755 (131	.40 .ג .540 .א (130	.60 .ג .240 .א (129	
60% (134	88% (133	400 (132	
33.33% (137	33.33% (136	50% (135	
3 (141	4 (140	1 (139	25% (138
-71 (145	4 (144	644 (143	$\frac{1}{2}$ (142
$2m+9$ (149	$2a^5$ (148	$-4x$ (147	5 (146

$-2y^2x + 8xy + x^2y$	<b>(152)</b>	$-ab - 3a^2b + 3b^2a$	<b>(151)</b>	$-b^2 - 2b - 2$	<b>(150)</b>
$25a^2b - 22ab^2$	<b>(155)</b>	$4a^2 - a$	<b>(154)</b>	$15m^2n - 3mn^2 - 10m$	<b>(153)</b>
$7a - 21$	<b>(158)</b>	$x^2 + 5x$	<b>(157)</b>	$2x + 8$	<b>(156)</b>
$4x - 2y$	<b>(161)</b>	$x^3 + 3x^2 - 2x$	<b>(160)</b>	$-2b + 4x$	<b>(159)</b>
$-6x^2 + 3xy$	<b>(164)</b>	$15x + 10y$	<b>(163)</b>	$-5y + 7$	<b>(162)</b>
$-x^2 + 2x + 15$	<b>(167)</b>	$x^2 + 9x + 20$	<b>(166)</b>	$11x - 5$	<b>(165)</b>
$-6x^2 + 5x - 3$	<b>(170)</b>	$4x^2 - 25$	<b>(169)</b>	$3x^2 - 12x + 9$	<b>(168)</b>
$a^2 + 6a + 9$	<b>(173)</b>	$x^2 + 4x + 4$	<b>(172)</b>	$a^2 - 2ab + ac$	<b>(171)</b>
$4m^2 + 20m + 25$	<b>(176)</b>	$c^2 + c/2 + 1/16$	<b>(175)</b>	$b^2 + 2b + 1$	<b>(174)</b>
$x^2 - 8x + 16$	<b>(179)</b>	$x^4y^2 + 22x^2y + 121$	<b>(178)</b>	$25y^2 + 40yt + 16t^2$	<b>(177)</b>
$4m^2 - 16mc + 16c^2$	<b>(182)</b>	$16x^2 - 16x + 4$	<b>(181)</b>	$25 - 10x + x^2$	<b>(180)</b>
$9x^2 - 16$	<b>(185)</b>	$81 - x^2$	<b>(184)</b>	$x^2 - 49$	<b>(183)</b>
$4(20 - x)$	<b>(188)</b>	$3(x - 2)$	<b>(187)</b>	$2(x - 2)$	<b>(186)</b>
$x(x^2 - 1)$	<b>(191)</b>	$x(x + 3)$	<b>(190)</b>	$8(8 + a)$	<b>(189)</b>
$(x + 3)^2$	<b>(194)</b>	$4x^2(x + 3)$	<b>(193)</b>	$x^2(x^3 - 2)$	<b>(192)</b>
$(x - 8)^2$	<b>(197)</b>	$3(2x + 5)^2$	<b>(196)</b>	$(3a + 2)^2$	<b>(195)</b>
$(a - 3)(a + 3)$	<b>(200)</b>	$2(x - 9)^2$	<b>(199)</b>	$(a - 5)^2$	<b>(198)</b>
$(10x - 7)(10x + 7)$	<b>(203)</b>	$(9 - x)(9 + x)$	<b>(202)</b>	$(x - 4)(x + 4)$	<b>(201)</b>
$(x - 5)^2$	<b>(206)</b>	$x(x^2 - 1)$	<b>(205)</b>	$x(7 - x)(7 + x)$	<b>(204)</b>
$(2x - 3)(x + 5)$	<b>(209)</b>	$(2x + 1)(2x + 3)$	<b>(208)</b>	$(m - 3)(m + 3)$	<b>(207)</b>
$(x + 2)(2x - 3)$	<b>(212)</b>	$(3x + 1)(2x + 1)$	<b>(211)</b>	$(3x - 2)(x - 3)$	<b>(210)</b>

$$(x-2)(x-31) \quad \textbf{(215)}$$

$$(x-3)(x-5) \quad \textbf{(214)}$$

$$(x+1)(x+4) \quad \textbf{(213)}$$

$$(x+1)(x+4) \quad \textbf{(218)}$$

$$(3x+1)(2x+1) \quad \textbf{(217)}$$

$$(2x+1)(2x+3) \quad \textbf{(216)}$$

## תוכן העניינים:

17	פרק 2.....
17	משוואות.....
17	משוואה ממעלה ראשונה : .....
18	מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה : .....
19	משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון : .....
20	משוואה ממעלה שנייה : .....
20	משוואות ממעלה שלישית ומשוואות דו-ריבועיות : .....
21	משוואות עם פרמטרים : .....
22	משוואות עם שורשים : .....
22	משוואות עם ערך מוחלט : .....
23	מערכת משוואות ממעלה שנייה : .....
24	תשובות סופיות : .....



## פרק 2

# משוואות אלגבריות

### משוואה ממעלה ראשונה:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $6x + 2 = 8$	ב. $7 - 2x = 7$	ג. $2x + x = 24$
ד. $2x + 6 = 8 + x$	ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$	ו. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$
ז. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$		

(2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3(x - 1) - 4 = 2$	ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$
ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$	ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$
ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$	ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$

(3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$	ב. $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$
ג. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$	ד. $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$
ה. $\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2$	ו. $5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$

4 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 \\ \text{ב.} & \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\ \text{ג.} & \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} \\ \text{ד.} & \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\ \text{ה.} & \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} \end{array}$$

5 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} \\ \text{ב.} & \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\ \text{ג.} & \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12 \end{array}$$

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

6 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases} \end{array}$$

7 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases} & \text{ג.} & \begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases} \\ & & \text{ד.} & \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases} & \text{ה.} & \begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases} \end{array}$$

8 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

9 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

10 פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

11 פתור את המשוואות הבאות:

$$5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad \text{ב.}$$

$$6(x-2) = 2x + 5 + 4x \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 2(x-y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x-y) \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

## משוואה ממעלה שנייה:

(12) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(13) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 3$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(14) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $b$ ):

ב.  $32x^2 - 18 = 0$

א.  $x^2 - 36 = 0$

(15) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $c$ ):

ב.  $5x^2 - x = 0$

א.  $-7x^2 - 14x = 0$

(16) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $\frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18$

א.  $\frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x}$

ג.  $\frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0$

## משוואות ממעלה שלישית ומשוואות דו-ריבועיות:

(17) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

א.  $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$

ד.  $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$

ג.  $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

## משוואות עם פרמטרים:

18) פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{1}{3}(a-3x) = \frac{1}{a}(ax-3) \quad \text{ב.}$$

$$mx-3m=5x+1 \quad \text{א.}$$

$$\frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1} \quad \text{ד.} \quad (x-2a)(x-2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ג.}$$

$$\frac{x}{a^2-a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a} - \frac{2}{a^3-2a^2+a} \quad \text{ה.}$$

19) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2y = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

20) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{א.}$$

$$\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0 \quad \text{ד.}$$

$$x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ג.}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b \quad \text{ו.}$$

$$(m^2+1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ה.}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \quad \text{ז.}$$

## משוואות עם שורשים:

(21) פתור את המשוואות הבאות:

- |  |   |
|--|---|
| א. $\sqrt{4x-3} = 5$                               | ב. $\sqrt{x+2} = x$                           |
| ג. $\sqrt{3x+1} + x = 13$                          | ד. $\sqrt{2x+7} + 4 = x$                      |
| ה. $\sqrt{x-1} + 3 = x$                            | ו. $\sqrt{10x+6} + 9 = x$                     |
| ז. $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$                           | ח. $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$                     |
| ט. $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$                          | י. $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$                    |
| יא. $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$                    | יב. $\sqrt{x^2-5x+12} = 2\sqrt{6-x}$          |
| יג. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ | יד. $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$           |
| טו. $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$               | טז. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$            |
| יז. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$        | יח. $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ |
| יט. $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$      |   |

## משוואות עם ערך מוחלט:

(22) פתור את המשוואות הבאות:

- |                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| א. $ 2x-11  = 7$             | ב. $ 3x-24  = x$              |
| ג. $ 12-x  = 3x$             | ד. $2x -  8-x  = 10$          |
| ה. $ 4x-5  =  2x+13 $        | ו. $ 14-3x  = 2 x+5 $         |
| ז. $ x  + 7 =  2x $          | ח. $ x+2  + 6 =  2x-4 $       |
| ט. $ x+2  +  2x-6  =  4x+8 $ | י. $ 10-3x  -  x+4  =  2x-6 $ |

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

23) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad \text{ב.}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \text{א.}$
$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad \text{ד.}$	$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad \text{ג.}$
$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{ו.}$	$\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad \text{ה.}$
$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad \text{ח.}$	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad \text{ז.}$
$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{י.}$	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{ט.}$
$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad \text{יב.}$	$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad \text{יא.}$
$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad \text{יד.}$	$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad \text{יג.}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x=1$  ב.  $x=0$  ג.  $x=8$  ד.  $x=2$  ה.  $x=2$
- ו.  $x=-3$  ז.  $x=\frac{1}{2}$
- (2) א.  $x=3$  ב.  $x=\frac{1}{2}$  ג.  $x=2\frac{1}{4}$  ד.  $x=1$  ה.  $x=4$  ו.  $x=-1$
- (3) א.  $x=-18$  ב.  $x=-30$  ג.  $x=-1$  ד.  $x=1$  ה.  $x=-10$
- ו.  $x=-21$
- (4) א.  $x=8$  ב.  $x=-1$  ג.  $x=-3$  ד.  $x=-2$  ה.  $x=2$
- (5) א.  $x=-6$  ב.  $x=-7$  ג.  $x=-7$  ד.  $x=6, x \neq 3$
- (6) א.  $\left(4, \frac{1}{3}\right)$  ב.  $\left(-\frac{4}{5}, 9\right)$
- (7) א.  $(2, 5)$  ב.  $(4, -2)$  ג.  $(0, 1)$  ד.  $(-2, 3)$  ה.  $(-7, -10)$
- (8) א.  $(6, 5)$  ב.  $(7, 1)$  ג.  $(7, 2)$
- (9) א.  $(1, 1)$  ב.  $(-3, 1)$  ג.  $(1, 1)$
- (10) א.  $(-1, -3)$  ב.  $(2, 10)$  ג.  $(-2, 4)$
- (11) א. אין פתרון ב. אינסוף פתרונות  
ג. אין פתרון למערכת המשוואות. ד. אינסוף פתרונות
- (12) א.  $x_1=2, x_2=-5$  ב.  $x_1=2, x_2=8$  ג.  $x=\frac{2}{5}$
- ד. אין פתרון למשוואה.
- (13) א.  $x_1=0, x_2=1$  ב.  $x_1=1, x_2=1\frac{1}{4}$  ג.  $x_1=1, x_2=-10$
- (14) א.  $x=\pm 6$  ב.  $x=\pm \frac{3}{4}$
- (15) א.  $x_1=0, x_2=-2$  ב.  $x_1=0, x_2=\frac{1}{5}$
- (16) א.  $x_1=2, x_2=-1.2$  ב.  $x=5, x \neq -3$  ג.  $x_1=0, x_2=-5$



$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2} \text{ .ג} \quad x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \text{ .ב} \quad x = \pm 1 \text{ .א (17)}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2\frac{1}{2} \text{ .ד}$$

$$x = a + b \text{ .ג} \quad x = \frac{a^2 + 9}{6a}, a \neq 0 \text{ .ב} \quad m \neq 5, x = \frac{3m+1}{m-5} \text{ .א (18)}$$

$$x = a + 1 \text{ .ה} \quad x = -m \text{ .ד}$$

$$a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right) \text{ .ב} \quad m \neq 1, (m+1, -1) \text{ .א (19)}$$

$$m \neq 1, -2, (2m+1, m-2) \text{ .ד} \quad m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \text{ .ג}$$

$$b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b) \text{ .ה}$$

$$x = m-5, -2m \text{ .ג} \quad x = a-1, 3-a \text{ .ב} \quad x = m+1, m-1 \text{ .א (20)}$$

$$a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \text{ .ג} \quad x = 1, -\frac{1}{m^2+1} \text{ .ה} \quad a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \text{ .ד}$$

$$a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b} \text{ .א}$$

$$x = 5 \text{ .ה} \quad x = 9 \text{ .ד} \quad x = 8 \text{ .ג} \quad x = 2 \text{ .ב} \quad x = 7 \text{ .א (21)}$$

$$x = 5 \text{ .ו} \quad x = 4.25 \text{ .ט} \quad x = 3.75 \text{ .ח} \quad x = 0.25 \text{ .ז} \quad x = 25 \text{ .א}$$

$$x = 12 \text{ .ט} \quad x = 5 \text{ .ד} \quad x = 3 \text{ .ג} \quad x = 4, -3 \text{ .ב} \quad x = 6 \text{ .א}$$

$$x = 2 \text{ .ט} \quad x = 1 \text{ .ח} \quad x = 6 \text{ .ז} \quad x = 2, 2\frac{8}{9} \text{ .ו}$$

$$x = 9, -1\frac{1}{3} \text{ .ה} \quad x = 6 \text{ .ד} \quad x = 3 \text{ .ג} \quad x = 6, 12 \text{ .ב} \quad x = 2, 9 \text{ .א (22)}$$

$$x = 0 \text{ .ז} \quad x = 0, -12 \text{ .ט} \quad x = 12, -1\frac{1}{3} \text{ .ח} \quad x = \pm 7 \text{ .ז} \quad x = 24, \frac{4}{5} \text{ .א}$$

$$(5, -2), (-5, 2) \text{ .ד} \quad (\pm 2, \pm 1) \text{ .ג} \quad (\pm 4, -2) \text{ .ב} \quad (2, 4), (4, 2) \text{ .א (23)}$$

$$\left( 3, \frac{1}{2} \right), \left( -3, -\frac{1}{2} \right), (2, 1), (-2, -1) \text{ .א} \quad \left( -2, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{5}{11}, \frac{1}{11} \right) \text{ .ה}$$

$$(6, 5), (-5, -6) \text{ .ז} \quad (3, 6), (6, 3) \text{ .ט} \quad (5, -3) \text{ .ח} \quad (7, 4) \text{ .ז}$$

$$(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3) \text{ .ב} \quad \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \text{ .א}$$

ג.  $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$

ד.  $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$

## תוכן העניינים:

28.....	פרק 3.....
28.....	אי שוויונים.....
28 .....	אי-שוויונים ממעלה ראשונה :
29 .....	אי-שוויונים ממעלה שנייה :
29 .....	אי-שוויונים ממעלה שלישית :
30 .....	אי-שוויונים עם מנה :
30 .....	אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם :
31 .....	שאלות מסכמות – אי-שוויונים :
32 .....	תשובות סופיות :
34 .....	תחום הגדרה :
34 .....	תשובות סופיות :

## פרק 3

# אי שוויונים

### מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

### מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזרה זוגית כשיש אגף שלילי.

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$45x - 26 > 109 \quad (1)$$

$$6x > 2(3x - 1) \quad (2)$$

$$2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6) \quad (3)$$

$$(x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20 \quad (4)$$

$$\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3} \quad (5)$$

$$4(6x - 8) < 8(3x - 4) \quad (6)$$

$$\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x \quad (7)$$

$$\frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7 \quad (8)$$

## אי-שוויונים ממעלה שנייה:

פתור את אי-השוויונים הבאים :

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (10)        | $x^2 < 144$ (9)                        |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (12)        | $(x+2)(x+5) < 0$ (11)                  |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (14)  | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (13)             |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (16) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (15)           |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (18)     | $-3x^2 + 12x > 0$ (17)                 |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (20)  | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (19) |

## אי-שוויונים ממעלה שלישית:

פתור את אי-השוויונים הבאים :

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (22)           | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (21)          |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (24)             | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (23) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x-5) \leq 0$ (26) | $(x^2 + 3x + 5)(x-2) > 0$ (25)      |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (28)       | $(x^2 - x - 6)(x-1) < 0$ (27)       |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (30)          | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (29)           |

## אי-שוויונים עם מנה:

פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \frac{x-1}{3x+2} \geq -3 & \text{(32)} \\ \frac{x-1}{x^2-9} > 0 & \text{(31)} \\ \frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0 & \text{(34)} \\ \frac{1}{x^2-16} > 0 & \text{(33)} \\ \frac{1}{-3(x-1)} < 0 & \text{(36)} \\ \frac{2x-1}{x-5} \leq 0 & \text{(35)} \\ \frac{1}{x^2-5x+6} < 0 & \text{(38)} \\ \frac{x-1}{x+2} \leq 1 & \text{(37)} \\ \frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0 & \text{(40)} \\ \frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0 & \text{(39)} \end{array}$$

## אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$\begin{array}{ll} 0 < \frac{1}{x+4} < 2 & \text{(42)} \\ 3 < x+1 < 5 & \text{(41)} \\ 0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 & \text{(44)} \\ -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 & \text{(43)} \\ 6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} & \text{(46)} \\ 6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 & \text{(45)} \\ \frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 & \text{(48)} \\ -1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} & \text{(47)} \end{array}$$

## שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$x(x+5)-3x+15 \leq 2x-1-x(4-x) \quad (50) \quad x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (49)$$

$$\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (52) \quad \frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0 \quad (51)$$

$$x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (54) \quad \frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (53)$$

$$\frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (56) \quad \frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (55)$$

$$\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (58) \quad \frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (57)$$

$$\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (60) \quad \frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (59)$$

$$\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (62) \quad \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (61)$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (64) \quad x^2 > 3x+10 \cap 6 < 5x-x^2 \quad (63)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (65)$$

66 לאלו ערכי  $x$  נמצאת הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x-3}$  מעל הפונקציה  $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$  ?

## תשובות סופיות:

- |                                   |  |                                 |
|-----------------------------------|--|---------------------------------|
| $x \neq 3$ (3)                    | $x$ כל (2)                                   | $x > 3$ (1)                     |
| $x \neq 6$ (6)                    | $x < 5$ (5)                                  | $x > -2$ (4)                    |
| $-12 < x < 12$ (9)                | $x > -13$ (8)                                | $x \geq 12$ (7)                 |
| $-9 < x < 3$ (12)                 | $-5 < x < -2$ (11)                           | $x < 4, x > 8$ (10)             |
| $-4 < x < 8$ (15)                 | $x \leq 7, x \geq 11$ (14)                   | $x < -2, x > 15$ (13)           |
| $x > 5, x < 5$ (18)               | $0 < x < 4$ (17)                             | $-4 \leq x \leq 0$ (16)         |
| $1 < x < 2, x > 3$ (21)           | $x$ כל (20)                                  | $x < 3, x > 5$ (19)             |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (24) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (23) | $x > 0$ (22)                    |
| $x < -2, 1 < x < 3$ (27)          | $x \leq 1\frac{2}{3}$ (26)                   | $x > 2$ (25)                    |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (30)           | $x > -3$ (29)                                | $x \leq 0, x = 3$ (28)          |
| $x < -4, x > 4$ (33)              | $x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2}$ (32) | $-3 < x < 1, x > 3$ (31)        |
| $x > 1$ (36)                      | $\frac{1}{2} \leq x < 5$ (35)                | $2 < x < 3, x > 3$ (34)         |
| $1 \leq x \leq 6$ (39)            | $2 < x < 3$ (38)                             | $x > -2$ (37)                   |
| $x > -3\frac{1}{2}$ (42)          | $2 < x < 4$ (41)                             | $x < 2, x > 6$ (40)             |
| $-2.5 \leq x \leq 7$ (45)         | $x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3}$ (44)    | $x > 0$ (43)                    |
| $\emptyset$ (48)                  | $1 \leq x < 13$ (47)                         | $x \geq 10$ (46)                |
| $x < -2, 1 < x < 4$ (51)          | $x \leq -4$ (50)                             | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (49) |



$$-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12 \text{ (53)}$$

$$x < -1, 2 < x < 6, x > 6 \text{ (55)}$$

$$x > 3 \text{ (57)}$$

$$-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3 \text{ (59)}$$

$$x < -2, 2 < x < 4 \text{ (61)}$$

$$x \neq 4 \text{ (63)}$$

$$x \geq 7 \text{ (65)}$$

$$x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5 \text{ (52)}$$

$$x < -3, 0 < x < 2.5 \text{ (54)}$$

$$2.5 \leq x < 8, x > 8 \text{ (56)}$$

$$x < -3, 0 < x < 1, x > 4 \text{ (58)}$$

$$x > 7 \text{ (60)}$$

$$x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4 \text{ (62)}$$

$$x \neq 1 \text{ (64)}$$

$$-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3 \text{ (66)}$$

## תחום הגדרה:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{x}$       ב.  $f(x) = 2\sqrt{x-3}$

ג.  $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$       ד.  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ה.  $f(x) = \sqrt{x^2+3x-10}$       ו.  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

ז.  $f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$       ב.  $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג.  $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$       ד.  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

## תשובות סופיות:

(1) א.  $x \geq 0$       ב.  $x \geq 3$       ג.  $x \leq \frac{1}{2}$       ד.  $x > -4$       ה.  $x \geq 2$

ו.  $x \leq -5$       ז.  $-3 < x < 0, x > 3$       ח.  $x < -2, -2 < x < 1, 1 < x \leq 2$

(2) א.  $x \geq 7$       ב.  $-6 \leq x \neq -2$       ג.  $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$

ד.  $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$

## תוכן העניינים:

**פרק 4.....37**

**בעיות מילוליות.....37**

37 ..... בעיות תנועה :

37 ..... בעיות בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים :

39 ..... בעיות תנועה עם אחוזים :

39 ..... בעיות תנועה עם משפט פיתגורס :

40 ..... בעיות תנועה – מהירות מושפעת מזרמים :

40 ..... בעיות תנועה – מהירות ממוצעת :

42 ..... תשובות סופיות :

43 ..... בעיות קנייה ומכירה :

43 ..... בעיות קנייה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים :

43 ..... בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים :

44 ..... בעיות קנייה ומכירה שונות :

50 ..... תשובות סופיות :

51 ..... בעיות בהנדסת המישור :

51 ..... בעיות יסודיות במרובעים :

52 ..... בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס :

53 ..... בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא מ.פיתגורס :

54 ..... בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל מ.פיתגורס :

54 ..... בעיה במעגל – כולל אחוזים :

55 ..... תשובות סופיות :

56 ..... בעיות בהנדסת המרחב :

58 ..... תשובות סופיות :

59 ..... תירגול נוסף :

59 ..... בעיות תנועה :

64 ..... בעיות קניה ומכירה :

69 ..... בעיות בהנדסת המישור :

71 ..... בעיות בהנדסת המרחב :

74 ..... תשובות סופיות :

77 ..... תרגול מבגרויות :

77 ..... בעיות קנייה ומכירה :

78 ..... בעיות תנועה :

79 ..... בעיות הנדסת המישור :

80 ..... בעיות בהנדסת המרחב :

תשובות סופיות : ..... 81

## פרק 4

# בעיות מילוליות

### בעיות תנועה:

#### בעיות בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

- (1) מכונית נוסעת מ-A ל-B במהירות של 90 קמ"ש. בדרך חזרה נסעה המכונית במהירות של 60 קמ"ש. בסה"כ נמשכה הנסיעה הלוך וחזור 20 שעות.  
א. כמה שעות נסעה המכונית לכל כיוון?  
ב. מהי הדרך שעברה המכונית?
- (2) אוטובוס ומשאית יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B בהתאמה. מהירות האוטובוס היא 60 קמ"ש ומהירות המשאית היא 80 קמ"ש. האוטובוס הגיע ליישוב B שעה ו-40 דקות מאוחר יותר מהזמן שלקח למשאית להגיע ליישוב A.  
א. כמה זמן נסע האוטובוס וכמה זמן נסעה המשאית?  
ב. מהו המרחק בין שתי הערים?
- (3) הולכת רגל יצאה לטיול במהירות מסוימת. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיה מאותו מקום הולך רגל נוסף במהירות הגדולה ממהירותה ב-4.5 קמ"ש. הולך הרגל השיג את הולכת הרגל שעה לאחר שיצא לדרכו.  
א. מהי מהירות ההליכה של הולכת הרגל?  
ב. מהו המרחק שעברו עד שנפגשו?
- (4) שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית מעיר א' לעיר ב'. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה ומגיע לעיר ב' לאחר 5 שעות. הרוכב השני נוסע במשך השעתיים הראשונות במהירות הקטנה ב-2 קמ"ש ממהירות הרוכב הראשון. לאחר מכן הוא מגביר את מהירותו ב-14 קמ"ש ומגיע לעיר ב' שעה ו-20 דקות לפני הרוכב הראשון.  
א. באיזו מהירות נסע הרוכב הראשון?  
ב. איזו דרך עבר הרוכב השני בכל חלק?

- (5) משאית נוסעת מרחק של 245 ק"מ בכל יום במהירות קבועה. יום אחד נסעה המשאית במשך שתיים וחצי במהירות הרגילה, לאחר מכן עצרה לתדלוק במשך 24 דקות ואז המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב-70 קמ"ש ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה ליעדה שעה לפני השעה שהיא מגיעה בכל יום.
- א. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?  
ב. כמה זמן לוקח למשאית להגיע ליעדה בכל יום?
- (6) אוטובוס נוסע מעיר א' לעיר ב' הרחוקה ממנה ב-800 ק"מ. לאחר שעבר האוטובוס 135 ק"מ במהירות קבועה הוא עצר להתרעננות במשך חצי שעה. לאחר מכן המשיך האוטובוס את נסיעתו במהירות הגדולה ב-43 קמ"ש ממהירותו הקודמת עד לעיר ב'.
- סך כל הזמן שהיה האוטובוס בדרך הוא 7 שעות.
- א. מה הייתה המהירות ההתחלתית של האוטובוס?  
ב. מה היה המרחק שעבר האוטובוס אחרי ההתרעננות עד לעיר ב'?
- (7) רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ"ש. בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ"ש. באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?
- (8) המרחק בין ת"א לנצרת הוא 103 ק"מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת"א במהירות 90 קמ"ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת"א לנצרת במהירות 56 קמ"ש. באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?
- (9) משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק"מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ"ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית. מצא את מהירות המכונית.

**בעיות תנועה עם אחוזים:**

**10** מכונית נוסעת מעיר א' לעיר ב' מרחק של 480 ק"מ במהירות קבועה. בדרכה חזרה נסעה המכונית במשך שעה במהירות הקבועה. לאחר מכן עצרה להתרעננות של 36 דקות ואז הגבירה את מהירותה ב-25% ממהירותה הקודמת והגיעה בחזרה לעיר א' 24 דקות פחות מהזמן שלקח לה להגיע לעיר ב'. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?

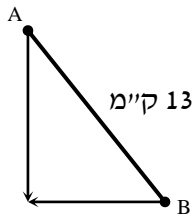
**11** רכבת משא ורכבת נוסעים יוצאות מעיר א' לעיר ב' מרחק של 360 ק"מ. מהירות רכבת הנוסעים גדולה ב-20% ממהירות רכבת המשא. רכבת הנוסעים התעכבה 40 דקות בתחנה, ולכן יצאה באיחור מהתחנה של עיר א'. עם זאת היא הגיעה לעיר ב' 20 דקות לפני רכבת המשא.  
א. מה הן המהירויות של שתי הרכבות?  
ב. מה זמן נסעה רכבת הנוסעים מעיר א' לעיר ב'?

**12** מכונית ומונית נוסעות מנקודה A לנקודה B. המכונית נוסעת במהירות קבועה ומגיעה לנקודה B כעבור 4 שעות. המונית נוסעת במשך 3 שעות המהירות הקטנה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-50% ומגיעה לנקודה B יחד עם המכונית.  
א. מהי מהירות המכונית?  
ב. מהו המרחק בין נקודה A לנקודה B?

**בעיות תנועה עם משפט פיתגורס:**

**13** שתי מכוניות יצאו מהעיר, האחת לכיוון מזרח והשנייה לכיוון צפון. לאחר שלוש שעות המרחק בין שתי המכוניות היה 300 ק"מ. מהירות מכונית אחת גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית השנייה.  
א. מהן המהירויות של שתי המכוניות?  
ב. מה היה המרחק של כל מכונית מהעיר לאחר שלוש שעות?

14 שני הולכי רגל יוצאים משני יישובים A ו-B המרוחקים זה מזה 13 ק"מ. היישוב A ממוקם בצפון מערב ביחס ליישוב B כמתואר באיור ממול.



הולך הרגל מיישוב A הולך דרומה והולך הרגל מיישוב B הולך מערבה. הולך הרגל מיישוב A יוצא שתיים לפני הולך הרגל השני. לאחר שלוש שעות מיציאתו נפגשו שני הולכי הרגל. מהירות הולך הרגל מיישוב B גדולה ב-25% ממהירות הולך הרגל השני. באיזו מהירות הלך כל אחד משני הולכי הרגל?

15 רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה. לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת. לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר) עד שהגיע חזרה לביתו.

- א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר בסך הכול 150 ק"מ.
- ב. מה הייתה מהירותו הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?

#### בעיות תנועה – מהירות מושפעת מזרמים:

16 סירה שטה בנהר שבו מהירות הזרם היא 3 קמ"ש עם כיוון זרם המים. לאחר חצי שעה החליטו אנשי הסירה לשנות את כיוונם וחזרו במשך שתיים לנקודת המוצא שלהם. מהירות הסירה במים עומדים קבועה במשך כל השיט. א. מצא את מהירות הסירה. ב. מהו המרחק הכולל ששטה הסירה?

#### בעיות תנועה – מהירות ממוצעת:

17 מכונית נוסעת 3 שעות במהירות קבועה של 140 קמ"ש ולאחר מכן במשך שתיים נוספות במהירות קבועה של 100 קמ"ש. א. מה סך הדרך שעברה המכונית? ב. מהי המהירות הממוצעת של המכונית?

18 מכונית נוסעת 4 שעות במהירות של 130 קמ"ש ולאחר מכן מספר שעות נוספות במהירות של 70 קמ"ש. ידוע כי מהירותה הממוצעת היא 110 קמ"ש. כמה שעות נסעה המכונית במהירות של 70 קמ"ש?



**19** אופנוע עובר מרחק של 200 ק"מ במהירות מסוימת. לאחר מכן מאיץ האופנוע ומגדיל את מהירותו ב-40%. הוא נוסע במהירות זו ועובר מרחק של 280 ק"מ. המהירות הממוצעת של האופנוע היא 96 קמ"ש.

א. כמה זמן נסע האופנוע?

ב. באיזו מהירות התחיל האופנוע את נסיעתו?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 8 שעות הלוך ו-12 שעות חזור      ב. 1440 ק"מ
- (2) א. אוטובוס - 6 שעות ו-40 דקות, משאית -5 שעות      ב. 400 ק"מ
- (3) א. 3 קמ"ש      ב. 7.5 קמ"ש
- (4) א. 12 קמ"ש      ב. 20 ק"מ ו-40 ק"מ
- (5) א. 50 קמ"ש      ב. 4 שעות ו-54 דקות
- (6) א. 90 קמ"ש      ב. 665 ק"מ
- (7) 8:30, 60 קמ"ש      (8) 8:50
- (9) 80 קמ"ש      (10) 80 קמ"ש
- (11) א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש      ב. 5 שעות
- (12) א. 90 קמ"ש      ב. 360 ק"מ
- (13) א. 60 קמ"ש ו-80 קמ"ש      ב. 180 ק"מ ו-240 ק"מ
- (14) א. 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש      (15) א. 50 קמ"ש      ב. 60 קמ"ש
- (16) א. 5 קמ"ש      ב. 8 קמ"ש      (17) א. 620 ק"מ      ב. 125 קמ"ש
- (18) שעתיים      (19) א. 5 שעות      ב. 80 קמ"ש

## בעיות קנייה ומכירה:

### בעיות קנייה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

- (1) מחיר כניסה למוזיאון המדע למבוגר גדול ב-15 ₪ ממחיר הכניסה לילד. יוסי נסע עם אשתו ושבעת ילדיו ליום כיף במוזיאון המדע ושילם בעבור הכניסה סכום כולל של 210 שקלים. מה המחיר לילד ומה המחיר למבוגר?
- (2) המחיר של 3 ק"ג אגסים גדול ב-3 שקלים מהמחיר של 2 ק"ג תפוחים. שרון קנתה 4 ק"ג אגסים ו-5 ק"ג תפוחים ושילמה סכום כולל של 73 שקלים. מה המחיר של ק"ג מכל סוג?
- (3) דן קנה מחברות בסכום כולל של 224 שקלים. אם ירד סכום המחברות ב-10 שקלים יוכל דן לקנות עוד 40 מחברות יותר מאשר קנה בתחילה באותו הסכום. כמה מחברות קנה ודן ומה המחיר של כל מחברת?
- (4) סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא. 5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪. באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?

### בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים:

- (5) משכורתו של אלון גדולה ב-200 ₪ ממשכורתו של רן. אם אלון יקבל תוספת של 16% למשכורתו ורן יקבל תוספת של 30% למשכורתו אז המשכורת של רן תהיה גדולה משל אלון ב-300 ₪. מהי המשכורת של כל אחד מהם?
- (6) עקב ביקוש רב מחירו של מקרר "אמנה" עלה ב-5%. לאחר שנה ירד הביקוש למקרר "אמנה" ולכן הוזל מחירו ב-10%. מחיר המקרר הסופי הוא 1,323 ₪. א. מה היה מחיר המקרר ההתחלתי? ב. כמה אחוזים ממחיר המקרר המקורי מהווה מחיר המקרר הסופי?

(7) המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20%, אך מחיר הכריות התייקר ב-20%. כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.

א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?

ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?

(8) סוחר קנה שולחנות במחיר כולל של 18,000 ₪. 10 שולחנות הוא מכר ברווח של 60% לשולחן, 20 שולחנות הוא מכר ללא רווח ואת שאר השולחנות הוא מכר בהפסד של 15% לשולחן. סה"כ הרוויח הסוחר בעסקאות אלו 450 ₪.

א. כמה שולחנות קנה הסוחר?

ב. מה המחיר ששילם הסוחר עבור כל שולחן?

### בעיות קנייה ומכירה שונות:

(9) קבלן רכש  $x$  מרצפות רצפה בסכום כולל של 22,000 ₪. 20 מרצפות נשברו בהובלה ולכן לא נמכרו. את שאר המרצפות מכר הקבלן ברווח של 50%. סה"כ הרוויח הקבלן בעסקה 8,360 ₪.

א. כמה מרצפות קנה הקבלן?

ב. כמה כסף שילם הקבלן עבור כל מרצפה?

(10) שמואל קנה מחשב ומדפסת במכרז ושילם עבורם סכום כולל של 3,600 ₪. לאחר חודש ימים, מכר שמואל את המדפסת בהפסד של 10% ואת המחשב ברווח של 40%.

ידוע כי שמואל מכר את שני המוצרים במחיר כולל של 4,740 ₪.

בכמה כסף קנה שמואל את המחשב ובכמה כסף קנה את המדפסת?

(11) חוואי קנה 15 סוסי פוני במחיר זהה לסוס. לאחר שנה מכר החוואי 3 סוסים ברווח של 35%, שניים מתו ממחלה נדירה ואת שאר הסוסים הוא מכר ללא רווח. סה"כ הפסיד החוואי 1710 ₪.

א. כמה שילם החוואי עבור כל סוס פוני?

ב. אם רק סוס אחד היה מת, האם היה החוואי מרוויח מהעסקה?

אם לא נמק, אם כן בכמה היה מרוויח?

**12** מכונת כביסה עולה 4,000 ₪. לאחר שנה עלה מחיר מכונת הכביסה ב-20% ושנה לאחר מכן עלה מחירה בעוד 20%.

- א. מה מחיר מכונת הכביסה לאחר שנתיים?
- ב. בכמה אחוזים מהמחיר המקורי התייקרה מכונת הכביסה?
- ג. בחנות למוצרי חשמל מוכרים מכונות כביסה במחיר מסוים. רפי קנה 3 מכונות כביסה למכבסה שברשותו. ידוע כי לאחר שנה חלה התייקרות ב- $p$  אחוזים וכך גם בשנה שאחריה. בתום השנתיים, החליט רפי לקנות 2 מכונות כביסה נוספות. מבדיקה שערך רפי, גילה כי המחיר הכולל ששילם בקנייה השנייה גדול פי 2 מהמחיר ששילם בקנייה הראשונה. מהו  $p$ ?

**13** המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20% אך מחיר הכריות התייקר ב-20%. כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.

- א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?
- ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?
- ג. אכסניית נוער מעוניינת לרכוש שמיכות וכריות עבור מיטות יחיד למספר חדרים (מספר זהה של שמיכות וכריות). האם כדאי להנהלת האכסניה לרכוש את השמיכות והכריות במחירים המקוריים או לאחר שנה? נמק.

**14** המחיר של 6 שרפרפים גדול ב-20 שקלים מהמחיר של כיסא. לאחר שמחיר השרפרפים התייקר ב-35% ומחיר הכיסא הוזל ב-19%, המחיר של 3 שרפרפים היה זהה למחיר של כיסא אחד.

- א. מה המחיר של כיסא והמחיר של שרפרף לפני ההוזלה וההתייקרות?
- ב. בכמה אחוזים גדול המחיר של הכיסא לאחר ההוזלה מהמחיר של השרפרף לאחר ההתייקרות?
- ג. לרשות בית ספר תקציב מסוים המיועד לרכישת כיסאות ושרפרפים. ידוע כי בית הספר מעוניין לרכוש פי 4 יותר שרפרפים מאשר כיסאות. האם כדאי לבית הספר לבצע את הרכישה במחירים המקוריים או לאחר השינויים אם ברצונו לרכוש יותר פריטים?

15) סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא. 5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪.

א. באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?

ב. בעסקה אחרת, קנה הסוחר 60 כיסאות אחרים במחיר זהה לכיסא. ידוע כי המחיר של כיסא בודד גדול ב-30% מהמחיר של כיסא בודד שרכש הסוחר בעסקה הראשונה. במהלך ההובלה נגנבו 8 כיסאות. הסוחר רוצה להרוויח ממכירת הכיסאות הנותרים לפחות 2000 ₪ בעסקה זו. נסמן ב- $p$  את אחוז ההתייקרות שבו צריך למכור הסוחר כיסא בודד. מצא את  $p$  המינימלי עבורו יעמוד הסוחר ביעדו.

16) סוכן של חברת רהיטים קנה מיטות במחיר כולל של 60,000 ₪. רבע מכמות המיטות שקנה הוא מכר ברווח של 80%. 4 מיטות הוא מכר ללא רווח כלל ואת שאר המיטות הוא מכר בהפסד של 10% למיטה. בסה"כ הרוויח הסוכן 9,500 ₪.

א. כמה מיטות קנה הסוכן?

ב. כמה שילם הסוכן עבור כל מיטה?

ג. בהנחה שהסוכן רוכש עבור החברה פעם נוספת מיטות זהה ממקום אחר, ומוכר באותם התנאים, כמה עליו לשלם עבור מיטה בודדת כדי שהרווח שלו יהיה לפחות 10,000 ₪? (עגל את תשובתך לשקלים שלמים).

17) יצרנית מוצרי חשמל מוכרת מקררים במחיר של  $x$  ₪ ליחידה. עם השקת מקרר חדש הוחלט להעלות את מחירו ב-5% עקב הביקוש הרב. בשנה הראשונה להשקתו נקנו מספר מקררים. שנה לאחר מכן ירד הביקוש ולכן מחיר המקרר הוזל ב-10% (ביחס למחירו בשנה הראשונה). כעת נמכרו מספר כפול של יחידות ביחס לשנה הקודמת.

א. מצא את המחיר המקורי של מקרר אם ידוע כי סך כל הרווחים של יצרנית המקרר בשנתיים הנ"ל זהה לסכום שהייתה מרוויחה אם היו קונים את אותו מספר המקררים שנרכשו בשנה הראשונה במחיר של 4116 ₪ ליחידה.

ב. היצרנית הרוויחה בשנה השנייה 235,200 ₪ יותר מאשר בשנה הראשונה. מצא כמה מקררים נמכרו בשנה הראשונה.

- 18)** בחנות מסוימת, מחיר כובע גדול ב-40% מהמחיר של זוג כפפות. לאחר חודש התייקר הכובע ב-50% והכפפות הוזלו ב- $p$  אחוזים.
- א. מצא את  $p$  עבורו קנייה של 16 כובעים ו-2 זוגות כפפות לפני השינויים תשתווה לקנייה של 4 כובעים ו-20 זוגות כפפות לאחר השינויים.
- ב. מצא את  $p$  עבורו ההפרש בין קניית 5 כובעים ו-4 זוגות כפפות במחירים לאחר השינויים, לבין קניית 3 כובעים ו-2 זוגות כפפות במחירים המקוריים יהיה שווה למחיר של קניית 5 זוגות כפפות במחירים המקוריים.
- ג. מצא את  $p$  עבורו המחיר של כובע אחד ו-10 זוגות כפפות לאחר השינויים יהווה 80% מהמחיר של קניית אותם הפריטים במחירים המקוריים.
- 19)** סוחר רוכש מנורות בסכום כולל של 4,000 ₪. 26 מהמנורות מכר הסוחר ברווח של 20 ₪ למנורה ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ למנורה. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 400 ₪.
- א. כמה מנורות קנה הסוחר ברכישה הראשונה ובאיזה מחיר למנורה?
- ב. בעסקה אחרת רכש הסוחר כמות מנורות מסוימת בהנחה של 20% ביחס למחיר ששילם בתחילה. הסוחר מכר אותם לבית עסק ברווח של 50% למנורה. ידוע כי הרוויח הסוחר בעסקה 3200 ₪. כמה מנורות רכש הסוחר בעסקה השנייה?
- 20)** סוחר קנה 450 תיקים. הוא מכר 150 מהם ברווח של 15% ואת השאר בהפסד של 5 שקלים. בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 600 ₪.
- א. בכמה כסף קנה הסוחר כל תיק?
- ב. אם הסוחר היה מוכר את שאר התיקים בהפסד של 2 שקלים במקום 5 שקלים, האם עדיין הוא היה מפסיד מהעסקה?
- ג. התיקים שמכר הסוחר ברווח של 15% נקנו ע"י חנות מרכזית. בחודש הראשון למכירת התיקים, מכרה החנות כל תיק ברווח של 50%. לאחר חודש העלתה החנות את המחיר של תיק ב-20% נוספים ופרסמה מבצע שבמסגרתו כל הקונה שני תיקים יקבל את השני בהנחה של 40%. חן הגיעה לחנות בחודש הראשון וקנתה שני תיקים ואחותה, שרית, הגיעה לחנות לאחר חודש וקנתה שני תיקים במסגרת המבצע. מי משתי האחיות שילמה מחיר נמוך יותר בממוצע על תיק?

**(21)** בית קפה רכש 120 ק"ג מוצרי שוקולד. 10 ק"ג נהרסו מיד עם הגעתם למקום עקב תנאי תחזוקה רעועים, 40 ק"ג נמכרו ברווח של 3 ₪ לק"ג ואת שאר הכמות מכר בית הקפה בהפסד של 2 ₪ לק"ג. בסה"כ הפסיד בית הקפה בעסקה 60 ₪.

- א. מהו המחיר של ק"ג מוצרי שוקולד?
- ב. בהזמנה נוספת רכש בית הקפה כמות מסוימת של מוצרי שוקולד ושילם עבור ק"ג אחד את המחיר שמצאת שסעיף הקודם.  
ידוע כי 10% מהכמות מכר בית הקפה ברווח של 50% לק"ג ו-20% מהכמות מכר בית הקפה בהפסד של 25%.  
מצא באיזה מחיר צריך למכור בית הקפה את הכמות הנותרת על מנת שירוויח 70% מהסכום שהוציא.

**(22)** בעל מזנון פלאפל קנה 12 ק"ג גרגירי חומס להכנת כדורי פלאפל ו-8 ק"ג קמח לאפיית פיתות. ידוע כי המחיר של 2 ק"ג גרגירי חומס גבוה ב-2 ₪ מהמחיר של 1 ק"ג קמח. בעל המזנון קיבל הנחה של 25% על כל 1 ק"ג גרגירי חומס והנחה של 20% על כל 1 ק"ג קמח. לאחר ההנחה שילם בעל המזנון 74.4 ₪ בעבור קנייתו.

- א. מה הם המחירים של 1 ק"ג גרגירי חומס ו-1 ק"ג קמח?
- ב. ידוע כי כל מנת פלאפל נמכרת במחיר זהה ולהכנתה דרושים 300 גרם גרגירי חומס ו- $x$  גרם קמח.  
בעל המזנון ניצל בצורה מלאה את כל הרכיבים שברשותו ולאחר מכירת כל המנות שהכין נשאר עם רווח של 245.6 ₪.  
מצא את  $x$  ואת המחיר של מנת פלאפל.

**(23)** בעל גלידריה קנה 30 ליטרים חלב ו-18 ק"ג אבקת שוקולד להכנת גלידות שוקולד. על כל 1 ליטר חלב קיבל 5% הנחה ועל כל 1 ק"ג אבקה קיבל 10% הנחה. ידוע כי המחיר ששילם על כל כמות החלב שרכש גדולה ב-77.7 ₪ מהמחיר ששילם על כל האבקה שרכש.

- א. מצא את המחיר של 1 ליטר חלב ו-1 ק"ג אבקת שוקולד אם ידוע כי הוא שילם 207.3 ₪ בעבור כל הקנייה.
- ב. כדי לייצר כדור שוקולד אחד דרושים 300 מ"ל חלב ו-180 גרם אבקת שוקולד. בעל הגלידריה ניצל את כל המוצרים שקנה ופרסם כי המחיר של כדור שוקולד אחד הוא 10 ₪ וכי בקניית שני כדורי שוקולד תינתן הנחה של שקל. בעל הגלידריה מכר את כל הכדורים שברשותו והרוויח סה"כ בעסקה 762.7 ₪.  
מצא כמה לקוחות קנו כדור בודד וכמה קנו שני כדורים.



**24) סוכן כלי כתיבה רכש בקנייה מרוכזת 40 חבילות עטים ו-60 חבילות עפרונות.**

**חבילת עטים מכילה 12 עטים וחבילת עפרונות מכילה 10 עפרונות.**

**הסוכן קיבל הנחה של 10% לעט ו-15% הנחה לעפרון. בסה"כ שילם הסוכן**

**3102 ₪. ידוע כי אילולא היה מקבל הסוכן את ההנחות, אז המחיר הכולל**

**שהיה נדרש לשלם עבור כל העטים היה גדול פי 4.8 מהמחיר שהיה משלם**

**עבור כל העפרונות.**

**א. מצא מה המחירים המקוריים של עט בודד ושל עפרון בודד.**

**ב. חנות "כותבים בכיף" קנתה כמות מסוימת של עטים ועפרונות מהסוכן**

**והכינה מארזים לתחילת שנה שכל אחד מכיל 2 עטים ו-3 עפרונות. הסוכן**

**מכר לחנות את העפרונות והעטים במחירים המקוריים שלהם ואילו**

**החנות מכרה את המארזים במחיר הגדול ב-40% מעלות ההכנה שלהם.**

**מצא כמה עפרונות וכמה עטים רכשה החנות מהסוכן אם ידוע כי הרוויחה**

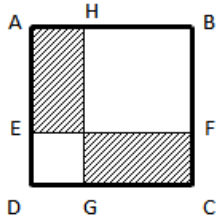
**מעסקה זו (לאחר שמכרה את כל המארזים שהכינה) סה"כ 72 ₪.**

## תשובות סופיות:

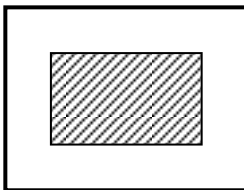
- (1) 20 ש"ח ו-35 (2) 7 ש"ח ו-9
- (3) 16 ב-14 ש"ח (4) 50 ש"ח
- (5) 4000 ש"ח ו-3800 ש"ח (6) א. 1,400 ש"ח ב. 94.5%
- (7) א. 100 ש"ח ב. 144 ש"ח (8) א. 60 שולחנות ב. 300 ש"ח
- (9) א. 250 מרצפות ב. 88 ש"ח ג. 156,000 (10) מחשב - 3000 ש"ח, מדפסת - 600 ש"ח
- (11) א. 1800 ש"ח ב. היה מרוויח 90 ש"ח (12) א. 5760 ש"ח ב. 44% ג. 73.2%
- (13) א. 100 ש"ח ב. 144 ש"ח ג. כדאי לקנות לאחר שנה, ללא תלות במספר החדרים
- (14) א. 100 ש"ח ו-20 ש"ח ב. ב-200% (פי 3) ג. במחירים המקוריים
- (15) א. 50 ש"ח ב. 74.5%
- (16) א. 12 מיטות ב. 5,000 ש"ח
- ג. המחיר המדויק הוא: 5263.15 ש"ח ולכן נעגל ונדרוש: 5264 ש"ח למיטה
- (17) א. 1400 ש"ח  $x =$  ב. 200 יחידות (18) א. 20% ב. 82.5% ג. 29.8%
- (19) א. 50 נורות ב-80 ש"ח למנורה ב. 100 מנורות (20) א. 40 ש"ח ב. לא ג. שרית (66.24 ש"ח)
- (21) א. 4 ש"ח ב. 8 ש"ח
- (22) א. 1 ק"ג גרגירי חומוס - 4 ש"ח, 1 ק"ג קמח - 6 ש"ח ב. 200 גרם  $x =$ , מנת פלאפל - 8 ש"ח
- (23) א. 1 ליטר חלב - 5 ש"ח, 1 ק"ג אבקה - 4 ש"ח ב. 30 קנו שני כדורים ו-40 קנו כדור בודד
- (24) א. עט - 6 ש"ח. עפרון - 1 ש"ח ב. 12 מארזים ולכן 24 עטים ו-36 עפרונות

## בעיות בהנדסת המישור:

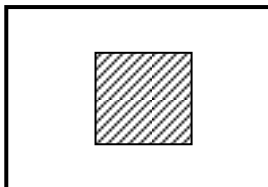
### בעיות יסודיות במרובעים:



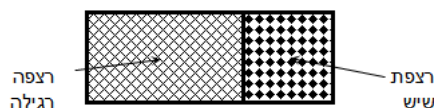
- (1) המרובע ABCD הוא ריבוע (ראה איור).  
הקטע EF מקביל לצלעות הריבוע ומחלק את הצלעות AD ו-BC באופן כזה כך ש-DE ו-CF מהוות 30% מצלע הריבוע. הקטע GH מקביל לצלעות AD ו-BC ומרחקו מהצלע AD הוא 2 ס"מ.  
ידוע שסכום השטחים של המלבנים המקווקים מהווה 50% מסכום שטחי המלבנים הלבנים.  
מצא את אורך צלע הריבוע.



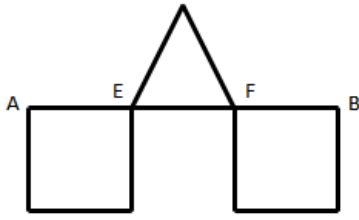
- (2) היקף חלקה מלבנית הוא 30 ק"מ. רוצים לבנות בניין מלבני (המקווקו באיור) במרכז החלקה ששטחו הכולל הוא 10 קמ"ר.  
ידוע ששטח הבניין מהווה 20% משטח החלקה.  
מצא את מידות החלקה.



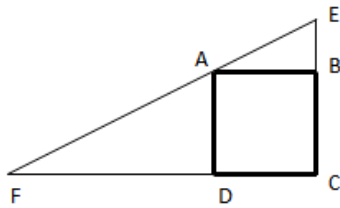
- (3) במרכז חלקה מלבנית שצלע אחת שלה גדולה ב-10 ק"מ מהצלע הסמוכה לה בונים בניין ריבועי (המקווקו באיור). ידוע כי אורך הצלע שלו היא שליש מאורך הצלע הקטנה של החלקה. מחיר קמ"ר אחד משטח הבניין הוא 1000 ₪ ומחיר קמ"ר אחד משטח החלקה הוא 100 ₪.  
קבלן בניה שילם עבור כל השטח סכום כולל של 60,000 ₪.  
מצא את מידות החלקה.



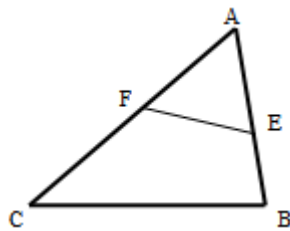
- (4) לרפי מטבח מלבני שמידותיו הם:  $12 \times 18$  מטרים. רפי מחלק את המטבח לשני מלבנים כך ששטח אחד גדול פי 2 מהשטח של השני. רפי רוצה לרצף את השטח הקטן ברצפת שיש יוקרתית (השטח הימני) לעומת השטח הגדול שאותו ירצף רפי ברצפה רגילה (השטח השמאלי).  
ידוע שהמחיר של מ"ר אחד מהרצפה הרגילה הוא 60% מהמחיר של מ"ר אחד מרצפת השיש היוקרתית. רפי השקיע בריצוף המבטח סכום כולל של 3168 ₪. כמה עולה מ"ר מכל סוג?



- (5) בעיות במרובעים ובמשולשים ללא משפט פיתגורס:  
על הקטע AB מקצים את הנקודות E ו-F כך ששלושת  
הקטעים EF, AE ו-BF שווים. על הקטעים AE ו-BF  
בונים ריבועים ועל הקטע EF בונים משולש שווה שוקיים.  
ידוע כי הגובה במשולש שווה לאורך הבסיס EF  
וכי סכום שטחי שני המרובעים והמשולש הוא 90 סמ"ר.  
מצא את אורך צלע הריבוע.

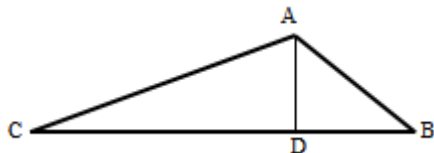


- (6) נתון ריבוע ABCD. בונים משולש ישר זווית EFC כך ש-E ו-F הן נקודות על  
המשכי הצלעות BC ו-DC של הריבוע בהתאמה.  
הנקודה A נמצאת על יתר המשולש EF.  
הקטע BE מהווה 50% מצלע הריבוע והקטע DF  
גדול פי 2 מצלע הריבוע. ידוע כי שטח המשולש  
EFC הוא 81 סמ"ר.  
מצא את אורך צלע הריבוע.



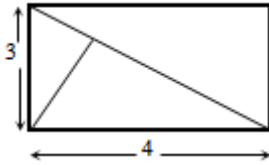
- (7) הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC של המשולש ABC.  
ידוע כי שטח המשולש AEF הוא 22 סמ"ר.  
שטח המרובע BCFE מהווה 60% משטח המשולש ABC.  
א. מצא את שטח המרובע BCFE.  
ב. מצא את שטח המשולש ABC.

### בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס:



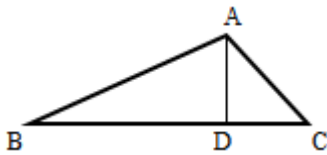
- (8) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC המחלק אותו לשני משולשים  
ADC ו-ABD כך שמתקיים:  $S_{ADC} = 2S_{ABD}$ .  
א. נתון שאורך הקטע BD הוא 12 ס"מ.  
מצא את אורך הקטע CD.  
ב. נתון שאורך הצלע AC הוא 25 ס"מ.  
חשב את  $S_{ACD}$ .

9 במלבן שצלעותיו הן 3 ו-4 ס"מ מעבירים אלכסון ומעלים לו גובה מהקדקוד התחתון לו.



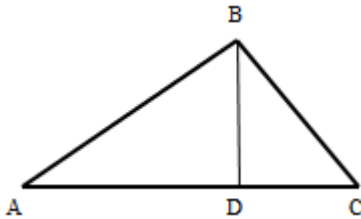
- מצא את אורך האלכסון.
- מצא את אורך הגובה.
- מצא את אורכי שני הקטעים שהגובה מחלק את האלכסון.

10 במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 4.5 מהקטע CD. אורך הצלע AB הוא 13 ס"מ ואורך הצלע AC הוא  $5\frac{2}{3}$  ס"מ.



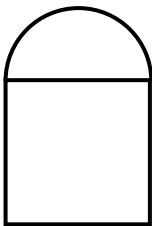
- מצא את האורכים BD ו-CD.
- מצא את אורך הגובה AD.
- חשב את שטח המשולש ABC.

11 BD הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC ( $\angle B = 90^\circ$ ).

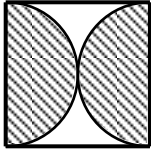


- היתר AC גדול ב-25% מהניצב AB.
- ידוע כי אורך הניצב BC הוא 18 ס"מ.
- מצא את אורכי הניצב AB והיתר AC.
- מהם האורכים AD ו-DC?

### בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס:



- 12 בבניין של רפי השכן יש חלון מרכזי המורכב ממלבן וחצי עיגול. ידוע כי בסיס החלון קטן פי 2 מגובה המלבן. שטח החלון הכולל הוא  $200 + 12.5\pi$ .
- מצא את מידות המלבן.
  - מצא את היקף החלון.



13) בריבוע שלפניך חסומים שני חצאי עיגולים הפוכים זה לזה. ידוע כי סכום ההיקפים של שני החצאים יחדיו הוא  $10\pi$ .

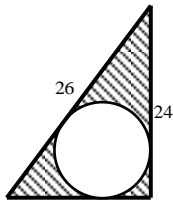
א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא את סכום השטחים של שני חצאי העיגולים (השטח המקווקו).

ii. מצא את השטח הכלוא בין העיגולים והריבוע (השטח הלבן).

### בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס:



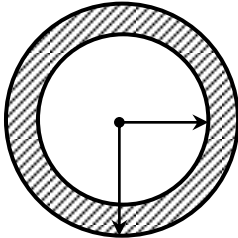
14) באיור שלפניך מתואר משולש ישר זווית שבתוכו כלוא עיגול. ידוע כי אורך היתר במשולש הוא 26 ס"מ וכי אורך הניצב האנכי הוא 24 ס"מ.

א. מצא את אורך הניצב השני.

ב. שטח המעגל הוא  $25\pi$ . מצא את רדיוס המעגל.

ג. מצא את השטח הכלוא בין המשולש למעגל (השטח המקווקו).

### בעיה במעגל – כולל אחוזים:

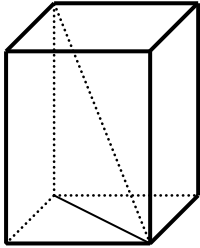


15) באיור שלפניך מתוארת טבעת המורכבת משני מעגלים בעלי אותו מרכז ששטחה הוא  $63\pi$ . ידוע כי רדיוס המעגל הפנימי קטן ב-25% מרדיוס המעגל החיצוני. מצא את הרדיוסים של שני המעגלים.

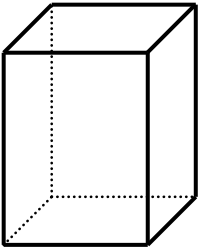
## תשובות סופיות:

- (1) 24 ס"מ
- (2) 10 ס"מ ו-5 ס"מ
- (3) 15 ק"מ ו-25 ק"מ
- (4) 20 נ"מ ו-12 נ"מ
- (5) 6 ס"מ
- (6) 6 ס"מ
- (7) א.  $S = 33$  ב.  $S = 55$
- (8) א. 24 ס"מ ב.  $S_{ADC} = 84$
- (9) א. 5 ס"מ ב. 2.4 ס"מ ג. 3.2 ס"מ ו-1.8 ס"מ
- (10) א. 12 ס"מ ו- $2\frac{2}{3}$  ס"מ ב. 5 ס"מ ג.  $S = 36\frac{2}{3}$
- (11) א. 24 ס"מ ו-30 ס"מ ב. 19.2 ס"מ ו-10.8 ס"מ
- (12) א. 10 ס"מ ו-20 ס"מ ב.  $P = 50 + 5\pi = 65.7$
- (13) א. 10 ס"מ ב. 1.  $S = 25\pi$  2.  $S = 100 - 25\pi = 21.4$
- (14) א. 10 ס"מ ב. 5 ס"מ ג.  $S = 120 - 25\pi = 41.4$
- (15) 9 ו-12

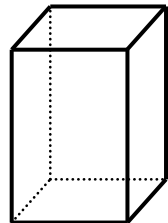
## בעיות בהנדסת המרחב:



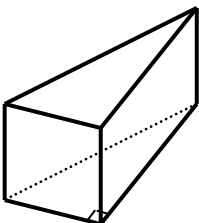
- (1) נתונה תיבה שבסיסה מלבן.  
ידוע כי אורך צלע אחת של בסיס התיבה קטנה ב- 25% מהצלע הסמוכה לה וכי גובה התיבה גדול פי 3 מהצלע הגדולה.  
אורך אלכסון הבסיס הוא 10 ס"מ.  
א. מצא את מידות בסיס התיבה.  
ב. מצא את נפח התיבה.  
ג. חשב את אורך אלכסון התיבה.



- (2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן וגובהה הוא 10 ס"מ. ידוע כי נפח התיבה הוא 280 סמ"ק וכי שטח הפנים שלה הוא 276 סמ"ר.  
א. מצא את מידות בסיס התיבה.  
ב. מה יהיה אורך אלכסון התיבה?

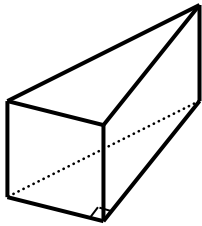


- (3) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן. ידוע כי צלע אחת של המלבן גדולה ב-50% מהצלע הסמוכה לה. כמו כן גובה התיבה גדול ב-50% מצלע המלבן הגדולה. סכום ארבעת הגבהים של התיבה גדול ב-32 ס"מ מהיקף בסיס המלבן.  
א. מצא את מידות מלבן הבסיס של התיבה.  
ב. חשב את שטח המעטפת של התיבה.  
ג. חשב את נפח התיבה.

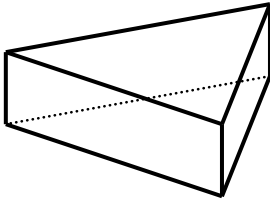


- (4) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית. ידוע כי אורך היתר במשולש הבסיס הוא 17 ס"מ. גובה המנסרה שווה לאורך ניצב המשולש הקטן. ניצב השני של המשולש גדול ב-7 ס"מ מהניצב השני.  
א. חשב אורכי הניצבים ואת גובה המנסרה.  
ב. חשב את נפח המנסרה.

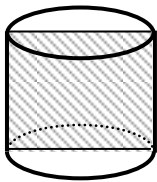




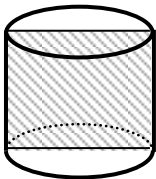
- (5) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית. הניצב הגדול, גדול ב- 4 ס"מ מהניצב קטן, וקטן ב- 4 ס"מ מאורך היתר. נפח המנסרה הוא 2880 סמ"ק.
- מצא את מידות משולש הבסיס.
  - מצא את גובה המנסרה.
  - מצא את שטח המעטפת של המנסרה.



- (6) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים. ידוע כי שטח הפאה הבנויה על מקצוע הבסיס של המשולש מהווה 80% משטח הפאה הסמוכה לה. כמו כן ידוע כי אורך השוק במשולש בסיס גדול ב- 4 ס"מ מאורך הבסיס במשולש זה. אורך גובה המנסרה הוא 4 ס"מ.
- מצא את מידות משולש הבסיס.
  - מה יהיה שטח המעטפת של המנסרה?
  - מה יהיה סכום כל מקצועות המנסרה?



- (7) שטח החתך הצירי של גליל הוא 30 סמ"ר. רדיוס הגליל וגובהו מקיימים:  $2h - 3r = 1$ .
- מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
  - חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.
  - חשב את נפח הגליל.



- (8) נתון גליל שרדיוסו הוא 4 ס"מ. מעבירים חתך צירי בגליל. ידוע כי היקף המלבן של החתך הצירי גדול פי 4 מאורך גובה הגליל.
- ענה על השאלות הבאות:
    - מצא את גובה הגליל.
    - איזה מרובע הוא המלבן של החתך הצירי?
  - חשב את שטח הפנים של הגליל.
  - חשב את נפח הגליל.

## תשובות סופיות:

(1) א. 6 ס"מ ו-8 ס"מ ב.  $V = 1152$  ג. 26 ס"מ

(2) א. 4 ס"מ ו-7 ס"מ ב.  $\sqrt{165} = 12.84$  ג. 12.84 ס"מ

(3) א.  $8 \times 12 \times 18$  ס"מ ב.  $S = 720$  ג.  $V = 1728$

(4) א. 8 ס"מ, 8 ס"מ ו-15 ס"מ ב.  $V = 480$

(5) א. 12 ס"מ, 16 ס"מ ו-20 ס"מ ב. 30 ס"מ ג.  $S = 1440$

(6) א. 16 ס"מ ו-20 ס"מ ב.  $S = 224$  ג. 124 ס"מ

(7) א.  $r = 3, h = 5$  ב.  $S = 9\pi$  ג.  $V = 45\pi$

(8) א.i. 8 ס"מ א.ii. ריבוע ב.  $S = 96\pi$  ג.  $V = 128\pi$

## תירגול נוסף:

### בעיות תנועה:

- (1) רוכב אופניים נוסע מעיר א' לעיר ב' במהירות של 20 קמ"ש. שלוש שעות אחרי יוצא מאותו מקום רוכב אופנוע במהירות של 80 קמ"ש. רוכב האופנוע הגיע לעיר ב' שלוש שעות לפני רוכב האופניים.
  - א. כמה שעות נסע רוכב האופניים?
  - ב. מהו המרחק בין שתי הערים?
- (2) גלעד ורוני יוצאים בו זמנית משני ישובים A ו-B בהתאמה והולכים זה לקראת זה במהירות קבועה. מהירות ההליכה של גלעד היא 4 קמ"ש ומהירותו של רוני היא 6 קמ"ש. ידוע כי רוני הגיעה ליישוב A 4 שעות לפני שגלעד הגיע ליישוב B.
  - א. מהו המרחק בין שני היישובים?
  - ב. כמה זמן הלך כל אחד מהם?
- (3) שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית משני ישובים A ו-B זה לקראת זה. מהירות רוכב אחד גדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו של הרוכב השני. הרוכב המהיר הגיע ליעדו לאחר 3 שעות בעוד הרוכב השני הגיע רק אחרי 5 שעות.
  - א. מה המהירויות של שני רוכבי האופניים?
  - ב. מהו המרחק שנסעו?
- (4) שתי מכוניות נסעו יחד לטיול מהעיר לכפר. המכונית הראשונה נסעה במהירות קבועה והגיעה לכפר לאחר 8 שעות. המכונית השנייה נסעה במשך שתיים במהירות הקטנה ממהירות המכונית הראשונה ב-10 קמ"ש, לאחר מכן היא עצרה להתרעננות במשך 40 דקות וחזרה לנסיעה במהירות הגדולה ב-54 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה. המכונית השנייה הגיעה לכפר שתיים לפני המכונית הראשונה.
  - א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?
  - ב. מהו המרחק בין העיר לכפר?

- (5) שני רוכבי אופנים המרוחקים זה מזה במרחק של 80 ק"מ יצאו בו זמנית זה לקראת זה. מהירות רוכב אחד גדולה ב-2 קמ"ש ממהירות הרוכב השני. לאחר שעתיים של רכיבה המרחק בניהם היה 12 ק"מ.  
א. באיזו מהירות רכב כל רוכב?  
ב. האם לאחר עוד 20 דקות הם ייפגשו?
- (6) שתי מכוניות הנמצאות במרחק של 700 ק"מ יצאו בו זמנית זו לקראת זו. מכונית אחת מהירה מהשנייה ב-15 קמ"ש. לאחר שלוש שעות היה מרחק בניהן 325 ק"מ.  
א. באיזו מהירות נסעו שתי המכוניות?  
ב. האם לאחר עוד 20 דקות שתי המכוניות תפגשנה?
- (7) רוכב אופניים והולך רגל יצאו ב-10:00 מנקודה A לנקודה B. מהירות ההליכה של הולך הרגל היא 7 קמ"ש ומהירותו של רוכב האופניים היא 16 קמ"ש. רוכב האופניים הגיע לנקודה B לאחר שלוש וחצי שעות מזמן יציאתם.  
א. באיזה שעה היה המרחק בניהם 27 ק"מ?  
ב. מהו המרחק בין A ל-B?  
ג. לאחר כמה זמן הגיע הולך הרגל לנקודה B?
- (8) אופנוע יוצא מעיר א' לכיוון מערב במהירות של 50 קמ"ש. לאחר שעתיים יוצאת מכונית מעיר ב' הממוקמת מזרחה מעיר א' במרחק של 40 ק"מ אחרי האופנוע. מהירות המכונית היא 120 קמ"ש.  
א. לאחר כמה זמן השיגה המכונית את רוכב האופנוע מזמן יציאתה?  
ב. איזה מרחק נסע רוכב האופנוע עד שהשיגה אותו המכונית?
- (9) מטוס טס מידי שבוע מיעד א' ליעד ב' המרוחק ממנו 5,000 ק"מ במהירות קבועה. שבוע אחד טס המטוס במשך שעתיים במהירות הרגילה. לאחר מכן האט את מהירותו ב-300 קמ"ש ולאחר כשעתיים האיץ בחזרה והגביר את מהירותו ב-700 קמ"ש. המטוס הגיע ליעד ב' 15 דקות מוקדם יותר מאשר הגיע בכל שבוע. באיזו מהירות טס המטוס בכל שבוע?

- 10** שתי מכוניות יוצאות מעיר א' לכיוון עיר ב' הנמצאת במרחק של 560 ק"מ ממנה. מכונית אחת נסעה במהירות קבועה במשך כל הדרך. המכונית השנייה נסעה במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה במשך שתיים וחצי. לאחר מכן היא עצרה למשך חצי שעה ואז המשיכה בנסיעתה במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירותה הקודמת. בסה"כ הגיעה המכונית השנייה לעיר ב' שעה לפני שהגיעה המכונית הראשונה.
- א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?  
ב. כמה זמן נסעה המכונית השנייה מעיר א' לעיר ב'?
- 11** מכונית נסעה מעיר א' לעיר ב' המרוחקת ממנה 760 ק"מ במהירות מסוימת. בדרכה חזור היא נסעה במשך שתיים במהירות זו, לאחר מכן עצרה לתדלוק וארוחת צהריים במשך שעה ואז המשיכה בדרכה במהירות הגדולה ממהירותה הקודמת ב-19 קמ"ש. בסה"כ המכונית הגיעה לעיר א' באותו הזמן שהגיעה לעיר ב'.
- א. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?  
ב. כמה זמן נסעה המכונית מעיר לעיר?
- 12** רוכב אופניים יצא לדרך במהירות קבועה. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיו ומאותה הנקודה רוכב אופניים נוסף שמהירותו גדולה ממהירות הרוכב הראשון ב-6 קמ"ש. הרוכב השני השיג את הראשון במרחק של 70 ק"מ מנקודת המוצא שלהם.
- א. באיזו מהירות נסעו שני רוכבי האופניים?  
ב. כמה זמן היה הרוכב הראשון על הדרך עד שהשיגו הרוכב השני?
- 13** מכונית יוצאת מעיר א' לעיר ב' המרוחקת ממנה 360 ק"מ. לאחר שתיים יוצאת מכונית נוספת בעקבותיה. מהירות המכונית השנייה גדולה ב-30 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה. שתי המכוניות הגיעו לעיר ב' יחד.
- א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה?  
ב. כמה זמן נסעה המכונית השנייה?
- 14** המרחק בין שתי ערים הוא 800 ק"מ. בשעה 8:00 יצאה מכונית מעיר אחת לכיוון השנייה. לאחר כשעה יצאה מהעיר השנייה מכונית נוספת כלפי המכונית הראשונה במהירות הגדולה ב-20 קמ"ש ממהירותה. המכוניות נפגשו באמצע הדרך.
- א. באיזה שעה נפגשו המכוניות?  
ב. באיזו מהירות נסעה כל מכונית?

**15** המרחק בין שתי ערים הוא 920 ק"מ. בשעה 6:00 יוצאת משאית סחורה מעיר א' לכיוון עיר ב'. לאחר 46 דקות יוצא אוטובוס מעיר ב' לכיוון עיר א'. מהירות האוטובוס גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המשאית. שני הרכבים נפגשו באמצע הדרך.

א. באיזו שעה נפגשו האוטובוס והמשאית?

ב. באיזו מהירות נסע האוטובוס?

**16** מכונית ומשאית יוצאות בו זמנית משני מקומות שהמרחק ביניהם הוא 570 ק"מ. המכונית והמשאית נפגשו לאחר 3 שעות. ידוע כי בזמן שהמכונית עוברת מרחק של 300 ק"מ, המשאית עוברת מרחק של 270 ק"מ.

א. באיזו מהירות נסעה המכונית?

ב. איזה מרחק נסעה המשאית עד לנקודת פגישתן?

**17** שתי מכוניות נוסעות זו לקראת זו משני קצוות של כביש מהיר שאורכו הוא 880 ק"מ.

ידוע כי בזמן שמכונית אחת עוברת מרחק של 264 ק"מ, המכונית השנייה עוברת 528 ק"מ. המכונית המהירה הגיעה לקצה הכביש 5 שעות לפני שהמכונית האיטית הגיעה לקצה הכביש השני.

א. באילו מהירויות נסעו שתי המכוניות?

ב. כמה זמן נסעה המכונית האיטית עד שהגיעה לקצה הכביש?

**18** אופנוע ומשאית יצאו יחד מעיר א' לכיוון עיר ב' הרחוקה ממנה ב-240 ק"מ. מהירות האופנוע גדולה ב-15 קמ"ש ממהירות המשאית. במהלך הדרך האופנוע עצר ל-48 דקות של התרעננות ולכן הגיע יחד עם המשאית לעיר ב'.

א. באיזו מהירות נסע האופנוע?

ב. כמה זמן לקח למשאית להגיע לעיר ב'?

**19** מכונית נוסעת מעיר A לעיר C מרחק של 360 ק"מ ועוברת דרך עיר B הנמצאת בין שתי הערים. המכונית נוסעת במהירות קבועה מעיר A עד לעיר B ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-20% וממשיכה עד שמגיעה לעיר C. ידוע כי זמן הנסיעה של המכונית מעיר A ל-B הוא 3 שעות וזמן הנסיעה מעיר B ל-C הוא שתיים וחצי.

א. מצא את המהירות של המכונית בשני חלקי הדרך.

ב. הראה כי העיר B נמצאת בדיוק באמצע הדרך בין שתי הערים A ו-C.

**(20)** משאית מביאה סחורה מידי יום מיישוב א' ליישוב ב' המרוחק ממנו 630 ק"מ. המשאית נוסעת במהירות קבועה בכל יום. יום אחד נסעה המשאית במהירות הנמוכה ממהירותה הרגילה ב-20%. לאחר 3 שעות ראה נהג המשאית כי הוא עומד לאחר, ולכן הגביר את מהירותו ב-21 קמ"ש ממהירותו הנוכחית. המשאית הגיעה ליעדה בדיוק באותו הזמן שהיא מגיעה בכל יום. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?

**(21)** רוכב אופניים הנמצא במרחק של 140 ק"מ מזרחה מהעיר יוצא בשעה 9:00 לכיוון העיר. לאחר 45 דקות יוצא מהעיר רוכב אופניים נוסף שמהירותו קטנה ממהירות הרוכב הראשון ב-20 קמ"ש ונוסע לכיוון דרום. לאחר שעתיים נוספות היה המרחק בין שני רוכבי האופניים 50 ק"מ.  
א. מצא את מהירות רוכב האופניים הראשון אם ידוע כי היא קטנה מ-40.1 קמ"ש.  
ב. באיזה מרחק היה רוכב האופניים השני מהעיר כאשר הגיע הרוכב הראשון לעיר?

**(22)** אופנוע יוצא מהעיר בשעה 7:00 דרומה. לאחר שעה יוצאת מכונית מהעיר לכיוון מזרח. מהירות האופנוע היא 50 קמ"ש ומהירות המכונית היא 100 קמ"ש. לאחר פרק זמן מסוים המרחק בין המכונית לאופנוע הוא 250 ק"מ.  
א. באיזו שעה המרחק בין המכונית והאופנוע הוא 250 ק"מ?  
ב. באיזה מרחק הייתה המכונית מהעיר כאשר היא הייתה במרחק של 250 ק"מ מהאופנוע?

**(23)** מהירות סירה במים עומדים גדולה פי 4 ממהירות זרם הנהר. סירה שטה בנהר שאורכו 30 ק"מ מתחילתו ועד סופו. הסירה שטה את כל הנהר הלך וחזור במשך 8 שעות.  
א. באיזו מהירות תשוט הסירה במים עומדים?  
ב. כמה זמן שטה הסירה בכל כיוון?

**(24)** שתי סירות שמהירותן במים עומדים זהה יוצאות מאותה נקודה בנהר, האחת לכיוון צפון והשנייה לכיוון דרום. מהירות הזרם בנהר היא 20 קמ"ש לכיוון צפון. לאחר 4 שעות היה המרחק בין שתי הסירות 240 ק"מ.  
א. באיזו מהירות שטות הסירות במים עומדים?  
ב. לאחר 4 שעות, פי כמה היה גדול המרחק של הסירה ששטה צפונה מהמרחק של הסירה השנייה?

**25** שלושה נערים יצאו לשייט בסירת מנוע בעלת מהירות קבועה. במשך שעה הם שטו בנהר שקט. לאחר מכן עקב רוחות חזקות נוצר זרם בנהר שמהירותו היא 2 קמ"ש לכיוון המסלול של הנערים. לאחר שעה נוספת השתנו הרוחות ומהירות הזרם נשארה 2 קמ"ש, אך נגד כיוון השייט שלהם. הנערים שטו בתנאים אלו במשך שעה. בסה"כ עברו הנערים בשלוש שעות אלו מרחק של 18 ק"מ.

- א. באיזו מהירות משיט המנוע את הסירה במים עומדים?
- ב. מהו המרחק שעברה הסירה בכל שעה?

**26** מכונית נוסעת במהירות ממוצעת של 84 קמ"ש. את נסיעתה התחילה במהירות מסוימת ולאחר שלוש שעות האיצה ב-20 קמ"ש והמשיכה כך עוד 7 שעות.

- א. באיזו מהירות נסעה המכונית בהתחלה?
- ב. איזה מרחק עברה המכונית?

**27** מכונית נוסעת במהירות ממוצעת של 80 קמ"ש מרחק של 480 ק"מ. את החלק הראשון של הנסיעה היא נסעה במהירות מסוימת ולאחר 4 שעות האטה את מהירותה ב-30 קמ"ש.

- א. באיזו מהירות נסעה המכונית בכל חלק של הנסיעה?
- ב. פי כמה גדולה הדרך שעברה המכונית ב-4 השעות הראשונות לעומת שאר הדרך הנותרת?

**28** אופנוע עובר במשך 5 שעות מרחק של 350 ק"מ. לאחר מכן מגביר נהג האופנוע את מהירותו ונוסע במשך פרק זמן מסוים מרחק של 450 ק"מ. המהירות הממוצעת של האופנוע בכל זמן נסיעתו היא 80 קמ"ש.

- א. כמה זמן נסע האופנוע לאחר שהגביר את מהירותו?
- ב. בכמה קמ"ש הגביר נהג האופנוע את מהירותו?

### בעיות קניה ומכירה:

**29** סוחר קנה 80 תמונות. 20 תמונות הוא מכר ברווח של 30 ₪ לתמונה ואת שאר התמונות הוא מכר ב-30 ₪ לתמונה. בסה"כ הסוחר לא הרוויח ולא הפסיד בעסקה. א. באיזה מחיר קנה הסוחר את התמונות? ב. כמה שילם הסוחר על כל התמונות?



- (30)** סוחר קנה 120 ק"ג שוקולד. 10 ק"ג נהרסו לסוחר מיד עם קנייתו, 40 ק"ג הוא מכר ברווח של 3 ₪ לק"ג ואת שאר הכמות הוא מכר בהפסד של 2 ₪ לק"ג. בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 60 ₪. כמה שילם הסוחר בעבור ק"ג שוקולד?
- (31)** סוחר קנה ספרים במחיר של 60 ₪ לספר. 40 מהספרים הוא מכר במחיר של 100 ₪ לספר ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ לספר. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1300 ₪. כמה ספרים קנה הסוחר?
- (32)** סוחר קנה דבש במחיר של 3 ₪ לק"ג. 30 ק"ג מהדבש הוא מכר ברווח של שקל אחד לק"ג ואת השאר הוא מכר בהפסד של שקל אחד לק"ג. בסה"כ הסוחר לא הרוויח ולא הפסיד בעסקה. כמה ק"ג דבש קנה הסוחר?
- (33)** סוחר קנה כיסאות ב-7,200 ₪. הסוחר השקיע 1,000 ₪ בשיפוץ כל הכיסאות ואז מכר אותם. 20 כיסאות הוא מכר ברווח של 70 ₪ לכיסא. את שאר הכיסאות הוא מכר בהפסד של 15 ₪ לכיסא. הסוחר הפסיד בעסקה 650 ₪.  
א. כמה כיסאות קנה הסוחר?  
ב. כמה שילם הסוחר בעבור כל כיסא?
- (34)** חנווני קנה בקבוקי חלב ב-300 ₪. 4 בקבוקי חלב נשפכו לו. את שאר הבקבוקים מכר החנווני ברווח של שקל אחד לבקבוק. בסה"כ הרוויח החנווני 36 שקלים. כמה בקבוקים קנה החנווני וכמה שילם בעבור כל בקבוק?
- (35)** סוחר קנה עציצים ב-800 ₪. תוך שבוע 8 מהעציצים נבלו והסוחר לא מכר אותם. את שאר העציצים מכר הסוחר ברווח של 10 ₪ לעציץ. סה"כ הפסיד הסוחר 200 ₪ בעסקה. כמה עציצים קנה הסוחר וכמה שילם על כל עציץ?
- (36)** סוחר קנה נורות בסכום כולל של 4,000 ₪. 26 מהנורות מכר הסוחר ברווח של 20 ₪ לנורה ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ לנורה. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 400 ₪. כמה נורות קנה הסוחר ובאיזה מחיר לנורה?
- (37)** מחיר של עט גדול ב-2 שקלים ממחיר של עפרון. ידוע כי המחיר של שני עפרונות ושלושה עטים הוא 26 שקלים. כמה עולה עט וכמה עולה עפרון?

- (38)** מחיר כניסה לפארק המים לילד קטן פי 2 ממחיר הכניסה למבוגר.  
דור נסע עם שלושת ילדיו לפארק המים ושילם סה"כ 200 שקלים.  
מצא את מחיר הכניסה לילד.
- (39)** מחיר מחשב גדול פי 5 מהמחיר של מדפסת.  
חברת S&S Production קנתה 40 מחשבים ו-8 מדפסות במחיר כולל של 16,640 ₪.  
מה המחיר של מחשב ומה המחיר של מדפסת?
- (40)** המחיר של 5 ק"ג תפוחים גדול ב-34 שקלים מהמחיר של 3 ק"ג ענבים.  
רפי קנה 10 ק"ג מכל סוג ושילם בסך הכול 260 שקלים.  
מה המחיר של ק"ג ענבים ושל ק"ג תפוחים?
- (41)** המחיר של שלושה עטים קטן ב-5 שקלים מהמחיר של 8 עפרונות. שני קנתה 10 עפרונות ו-4 עטים ונכחה לראות כי המחיר של כל העפרונות גדול ב-4 שקלים מהמחיר של כל העטים שקנתה. מה המחיר של עט אחד ועפרון אחד?
- (42)** המחיר של 7 חתיכות פוליגל שווה למחיר של 9 משטחי בריסטול.  
חנה הגנת קנתה לגן שלה 5 משטחי פוליגל ו-3 משטחי בריסטול ושילמה סכום כולל של 66 שקלים. כמה עולה משטח בריסטול?
- (43)** סוחר קנה טלוויזיות ומכשירי DVD. המחיר ששילם הסוחר בעבור טלוויזיה גדול ב-500 שקלים מהמחיר ששילם בעבור מכשיר DVD. כמות מכשירי ה-DVD שקנה הסוחר גדולה ב-6 מכמות הטלוויזיות שהוא קנה.  
הסוחר שילם בעבור כל הטלוויזיות 9,600 שקלים ובעבור כל מכשירי ה-DVD 5,400 שקלים.  
א. כמה שילם הסוחר בעבור טלוויזיה ועבור DVD.  
ב. כמה טלוויזיות קנה הסוחר?
- (44)** סוחר קנה מחשבים ומדפסות. המחיר ששילם הסוחר בעבור מדפסת קטן ב-2,400 שקלים מהמחיר ששילם בעבור מחשב. הסוחר קנה 7 מדפסות יותר מאשר המחשבים. הסוחר שילם בעבור כל המחשבים סכום כולל של 18,000 ₪ ובעבור כל המדפסות 7,800 ₪.  
א. כמה שילם הסוחר בעבור מחשב?  
ב. כמה מדפסות קנה הסוחר?

**45** סוחר קנה 70 ק"ג עגבניות במחיר של 3 ₪ לק"ג. 15 ק"ג התקלקלו לו ולכן לא יכול היה למכור אותם. את שאר העגבניות הוא מכר במחיר של 5 ₪ לק"ג.

א. האם הסוחר הרוויח או הפסיד בעסקה?

ב. כמה הרוויח הסוחר בעסקה?

**46** מחיר כיסא נמוך ב-300 ₪ ממחיר שולחן. אם מחיר הכיסא יוזל ב-20% ומחיר השולחן יתייקר ב-20% אז המחיר של פינת אוכל המכילה שולחן ו-6 כיסאות יהיה 1,560 ₪. מה המחיר של כיסא ומה המחיר של שולחן?

**47** ענה על השאלות הבאות :

א. מחירו של מוצר עלה ב-20% ולאחר שנתיים עלה שוב בעוד 20%.

האם ניתן לומר שמחיר המוצר עלה בשנתיים ב-40%?

ב. מכונת כביסה עולה 4,000 ₪. לאחר שנה עלה מחיר מכונת הכביסה

ב-20% ועוד שנה לאחר מכן שוב עלה מחירה בעוד 20%.

i. מה מחיר מכונת הכביסה לאחר שנתיים?

ii. בכמה אחוזים מהמחיר המקורי התייקרה מכונת הכביסה?

**48** משכורתה של סיון נמוכה ב-5% ממשכורתה של גלית. אם שתיהן תקבלנה

העלאה של 20% למשכורתן אז גלית תשתכר ב-330 ₪ יותר מסיון.

בכמה שקלים משתכרות גלית וסיון?

**49** מחירו של מוצר א' גדול ב-20 שקלים ממחירו של מוצר ב'.

מוצר א' התייקר ב-5% ומוצר ב' התייקר ב-50%. המחיר הכולל של שני

המוצרים לאחר ההתייקרות גדול ב-25% מהמחיר המקורי של שני המוצרים.

מה המחיר של כל מוצר?

**50** ענה על השאלות הבאות :

א. מחיר מוצר א' גדול ב-40% מהמחיר של מוצר ב'. מוצר א' התייקר

ב-30%.

בכמה אחוזים מוצר ב' צריך להתייקר כדי שמחיריהם יהיו זהים?

ב. מחיר כובע גדול ב-40% מהמחיר של זוג כפפות.

מחיר הכובע התייקר ב-30% וכעת מחירו הוא 91 ₪.

i. בכמה אחוזים יש לייקר את עלות הכפפות כדי שהם יהיו זהים

למחיר הכובע החדש?

ii. מה היה מחיר הכובע המקורי?

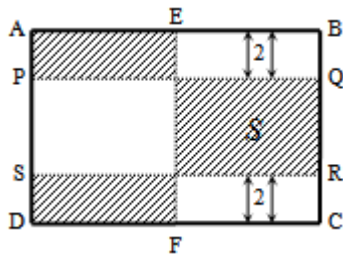
**51** המחיר של ק"ג בננות ו-2 ק"ג אפרסקים הוא 28 ₪. עקב בצורת קשה התייקרו המחירים של כל הפירות ב-40% וכעת מחיר של ק"ג אפרסקים גדול ב-2.8 שקלים מהמחיר של ק"ג בננות.  
מה המחיר של ק"ג בננות ושל ק"ג אפרסקים?

**52** ירקן רכש 70 ק"ג עגבניות במחיר של 3 ₪ לק"ג. 15 ק"ג התקלקלו ולכן לא מכר אותם. את שאר העגבניות הוא מכר במחיר של 5 ₪ לק"ג.  
א. האם הירקן הרוויח או הפסיד בעסקה?  
ב. כמה הרוויח הירקן בעסקה?  
ג. בקנייה נוספת רוצה הירקן להכניס 60% יותר מהסכום שיוציא. ידוע כי גם בקנייה זו ק"ג עגבניות עולה 3 ₪, 15 ק"ג התקלקלו ולא נמכרו ואת השאר מכר הירקן ב-5 ₪ לק"ג.  
מצא כמה ק"ג עגבניות צריך הירקן לרכוש על מנת לעמוד ביעדו.

**53** המחיר של 3 מקלדת ו-5 עכברים הוא 490 ₪. לאחר חצי שנה חנות המחשבים יצאה למבצע והכריזה כי כל המקלדות בהנחה מיוחדת של 50% וכל העכברים בהנחה של 10%. כעת ניתן לקנות 4 עכברים ו-8 מקלדות במחיר של 500 ₪.  
א. מה היו המחירים של מקלדת ושל עכבר לפני ההנחה?  
ב. מה הם המחירים של מקלדת ושל עכבר לאחר ההנחה?  
ג. בכמה אחוזים גדול המחיר הראשוני של מקלדת מהמחיר הראשוני של עכבר?

**54** המחיר של 6 שרפרפים גדול ב-20 שקלים מהמחיר של כיסא. לאחר שמחיר השרפרפים התייקר ב-35% ומחיר הכיסא הוזל ב-19%, המחיר של 3 שרפרפים היה זהה למחיר של כיסא אחד.  
א. מה המחיר של כיסא והמחיר של שרפרף לפני ההוזלה וההתייקרות?  
ב. פי כמה גדול המחיר המקורי של הכיסא מהמחיר המקורי של השרפרף?

**בעיות בהנדסת המישור:**

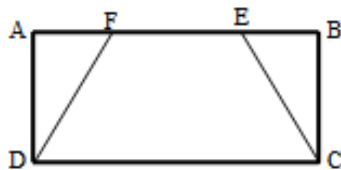


55 הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו-CD של המלבן ABCD. הנקודות Q, P, R ו-S יוצרות קטעים המקבילים לצלעות המלבן AB ו-CD ומרחקן מהם הוא 2 ס"מ (ראה איור). ידוע כי הצלע AB גדולה ב-10 ס"מ מהצלע AD של המלבן ABCD.

א. מצא את מידות המלבן ABCD אם ידוע כי שטח המלבן המסומן הוא:  $S = 240$ .

ב. כמה אחוזים משטח המלבן ABCD הם השטחים המקווקים שבאיור?

56 הנקודות E ו-F נמצאות על הצלע AB של המלבן ABCD כך שהמרחק של כל נקודה מהקדקוד הסמוך לה הוא 2 ס"מ. ידוע כי הצלע AB גדולה ב-2 ס"מ מהצלע AD וכי השטח של שני המשולשים AFD ו-CBE יחד הוא 16 סמ"ר.



א. מצא את מידות המלבן.

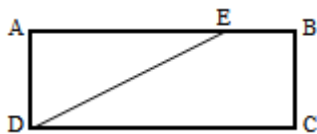
ב. ענה על השאלות הבאות:

i. חשב את שטח המלבן ABCD.

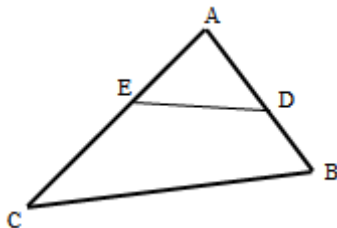
ii. חשב את שטח הטרפז DFEC.

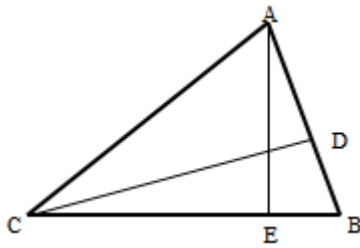
iii. כמה אחוזים משטח המלבן ABCD מהווה שטח הטרפז?

57 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ABCD כך שנוצרים משולש ADE וטרפז BCDE. ידוע כי הצלע AB גדולה ב-5.5 ס"מ מהצלע AD במלבן. מרחק הנקודה E מהקדקוד A הוא 7 ס"מ וידוע כי שטח המשולש ADE קטן ב-65% משטח הטרפז BCDE. מצא את מידות המלבן ABCD.



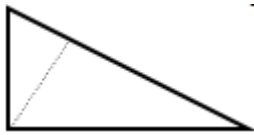
58 הנקודה E נמצאת על הצלע AB והנקודה D נמצאת על הצלע AC של המשולש ABC. שטח המרובע BDCE הוא 15 סמ"ר והשטח ADE הוא 40% משטח המשולש ABC. מצא את השטחים:  $S_{ABC}$ ,  $S_{ADE}$ .





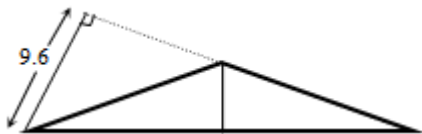
- 59 מורידים גבהים לצלעות AB ו-BC במשולש ABC שחותכים אותן בנקודות D ו-E בהתאמה. נתון:  $BC=13$ ,  $BD=5$ . שטח משולש זה הוא 52 סמ"ר.  
א. מצא את אורך הגובה AE.  
ב. מצא את אורך הגובה CD.  
ג. מצא את אורך הצלע AB.

- 60 אחד מהניצבים במשולש ישר זווית קטן מהשני ב-25%. שטח המשולש הוא 96 סמ"ר.

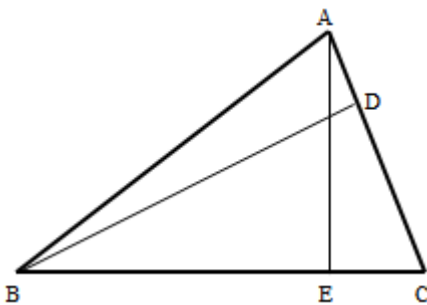


- א. מצא את אורכי הניצבים.  
ב. מצא את אורך היתר.  
ג. מצא את אורך הגובה ליתר.

- 61 במשולש שווה שוקיים שבו זווית הראש היא זווית קהה (ראה איור) אורך חוצה זווית הראש הוא 6 ס"מ ואורך הגובה לשוק הוא 9.6 ס"מ.



- א. מצא את אורך הבסיס.  
ב. מצא את אורך השוק.  
ג. מצא את שטח המשולש.

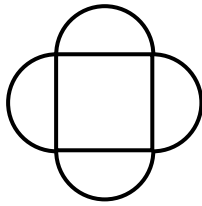


- 62 BD ו-AE הם גבהים לצלעות AC ו-BC בהתאמה במשולש ABC. ידוע כי אורך הגובה AE הוא 8 ס"מ. E מקצה על הצלע BC שני קטעים CE ו-BE כך ש-BE גדול פי 1.5 מ-CE. שטח המשולש ABC הוא 60 סמ"ר. חשב את אורכי הקטעים BE ו-CE.  
א. חשב את אורך הצלע AC.  
ב. חשב את הגובה BD.

- 63 במשולש ישר הזווית  $\angle B = 90^\circ$  ABC הנקודה E נמצאת על הניצב BC כך



- שאורך הקטע BE גדול פי 2 מהניצב AB. ידוע כי אורך היתר AC הוא 15.6 ס"מ וכי הוא גדול פי 6.5 מהקטע CE.  
מצא את אורכי הניצבים AB ו-BC.  
העזר בשטחי המשולשים ABC ו-AE ו-ACE.  
וחשב את שטח המשולש ACE.



64 באיור שלפניך נתון ריבוע. בונים על כל צלע של הריבוע חצי עיגול.

ידוע כי היקף הצורה הכולל הוא  $12\pi$ .

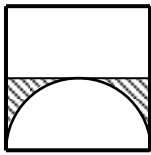
א. מצא את אורך צלע הריבוע.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא את שטח הריבוע.

ii. מצא את סכום השטחים של כל ארבעת חצאי העיגולים.

iii. מה השטח הכולל של כל הצורה.



65 חצי עיגול כלוא בתוך ריבוע כמתואר באיור.

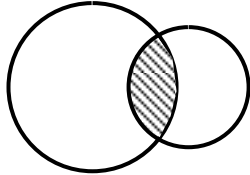
מקדקוד העיגול מעבירים קטע המקביל לצלעות

הריבוע כך שנוצר השטח המקווקו.

ידוע כי השטח המקווקו הוא  $98 - \frac{49}{2}\pi$ .

א. מצא את רדיוס העיגול.

ב. חשב את שטח הריבוע.



66 באיור שלפניך נתונים שני עיגולים החותכים זה את זה כך שנוצר שטח

המשותף להם. ידוע כי גודל השטח הנ"ל הוא  $17\pi$  (השטח המקווקו)

ושטח כל הצורה הוא  $100\pi$ .

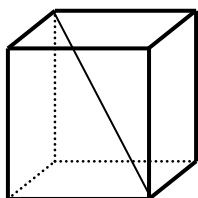
כמו כן, ידוע כי רדיוס העיגול השמאלי (הגדול)

גדול ב-50% מרדיוס העיגול הימני (הקטן).

א. מצא את הרדיוסים של שני העיגולים.

ב. פי כמה יהיה גדול שטח העיגול הגדול משטח העיגול הקטן?

### בעיות בהנדסת המרחב:



67 נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה ב-3 ס"מ

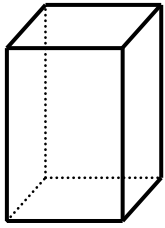
מהצלע השנייה. ידוע כי גובה התיבה שווה באורכו לצלע הבסיס

הגדולה. אורך אלכסון התיבה הוא 9 ס"מ.

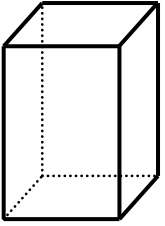
א. מצא את מידות התיבה.

ב. חשב את נפח התיבה.

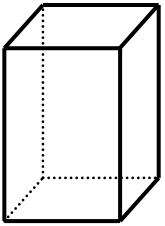
ג. חשב את שטח הפנים של התיבה.



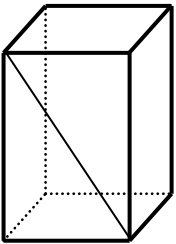
- 68 נתונה תיבה שבסיסה הוא ריבוע.  
גובה התיבה גדול פי 3 מאורך צלע הריבוע של הבסיס.  
ידוע כי שטח המעטפת של התיבה הוא 192 סמ"ר.  
א. מצא את אורך צלע הריבוע של בסיס התיבה.  
ב. חשב את נפח התיבה.



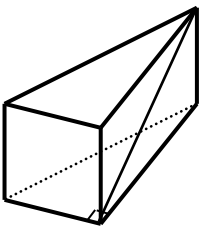
- 69 גזרו 6 חתיכות קרטון והרכיבו מהם תיבה שבסיסה הוא ריבוע.  
ידוע כי השטח של כל אחת מארבעת החתיכות המשמשות כפאות התיבה גדול ב-20% מהשטח של כל אחת משתי החתיכות המשמשות כבסיסי התיבה. גובה התיבה הנ"ל גדול בס"מ אחד מאורכי צלעות ריבוע הבסיס.  
א. מצא את המידות התיבה.  
ב. חשב את נפח התיבה.



- 70 בתיבה שבסיסה ריבוע נתון כי אורך הצלע של הריבוע קטנה ב-40% מגובה התיבה. כמו כן ידוע כי שטח פאה צדדית גדול ב-24 סמ"ר משטח בסיס התיבה.  
א. מצא את מידות התיבה.  
ב. הראה כי אלכסון התיבה גדול מ-13 ס"מ.  
ג. חשב את נפח התיבה.



- 71 נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן. מעבירים אלכסון באחת מהפאות צדדיות של התיבה כמתואר באיור. ידוע כי אורך אלכסון זה הוא 17 ס"מ וכי גובה התיבה גדול ב-7 ס"מ מבסיס התיבה של פאה זו. נפח התיבה הוא 720 סמ"ק.  
א. מצא את גובה התיבה.  
ב. מצא את מידות בסיס התיבה  
ג. האם ישר שאורכו 18 ס"מ יכול להיכנס בתוך תיבה זו? (העזר באלכסון התיבה).



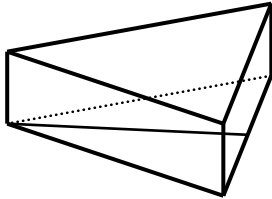
- 72 נתונה מנסרה ישרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית. מעבירים אלכסון שאורכו 13 ס"מ בפאה שבנויה על הניצב הגדול. אורך היתר במשולש הבסיס גדול ב-6 ס"מ מהניצב הקטן שלו. גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.  
א. מצא את אורך הניצב הגדול של משולש הבסיס.  
ב. מצא את הניצב השני ואת היתר במשולש הבסיס.  
ג. חשב את נפח המנסרה.



73 נתונה מנסרה ישרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים בעל אורך שוק

של 26 ס"מ. הגובה לבסיס בתוך משולש זה הוא 24 ס"מ.

שטח הפנים של המנסרה הוא 912 סמ"ר.



א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המשולש השווה שוקיים.

ב. מצא את גובה המנסרה.

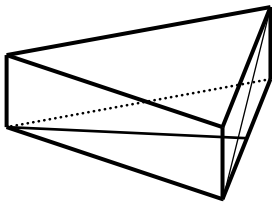
ג. מה יהיה נפח המנסרה?

74 סכום כל המקצועות של מנסרה משולשת ישרה שבסיסה הוא משולש שווה

שוקיים הוא 41 ס"מ. גובה המנסרה הוא 3 ס"מ.

ידוע כי אורך מקצוע הבסיס במשולש הבסיס קטן

ב-2 ס"מ מאורך שוק המשולש.

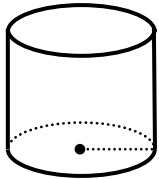


א. מצא את אורכי הצלעות של משולש הבסיס של המנסרה.

ב. חשב את אורך האלכסון העובר בפאה הבנויה על מקצוע

הבסיס של המשולש השווה שוקיים.

ג. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.



75 רדיוס גליל מסוים גדול ב-25% מגובהו. נפח הגליל הוא  $800\pi$ .

א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.

ב. חשב את שטח המעטפת של הגליל.

ג. ענה על השאלות הבאות:

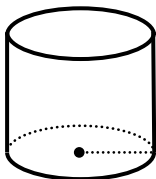
i. חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.

ii. חשב את שטח הפנים של הגליל.

76 נתון גליל שרדיוסו  $r$  וגובהו  $h$ .

שטח עיגול הבסיס קטן ב-60% משטח המעטפת.

ידוע גם כי רדיוס הגליל קטן ב-4 ס"מ מגובהו.



א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.

ב. חשב את שטח הפנים של הגליל.

ג. חשב את נפח הגליל.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 8 שעות ב. 160 ק"מ
- (2) א. 48 ק"מ ב. גלעד-12 שעות ורוני-8 שעות
- (3) א. 15 קמ"ש ו-25 קמ"ש ב. 75 ק"מ
- (4) א. 60 קמ"ש ב. 480 ק"מ
- (5) א. 16 קמ"ש, 18 קמ"ש ב. לא
- (6) א. 55 קמ"ש ו-70 קמ"ש ב. לא
- (7) א. 13:00 ב. 56 ק"מ ג. 8 שעות
- (8) א. שעתיים ב. 200 ק"מ
- (9) 800 קמ"ש
- (10) א. 70 קמ"ש ב. 7 שעות
- (11) א. 95 קמ"ש ב. 8 שעות
- (12) א. 14 קמ"ש ו-20 קמ"ש ב. 5 שעות
- (13) א. 60 קמ"ש ב. 4 שעות
- (14) א. 13:00 ב. 80 קמ"ש ו-100 קמ"ש
- (15) א. 10:36 ב. 120 קמ"ש
- (16) א. 100 קמ"ש ב. 270 ק"מ
- (17) א. 88 קמ"ש ו-176 קמ"ש ב. 10 שעות
- (18) א. 75 קמ"ש ב. 4 שעות
- (19) א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש
- (20) 70 קמ"ש
- (21) א. 40 קמ"ש ב. 55 ק"מ
- (22) א. 10:00 ב. 200 ק"מ
- (23) א. 8 קמ"ש ב. 3 שעות ו-5 שעות
- (24) א. 30 קמ"ש ב. פי 5
- (25) א. 6 קמ"ש ב. 6 ק"מ, 8 ק"מ ו-4 ק"מ
- (26) א. 70 קמ"ש ב. 840 ק"מ
- (27) א. 90 קמ"ש ו-60 קמ"ש ב. פי 3
- (28) א. 5 שעות ב. 20 קמ"ש
- (29) א. 40 ₪ ב. 3200 ₪
- (30) 4 ₪

- (31) 100      (32) 60 ק"ג
- (33) א. 90 ב. 80      (34) 60 ב-5      (35) 20 עציצים, 40      (36) 50 נורות ב-80      (37) 4      (38) 40      (39) 400      (40) 12      (41) 4      (42) 7      (43) 800      (44) 3,000      (45) 65      (46) 200      (47) 5,760      (48) 5500      (49) 100      (50) 82%      (51) 8      (52) 65      (53) 80      (54) 100      (55) 30      (56) 10      (57) 8      (58)  $S_{ABC} = 25$  ,  $S_{ADE} = 10$       (59)  $8\frac{2}{3}$       (60) 16

61) א. 16 ס"מ ב. 10 ס"מ ג.  $S = 48$

62) א. 6 ס"מ ו-9 ס"מ ב. 10 ס"מ ג. 12 ס"מ

63) א. 6 ס"מ ו-14.4 ס"מ ב.  $S = 7.2$

64) א. 6 ס"מ ב. 1.  $S = 36$  ב. 2.  $S = 18\pi$  ג. 3.  $S = 36 + 18\pi$

65) א. 7 ס"מ ב.  $S = 196$

66) א. 9 ס"מ ו-6 ס"מ ב. פי 2.25

67) א.  $3 \times 6 \times 6$  ס"מ ב.  $V = 108$  ג.  $S = 144$

68) א. 4 ס"מ ב.  $V = 192$

69) א.  $6 \times 5 \times 5$  ס"מ ב.  $V = 150$

70) א.  $10 \times 6 \times 6$  ס"מ ג.  $V = 360$

71) א. 15 ס"מ ב. 8 ס"מ ו-6 ס"מ ג. כן

72) א. 12 ס"מ ב. 9 ס"מ ו-15 ס"מ ג.  $V = 270$

73) א. 20 ס"מ ב. 6 ס"מ ג.  $V = 1440$

74) א. 4 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 5 ס"מ ג.  $S = 48$

75) א. 10 ס"מ ו-8 ס"מ ב.  $S = 160\pi$  ג. 1.  $V = 100\pi$  ג. 2.  $S = 360\pi$

76) א.  $r = 16, h = 20$  ב.  $S = 1152\pi$  ג.  $V = 5120\pi$

## תרגול מבגרויות:

### בעיות קנייה ומכירה:

- (1) בחנות יש שני סוגי בדים : בד מסוג א' ובד מסוג ב'. המחיר של 4 מטרים בד מסוג א' גדול ב-135 שקלים מהמחיר של 3 מטרים בד מסוג ב'. לקוח קנה 3 מטרים בד מסוג א' ו-4 מטרים בד מסוג ב', ושילם סך הכול 382.5 שקלים. לפני הקנייה מספר המטרים של הבד מסוג א' שיש בחנות שווה למספר המטרים של הבד מסוג ב'. המחיר של כל הבד מסוג א' שיש בחנות, גדול ב-396 מהמחיר של כל הבד מסוג ב'.
  - א. מצא את המחיר של מטר אחד של מסוג א' ואת המחיר של מטר אחד של בד מסוג ב'.
  - ב. מצא את מספר המטרים של הבד מכל סוג שיש בחנות (לפני הקנייה).
- (2) סוחר קנה גופיות. לכל גופייה היה אותו מחיר. 5 גופיות היו פגומות, והסוחר מכר את חמש הגופיות האלה בסכום כולל של 80 שקל ובהפסד של 20% (לעומת מחיר הקנייה). את שאר הגופיות מכר הסוחר ברווח של 30%. הרווח הכולל של הסוחר ממכירת כל הגופיות (פגומות ולא פגומות) היה 190 שקלים.
  - א. כמה שילם הסוחר עבור גופייה אחת?
  - ב. כמה גופיות קנה הסוחר?
- (3) המחיר של טלפון נייד בחנות א' היה 600 שקל. מחיר זה הועלה באחוז מסוים. המחיר של אותו טלפון נייד בחנות ב' היה 900 שקל. מחיר זה הוזל באותו אחוז שהועלה המחיר של הטלפון הנייד בחנות א' ואז המחיר של הטלפון הנייד בשתי החנויות היה זהה. מצא את המחיר הסופי של הטלפון הנייד.
- (4) בחברת טלפונים המחיר לדקת שיחה בשעות הערב נמוך ב-40% מן המחיר לדקת שיחה בשעות היום. כדי לעודד שיחות בשעות הערב הורידה החברה ב-18% את המחיר לדקת שיחה בשעות הערב. (המחיר לדקת שיחה בשעות היום לא השתנה). אחרי ההוזלה אלעד שוחח 150 דקות בשעות היום ו-300 דקות בשעות הערב, ושילם 44.64 שקלים. מצא את המחיר באגורות לדקת שיחה ביום, ולדקת שיחה בערב לפני ההוזלה.

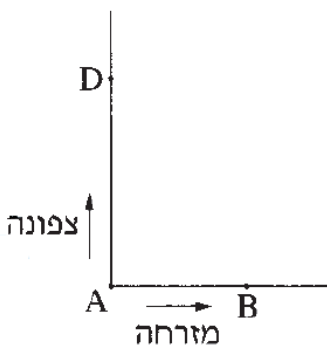
- (5) ראובן רוצה לרכוש מינוי למכון כושר. המחיר המלא של המינוי הוא 200 שקלים. אם ראובן יביא שני חברים שירכשו מינוי במחיר מלא, הוא יקבל על המינוי שלו הנחה של  $x\%$  עבור החבר הראשון, ועבור החבר השני יקבל הנחה של  $x\%$  על המחיר שאחרי ההנחה הראשונה. ראובן הביא שני חברים ושילם עבור המינוי שלו רק 144.5 שקלים.
- א. מצא את אחוז ההנחה שקיבל ראובן על המינוי עבור החבר הראשון.  
ב. מצא את אחוז ההנחה הכולל שקיבל ראובן על המינוי שלו לאחר שהביא את שני החברים.

### בעיות תנועה:

- (6) מכונית נסעה מעיר A לעיר B על כביש ראשי במהירות קבועה. בדרך חזרה מעיר B לעיר A נסעה המכונית בדרך עפר, הקצרה ב-40% מהדרך בכביש הראשי, ונאלצה להקטין את מהירותה ב-10%. אורך הדרך בכביש הראשי מ-A ל-B הוא 240 ק"מ. נתון כי בכביש הראשי עברה המכונית  $\frac{2}{3}$  מהדרך שבין A ל-B בשעתיים. מצא את זמן הנסיעה של המכונית בדרך חזרה מ-B ל-A.

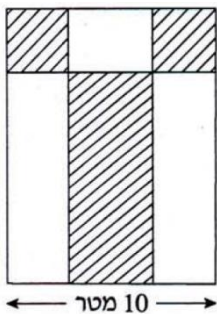
- (7) ממקום A יצאה מכונית א' וכעבור  $\frac{1}{2}$  שעה יצאה מאותו מקום ובאותו כיוון מכונית ב'. המהירות של מכונית ב' גדולה ב-25% מהמהירות של מכונית א'. כעבור כמה שעות מרגע היציאה של מכונית א' ייפגשו שתי המכוניות? (המהירויות של המכוניות אינן משתנות).

- (8) שני הולכי רגל יוצאים בשעה 7:00 מנקודה A: אחד הולך צפונה ואחד הולך מזרחה (ראה ציור). בשעה 9:00 הגיע ההולך מזרחה לנקודה B, וההולך צפונה הגיע לנקודה D כך שהמרחק בניהם היה 10 ק"מ. ההולך צפונה הלך מיד מנקודה D לנקודה B בדרך הקצרה ביותר, והגיע לנקודה B בשעה 11:30. המהירויות של הולכי הרגל אינן משתנות. מצא את המהירות של כל אחד מהולכי הרגל.

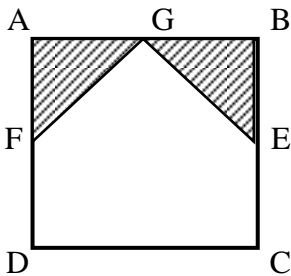


- 9) רוכב אופניים יצא מיישוב A ליישוב B ובדיוק באותה שעה יצא הולך רגל מיישוב B ליישוב A. הולך הרגל הלך במהירות קבועה שקטנה ב-10 קמ"ש מהמהירות של רוכב האופניים. כעבור 24 דקות המרחק בין רוכב האופניים להולך הרגל היה 12 ק"מ. כעבור 36 דקות נוספות הם נפגשו. א. מצא את המהירות של רוכב האופניים. ב. מצא באיזה מרחק מיישוב A נפגשו רוכב האופניים והולך הרגל.

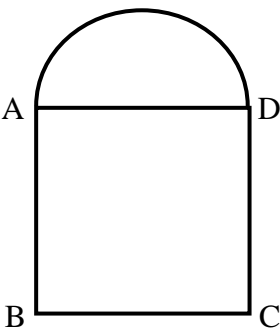
### בעיות הנדסת המישור:



- 10) בגינה בצורה מלבנית רוצים לשתול דשא בשטחים המקווקוים שבציור שני השטחים בפינות הגינה הם בצורת ריבועים, והשטח האמצעי הוא בצורת מלבן (ראה ציור). רוחב הגינה הוא 10 מטר, ואורכה גדול ב-20% מרוחבה. מחיר מ"ר של הדשא הוא 60 ש"ח, והמחיר הכולל של הדשא ששותלים הוא 3,240 ש"ח. מצא את סכום השטחים של הדשא שבפינות הגינה.

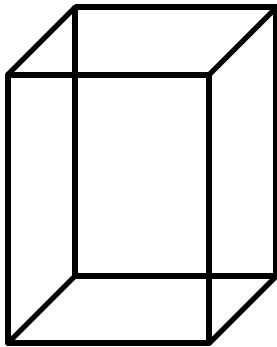


- 11) בנו חלון זכוכית בצורת ריבוע ABCD שאורך צלעו 2 מטרים. שתיים מפינות הריבוע עוצבו בצורת משולשים חופפים AGE ו-BGF כך ש- $AF = BE = x$  (ראה ציור). המשולשים עשויים מזכוכית צבעונית, ושאר החלון עשוי מזכוכית רגילה. מטר מרובע של זכוכית צבעונית עולה 20 שקלים ושל זכוכית רגילה – 10 שקלים. המוכר נתן הנחה של 22% לזכוכית צבעונית ו-10% לזכוכית רגילה. סך כל ההנחה על שני סוגי הזכוכית הדרושים לבניית החלון היה 14%. מצא את האורך של AE.



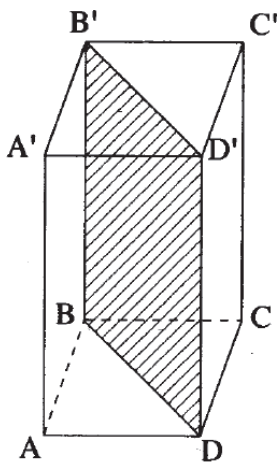
- 12) חלון מורכב מחצי עיגול ומריבוע ABCD. צלע הריבוע AD היא קוטר של חצי העיגול, כמתואר בציור. שטח הריבוע גדול ב-0.2187 מ"ר משטח חצי העיגול. מצא את ההיקף של המסגרת החיצונית של החלון. בחישוב השתמש ב- $\pi = 3.14$ .

## בעיות בהנדסת המרחב:



13) בנו קופסה סגורה בצורת תיבה שבסיסה ריבוע (ראה ציור). גובה התיבה גדול פי 1.4 מצלע הבסיס. שטח הפנים של התיבה (השטח של שש פאות התיבה) הוא 1710 סמ"ר. מצא את צלע הבסיס וגובה התיבה.

ב. רוצים למלא את התיבה בקוביות, שאורך הצלע של כל אחת מהן הוא  $\frac{1}{5}$  מאורך צלע הבסיס של התיבה. בכמה קוביות כאלה אפשר למלא את התיבה?



14) בונים מיכל פתוח מלמעלה. המכל הוא בצורת תיבה שבסיסה ABCD הוא ריבוע. בתוך התיבה בנו מחיצה דקה מאוד BDD'B'. אורך צלע הבסיס ABCD הוא  $a$ . גובה התיבה גדול פי 2 מאורך האלכסון של בסיס התיבה.

א. הבע באמצעות  $a$  את גובה התיבה.

ב. מחיר החומר שממנו עשויים בסיס התיבה והמחיצה הוא 15 שקלים למ"ר. מחיר החומר שממנו עשויות פאות התיבה הוא  $8\sqrt{2}$  שקלים למ"ר. עלות החומרים לבניית התיבה (כולל המחיצה) הייתה בסך הכול 812 שקלים. מצא את הערך של  $a$ .



## תשובות סופיות:

- (1) א. מחיר בד א': 67.5 שקלים למטר, מחיר בד ב' 45 שקלים למטר  
ב. סוג א': 17.6 מטרים, סוג ב': 17.6 מטרים
- (2) א. 20 שקלים ב. 40 גופיות
- (3) 720 שקלים
- (4) מחיר לדקת שיחה ביום הוא 15 אגורות. המחיר לדקת שיחה בערב הוא 9 אגורות
- (5) א. 15% ב. 27.75%
- (6) שעתיים
- (7) שעתיים וחצי
- (8) מ-A ל-D: 4 קמ"ש, מ-A ל-B: 3 קמ"ש
- (9) א. 15 קמ"ש ב. 15 ק"מ
- (10) 18 מ"ר
- (11) 0.8 מטר
- (12) 2.742 מטר
- (13) א.  $21 \times 15 \times 15$  ס"מ ב. 175 קוביות
- (14) א.  $2a\sqrt{2}$  ב. 2

## תוכן העניינים

פרק 5.....	83
גיאומטריה אנליטית - הישר.....	83
משוואת הישר – סיכום כללי :	83
נוסחאות כלליות :	83
משוואת הישר :	83
מצב הדדי בין שני ישרים :	83
שיפועים של ישרים :	83
שאלות :	84
שאלות העוסקות באמצע קטע :	84
שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות :	85
שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות :	86
שאלות העוסקות במשוואת ישר :	86
תשובות סופיות :	91
תרגול נוסף – הישר (שאלות מסכמות) :	94
תשובות סופיות :	110

## פרק 5

# גיאומטריה אנליטית - הישר

## משוואת הישר – סיכום כללי:

### נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  יחושב ע"י הנוסחה הבאה:  

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- אמצע הקטע  $M$  שקצותיו הם:  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
- שיפוע ישר בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

### משוואת הישר:

- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה:  $y = mx + n$ .
- כאשר:  $m$  הוא שיפוע הישר ו-  $n$  הוא שיעור ה-  $y$  של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-  $y$ .
- נוסחה למציאת משוואת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

### מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים:  $m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$ .
- ישרים חותכים מקיימים:  $m_1 \neq m_2$ .
- ישרים מתלכדים מקיימים:  $m_1 = m_2, n_1 = n_2$ .

### שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-  $x$ :  $m = \tan \alpha$ .

## שאלות:

### שאלות העוסקות באמצע קטע:

(1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א.  $A(1,4)$  ,  $B(5,-8)$       ב.  $A(-3,0)$  ,  $B(3,-2)$

ג.  $A(4,5)$  ,  $B(-4,-5)$       ד.  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$  ,  $B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$

ה.  $A(6,-1)$  ,  $B(-3,-1)$       ו.  $A(4,7)$  ,  $B(4,-12)$

(2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.

מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א.  $A(4,-2)$  ,  $M(2,1)$       ב.  $A(-6,-8)$  ,  $M(0,0)$

ג.  $A(13,-11)$  ,  $M(4,-7)$       ד.  $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$  ,  $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

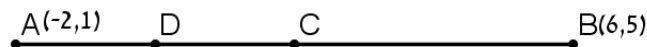
(3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.

ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם  $B(2,-4)$  ,  $C(6,1)$ .

מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

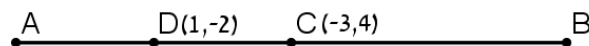
(4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.

ידוע כי:  $A(-2,1)$  ,  $B(6,5)$ . מצא את שיעורי הנקודה D.



(5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.

ידוע כי:  $C(-3,4)$  ,  $D(1,-2)$ . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



(6) הנקודות  $A(2,-7)$ ,  $B(-10,4)$  ו-  $C(6,11)$  הן שלושה קדקודים של מקבילית.

מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי.

### שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

(7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| א. $A(4,7), B(-3,7)$  | ב. $A(6,2), B(1,2)$   |
| ג. $A(-3,10), B(0,6)$ | ד. $A(6,-9), B(1,3)$  |
| ה. $A(4,7), B(13,-1)$ | ו. $A(6,6), B(-9,-9)$ |

(8) חשב את היקף המשולש ABC שקדקודיו הם:  $A(3,-2)$ ,  $B(4,9)$ ,  $C(0,14)$ .

(9) נתונות נקודות  $A(14,4)$ ,  $B(6,y)$  שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.  
מצא את  $y$ .

(10) נתונות נקודות  $A(x,-12)$ ,  $B(15,-2)$  שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.  
מצא את  $x$ .

(11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- $y$  שלה גדול פי 3 משיעור ה- $x$  שלה ומרחקה מהנקודה  $A(-4,1)$  הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

(12) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB=AC$ ) ידוע כי אורכי השוקיים הוא  $\sqrt{45}$  יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם  $(0,4)$  ושיעורי ה- $y$  של הקדקודים B ו-C הוא 2. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

(13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא  $d_{AC} = \sqrt{50}$  וידוע כי:  $A(-3,-2)$ ,  $B(-4,1)$ . מצא את היקף המלבן.

### שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

- |                         |                           |
|-------------------------|---------------------------|
| א. $A(5,2)$ , $B(4,1)$  | ב. $A(3,-2)$ , $B(-3,1)$  |
| ג. $A(7,8)$ , $B(6,15)$ | ד. $A(0,5)$ , $B(7,0)$    |
| ה. $A(6,9)$ , $B(6,-7)$ | ו. $A(4,-1)$ , $B(18,-1)$ |

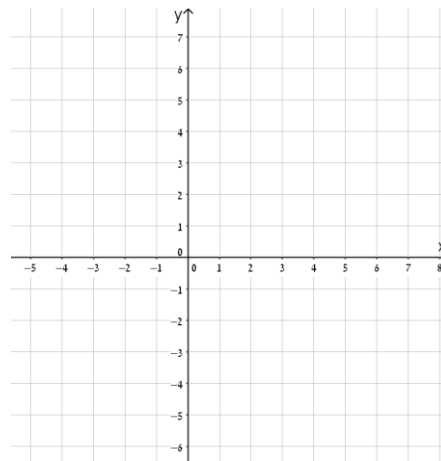
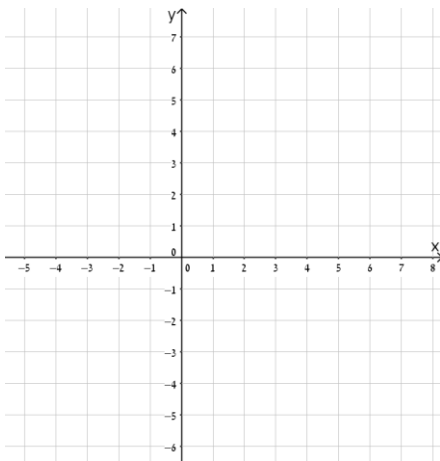
15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקדקודיו הם:  
 $A(6,5)$  ,  $B(2,13)$  ,  $C(4,-7)$  מונחים עליהם.

### שאלות העוסקות במשוואת ישר:

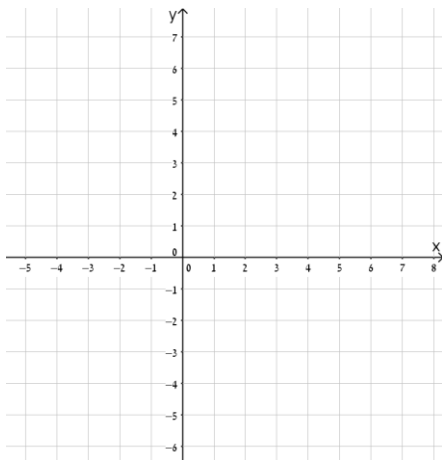
16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

א.  $y = x + 4$

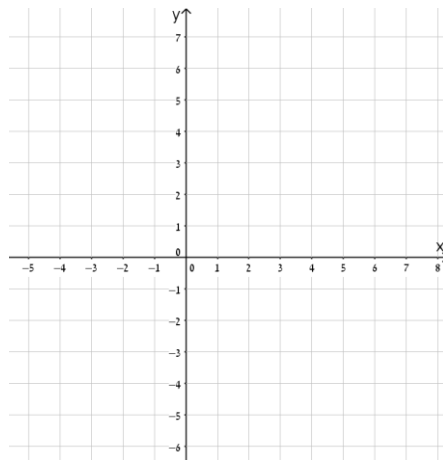
ב.  $y = -x + 5$



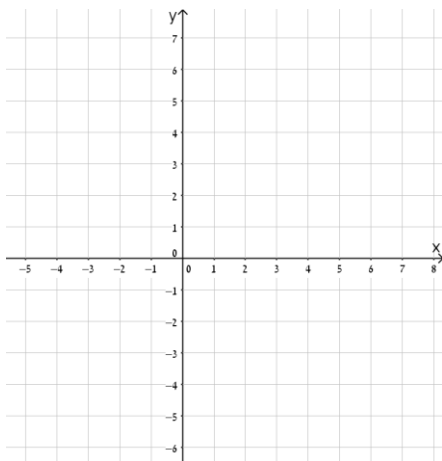
ד.  $y = -3x + 5$



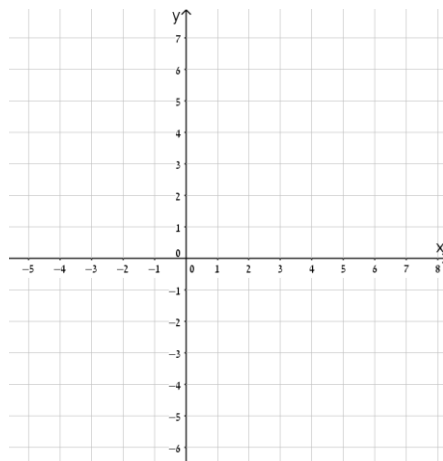
ג.  $y = 2x - 3$



ו.  $y = 8 - 4x$

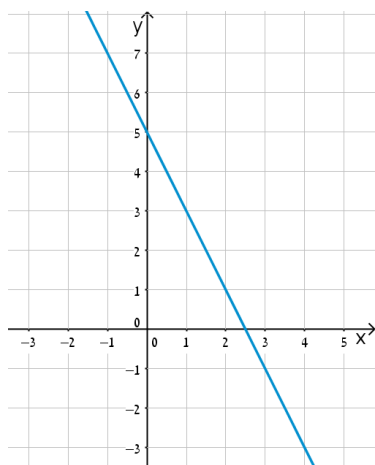


ה.  $y = 3x - 1$

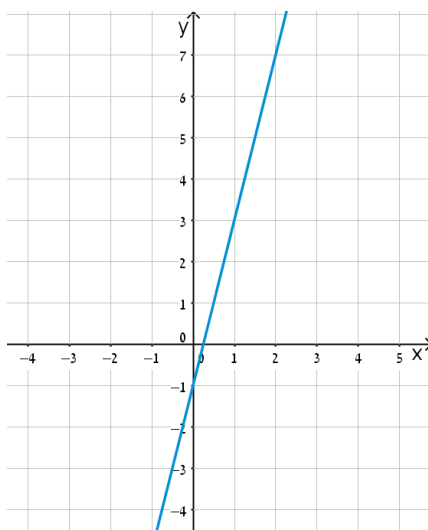


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

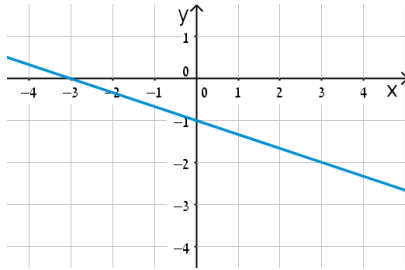
ב.



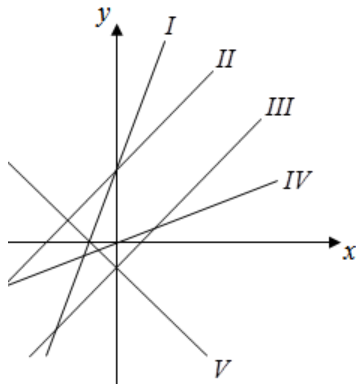
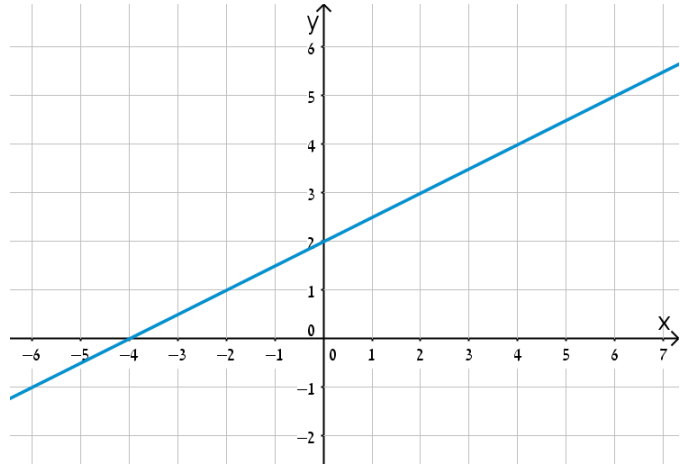
א.



ד.



ג.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

א.  $y = x + 3$

ב.  $y = -x - 1$

ג.  $y = 2x + 3$

ד.  $y = x - 1$

ה.  $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואה הישר הבאה:  $y = 2x + 3$ . קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו:  $A(-1, 1)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $C(0, 4)$ ,  $D(6, 15)$ .

20) נתונה משוואת הישר הבאה:  $y = mx - 2.5$ . ידוע כי הנקודה  $A(4, 2)$  נמצאת על הישר. מצא את  $m$  וקבע האם גם הנקודה  $B(7, -2)$  נמצאת עליו.

21) הנקודות  $A(5, -3)$ ,  $B(4, 1)$  נמצאות על ישר שמשוואתו היא:  $y = mx + n$ . מצא את  $m$  ואת  $n$ .

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א.  $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ב.  $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$

ג.  $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$



**(23)** קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים :

<p>א. <math>\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}</math></p> <p>ב. <math>\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}</math></p>	<p>ג. <math>\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}</math></p> <p>ד. <math>\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}</math></p>
---	---

**(24)** קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה :

<p>א. <math>\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}</math></p> <p>ב. <math>\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}</math></p>	<p>ג. <math>\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}</math></p> <p>ד. <math>\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}</math></p>
---	---

**(25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא  $y = 6x - 2$ .

- א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?  
 ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

**(26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקדקודים :  $A(5, -1)$  ,  $B(3, 7)$  ,  $C(-5, 5)$   
 הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

**(27)** מצא את משוואות הישרים הבאים :

- א. ישר העובר דרך הנקודה  $A(1, 3)$  ושיפועו  $m = 2$ .  
 ב. ישר העובר דרך הנקודה  $A(0, -4)$  ושיפועו  $m = \frac{1}{3}$ .  
 ג. ישר העובר דרך הנקודה  $A(5, 9)$  ושיפועו  $m = 0$ .  
 ד. ישר העובר דרך הנקודות  $A(5, -12)$  ו-  $B(6, -6)$ .  
 ה. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-6, 4)$  ומקביל לישר :  $y = 2x - 3$ .  
 ו. ישר העובר דרך הנקודה  $A(3, -5)$  ומקביל לציר ה-  $y$ .  
 ז. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-7, -3)$  ומאונך לישר :  $y = x + 3$ .  
 ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים :  $y = 11x - 4$  ו-  $y = 3x - 12$  ומקביל לישר :  $y = 7x + 5$ .

**28** במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

ידוע כי:  $A(3, -2)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $D(-2, 2)$ .

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

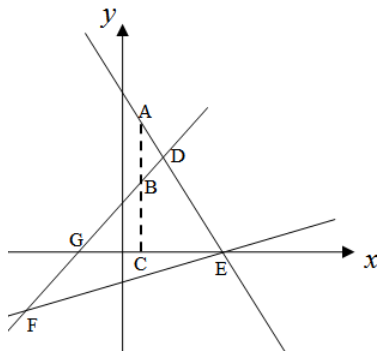
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

**29** נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקדקודים  $A(-9, 1)$  ו-  $B(5, -7)$ .

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא  $x + 3y + 6 = 0$ .

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



**30** שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים

המופיעים בשרטוט:  $x - y + 2 = 0$ ,  $x - 4y - 4 = 0$

ו-  $2x + y - 8 = 0$ . הקטע AC מקביל לציר ה-  $y$ .

א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון:  $d_{BC} = 3$ .

חשב את אורך הקטע AB.

**31** BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקדקוד  $A(-6, 1)$ .

משוואת התיכון BD היא  $x - y = 1$  ומשוואת הצלע BC היא  $3x + 5y = 67$ .

מצא את שיעורי הקדקוד C.

**32** נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) ובו משוואת השוק BC היא:  $x = 2$ .

משוואת הבסיס CD היא  $2x + 3y = 7$  וידוע כי  $A(-4, 1)$ .

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו- C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.

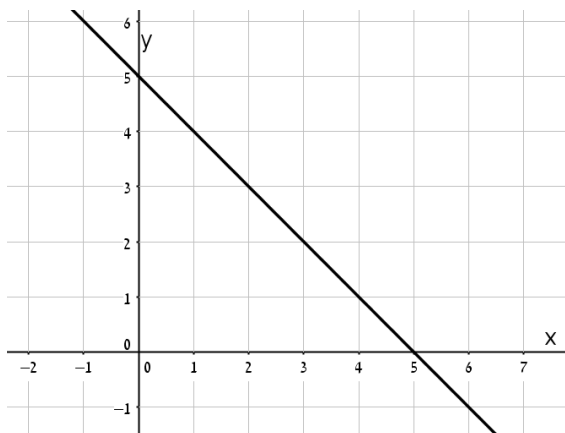
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

## תשובות סופיות:

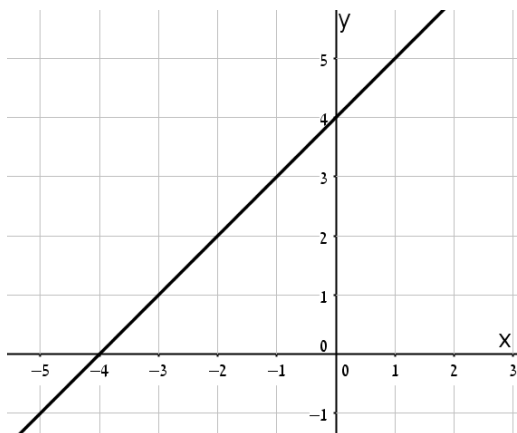
- (1) א.  $(3, -2)$  ב.  $(0, -1)$  ג.  $(0, 0)$
- ד.  $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$  ה.  $(1.5, -1)$  ו.  $(4, -2.5)$
- (2) א.  $B(0, 4)$  ב.  $B(6, 8)$  ג.  $B(-5, -3)$  ד.  $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3)  $D(4, -1.5)$
- (4)  $D(0, 2)$
- (5)  $A(5, -8)$ ,  $B(-11, 16)$
- (6)  $D(18, 0)$
- (7) א.  $d_{AB} = 7$  ב.  $d_{AB} = 5$  ג.  $d_{AB} = 5$  ד.  $d_{AB} = 13$
- ה.  $d_{AB} = \sqrt{145}$  ו.  $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8)  $P_{ABC} \approx 33.862$  יחידות אורך
- (9)  $y = -2$  או  $y = 10$
- (10)  $x = -9$  או  $x = 39$
- (11)  $B(-1, -3)$
- (12)  $B(3, -2)$ ,  $C(-3, -2)$
- (13)  $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$  יחידות אורך
- (14) א.  $m_{AB} = 1$  ב.  $m_{AB} = -\frac{1}{2}$  ג.  $m_{AB} = -7$  ד.  $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר. ו.  $m_{AB} = 0$
- (15)  $m_{AB} = -2$ ,  $m_{BC} = -10$ ,  $m_{AC} = 6$

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

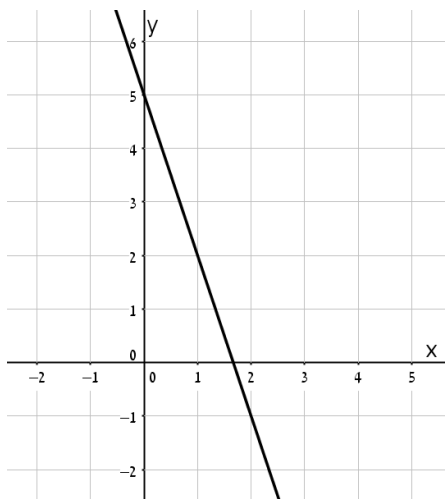
ב.



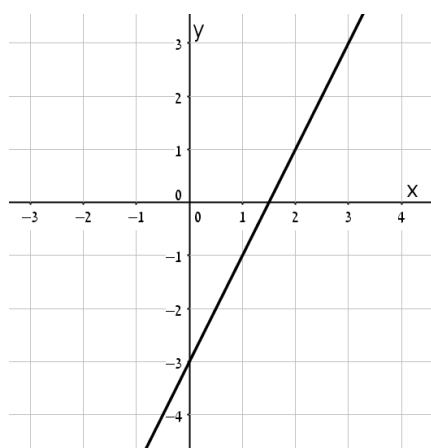
א.



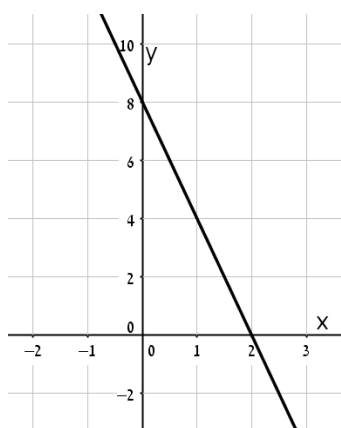
ד.



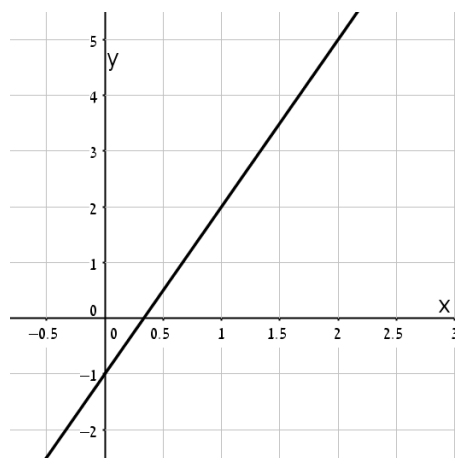
ג.



ו.



ה.



(17) א.  $y = 4x - 1$  ב.  $y = -2x + 5$  ג.  $y = \frac{1}{2}x + 2$  ד.  $y = -\frac{1}{3}x - 1$

(18) א. II. ב. V. ג. I. ד. III. ה. IV.

(19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

(20)  $m = \frac{9}{8}$ , B לא נמצאת.

(21)  $m = -4$ ,  $n = 17$

(22) א.  $(-1, 1)$  ב.  $(-6, -18)$  ג.  $(10, 16)$

(23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

(24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

(25)  $m_{AB} = m_{CD} = 6$ ,  $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$

ב. הכל הפוך:  $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$ ,  $m_{BC} = m_{AD} = 6$

(26) שאלת הוכחה.

(27) א.  $y = 2x + 1$  ב.  $y = \frac{1}{3}x - 4$  ג.  $y = 9$  ד.  $y = 6x - 42$

ה.  $y = 2x + 16$  ו.  $x = 3$  ז.  $y = -x - 10$  ח.  $y = 7x - 8$

(28) א.  $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$  ב.  $C(-6, 0)$  ג.  $y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$

(29) א.  $l_{BD}: y = 3x - 22$  ב.  $l_{BC}: y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$

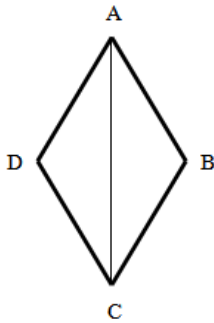
(30) א. 18 יח"ש  $S_{EDF}$  ב. 3 יחידות אורך  $AB$

(31)  $C(14, 5)$

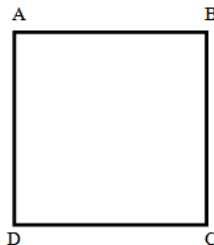
(32) א.  $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$  ב.  $B(2, -3)$ ,  $C(2, 1)$  ג. 12 יחידות שטח  $S_{ABC}$

## תרגול נוסף – הישר (שאלות מסכמות):

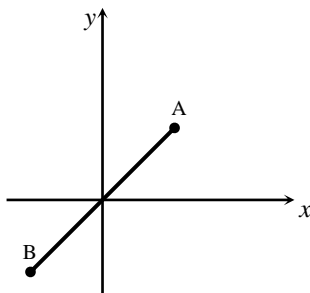
\*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.



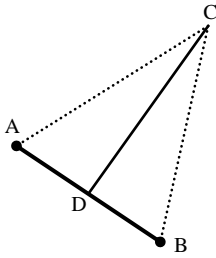
- (1) במעוין ABCD שיעור אחת הנקודות הוא  $(0,6)$ .  
ידוע כי משוואת האלכסון AC היא:  $y = -1.5x + 6$   
ואחת ממשוואות הצלעות היא:  $5y + x = 4$ .  
א. מצא את משוואת האלכסון השני.  
ב. מצא את שאר קדקודי המעוין.



- (2) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם  $(1,4)$ .  
א. איזה מרובע הוא? הראה חישוב מתאים.  
ב. נתון גם:  $D(4,13)$ ,  $m_{CD} = -\frac{1}{3}$ ,  $BC = \sqrt{90}$ .  
איזה מרובע הוא כעת? הראה חישוב מתאים.  
ג. נתון גם:  $B(-8,7)$ . איזה מרובע הוא כעת? הראה חישוב מתאים.  
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



- (3) אמצע הקטע AB נמצא בראשית הצירים.  
ידוע כי  $A(6,8)$ .  
א. מצא את שיעור הנקודה B.  
ב. מוסיפים את הנקודה C כך שמרחק מראשית הצירים הוא 10. היעזר במרחק AB וקבע איזה משולש הוא המשולש ABC.  
ג. נתון כי שיעורי הנקודה C הם:  $(6,-8)$ .  
חשב את שטח המשולש ABC.



(4) הנקודה D היא אמצע הקטע AB שמשוואתו היא:  
 $3y + 2x + 4 = 0$

שעורי הנקודה A הם  $(-8, 4)$  ו-B היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $x$ .

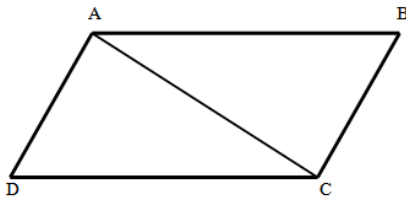
א. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ב. מהנקודה D מעלים אנך שחותך את ציר ה- $y$  בנקודה C.

איזה משולש הוא המשולש ABC? נמק את תשובתך.

ג. חשב את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש ABC.



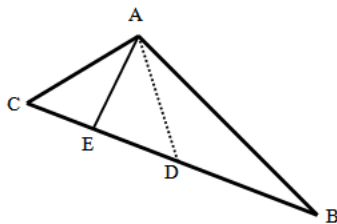
(5) במקבילית ABCD האלכסון AC מאונך לצלע AD. שיעורי הנקודה C הם  $(-7, -3)$

ושיפוע הקטע BC הוא:  $m = \frac{1}{3}$ . הנקודה A נמצאת על ציר ה- $y$  והנקודה B נמצאת על ציר ה- $x$ .

א. מצא את משוואות הישרים AC ו-BC.

ב. חשב את שיעורי הנקודות A, B ו-D.

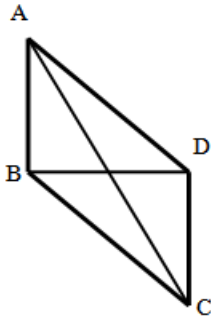
ג. חשב את שטח המקבילית.



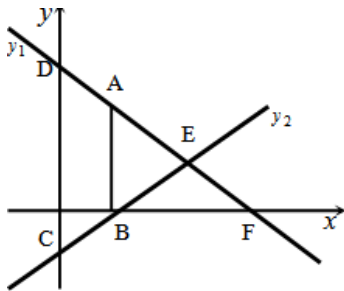
(6) במשולש ABC הצלע AC מונחת של הישר  $y = 5$ . הנקודה A נמצאת על ציר ה- $y$ . הנקודה B נמצאת ברביע הראשון ומרחקה מכל ציר הוא 11. הנקודה D היא אמצע הצלע BC במשולש ABC ושיעור ה- $x$  שלה הוא 5.

א. מצא את שיעורי הנקודה D ואת אורך הקטע AC.

ב. הנקודה E נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים:  $AE \perp BC$ . מצא את שיעורי הנקודה E.



- 7) במקבילית ABCD האלכסונים AC ו-BD מונחים על הישרים:  $y = -x + 8$  ו-  $y = 4$  בהתאמה. הצלע CD מונחת על הישר:  $x = 8$ .
- מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המקבילית.
  - מצא את משוואת הצלע AB.
  - חשב את שטח המקבילית.

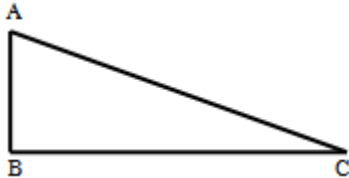


- 8) נתונים שני ישרים:  $y_1 = -\frac{x}{2} + 8$ ,  $y_2 = \frac{x}{2} - 2$ .
- מעלים מהישר  $y_2$  אנך מנקודת החיתוך שלו B עם ציר ה- $x$  שחותך את הישר  $y_1$  בנקודה A. הנקודות C ו-D הן נקודות החיתוך של הישרים עם ציר ה- $y$  כך שנוצר טרפז ABCD.
- מצא את שיעורי הנקודות של קדקודי הטרפז ABCD.
  - הישרים  $y_1$  ו- $y_2$  נחתכים בנקודה E. הנקודה F היא נקודת החיתוך של הישר  $y_1$  עם ציר ה- $x$  כך שנוצר המשולש BEF. חשב את שיעורי הנקודות E ו-F.
  - חשב את יחס השטחים:  $\frac{S_{BEF}}{S_{ABCD}}$ .
- 9) במרובע ABCD ידוע כי:  $m_{AB} = m_{CD} = 2$ .
- שיעורי הקדקוד B הם:  $(-1, -5)$  ונקודת פגישת האלכסונים K הם:  $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$ .
- מצא את משוואת הצלע AB ואת משוואת האלכסון BD.
  - נתון גם כי:  $C(-4, -3)$  ו-  $d_{AB} = \sqrt{80}$ . מצא את משוואת הצלע CD.
  - איזה מרובע הוא המרובע ABCD? נמק והראה חישוב מתאים.



10 במרובע ABCD שקדקודיו הם:  $A(-5,12)$ ,  $B(7,8)$ ,  $C(11,4)$ ,  $D(1,2)$   
בנו משולש DEF כך ש-E ו-F הם בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו-BC.

- מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
- חשב את אורכי הקטעים EF ו-DF.
- איזה משולש הוא המשולש DEF?
- חשב את שטח המשולש DEF.

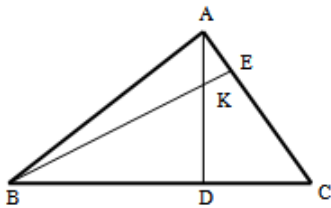


11 במשולש ישר זווית ABC ( $\angle B = 90^\circ$ ) שיעורי

הנקודה A הם:  $(4,12)$  ושיעורי הנקודה B

הם:  $(-2,6)$ .

- מצא את משוואת הניצב BC.
- הנקודה D נמצאת על היתר AC ושיעוריה הם:  $(-2,11)$ .  
מצא את שיפוע היתר AC.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.

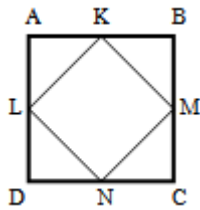


12 AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC  
במשולש ABC.

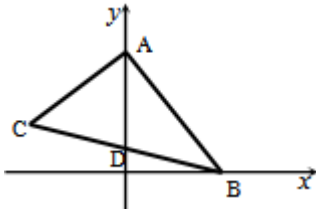
ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם:  $(1,3)$ .

שיעורי הנקודות D ו-E הם:  $D(-2,4)$ ,  $E(3,5)$ .

- מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.
- מצא את שיעורי הקדקוד A.
- מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.
- מצא את שיעורי הקדקוד B.

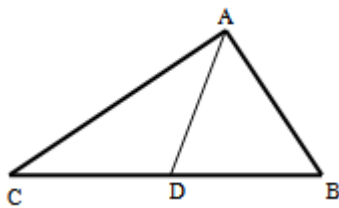


- 13) המרובע ABCD הוא ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים. הצלע AB מונחת על הישר:  $y = 8$ , הצלע BC מונחת על הישר:  $x = 5$ , הצלע CD מונחת על הישר:  $y = -2$ , והצלע AD מונחת על הישר:  $x = -5$ . מקצים על אמצעי הצלעות את הנקודות K, M, N, L כך שנוצר המרובע LMNK. איזה מרובע הוא המרובע LMNK? נמק והראה חישוב מתאים.

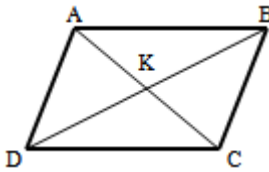


- 14) במשולש ABC הקדקודים A ו-B הם נקודות החיתוך של הישר AB עם הצירים והנקודה C היא נקודת החיתוך של שני הישרים BC ו-AC כפי שמתואר באיור. הקטעים AB ו-BC מונחים בהתאמה על הישרים:  $y = -3x + 12$  ו-  $4y + x = 4$ . הנקודה D היא נקודת החיתוך של הישר BC עם ציר ה-y. ידוע כי הקטע AD מחלק את המשולש ABC לשני משולשים ACD ו-ABD שווים שטח.

- מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-D.
- חשב את שטח המשולש ABD ומצא את שיעורי הנקודה C.
- איזה קטע במשולש ABC הוא הקטע AD? נמק. חשב את שטח המשולש ABC.



- 15) הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווים שטח ACD ו-ABD. הצלע BC מונחת על הישר:  $y = 4$  וידוע ששיעור ה-x של הנקודה C הוא:  $x_C = -1$ . כמו כן נתון:  $A(7,8)$ ,  $m_{AB} = -2$ .
- מצא את משוואת הצלע AB.
  - מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.
  - חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.
  - ענה על הסעיפים הבאים:
    - איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?
    - איזה משולש הוא המשולש ABC?

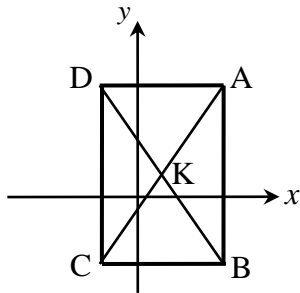


16) במקבילית ABCD נקודת פגישת האלכסונים K נמצאת על ציר ה- $y$  בנקודה שבה:  $y = 4$ . הנקודה C נמצאת על

ציר ה- $x$  ושיפוע הצלע BC הוא:  $m_{BC} = -\frac{1}{3}$ .

שיעורי הנקודה D הם:  $(5, 7)$ .

- מצא את שיעורי הנקודה B.
- כתוב את משוואת הישר BC.
- מצא את שיעורי הנקודות C ו-A.



17) הצלע AB של המלבן ABCD מונחת על הישר:  $x = 8$ . אורך האלכסון במלבן הוא 26 ונקודת פגישת האלכסונים K היא  $(3, 3)$ .

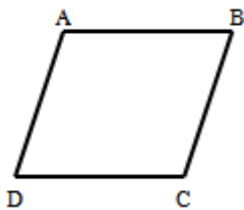
- מצא את שיעורי הקדקודים A ו-B אם ידוע ש-A נמצאת ברביע הראשון.
- מצא את שיעורי הקדקודים C ו-D.
- מצא את שטח המלבן.

18) משוואות הצלעות AB, BC ו-AC של המשולש ABC הם

בהתאמה:  $y = x + 5$ ,  $y = 3x - 1$ ,  $y = 5x - 3$ .

שרטט את המשולש במחברת הבחינה שלך וענה על השאלות הבאות:

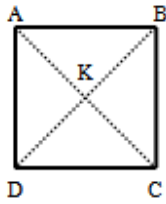
- מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המשולש.
- מצא את שלושת המשוואות של הגבהים במשולש ABC.
- הראה שהגבהים חותכים זה את זה באותה נקודה.



19) במעוין ABCD הנקודה D נמצאת על ציר ה- $x$

ונתון:  $A(3, 2)$ ,  $B(5, 6)$ .

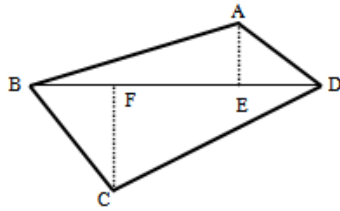
- מצא את שיעורי הנקודה D אם ידוע שהיא נמצאת מימין לציר ה- $y$ .
- מצא את שיעורי הנקודה C.
- ענה על הסעיפים הבאים:
  - חשב את השיפועים:  $m_{AD}$ ,  $m_{AB}$ .
  - מה ניתן לומר על המעוין ABCD?



20) בריבוע ABCD שיעורי נקודת פגישת האלכסונים K הם: (6,8).

הקדקוד B נמצא על ציר ה- $y$  והקדקוד D נמצא על ציר ה- $x$  (הקדקודים לא על ראשית הצירים).

- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-D.
- מצא את משוואת הישר AC.
- חשב את שטח הריבוע.

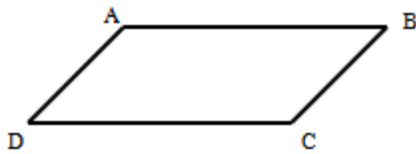


21) נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם:

$A(3,13)$ ,  $B(-2,4)$ ,  $C(9,3)$ ,  $D(8,14)$

מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

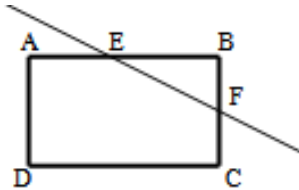
- מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
- מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
- מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
- חשב את שטח המרובע ABCD.



22) נתון מרובע ABCD ששיעורי קדקודיו הם:

$A(5,32)$ ,  $B(7,36)$ ,  $C(5,26)$ ,  $D(3,22)$

- הוכח שהמרובע הוא מקבילית.
- כתוב את משוואת האלכסון AC.
- מצא את נקודת פגישת האלכסונים של המקבילית.
- מצא את משוואת הישר המקביל לצלעות AB ו-CD של המקבילית ועובר דרך נקודת פגישת האלכסונים.



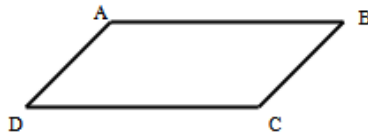
23) המרובע ABCD הוא מלבן. שיעורי הקדקוד B הם

(1,6) ושיפוע הצלע AB הוא:  $m = 3$ . דרך אמצעי

הצלעות AB ו-BC מעבירים ישר שמשוואתו

היא:  $y = \frac{1}{2}x + 3$  החותך בנקודות E ו-F בהתאמה.

- מצא את משוואות הצלעות AB ו-BC.
- מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
- מצא את שיעורי הקדקודים A ו-C.



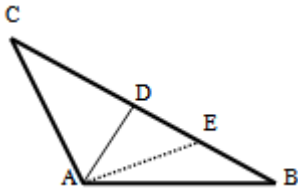
**24** המרובע ABCD הוא מקבילית שבו אורך הצלע AB גדול פי 2 מאורך הצלע BC.

נתון:  $x_D = 4.5$ ,  $A(2,5)$ ,  $B(7,17)$  הנקודה D נמצאת ברביע הרביעי.

א. מצא את שיעור ה- $y$  של הנקודה D ( $y_D = ?$ ).

ב. מצא את שיעורי נקודת פגישת האלכסונים של המקבילית.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.



**25** המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).

מעבירים במשולש את הגובה לבסיס AD ומסמנים

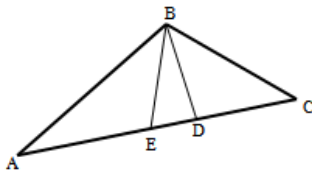
נקודה E על הבסיס BC כך שמתקיים:  $BE = DE$ .

קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים

ונתון כי:  $D(5,7)$ ,  $E(8.5,2.5)$ .

א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



**26** הקדקוד A של המשולש ABC נמצא בראשית הצירים.

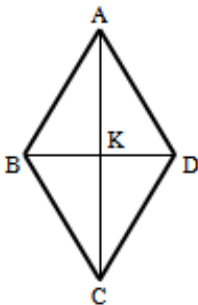
מורידים גובה BD ותיכון BE לצלע AC כמתואר

באזור. ידוע כי:  $m_{BD} = -4$ ,  $B(4,18)$ ,  $x_E = 6$ .

א. מצא את משוואת הגובה BD.

ב. מצא את משוואת הצלע AC.

ג. חשב את שיעורי הנקודות D, E ו-C.



**27** המרובע ABCD הוא מעוין. הנקודה K היא נקודת פגישת

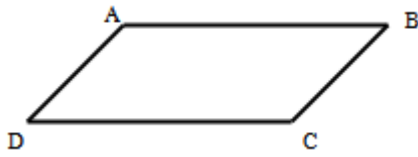
אלכסוני המעוין. ידוע כי:  $m_{AB} = 2$ ,  $B(1,4)$ .

א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. מצא את שיפוע האלכסון BD.

ג. מצא את משוואת האלכסון AC.

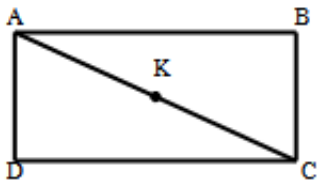
ד. מצא את שיעורי הקדקוד A.



**(28)** המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדול פי 2 מאורך הצלע הסמוכה לה. שיעורי שניים מקודקודי המקבילית הם:  $A(9,8)$ ,  $B(1,2)$ .

שיעורי הנקודה C, אשר נמצאת ברביע הראשון, מקיימים:  $x_C = y_C$ .

- מצא את אורך הצלע AB.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- מצא את שיעורי נקודת פגישת האלכסונים.
- מצא את שיעורי הקדקוד D.

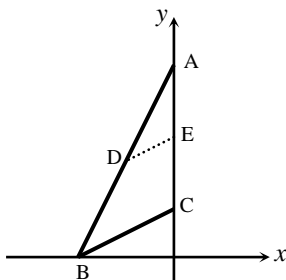


**(29)** במלבן ABCD שיעורי הנקודה D הם  $(-1,7)$ . שיעורי נקודת פגישת האלכסונים K הם  $(1.5, 4.5)$ .

ושיפוע האלכסון AC הוא:  $m_{AC} = 7$ .

שיפוע הצלע CD הוא:  $m_{CD} = \frac{1}{3}$ .

- מצא את שיעורי הקדקוד B.
- מצא את משוואת הצלע AB.
- מצא את משוואת האלכסון AC ואת שיעורי הקדקוד A.



**(30)** הצלע AC של המשולש ABC נמצאת על ציר ה- $y$ .

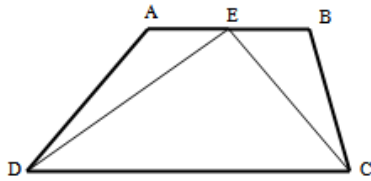
שיעורי הנקודה C הם  $(0,2)$  ושיעורי הנקודה A הם  $(0,12)$ .

הנקודה E היא אמצע הצלע AC.

הנקודה B נמצאת על ציר ה- $x$  ושיעור ה- $x$  שלה הוא:  $x_B = -4$ .

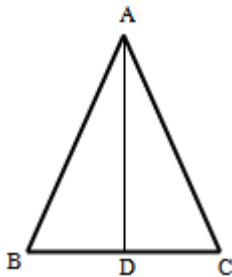
מעבירים דרך הנקודה E ישר DE המקביל לצלע BC.

- מצא את שיעורי הנקודה E.
- כתוב את משוואת הצלע BC.
- כתוב את משוואת הישר DE.
- מצא את שיעורי הנקודה D.



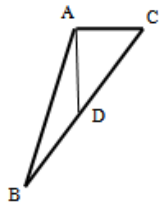
- 31) המרובע ABCD הוא טרפז.**  
 הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה- $x$ . שיעורי הנקודה B הם  $(3, 2)$  והצלע AD מונחת על הישר:  $x = -5$ .  
 אורך הקטע DE הוא  $\sqrt{80}$  כך ש-D ברביע השלישי וכן:  $\angle DEC = 90^\circ$ .

- מצא את שיעורי הנקודות A, D ו-E (ברביע השלישי).
- מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.
- מצא את שיעורי הנקודה C.
- חשב את שטח המשולש DEC.



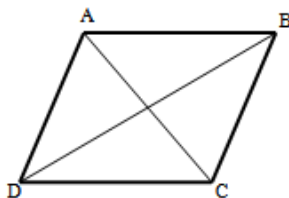
- 32) המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).**  
 הבסיס BC נמצא על הישר:  $y = -2$ . מקצים נקודה D על הבסיס BC כך שלקדקוד A ולנקודה D מתקיים:  $x_A = x_D = 1$ . הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B נמצאת ברביע השלישי. נתון כי:  $d_{BD} = 5$ .

- איזה קטע הוא AD במשולש ABC? נמק את תשובתך.
- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
- שטח המשולש הוא 20. מצא את שיעורי הקדקוד A.

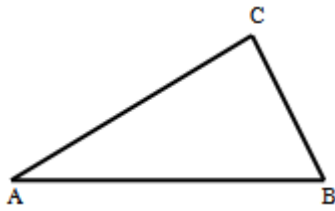


- 33) הצלע AC של המשולש ABC מונחת על הישר:  $y = 8$ .**  
 הקטע AD הוא תיכון לצלע BC ומשוואתו היא:  $x = 3$ .  
 נתון:  $B(-1, -2)$ .

- מצא את שיעורי הקדקוד C וכתוב את משוואת הצלע BC.
- איזה משולש הוא המשולש ACD? נמק וחשב את שטחו.
- חשב את שטח המשולש ABC.



- 34) המרובע ABCD הוא מעוין שאלכסונו נפגשים בראשית הצירים.**  
 שיעורי אחד מקדוקדי המעוין הם  $(-2, 2)$ .
- מצא את משוואות האלכסונים של המעוין.
  - ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחד מקדוקדי המעוין הוא 5. מצא את שאר קדוקדי המעוין.
  - חשב את שטח המעוין.

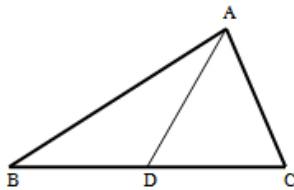


**35** נתון משולש ABC. הצלע AB מונחת על הישר:  $y = x + 2$  והצלע BC מונחת על הישר:  $y = 2x - 5$ .

- מצא את שיעורי הנקודה B.
- ידוע כי שיעור ה- $x$  של הנקודה A הוא 1. מצא את שיעור ה- $y$  של הנקודה A.

ג. כתוב את משוואת הישר AC אם ידוע כי שיפועו הוא:  $m = \frac{1}{2}$ .

ד. מצא את שיעורי הנקודה C.



**36** הקטע AD הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC. ידוע כי:  $B(1,1)$ ,  $D(2,3)$ .

- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- מצא את משוואת הצלע BC.
- הצלעות AC ו-AB מונחות בהתאמה על הישרים:  $y = x$ ,  $y = 8 - x$ .
- מצא את שיעורי הקדקוד A.
- חשב את אורך התיכון AD.



**37** באיור שלפניך מתואר הקטע שקצותיו הם :

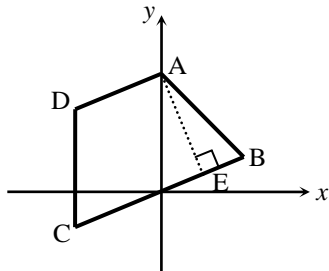
$$A(-5,-2) \text{ ו- } B(0,10)$$



- מצא את אורך הקטע AB.
- הנקודה C היא אמצע הקטע AB. מצא את שיעורי הנקודה C.
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה C והנקודה  $(2.5, 9)$ .
- קבע אלו מהנקודות הבאות נמצאות על הישר שמצאת בסעיף הקודם. נמק את בחירתך.  
I.  $(4.5, 11)$     II.  $(6.5, 11)$     III.  $(0.5, 6)$

**38** באיור שלפניך נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם :

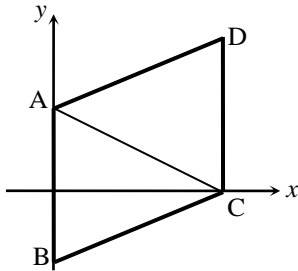
$$A(0,10), B(6,3), C(-6,-3), D(-6,7)$$



- כתוב את משוואות הישרים AD ו-BC.
- הסבר מדוע המרובע הוא טרפז.
- נתון כי AE הוא גובה הטרפז.  
i. מצא את משוואת הישר AE.  
ii. מצא את שיעורי הנקודה E.

**39** באיור שלפניך נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם :

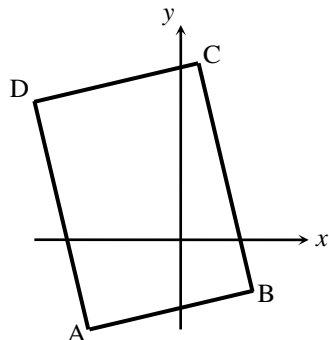
$$(8,0), (0,-4), (0,5), (8,9)$$



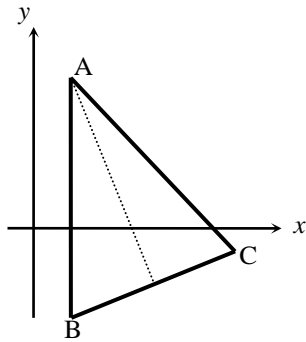
- התאם את הנקודות לקדקודים שבאיור.
- האם המרובע הוא מעוין? נמק ע"י חישוב מתאים.
- מעבירים את הקטע AC.  
i. מצא את משוואת הישר AC.  
ii. חשב את שטח המשולש ABC.

**40** באיור שלפניך נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם :

$$(2,13), (5,-5), (-7,-7), (-10,11)$$



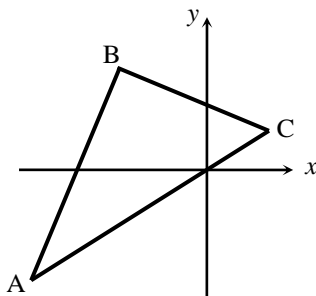
- התאם את הנקודות לקדקודים שבאיור.
- הוכח כי המרובע הוא מלבן. נמק ע"י חישוב.
- ענה על הסעיפים הבאים:  
i. חשב את אורכי צלעות המלבן.  
ii. חשב את שטח המלבן.



41 באיור שלפניך נתון משולש ABC שקדקודיו הם :

$$A(2,6) , B(2,-4) , C(8,-2)$$

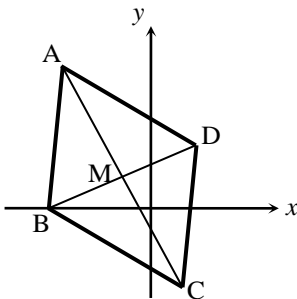
- מצא את משוואת הגובה לצלע BC.
- מצא את משוואת התיכון לצלע BC.
- הוכח כי המשולש הוא שווה שוקיים.  
(אפשר להסתמך על סעיפים קודמים).
- חשב את שטח המשולש.



42 באיור שלפניך נתון משולש ABC שקדקודיו הם :

$$A(-16,-12) , B(-6,8) , C(4,3)$$

- העתק את האיור למחברתך ומצא את אורך הצלע AC.
- ענה על הסעיפים הבאים :
  - סמן נקודה D על הצלע AC ומצא את משוואת התיכון BD לצלע AC.
  - חשב את אורך התיכון BD.
  - הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית.  
(אפשר להסתמך על סעיפים קודמים).
  - חשב את היקף המשולש ABD.



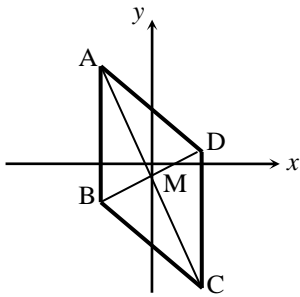
43 נתון מעוין ABCD.

אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M.

$$A(-7,9) , C(1,-3)$$

ידוע כי :

- מצא את שיעורי הנקודה M.
- מצא את משוואת האלכסון BD.
- מצא את הקדקודים B ו-D אם ידוע כי B נמצאת על ציר ה-x.
- חשב את שטח המעוין.



44 נתון מעוין ABCD. אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M. ידוע כי שיעורי הקדקוד C הם:  $(6, -19)$ .

משוואת אחד מאלכסוני המעוין היא:  $y = \frac{1}{3}x - 1$ .

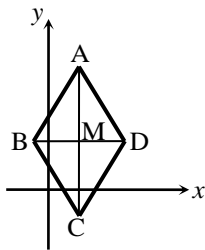
א. קבע לאיזה מבין האלכסונים AC, BD מתאימה המשוואה. נמק.

ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על ציר ה- $y$ .

מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הצלע AB אם ידוע כי שיעור ה- $y$  של הקדקוד D הוא 1.

ד. חשב את היקף המעוין.



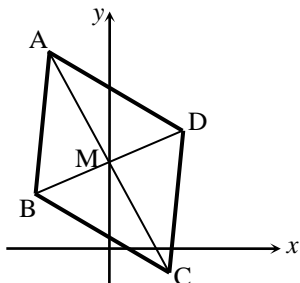
45 נתון מעוין ABCD. ידוע כי האלכסון AC גדול ב-4 יחידות מהאלכסון BD. אלכסוני המעוין מאונכים לצירים ונפגשים בנקודה:  $M(3, 4)$ .

א. מהו שיעור ה- $x$  של הקדקוד A?

ב. ידוע כי שיעור ה- $y$  של הקדקוד A הוא 10.

מצא את שיעורי הנקודה D.

ג. חשב את שטח המשולש AMD.



46 נתון מעוין ABCD.

משוואות האלכסונים של המעוין הם:  $y = -3x + 5$

ו-  $3y - x = 15$ .

א. מצא את שיעורי נקודת מפגש האלכסונים M.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים A ו-C אם ידוע כי

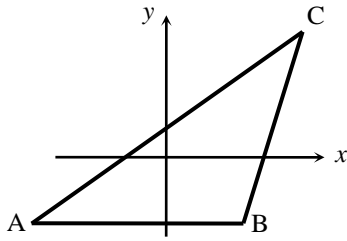
אורך האלכסון AC הוא:  $\sqrt{160}$  ס"מ.

ג. נתון כי:  $y_D = y_M + 1$ .

(שיעור ה- $y$  של הקדקוד D גדול ב-1 משיעור ה- $y$  של נקודת מפגש

האלכסונים M). חשב את שטח המעוין.





50) על הישר  $y = -5$  מסמנים את הנקודות

$$A(-7, -5); B(2, -5)$$

הנקודה C נמצאת על הישר:  $y = x - 5$  ברביע הראשון.

נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה C ב- $t$ .

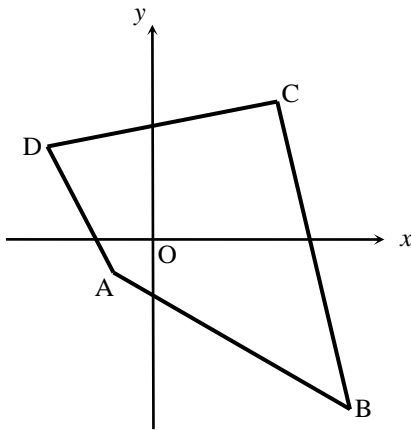
א. הבע באמצעות  $t$  את שיעור ה- $y$  של הנקודה C.

ב. ידוע כי מרחק הנקודה C מ-A גדול ב-7 ממרחק מ-B.

i. הבע באמצעות  $t$  את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ii. מצא את  $t$ .

ג. חשב את היקף המשולש ABC.



51) באיור שלפניך נתון מרובע ABCD ששלושה

מקדקודיו הם:

$$A(-2, -2), B(12, -12), D(-6, 6)$$

ידוע כי סכום המרחקים של כל הקדקודים

מהראשית הוא:  $28\sqrt{2}$  יחידות.

א. מצא את המרחק של קדקוד C מהראשית.

ב. ידוע כי הנקודות A, C ו-O נמצאות על ישר

אחד. מצא את שיעורי הנקודה C.

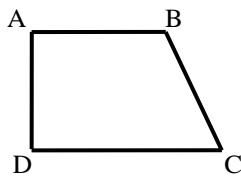
ג. חשב את שטח המרובע ABCD.

ד. מעבירים דרך הנקודה D ישר המקביל

לצלע AB וחותך את הצלע BC בנקודה E.

i. מצא את משוואת הישר.

ii. מצא את שיעורי הנקודה E.



52) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית

( $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB \parallel CD$ ). השוק AD יושבת על הישר  $y = x$

$$x_A = x_D + 5$$

שיעורי הקדקוד B הם:  $(10, -2)$ .

א. מצא את שיעורי הקדקודים A ו-D.

ב. שטח הטרפז הוא: 110 יחידות שטח.

מצא את שיעורי הקדקוד C (הבחן בין שני מקרים).

ג. מצא את המקרה המתאים לנתון:  $d_{BC} = \sqrt{250}$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$  . ב.  $(5,5)$  ,  $(-1,1)$  ,  $(4,0)$  .
- (2) א. מרובע כלשהו - לא ניתן להצביע על אף תכונה.  
ב. מלבן - ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.  
ג. ריבוע - ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות.  
ד.  $S = 90$  .
- (3) א.  $B(-6, -8)$  .  
ב. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון ששווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה אז המשולש הוא ישר זווית.  
ג.  $S = 96$  .
- (4) א.  $D(-5, 2)$  ,  $B(-2, 0)$  .  
ב. משולש שווה שוקיים - הקטע CD הוא אנך אמצעי ולכן הוא תיכון וגובה ולבסיס במשולש ABC.  
ג.  $C(0, 9.5)$  . ד.  $S = 32.5$  .
- (5) א.  $AC : y = -3x - 24$  ,  $BC : y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$  .  
ב.  $A(0, -24)$  ,  $B(2, 0)$  ,  $D(-9, -27)$  . ג.  $S = 210$  .
- (6) א.  $d_{AC} = 1$  ,  $D(5, 8)$  . ב.  $E(-0.2, 5.4)$  .
- (7) א.  $A(0, 8)$  ,  $B(0, 4)$  ,  $C(8, 0)$  ,  $D(8, 4)$  . ב.  $x = 0$  . ג.  $S = 32$  .
- (8) א.  $A(4, 6)$  ,  $B(4, 0)$  ,  $C(0, -2)$  ,  $D(0, 8)$  . ב.  $E(10, 3)$  ,  $F(16, 0)$  .  
ג.  $\frac{S_{BEF}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{16}$  .
- (9) א.  $AB : y = 2x - 3$  ,  $BD : y = 6x + 1$  . ב.  $CD : y = 2x + 5$  .  
ג. טרפז - ניתן להראות שיש זוג צלעות נגדיות מקבילות (AB ו-CD) ואינן שוות.
- (10) א.  $E(1, 10)$  ,  $F(9, 6)$  . ב.  $d_{EF} = d_{DF} = \sqrt{80}$  .  
ג. משולש שווה שוקיים. ד. 32 יח"ש.
- (11) א.  $y = -x + 4$  . ב.  $m = -\frac{1}{2}$  . ג.  $C(4, 8)$  .

**(12)** א.  $AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$ ,  $AC: y = -x + 8$  ב.  $A(7,1)$

ג.  $BE: y = x + 2$ ,  $BC: y = 3x + 10$  ד.  $B(-4,2)$

**(13)** ריבוע.

**(14)** א.  $A(0,12)$ ,  $B(4,0)$ ,  $D(0,1)$  ב.  $C(-4,2)$ ,  $S_{ABC} = 22$

ג. תיכון - קטע במשולש המחלק אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.

ד.  $S_{ABC} = 44$

**(15)** א.  $y = -2x + 22$  ב.  $B(9,4)$ ,  $D(4,4)$  ג.  $d_{AD} = 5$ ,  $d_{BC} = 10$

ד. 1. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.

ד. 2. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

**(16)** א.  $B(-5,1)$  ב.  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$  ג.  $A(2,8)$ ,  $C(-2,0)$

**(17)** א.  $A(8,15)$ ,  $B(8,-9)$  ב.  $C(-2,-9)$ ,  $D(-2,15)$  ג.  $S_{ABCD} = 240$

**(18)** א.  $A(2,7)$ ,  $B(1,2)$ ,  $C(3,8)$

ב.  $y + x = 3$ ,  $3y + x = 23$ ,  $5y + x = 43$

**(19)** א.  $D(7,0)$  ב.  $C(9,4)$  ג. 1.  $m_{AB} = 2$

ג. 2. המעוין ABCD הוא ריבוע. מעוין עם זווית ישרה הוא ריבוע.

**(20)** א.  $B(0,16)$ ,  $D(12,0)$  ב.  $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2}$  ג.  $S_{ABCD} = 200$

**(21)** א.  $d_{BD} = \sqrt{200}$ ,  $y = x + 6$  ב.  $E(5,11)$ ,  $F(3,9)$

ג.  $d_{CF} = \sqrt{72}$ ,  $d_{AE} = \sqrt{8}$  ד.  $S_{ABCD} = 80$

**(22)** ב.  $x = 5$  ג.  $(5,29)$  ד.  $y = 2x + 19$

**(23)** א.  $AB: y = 3x + 3$ ,  $BC: y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$  ב.  $E(0,3)$ ,  $F(4,5)$

ג.  $A(-1,0)$ ,  $C(7,4)$

**(24)** א.  $y_D = -1$  (הפתרון השני נפסל מאחר שהנקודה D נמצאת ברביע הרביעי

שבו ערך שיעור ה- $y$  הוא שלילי).

ב.  $(5.75, 8)$

ג.  $C(9.5, 11)$

**(25)** א.  $B(12, -2)$ ,  $C(-2, 16)$  ב.  $y = -8x$

- (26)** א.  $y = -4x + 34$       ב.  $y = \frac{1}{4}x$       ג.  $C(12,3)$  ,  $D(8,2)$  ,  $E(6,1.5)$
- (27)** א.  $y = 2x + 2$       ב.  $m_{BD} = \frac{3}{4}$       ג.  $3y + 4x = 41$       ד.  $A(3.5,9)$
- (28)** א.  $d_{AB} = 10$       ב.  $C(5,5)$       ג.  $(7,6.5)$       ד.  $D(13,11)$
- (29)** א.  $B(4,2)$       ב.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$       ג.  $A(1,1)$  ,  $y = 7x - 6$
- (30)** א.  $E(0,7)$       ב.  $y = \frac{1}{2}x + 2$       ג.  $y = \frac{1}{2}x + 7$       ד.  $D(-2,6)$
- (31)** א.  $A(-5,-2)$  ,  $D(-5,-8)$  ,  $E(-1,0)$
- ב.  $CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  ,  $CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$       ג.  $C(5,-3)$       ד.  $S_{DEC} = 30$
- (32)** א. תיכון/גובה/חוצה זווית הראש – הקטע AD מאונך לבסיס BC  
ולכן מקיים את שלושתם.  
ג.  $A(1,2)$
- (33)** א.  $y = 1.25x - 0.75$  ,  $C(7,8)$   
ב. משולש ישר זווית. הקטעים AC ו-AD מאונכים.  $S_{ACD} = 10$   
ג.  $S_{ABC} = 20$
- (34)** א.  $y = x$  ,  $y = -x$       ב.  $(5,5)$  ,  $(-5,-5)$  ,  $(2,-2)$       ג.  $S_{ABCD} = 40$
- (35)** א.  $B(7,9)$       ב.  $y = 3$       ג.  $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$       ד.  $C(5,5)$
- (36)** א.  $C(3,5)$       ב.  $y = 2x - 1$       ג.  $A(4,4)$       ד.  $d_{AD} = \sqrt{5}$
- (37)** א.  $d_{AB} = 13$       ב.  $C(-2.5,4)$       ג.  $y = x + 6.5$
- ד. I. שאר הנקודות לא מקיימות את משוואת הישר.
- (38)** א.  $AD: y = 0.5x + 10$  ;  $BC: y = 0.5x$   
ב. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ולא שוות הוא טרפז.  
ג. 1.  $y = -2x + 10$       2.  $(4,2)$
- (39)** א.  $C(8,0)$  ,  $B(0,-4)$  ,  $A(0,5)$  ,  $D(8,9)$   
ב. לא. מכיוון שאורכי שתי צלעות סמוכות לא שוות.  
ג. 1.  $8y + 5x = 40$       2.  $S_{ABC} = 36$



- (40)** א.  $D(-10,11)$  ,  $A(-7,-7)$  ,  $B(5,-5)$  ,  $C(2,13)$   
 ב. מוכיחים לפי מקבילות ואנכים.  
 ג. i.  $\sqrt{148} \approx 12.16$  ,  $\sqrt{333} \approx 18.24$  ii.  $S_{ABCD} = 222$  .
- (41)** א.  $y = -3x + 12$  ב.  $y = -3x + 12$   
 ג. אם במשולש תיכון וגובה מתלכדים אז הוא ש"ש.  
 ד.  $S_{ABC} = 30$  .
- (42)** א.  $d_{AC} = 25$  ב. 1.  $x = -6$  ב. 2. 12.5  
 ג. אם במשולש תיכון לצלע שווה למחציתה אז הוא ישר זווית.  
 ד.  $P_{ABD} = 25 + \sqrt{500} \approx 47.36$  .
- (43)** א.  $M(-3,3)$  ב.  $3y - 2x = 15$  ג.  $B(-7.5,0)$  ,  $D(1.5,6)$   
 ד.  $S_{ABCD} = 78$  .
- (44)** א. לאלכסון BD ב.  $A(-6,17)$  ג.  $x = -6$  ד.  $P_{ABCD} = 80$  .
- (45)** א.  $x_A = 3$  ב.  $D(7,4)$  ג.  $S_{AMD} = 12$  .
- (46)** א.  $M(0,5)$  ב.  $A(-2,11)$  ,  $C(2,-1)$  ג.  $S_{ABCD} = 40$  .
- (47)** א.  $A(2,0)$  ,  $B(0,10)$  ב.  $5y - x = -2$  ג.  $C(-8,-2)$  . ד. 1.  $D(2.4,-2)$  . ד. 2.  $S_{BCD} = 62.4$  .
- (48)** א. 1.  $y = -2.4x + 7$  א. 2. 13 ב.  $C(-8,-5)$  ג.  $D(-4,1)$   
 ד.  $S_{ABC} = 78$  .
- (49)** א.  $C(t, -0.75t)$  ב.  $AC = 1.5t$  ;  $AB = 2.5t$  ג.  $t = 4$   
 ד.  $S_{ABC} = 24$  .
- (50)** א.  $C(t, t-5)$  ב. 1.  $AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}$  ;  $BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$  ג.  $P_{ABC} = 36$  ב. 2.  $t = 8$  .
- (51)** א.  $d_{CO} = 8\sqrt{2}$  ב.  $C(8,8)$  ג.  $S_{ABCD} = 180$   
 ד. 1.  $y = -\frac{5}{7}x + \frac{12}{7}$  ד. 2.  $E(10.8, -6)$  .
- (52)** א.  $A(4,4)$  ,  $D(-1,-1)$  ב.  $C(-17,15)$  ,  $C(15,-17)$   
 ג.  $C(15,-17)$  .

## תוכן העניינים:

115	פרק 6.....
115	גאומטריה אנליטית - המעגל.....
115	המעגל : .....
115	הגדרה : .....
115	משוואת מעגל : .....
115	משוואת מעגל קנוני : .....
116	שאלות : .....
116	שאלות יסודיות במציאת משוואת מעגל : .....
119	שאלות עם מעגלים המשיקים לצירים : .....
119	שאלות עם משיק למעגל : .....
120	שאלות מסכמות : .....
121	תשובות סופיות : .....
123	תרגול נוסף - המעגל (שאלות מסכמות ללא משיק) : .....
129	תרגול נוסף - המעגל (שאלות מסכמות כולל משיק) : .....
138	תרגול נוסף – המעגל (שאלות מסכמות עם שני מעגלים) : .....
139	תשובות סופיות : .....

## פרק 6

# גאומטריה אנליטית - המעגל

---

### המעגל:

#### הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

#### משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה  $M(a,b)$  ורדיוסו  $R$  היא:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ .

#### משוואת מעגל קנוני:

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים  $M(0,0)$ )

ורדיוסו  $R$  היא:  $x^2 + y^2 = R^2$ .

## שאלות:

### שאלות יסודיות במציאת משוואת מעגל:

(1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א.  $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב.  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג.  $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

(2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם R:

א.  $M(-3,5), R=10$

ב.  $M(4,-2), R=3$

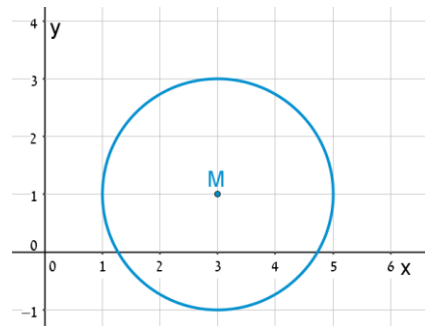
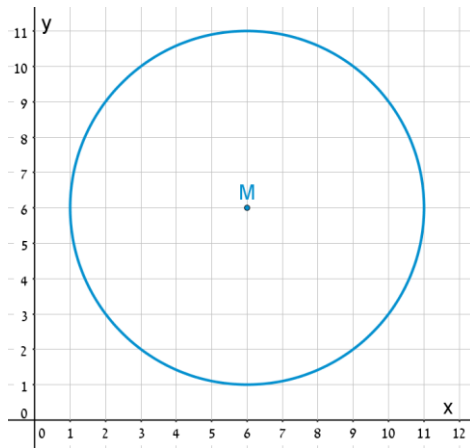
ג.  $M(10,-12), R=\sqrt{30}$

ד.  $M(5,5), R=\sqrt{40}$

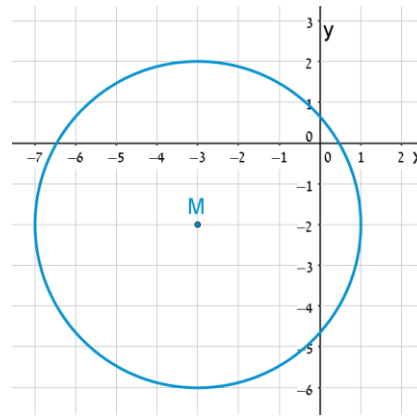
(3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

א.

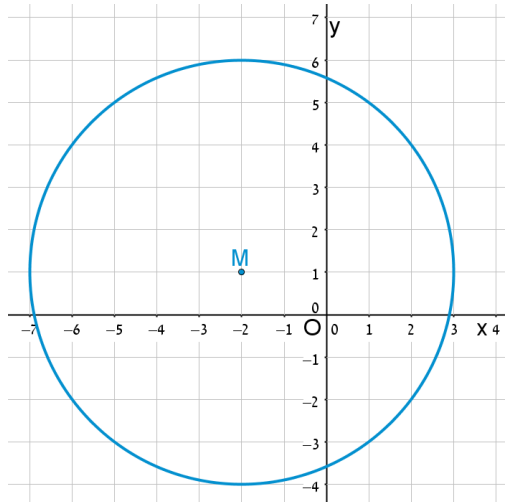
ב.



ג.



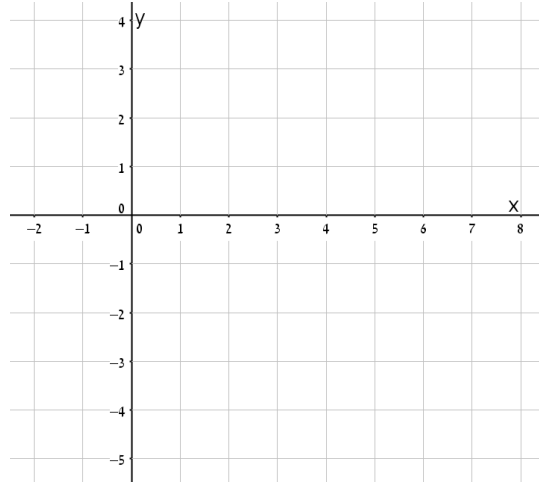
ד.



- (4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה  $A(-4, 5)$  ומרכזו בנקודה  $O(2, -1)$ .
- (5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M(-5, 6)$  והוא חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 9$ .
- (6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M(0, -7)$  והוא חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 3$ .
- (7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה  $A(11, 2)$ , רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר  $y = 2x - 1$ .
- (8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות  $A(-2, 3)$  ו- $B(4, -3)$  הן קצות הקוטר שלו.
- (9) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר  $x = 4$ , רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- $x$  מיתר שאורכו 12.

**10** נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז  $M(3, -1)$ , האחד הוא בעל רדיוס  $R$  והשני בעל רדיוס של  $2R$ .

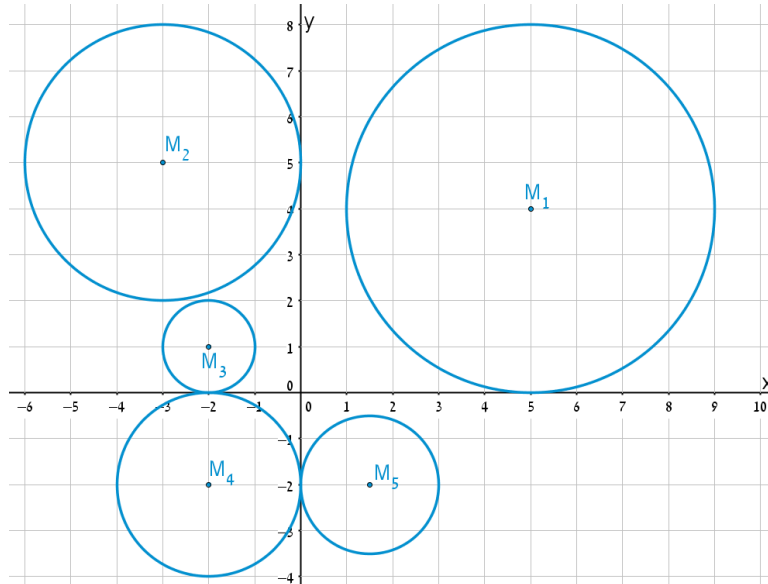
- כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות  $R$ ).
- מה תהיינה המשוואות עבור  $R = 2$ ?
- צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.



**11** שני מעגלים עם מרכזים  $M_1(6, 2)$  ו-  $M_2(-3, -4)$  חותכים זה את זה בנקודה  $(-2, 3)$ . מצא את משוואות המעגלים.

## שאלות עם מעגלים המשיקים לצירים:

12) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



13) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

14) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה- $x$  ומרכזו בנקודה  $M(16, 8)$ .

15) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר  $2x + 3y + 6 = 0$  והוא משיק לשני הצירים.

## שאלות עם משיק למעגל:

16) מצא את משוואות המשיקים למעגל  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$  בנקודות על המעגל שבהן  $y = 5$ .

### שאלות מסכמות:

**17** נתון מעגל שמשוואתו  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- $x$ . מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

**18** נתון ישר שמשוואתו  $y = 2x - 10$ . הישר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A ואת ציר ה- $y$  בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את ציר ה- $y$  בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

**19** נתון המעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 81$ . מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- $x$ . הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C. מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (ראשית הצירים).



## תשובות סופיות:

$$\text{א. } M(3, -5), R = 7 \quad \text{ב. } M(-0.5, 0), R = \sqrt{10} \quad \text{(1)}$$

$$\text{ג. } M(m, -n), R = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

$$\text{א. } (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \text{ב. } (x+3)^2 + (y-5)^2 = 100 \quad \text{(2)}$$

$$\text{ג. } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 40 \quad \text{ד. } (x-10)^2 + (y+12)^2 = 30$$

$$\text{א. } (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \text{ב. } (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \quad \text{(3)}$$

$$\text{ג. } (x+3)^2 + (y+2)^2 = 16 \quad \text{ד. } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$\text{א. } M(3, -3), (x-2)^2 + (y+1)^2 = 72 \quad \text{(4)}$$

$$\text{ב. } (x+5)^2 + (y-6)^2 = 232 \quad \text{(5)}$$

$$\text{ג. } x^2 + (y+7)^2 = 100 \quad \text{(6)}$$

$$\text{א. } (x+1)^2 + (y+3)^2 = 169 \quad \text{ב. } (x-7.8)^2 + (y+14.6)^2 = 169 \quad \text{(7)}$$

$$\text{ג. } (x-1)^2 + y^2 = 18 \quad \text{(8)}$$

$$\text{א. } (x-4)^2 + (y-8)^2 = 100 \quad \text{ב. } (x-4)^2 + (y+8)^2 = 100 \quad \text{(9)}$$

$$\text{א. } (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4R^2, (x-3)^2 + (y+1)^2 = R^2 \quad \text{(10)}$$

$$\text{ב. } (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\text{א. } (x+3)^2 + (y+4)^2 = 50, (x-6)^2 + (y-2)^2 = 65 \quad \text{(11)}$$

$$M_1 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16, M_2 : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 9$$

$$M_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1, M_4 : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4 \quad \text{(12)}$$

$$M_5 : (x-1.5)^2 + (y+2)^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$\text{א. } (x\pm 4)^2 + (y\pm 4)^2 = 16 \quad \text{(13)}$$

$$(x-16)^2 + (y-8)^2 = 64 \quad (14)$$

$$\left(x + 1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y + 1\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}, \quad (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36 \quad (15)$$

$$4x + 3y = 27 \text{ ו- } 4x - 3y + 35 = 0 \quad (16)$$

$$(0,0), (6,0), (0,-8) \text{ א. } (17) \quad \text{ב. } 27 \text{ יח"ש.}$$

$$12.5 \text{ יחידות אורך. } (18)$$

$$S_{\triangle BOC} = \sqrt{80} \text{ יח"ש. } (19)$$

## תרגול נוסף - המעגל (שאלות מסכמות ללא משיק):

(1) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של הישרים:  $y = 2x - 1$

ו-  $y = -3x + 14$  ורדיוסו הוא:  $R = \sqrt{34}$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של מעגל זה עם הצירים.

ב. חשב את שטח המשולש שקדקודיו הם נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים (שמצאת שסעיף הקודם).

(2) נתון המעגל:  $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 50$ .

ישר שמשוואתו:  $6y = 8x + 12$  חותך את המעגל בשתי נקודות כך שנוצר מיתר בניהן.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך בין הישר למעגל.

ב. חשב את אורך המיתר הנ"ל.

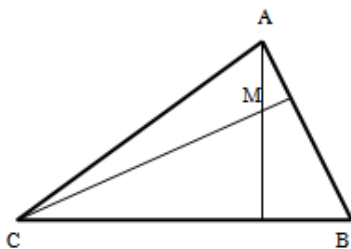
(3) הנקודה  $(12, 5)$  נמצאת על היקף המעגל שמשוואתו היא:  $(x-a)^2 + (y-8)^2 = 25$

כאשר:  $a < 10$  פרמטר ממשי.

א. מצא את  $a$ .

ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונח הקוטר המחבר בין הנקודה  $(12, 5)$  למרכז המעגל.

ג. חשב את המרחק של הנקודה  $(12, 5)$  מראשית הצירים.



(4) משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן

בהתאמה:  $2y - x = 56$  ו-  $8y + x = 104$ .

מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה  $M(0, -2)$  שבתוך המשולש.

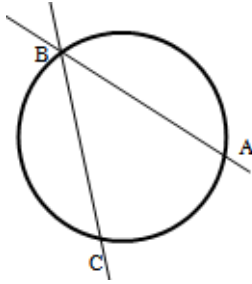
א. מצא את משוואות הגבהים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.

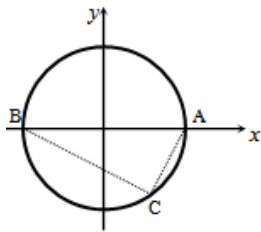
- 5) קדקודי המרובע ABCD הם:  $A(3,8)$ ,  $B(6,5)$ ,  $C(3,2)$ ,  $D(0,5)$ .  
חוסמים את מרובע זה בתוך מעגל.

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?  
(מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע או טרפז כלשהו)  
(היעזר בחישובי שיפועי ומרחקי צלעות).  
ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את המרובע ABCD.

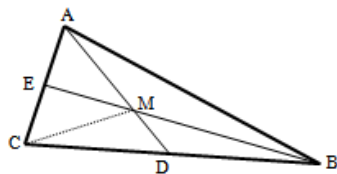


- 6) הישרים:  $9y + 11x = 94$  ו-  $y = -3x + 14$  נחתכים  
בנקודה B. בנקודה זו עובר מעגל שמרכזו  
בנקודה:  $M(-9,1)$ . ידוע שמעגל זה חותך את הישרים  
(חוץ מהנקודה B) בשתי הנקודות A ו-C (ראה איור).  
א. מצא את שיעורי הנקודה B.  
ב. מצא את משוואת המעגל.

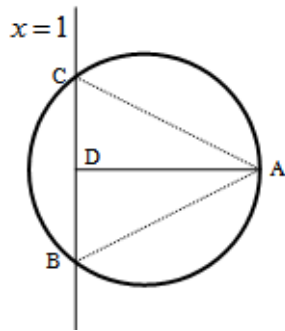
ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר  
שמשוואתו:  $y = -3x + 14$  עם המעגל.



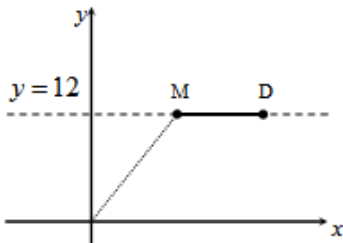
- 7) בשרטוט שלפניך מתואר המעגל הקנוני:  $x^2 + y^2 = 289$ .  
המעגל חותך את ציר ה-  $x$  בנקודות A ו-B.  
הנקודה C נמצאת על היקף המעגל ברביע הרביעי כך  
שנוצר המשולש ABC.  
ידוע ששיעור ה-  $x$  בנקודה C הוא 15.  
א. מצא את שיעור ה-  $y$  של הנקודה C.  
ב. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B ואת שטח  
המשולש ABC.  
ג. מצא נקודה D ברביע השלישי כך ששטח המשולש ABD יהיה זהה  
לשטח המשולש ABC.



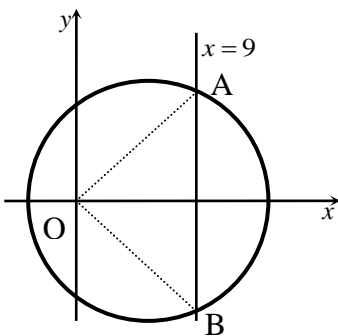
- 8) קדקודי המשולש ABC הם:  $A(2,5)$ ,  $B(7,-3)$  ו-  $C(0,1)$ .  
מעבירים תיכונים AD ו-BE.  
לצלעות AC ו-BC בהתאמה. מנקודת פגישת  
התיכונים M מותחים את הקטע CM כך שנוצר  
מעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע CM.  
א. מצא את משוואות התיכונים AD ו-BE.  
ב. מצא את שיעורי הנקודה M ואת אורך הקטע CM.  
ג. כתוב את משוואת המעגל.



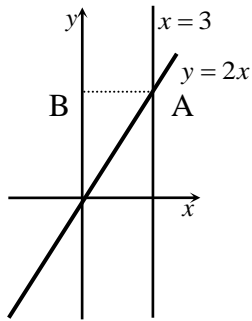
- 9 הנקודה  $A(17, 4)$  נמצאת על המעגל שמשוואתו:  $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$ . הישר  $x=1$  חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.
- מצא את רדיוס המעגל.
  - מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
  - ענה על הסעיפים הבאים:
    - חשב את מרחק הנקודה A מהישר  $x=1$ .
    - חשב את שטח המשולש ABC.



- 10 הנקודות M ו-D נמצאות על הישר  $y=12$ . ידוע כי שיעור ה- $x$  של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק בין הנקודות M ו-D (ראה איור). בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו והוא האורך DM.
- מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
  - מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה D.
  - כתוב את משוואת המעגל.
  - האם המעגל הזה חותך את ציר ה- $x$  ואת ציר ה- $y$ ? הראה חישוב מתאים לטענתך.

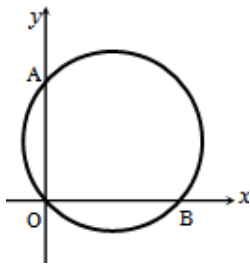


- 11 באיור שלפניך מתואר המעגל שמשוואתו  $(x-6)^2 + y^2 = 45$ . מעבירים את הישר  $x=9$  החותך את המעגל בנקודות A ו-B.
- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
  - כתוב את משוואת הישר AO (ראשית הצירים - O).
  - חשב את שטח המשולש AOB.



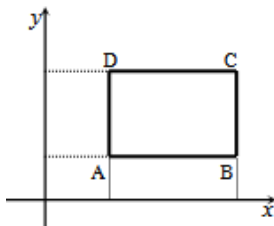
12 באיור שלפניך מתואר הישר:  $y = 2x$ .  
מעבירים את הישר  $x = 3$  החותך את הישר  
הנ"ל בנקודה A.

- מצא את שיעורי הנקודה A.
- מעבירים מהנקודה A אנך AB לציר ה- $y$ .  
כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה B  
ורדיוסו הוא הקטע AB.
- מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם  
ציר ה- $y$ .



13 באיור שלפניך מתואר המעגל:  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ .

- המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.
- מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע  
הראשון כך שהמרובע AOBC יהיה מלבן.
- חשב את היקף המלבן.

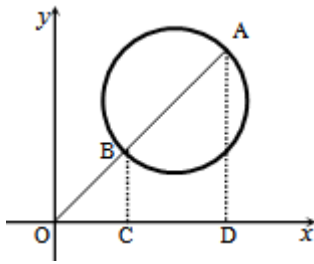


14 באיור שלפניך מתואר מלבן ABCD שצלעותיו מונחות  
על הישרים הבאים:  $y = 2$ ,  $y = 8$ ,  $x = 3$ ,  $x = 11$ .

- מצא את שיעורי הנקודות של קדקודי המלבן.
- חשב את אורך האלכסון במלבן.
- כתוב את משוואת המעגל החוסם את המלבן.
- האם מעגל זה חותך את הציר ה- $x$ ?  
הראה חישוב מתאים.

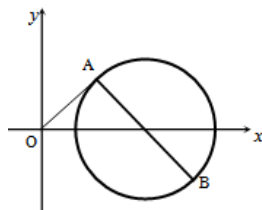
15 ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את נקודת החיתוך של הישרים:  $y = 3x + 7$  ו- $3y = x + 5$ .
- כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של הישרים ועובר  
דרך נקודת החיתוך של הישר:  $3y = x + 5$  עם ציר ה- $x$ .
- מסמנים על הישר:  $y = 3x + 7$  שלוש נקודות A, B ו-C.
- ידוע כי שיעור ה- $x$  של כל נקודה הוא:  $x_A = 1$ ,  $x_B = 0$  ו- $x_C = -1.5$ .  
קבע איזו נקודה נמצאת בתוך המעגל.



16) איור שלפניך נתון המעגל:  $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 32$ .

- הוכח כי מעגל זה אינו חותך את הצירים.
- מעבירים ישר AO המחבר את ראשית הצירים עם מרכז המעגל וחותך את המעגל בנקודות A ו-B. כתוב את משוואת ישר זה.
- מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר עם המעגל.
- מנקודות החיתוך מורידים אנכים AD ו-BC לציר ה-x. חשב את שטח הטרפז ABCD.

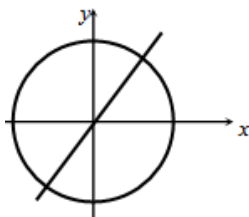


17) באיור שלפניך נתון המעגל:  $(x-6)^2 + y^2 = 5$ .

- הישר:  $y = -0.5x + 3$  חותך את המעגל בשתי נקודות A ו-B.
- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
  - מעבירים את הישר AO (O – ראשית הצירים). חשב את אורך הקטע AO.
  - חשב את שטח המשולש הנוצר בין הקטע AO, ציר ה-x והישר AB.

18) המעגל:  $x^2 + (y-4)^2 = R^2$  חותך את הישר:  $y = x + 7$  בנקודה (2, 9).

- מצא את רדיוס המעגל R.
- מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והמעגל.
- חשב את אורך המיתר שנוצר בין שתי נקודות החיתוך.



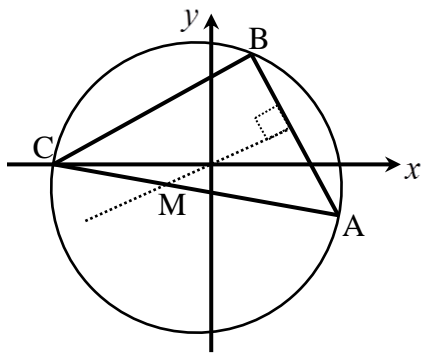
19) הישר שמשוואתו היא:  $y = mx$  חותך את

המעגל:  $x^2 + y^2 = 45$  בנקודה (3, 6).

- מצא את m.
- מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר עם המעגל.
- הראה כי המיתר שנוצר בין שתי נקודות החיתוך של הישר והמעגל הוא קוטר במעגל.

20 נתון משולש ABC שקדקודיו הם:  $A(-2,3)$ ,  $B(4,4)$ ,  $C(4,9)$ .

- מצא את משוואות האנכים האמצעיים לכל צלע במשולש.
- מצא את נקודת מפגש האנכים האמצעיים.
- כתוב את משוואת המעגל החוסם את המשולש.



21 נתון משולש ABC שקדקודיו

הם:  $A(3,-1)$ ,  $B(1,3)$ . הקדקוד C נמצא

על ציר ה- $x$ .

מעבירים אנך אמצעי לצלע AB במשולש.

- מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע AB.

- M היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. מסמנים ב- $t$

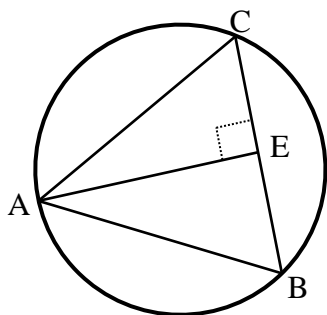
את שיעור ה- $y$  של M.

בטא באמצעות  $t$  את רדיוס המעגל.

- משוואת הצלע AC היא:  $y = -\frac{x}{8} - \frac{5}{8}$ .

- מצא את שיעורי הקדקוד C.

- מצא את  $t$  אם ידוע כי מרכז המעגל נמצא ברביע השלישי.



22 נתון מעגל שמשוואתו:  $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 15\frac{5}{8}$ .

המשולש ABC הוא ש"ש ( $AC = AB$ ) אשר חסום

במעגל. הקטע AE הוא גובה לבסיס BC.

נתון:  $E(2.5, 0.5)$ .

- ענה על הסעיפים הבאים:

- כתוב את משוואת האנך AE.

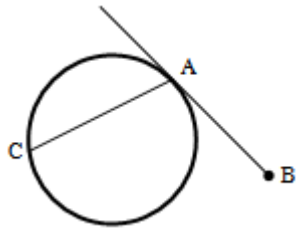
- מצא את שיפוע הצלע BC.

- כתוב את משוואת הצלע BC.

- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C (B ברביע הרביעי).







26 הנקודה  $A(6, 24)$  נמצאת על היקף המעגל

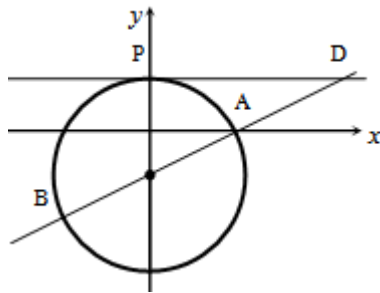
שמשוואתו:  $(x+4)^2 + y^2 = R^2$ .

מנקודה זו מעבירים משיק למעגל. על המשיק מסמנים נקודה B ועל היקף המעגל מסמנים נקודה נוספת C (ראה איור). הנקודה C נמצאת ברביע השלישי, כמו כן ידוע כי:  $x_B = 18$  וכי:  $x_C = -14$ .  
א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את המשוואה.  
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

ג. היעזר בחישוב אורכי הקטעים AB ו-AC וחשב את היחס:  $\frac{AB}{AC}$ .

27 המעגל שמשוואתו:  $(x-4)^2 + (y-b)^2 = 41$  עובר בראשית הצירים ומרכזו נמצא ברביע הרביעי.

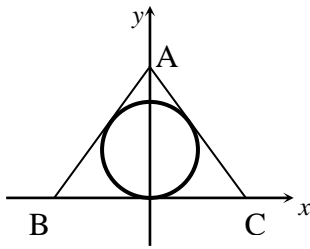
א. מצא את משוואת המעגל.  
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- $x$ .  
ג. מצא את משוואת המשיק בנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.



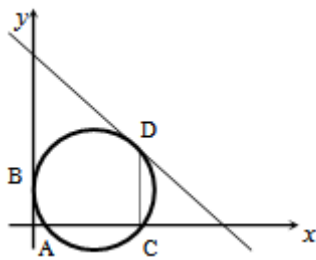
28 הנקודה P נמצאת על היקף המעגל שמשוואתו

היא:  $x^2 + (y+3)^2 = 25$ . מנקודה זו מעבירים משיק אשר מקביל לציר ה- $x$  כמתואר באיור. בנוסף, מעבירים ישר חותך העובר דרך נקודת מרכז המעגל החותך את המעגל בנקודות A ו-B (ברביע השלישי). ידוע כי הישר החותך נחתך עם המשיק בנקודה  $D\left(6\frac{2}{3}, 2\right)$ .

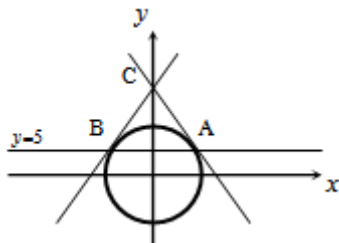
א. כתוב את משוואת המשיק.  
ב. כתוב את משוואת הישר החותך.  
ג. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



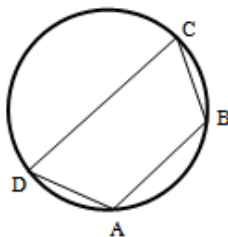
- (29)** המעגל שמשוואתו:  $x^2 + (y-10)^2 = 100$  חסום במשולש הישר זווית ושווה שוקיים  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) (ראה איור). הנקודות B ו-C נמצאות על ציר ה-x ושיעוריהן הם  $C(24, 0)$ ,  $B(-24, 0)$ . ידוע כי המעגל משיק לשוק AC של המשולש בנקודה שבה  $x = 6$ .
- מצא את השיפוע של השוקיים AC ו-AB.
  - כתוב את משוואות השוקיים AC ו-AB.
  - מצא את נקודת ההשקה של השוק AB עם המעגל.
  - הראה כי הקדקוד A נמצא על ציר ה-y.



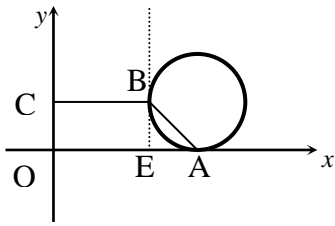
- (30)** מעגל שמרכזו בנקודה  $M(15, 12)$  משיק לציר ה-y בנקודה B וחותר את ציר ה-x בנקודה A ו-C. כמתואר באיור ( $x_C > x_A$ ). מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D. דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
- כתוב את משוואת המעגל.
  - מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
  - מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.



- (31)** נתון המעגל הקנוני הבא:  $x^2 + y^2 = 169$ . הישר  $y = 5$  חותר את המעגל בשתי נקודות A ו-B. (ברביע הראשון). מנקודות אלו מעבירים משיקים למעגל אשר נחתכים בנקודה C (ראה איור).
- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
  - מצא את משוואות המשיקים למעגל בנקודות אלו.
  - מצא את נקודת החיתוך של המשיקים הראה כי היא על ציר ה-y.

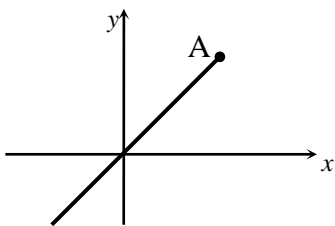


- (32)** הטרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) חסום במעגל שמשוואתו היא:  $(x-4)^2 + (y-6)^2 = R^2$ . ידוע כי הבסיס הקטן AB מונח על הישר:  $y = 2x - 11$  וכי:  $x_B = 10$ .
- מצא את רדיוס המעגל.
  - כתוב את משוואת הישר DC אם ידוע כי הוא עובר דרך מרכז המעגל.
  - מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D אם ידוע כי D היא אחת מנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.



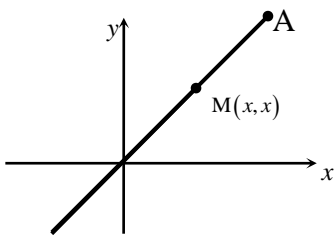
**33** נתון מעגל שמרכזו בנקודה M. מעגל זה משיק לציר ה- $x$  בנקודה A. מהנקודה E שעל ציר ה- $x$  מעלים אנך אשר משיק למעגל בנקודה B (ראה איור). הקטע BC מקביל לציר ה- $x$  ו-O היא נקודת ראשית הצירים, כך שנוצר טרפז ישר זווית ABCO ששטחו הוא 170 סמ"ר.  
ידוע כי:  $C(0,10)$  ו- $AE = 10$ .

- מצא את שיעורי הנקודה B.
- מצא את שיעורי הנקודה A.
- כתוב את משוואת המעגל.



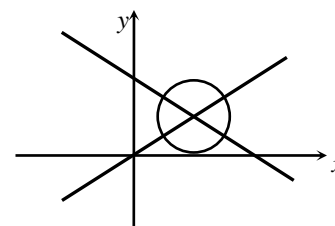
**34** הנקודה A(6,6) נמצאת על הישר:  $y = x$  כמתואר באיור.

- מצא את מרחק הנקודה A מראשית הצירים.
- כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה A והוא עובר דרך ראשית הצירים.
- מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודת החיתוך השנייה שלו עם ציר ה- $x$ .



**35** הנקודות A ו-M נמצאות על הישר:  $y = x$  כמתואר באיור. ידוע כי שיעור ה- $x$  של הנקודה A הוא 8.  
א. מצא את שיעור ה- $y$  של הנקודה A.  
ב. המרחק בין הנקודות A ו-M הוא  $\sqrt{32}$ .  
מצא את שיעורי הנקודה M אם ידוע כי:  $x_M < x_A$ .

- כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ומשיק לצירים.
- קבע על ידי חישוב האם הנקודה A נמצאת על המעגל או לא.



**36** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את נקודת החיתוך של הישרים

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{ו-} \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת

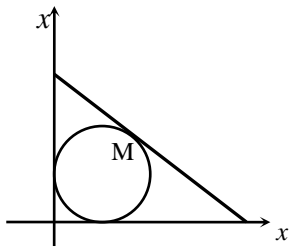
החיתוך שמצאת אשר משיק לציר ה- $x$ .

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל המקביל לציר ה- $x$ .

ד. הראה כי המשיק שמצאת בסעיף ג' חותך את הישר:  $y = -\frac{1}{2}x + 4$

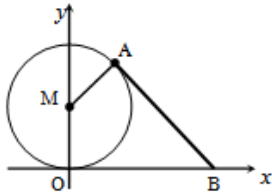
על ציר ה- $y$ .

ה. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני הישרים מסעיף א' לציר ה- $y$ .



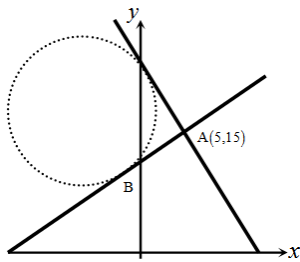
37) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M והוא משיק לצירים ברביע הראשון אם ידוע כי שיעור ה- $x$  של הנקודה M הוא 5.
- ב. כתוב את משוואת המשיק למעגל המתואר באיור בנקודה שבה:  $x = 8$ .
- ג. חשב את שטח המשולש שיוצר משיק זה עם הצירים.



38) באיור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M נמצא על ציר ה- $y$  בנקודה שבה:  $y = 5$  והוא משיק לציר ה- $x$ . מעבירים משיק למעגל דרך הנקודה A הנמצאת ברביע הראשון.

- א. כתוב את משוואת המעגל.
- ב. כתוב את משוואת המשיק אם ידוע כי שיעור ה- $x$  של הנקודה A הוא 4.
- ג. המשיק חותך את ציר ה- $x$  בנקודה B. מעבירים את הרדיוס MA. חשב את היקף הדלתון OMAB (ראשית הצירים).

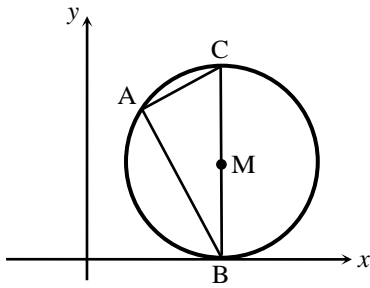


39) לפניך האיור הבא.

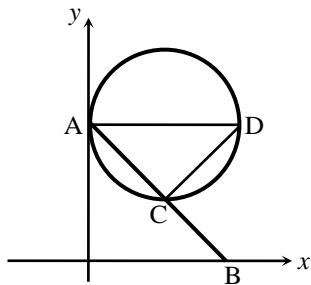
א. ענה על הסעיפים הבאים :

- i. כתוב את משוואת הישר ששיפועו 2 ועובר דרך הנקודה  $A(5,15)$ .
- ii. כתוב את משוואת הישר המאונך לישר הקודם ועובר דרך אותה הנקודה.

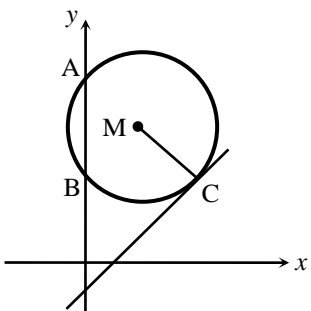
- ב. מצא נקודה B על הישר השני, הנמצאת ברביע השני ומרחקה מהנקודה A הוא  $\sqrt{80}$  יחידות אורך.
- ג. מעבירים מעגל שמרכזו M המשיק לשני הישרים שמצאת בסעיף א'. היעזר באיור ומצא את משוואת המעגל אם ידוע כי מרכזו נמצא ברביע השני ו הוא משיק לישר השני בנקודה B.
- ד. מהנקודה M מורידים אנך לציר ה- $x$  ומחברים אותה עם נקודת ההשקה של הישר מסעיף א' 1. חשב את שטח המרובע הנוצר בין האנך, ציר ה- $x$ , הישר שמצאת בסעיף א' 1 והרדיוס ממרכז המעגל אל נקודת ההשקה של ישר זה.



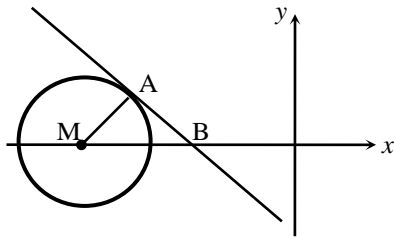
- 40** לפניך מעגל המשיק לציר ה- $x$  בנקודה  $B$  שמרכזו בנקודה  $M$ .  $AB$  ו- $AC$  הם מיתרים במעגל המאונכים זה לזה.  $BC$  הוא קוטר במעגל.
- א. נתון כי הישר שעליו מונח המיתר  $AB$  הוא:  $y = -3x + 30$ .
- כמו כן, נתון גם כי:  $BC = 16$ .
- מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .
  - מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .
  - כתוב את משוואת המעגל.
- ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונח המיתר  $AC$ .
- ג. מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .



- 41** המעגל שבאיור משיק לציר ה- $y$  בנקודה:  $A(0,8)$ . דרך הנקודה  $A$  מעבירים ישר החותך את ציר ה- $x$  בנקודה:  $B(8,0)$ .
- א. מצא את משוואת הישר  $AB$ .  
המעגל חותך את הישר  $AB$  בנקודה  $C$ .  
ידוע כי  $C$  היא אמצע הקטע  $AB$ .
- ב. ענה על הסעיפים הבאים:
- מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .
  - כתוב את משוואת המעגל.
- ג. מסמנים נקודה  $D$  על היקף המעגל כך שהמיתרים  $AC$  ו- $CD$  מאונכים זה לזה.
- מצא את משוואת המיתר  $CD$ .
  - מצא את שיעורי הנקודה  $D$ .

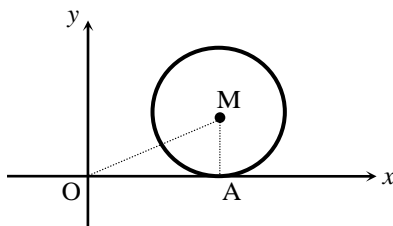


- 42** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה  $M$  הנמצאת ברביע הראשון. המעגל חותך את ציר ה- $y$  בנקודות  $A$  ו- $B$ . הישר:  $5y - 4x = -12$  משיק למעגל בנקודה:  $C(8,4)$ .
- א. מצא את משוואת הרדיוס  $MC$ .
- ב. ידוע כי רדיוס המעגל הוא:  $\sqrt{41}$  ס"מ.
- סמן ב- $t$  את שיעור ה- $x$  של הנקודה  $M$  והבע באמצעותו את שיעור ה- $y$  שלה.
  - מצא את  $t$ .
  - כתוב את משוואת המעגל.
- ג. חשב את אורך הקטע  $AB$ .



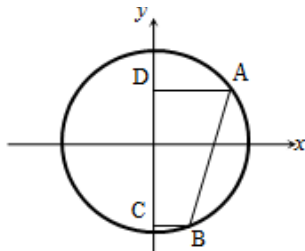
**43** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו M מונח על ציר ה- $x$  בחלקו השלילי. ידוע כי מרחק מרכז המעגל מראשית הצירים הוא 8 וכי רדיוס המעגל הוא:  $\sqrt{8}$  ס"מ.

- כתוב את משוואת המעגל. מעבירים משיק למעגל דרך הנקודה  $A(-6, 2)$ .
- מצא את משוואת המשיק.
- מסמנים את נקודת החיתוך של המשיק וציר ה- $x$  ב-B. חשב את שטח המשולש MAB.

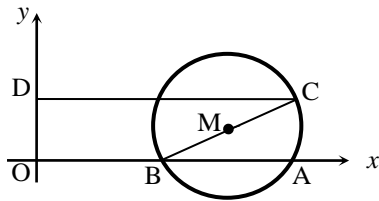


**44** נתונים הישרים הבאים:  $y = 3x - 23$  ו- $2y + x = 24$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הישרים. נקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם היא מרכז מעגל המשיק לציר ה- $x$ .
- מצא את משוואת המעגל.
- היעזר באיור שבצד וענה על השאלות הבאות: מסמנים את נקודת מרכז המעגל ב-M. מורידים אנך ציר ה- $x$  החותך אותו בנקודה A. ראשית הצירים תסומן ב-O.
  - מצא את שיעורי הנקודה A.
  - חשב את שטח המשולש MOA.



- 45** באיור שלפניך נתון מעגל:  $x^2 + y^2 = 52$  מסמנים נקודה A ברביע הראשון ונקודה B ברביע הרביעי. ידוע כי שיעור ה- $x$  של הנקודה A הוא 6 ושיעור ה- $x$  של הנקודה B הוא 4.
- מצא את שיעור ה- $y$  של הנקודות A ו-B.
  - חשב את אורך המיתר AB.
  - מהנקודות A ו-B מעבירים אנכים לציר ה- $y$  החותכים אותו בנקודות C ו-D.
  - איזה מרובע הוא המרובע ABCD? נמק.
  - חשב את היקף המרובע ABCD.



46 באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו:

$$(x+a)^2 + (y-1)^2 = 5$$

פרמטר.  $a$ , ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- $x$

בנקודה:  $A(10,0)$ .

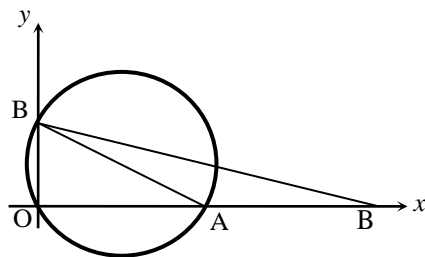
א. מצא את  $a$  אם ידוע כי:  $a > -10$ .

ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- $x$ .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- $y$  כך שנוצר טרפז BCDO. חשב את שטחו.



47 באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו:

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = R^2$$

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.

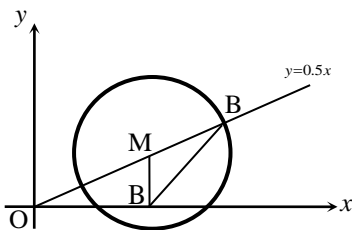
א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו-B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה- $x$  כך ש-A היא אמצע הקטע CO.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. חשב את שטח המשולש ABC.



48 נתון הישר:  $y = 0.5x$ .

א. מצא נקודה M על הישר ברביע הראשון

שמרחקה מהראשית הוא  $\sqrt{45}$  ס"מ.

ב. הנקודה M שמצאת בסעיף הקודם היא נקודת המרכז של מעגל בעל רדיוס של

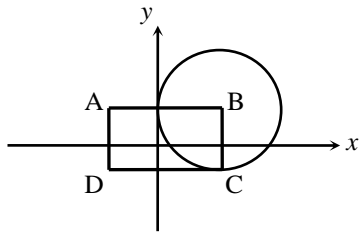
$\sqrt{20}$  ס"מ. כתוב את משוואת המעגל.

ג. מצא את נקודת החיתוך של הישר הנתון והמעגל המסומנת באיור ב-B.

ד. מורידים אנך לציר ה- $x$  מהנקודה M החותך אותו בנקודה C.

חשב את שטח המשולש BMC.





49 נתון מלבן ABCD כמתואר באיור שלפניך.

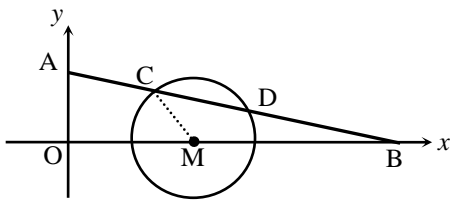
נתונים הקדקודים:  $A(-3,3)$ ,  $C(5,-2)$ .

מצא את שיעורי הקדקודים B ו-D של המלבן.  
הנקודה B היא נקודת המרכז של מעגל בעל רדיוס BC.

א. כתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$  אשר בתוך המלבן.

ג. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-Q. חשב את שטח המשולש AQB.



50 נתון מעגל שמשוואתו היא:

$$(x-10)^2 + y^2 = R^2$$

ומרכזו בנקודה M.  
מעבירים ישר החותך את הצירים בנקודות:  $A(0,5)$ ,  $B(35,0)$  וחותך את המעגל בנקודות C ו-D.

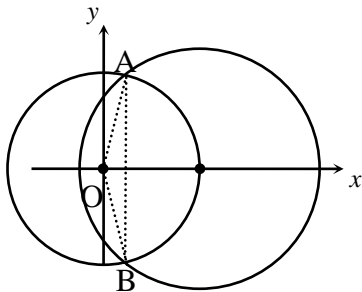
א. מצא את משוואת הישר החותך.

ב. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי:  $D(14,3)$ .

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המרובע ACMO.

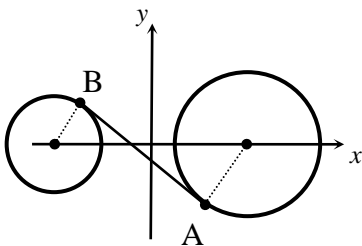
## תרגול נוסף – המעגל (שאלות מסכמות עם שני מעגלים):



- 51 נתון המעגל הקנוני:  $x^2 + y^2 = 81$ .  
נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- $x$  היא נקודת מרכזו של מעגל נוסף אשר רדיוסו הוא:  $R=12$ .  
א. כתוב את משוואת המעגל הנוסף.  
ב. המעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. מצא את שיעוריהן.  
ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין הנקודות A, B לראשית הצירים O.

- 52 המעגל:  $(x+a)^2 + (y-10)^2 = a+4$ ,  $a > 0$  חותך את ציר ה- $x$  כאשר:  $x=1$ .  
א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .  
ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ .  
ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.  
ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

- 53 נתונים שני המעגלים הבאים:  $(x-6)^2 + (y-16)^2 = 36$  ו-  $(x+6)^2 + (y-16)^2 = 36$ .  
א. הראה כי המעגלים משיקים זה לזה בנקודה הנמצאת על ציר ה- $y$ .  
ב. הראה כי המעגלים אינם חותכים את ציר ה- $x$ .  
ג. לפניך שתי נקודות:  $(-12, 16)$ ,  $(0, 4)$ .  
ד. קבע לגבי כל אחת מהנקודות האם היא נמצאת מחוץ, בתוך או על המעגל:  $(x+6)^2 + (y-16)^2 = 36$ .  
ה. הראה כי המרחק מהנקודות שלעיל לנקודת ההשקה של המעגלים זהה.



- 54 באיור שלפניך מתוארים המעגלים:  
 $(x-10)^2 + y^2 = 40$  ו-  $(x+a)^2 + y^2 = 10$  ( $a > 0$ ).  
מעבירים ישר בעל שיפוע שלילי המשיק למעגלים בנקודות A ו-B כמתואר באיור.  
ידוע כי הישר הנ"ל משיק למעגל הראשון בנקודה שבה  $x=8$ .  
א. כתוב את משוואת הישר.  
ב. הישר חותך את המעגל השני בנקודה שבה:  $y=3$ .  
מצא את  $a$  וכתוב את משוואת המעגל השני.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 34$  ב.  $(0,0)$ ,  $(6,0)$ ,  $(0,10)$  ג.  $S = 30$
- (2) א.  $(3,6)$ ,  $(-3,-2)$  ב.  $d = 10$
- (3) א.  $a = 8$  ב.  $4y + 3x = 56$  ג.  $d = 13$
- (4) א.  $y = 8x - 2$ ,  $y = -2x - 2$  ב.  $(-24,16)$  ג.  $x^2 + (y+2)^2 = 900$
- (5) א. ריבוע. ב.  $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 9$
- (6) א.  $(2,8)$  ב.  $(x+9)^2 + (y-1)^2 = 170$  ג.  $(4,2)$
- (7) א.  $y = -8$  ב.  $S = 136$ ,  $A(17,0)$ ,  $B(-17,0)$  ג.  $D(-15,-8)$
- (8) א.  $y = -x + 4$ ,  $y = -4x + 13$  ב.  $d_{CM} = 3$ ,  $M(3,1)$  ג.  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$
- (9) א.  $R = 10$  ב.  $C(1,12)$ ,  $B(1,-4)$  ג. 1.  $d = 16$  2.  $S = 128$
- (10) א.  $d = 15$  ב.  $x = 18$  ג.  $(x-9)^2 + (y-12)^2 = 81$
- ד. המעגל אינו חותך את ציר ה- $x$ . כאשר מציבים ב- $y$  אפס מתקבלת משוואה ריבועית בלי פתרון. המעגל חותך את ציר ה- $y$  בנקודה אחת-  $(0,12)$ .
- (11) א.  $A(9,6)$ ,  $B(9,-6)$  ב.  $y = \frac{2}{3}x$  ג.  $S = 54$
- (12) א.  $A(3,6)$  ב.  $x^2 + (y-6)^2 = 9$  ג.  $(0,3)$ ,  $(0,9)$
- (13) א.  $O(0,0)$ ,  $A(0,6)$ ,  $B(8,0)$  ב.  $C(8,6)$  ג.  $P = 28$
- (14) א.  $A(3,2)$ ,  $B(11,2)$ ,  $C(11,8)$ ,  $D(3,8)$  ב.  $d = 10$
- ג.  $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$  ד. כן -  $(7,0)$
- (15) א.  $(-2,1)$  ב.  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$  ג. הנקודה C.

16.  $y = x$  ב.  $A(10,10)$  ,  $B(2,2)$  ג.  $S = 48$  ט.

17.  $A(4,1)$  ,  $B(8,-1)$  נ.  $d = \sqrt{17}$  ב.  $S = 3$  ג.

18.  $R = \sqrt{29}$  נ.  $(-5,2)$  ב.  $d = \sqrt{98}$  ג.

19.  $m = 2$  נ.  $(-3,-6)$  ב.

ג. המרחק בין שתי הנקודות הוא:  $d = \sqrt{180}$  והוא פעמיים רדיוס המעגל:  $\sqrt{45}$ .

20.  $y = 6.5$  ,  $y = -x + 7$  ,  $y = -6x + 9.5$  נ.  $\left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$  ב.

ג.  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 6\frac{1}{2}\right)^2 = 18\frac{1}{2}$

21.  $y = \frac{1}{2}x$  נ.  $R = \sqrt{5(t^2 - 2t + 2)}$  ב.

ג. 1.  $C(-5,0)$  2.  $t = -\frac{1}{2}$

22.  $y = \frac{x}{7} + \frac{1}{7}$  1. נ.  $m_{BC} = -7$  2.  $y = -7x + 18$  3.

ב.  $B(3,-3)$  ,  $C(2,4)$

23.  $P(6,5)$  נ.  $y = -0.5x + 8$  ב.  $d = 5$  ג.

24.  $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$  נ.  $C(16,18)$  ב.

ג.  $AB \cdot AC \cdot BC = 4800$  ,  $AB = \sqrt{200}$  ,  $AC = \sqrt{360}$  ,  $BC = \sqrt{320}$

25.  $A(5,3)$  ,  $B(-1,-15)$  ,  $M(2,-6)$  נ.  $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 90$  ב.

ג. 1.  $y = -3x + 30$  2.  $(7,9)$

26.  $(x+4)^2 + y^2 = 676$  ,  $R = 26$  נ.  $B(18,19)$  ,  $C(-14,-24)$  ב.

ג.  $\frac{AB}{AE} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

27.  $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 41$  נ.  $(8,0)$  ב.

ג.  $.5y + 4x = 32$

28.  $y = 2$  נ.  $y = \frac{3}{4}x - 3$  ב.  $A(4,0)$  ,  $B(-4,-6)$  ג.

29.  $m_{AC} = -1$  ,  $m_{AB} = 1$  נ.  $y = x + 24$  ,  $y = -x + 24$  ב.  $(-6,18)$  ג.

.  $C(24,0)$  ,  $D(24,24)$  .ג

$(x-15)^2 + (y-12)^2 = 225$  .נ (30)

$y = -\frac{3}{4}x + 42$  .ל

$A(12,5)$  ,  $B(-12,5)$  .נ (31)

.  $C(0,33.8)$  .  $5y = 12x + 169$  ,  $5y + 12x = 169$  .ג

.  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  .ל

$y = 2x - 2$  .ג

$R = \sqrt{45}$  .נ (32)

.  $(x-22)^2 + (y-10)^2 = 100$  .ל

$A(22,0)$  .ג

$B(12,10)$  .נ (33)

$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 72$  .ג

$\sqrt{72}$  .נ (34)

.  $y = x - 12$  .ל

$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$  .ל

$M(4,4)$  .ג

$y = 8$  .נ (35)

.נל .ד

$y = 4$  .ל

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$  .ג

$(4,2)$  .נ (36)

.  $S = 8$  .ה

$(0,4)$  .ד

.  $S = 150$  .ל  $y = -0.75x + 15$  .ג

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$  .נ (37)

.  $P = 30$  .ל

$3y + 4x = 40$  .ג  $x^2 + (y-5)^2 = 25$  .נ (38)

$B(-3,11)$  .ג

$2y = x + 25$  .2

$y = -2x + 25$  .1 .נ (39)

.  $S = 300.25$  .ד

$(x+7)^2 + (y-19)^2 = 80$  .ל

$(x-10)^2 + (y-8)^2 = 64$  .3

$C(10,16)$  .2

$B(10,0)$  .1 .נ (40)

.  $A(5.2,14.4)$  .ל

$3y - x = 38$  .ג

$(x-4)^2 + (y-8)^2 = 16$  .2

$C(4,4)$  .1 .ג

$y = -x + 8$  .נ (41)

.  $D(8,8)$  .2

$y = x$  .1 .ל

$t = 4$  .2

$M(t, -1.25t + 14)$  .1 .ג

$y = -1.25x + 14$  .נ (42)

.  $d_{AB} = 10$  .ל

$(x-4)^2 + (y-9)^2 = 41$  .3

.  $S_{MAB} = 4$  .ל

$y = -x - 4$  .ג

$(x+8)^2 + y^2 = 8$  .נ (43)

- (44)** א.  $(10,7)$       ב.  $(x-10)^2 + (y-7)^2 = 49$       ג. 1.  $A(10,0)$       2.  $S_{MOA} = 35$
- (45)** א.  $y_A = 4 ; y_B = -6$       ב.  $d_{AB} = \sqrt{104} = 10.198$       ג. 1. טרפז ישר זווית.      2.  $P_{ABCD} = 30.198$
- (46)** א.  $a = -8$       ב.  $B(6,0)$       ג.  $y = 0.5x - 3$       ד.  $(10,2)$       ה.  $S_{BCDO} = 16$
- (47)** א.  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 34, R = \sqrt{34}$       ב.  $A(10,0) ; B(0,6)$       ג. 1.  $C(20,0)$       2.  $S_{ABC} = 30$
- (48)** א.  $M(6,3)$       ב.  $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 20$       ג.  $B(10,5)$       ד.  $S_{BMC} = 6$
- (49)** א.  $B(5,3) ; D(-3,-2)$       ב.  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$       ג.  $Q(1,0)$       ד.  $S_{AOB} = 12$
- (50)** א.  $y = -\frac{1}{7}x + 5$       ב.  $R = 5$       ג.  $C(7,4)$       ד. 37.5 יח"ש.
- (51)** א.  $(x-9)^2 + y^2 = 144$       ב.  $(1, \sqrt{80}), (1, -\sqrt{80})$       ג.  $S = \sqrt{80}$
- (52)** א.  $a = 1$       ב.  $(0,1), (-2,3)$       ג.  $y = -2x - 1$       ד.  $S = \frac{1}{4}$
- (53)** א.  $(0,16)$       ג.  $(-12,16)$  - על המעגל.  $(0,4)$  - מחוץ למעגל.      ד.  $d = 12$
- (54)** א.  $y = -\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$       ב.  $a = 20$

## תוכן העניינים:

144	פרק 7.....
144	הסתברות קלאסית.....
144	הגדרות כלליות :
145	שאלות יסודיות :
145	שאלות עם שני ניסויים :
146	שאלות עם הסתברות מותנית :
147	שאלות עם נעלמים :
147	שאלות הנפתרות ע"י טבלה דו-מימדית :
149	התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות :
149	התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית :
150	התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים :
151	תשובות סופיות :
152	תרגול נוסף - שאלות שונות לפי נושאים :
152	כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות בלתי תלויים :
153	כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות תלויים :
155	תרגילים הכוללים שימוש בדיאגרמת עץ :
157	תרגילים עם נעלמים – כפל וחיבור הסתברויות, דיאגרמת עץ :
161	התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי :
169	טבלה דו מימדית :
175	תרגילי חישוב הכוללים שימוש בנוסחאות בהסתברות :
177	תרגילי הוכחה בעזרת נוסחאות ההסתברות :
179	תשובות סופיות :
183	תרגול נוסף - שאלות משולבות :
191	תשובות סופיות :
192	תרגול מבגרויות :
198	תשובות סופיות :

## פרק 7

# הסתברות קלאסית

### הגדרות כלליות:

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A:  $P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$
2. המאורע המשלים למאורע A:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו-B:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.  
עבור מאורעות זרים A ו-B מתקיים:  $P(A \cap B) = 0$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.  
עבור מאורעות בלתי תלויים A ו-B מתקיים:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
6. אם מתקיים:  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$  המאורעות תלויים.
7. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת:  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
8. צורה כללית של טבלת הסתברויות עבור מאורעות A ו-B:

	$\bar{A}$	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

קשרים מידיים מהטבלה:

- $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
- $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$
- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$

9. התפלגות בינומית: חישוב k הצלחות מתוך n ניסיונות בלתי תלויים כאשר ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא p נתונה ע"י:  $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$



### שאלות יסודיות:

- (1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים.  
מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
- (2) בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים.  
מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
- (3) מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
- (4) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון:  $P(A) = 0.6$ ,  $P(\bar{B}) = 0.3$ ,  $P(A \cap B) = 0.4$ .  
מצא את  $P(A \cup B)$ .
- (5) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון:  $P(\bar{A}) = 0.2$ ,  $P(\bar{B}) = 0.5$ ,  $P(A \cup B) = 0.95$ .  
מצא את  $P(A \cap B)$ .
- (6) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון:  $P(A) = 0.8$ ,  $P(B) = 0.25$ ,  $P(A \cup B) = 0.65$ .  
קבע האם המאורעות זרים והאם הם תלויים.
- (7) נתון כי שני מאורעות, A ו-B בלתי תלויים.  
בנוסף נתון:  $P(A) = 0.75$ ,  $P(B) = 0.4$ . מצא את  $P(A \cup B)$ .

### שאלות עם שני ניסויים:

- (8) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור (ללא החזרה של הכדור הראשון).  
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?  
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?  
ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.  
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.  
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?  
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?  
ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

**(10)** בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

**(11)** נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

**(12)** ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי. מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

### שאלות עם הסתברות מותנית:

**(13)** בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.  
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?  
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?  
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

**(14)** בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.  
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?  
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?  
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

**(15)** בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים. מה ההסתברות שכולם גברים?

- 16) נתונים שני כדים : בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.  
א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?  
ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?

- 17) במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2. ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

- 18) בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים.  
הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא  $\frac{5}{14}$ .  
כמה כדורים בכד?

### שאלות עם נעלמים:

- 19) ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא  $p$  והיא גדולה מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38.  
א. מצא את  $p$ .  
ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?

### שאלות הנפתרות ע"י טבלה דו-מימדית:

- 20) 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.  
א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?  
ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?  
ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?  
ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?

- (21)** 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט.  
80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות.  
נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.
- א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?  
ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?  
ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?  
ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?
- (22)** 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה.  
75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.
- א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?  
ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?  
ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?
- (23)** בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.  
מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים.  
60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר.  
מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?
- (24)** 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוורי צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?
- (25)** בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף.  
מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?
- (26)** בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים 2/5 מתלמידי הפיזיקה, 5/12 מתלמידי הכימיה ו-1/3 מתלמידי המחשבים. 1/4 מהבנים הם תלמידי פיזיקה.
- א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?  
ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

### התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות:

- (27) אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?
- (28) מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?
- (29) הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?
- (30) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:
- א. בדיוק ארבע יהיו כחולים?
  - ב. חמישה יהיו כחולים?
  - ג. לפחות ארבעה יהיו כחולים?
  - ד. הרוב יהיו כחולים?
  - ה. לפחות אחד יהיה כחול?
  - ו. הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

### התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית:

- (31) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?
- (32) יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?
- (33) בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?
- (34) בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?

(35) בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי  $3\frac{3}{8}$  מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.

### התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים:

(36) בחדר  $x$  גברים ו- $3x$  נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6. מצא את גודלו של  $x$ . חוזרים על התהליך 4 פעמים. מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?

(37) במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש  $n$  תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% ששי יודע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש. ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי  $1\frac{1}{3}$  מההסתברות שיקבל 80. מצא את ערכו של  $n$ .

(38) כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו.  $\frac{5}{17}$  מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. שלושה חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

## תשובות סופיות:

- (1)  $\frac{3}{10}$  (2)  $\frac{3}{4}$  (3)  $\frac{3}{4}$
- (4)  $P(A \cup B) = 0.9$  (5)  $P(A \cap B) = 0.35$  (6) לא זרים ותלויים
- (7)  $P(A \cup B) = 0.85$  (8) א.  $\frac{1}{15}$  ב.  $\frac{8}{15}$  ג.  $\frac{7}{15}$  (9) א.  $\frac{9}{100}$  ב.  $\frac{19}{50}$  ג.  $\frac{31}{50}$
- (10)  $\frac{17}{42}$  (11)  $\frac{8}{15}$  (12)  $\frac{77}{144}$
- (13) א.  $\frac{1}{15}$  ב.  $\frac{8}{15}$  ג.  $\frac{1}{8}$  (14) א.  $\frac{9}{100}$  ב.  $\frac{19}{50}$  ג.  $\frac{9}{38}$  (15)  $\frac{2}{17}$
- (16) א.  $\frac{8}{15}$  ב.  $\frac{15}{16}$  (17)  $\frac{1}{4}$  (18) 8 כדורים
- (19) א.  $p = 0.6$  ב.  $\frac{21}{40}$  (20) א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן
- (21) א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים (22) א. 0.1 ב.  $\frac{2}{3}$  ג.  $\frac{2}{3}$
- (23)  $\frac{1}{225}$  (24) 93.5% (25)  $\frac{1}{3}$
- (26) א. בלתי תלויים ב. 12.5% (27) 0.264
- (28) 0.023 (29) 0.2001
- (30) א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023
- (31) 0.114 (32) 0.214 (33) 0.216
- (34) 0.008 (35) 4 לבנים, 6 שחורים (36) א.  $x = 4$  ב. 0.299
- (37)  $n = 5$  (38)  $\frac{1}{18}$

## תרגול נוסף - שאלות שונות לפי נושאים:

### כפל וחיבור ההסתברויות – מאורעות בלתי תלויים:

- (1) בבניין העירייה יש שני מתקני הבטחה נגד פורצים.  
ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל בזמן אמת היא 0.92 וההסתברות שהמתקן השני יפעל בזמן אמת היא 0.86.  
א. מה ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל והשני לא?  
ב. מה ההסתברות ששני המתקנים יפעלו?  
ג. מה ההסתברות שאף מתקן לא יפעל?
- (2) צובעים את הפאות של קובייה בת 8 פאות כך: 3 פאות כחולות, 2 פאות אדומות, 2 פאות צהובות ופאה אחת ירוקה. זורקים את הקובייה פעמיים.  
חשב את ההסתברויות הבאות:  
א. שתי הפאות הן בצבע ירוק.  
ב. שתי הפאות הן בצבע כחול.  
ג. שתי הפאות באותו הצבע.
- (3) בכד יש 6 כדורים שחורים ו-4 לבנים. מוציאים כדור מהכד ולאחר הסתכלות בצבעו מחזירים אותו לכד ומוציאים כדור נוסף. חשב את ההסתברויות הבאות:  
א. ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים.  
ב. ששני הכדורים הם מאותו הצבע.  
ג. שהכדור השני הוא לבן.
- (4) בכד יש 4 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים כחולים.  
מוציאים שני כדורים מהכד עם החזרה, דהיינו, לאחר הוצאת הכדור הראשון, מחזירים אותו בחזרה לכד ורק אז מוציאים את הכדור השני.  
חשב את ההסתברויות הבאות:  
א. ששני הכדורים שהוצאו הם לבנים.  
ב. ששני הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע.  
ג. ששני הכדורים שהוצאו לא כחולים.  
ד. שהכדור השני הוא כחול.



5) כדי לקבל תואר במכללת חולון יש לעבור לפחות שניים מתוך שלושה מבחנים. ההסתברות שדורון יעבור את המבחן הראשון היא 0.9. ההסתברות שיעבור את המבחן השני היא 0.6 וההסתברות שיעבור את המבחן השלישי היא 0.8.

- א. מה ההסתברות שדורון יעבור רק מבחן אחד?
- ב. מה ההסתברות שדורון יעבור את שלושת המבחנים?
- ג. מה ההסתברות שדורון יעבור לכל היותר שני מבחנים?
- ד. מה ההסתברות שדורון יקבל תואר?

6) בתוך שקית ישנם 4 קלפים אדומים, 3 קלפים צהובים וקלף אחד ירוק. מוציאים עם החזרה שלושה קלפים מהשקית.

- א. מה ההסתברות שבכל שלושת הפעמים יצא הקלף הירוק?
- ב. מה ההסתברות שיצאו שני קלפים צהובים?
- ג. מה ההסתברות שכל הקלפים יהיו בעלי אותו הצבע?

### כפל וחיבור הסתברויות – מאורעות תלויים:

7) תלמיד הרוצה להוציא רישיון לרכב צריך לעבור בחינה עיונית ולאחר מכן בחינה מעשית. ההסתברות שיעבור את הבחינה העיונית היא 0.7. אם הוא עבר את הבחינה העיונית אז ההסתברות שיעבור את הבחינה המעשית היא 0.9 ואם הוא נכשל בבחינה העיונית אז ההסתברות שיעבור את הבחינה המעשית היא 0.5.

- א. מה ההסתברות שיעבור התלמיד רק את הבחינה המעשית?
- ב. מה ההסתברות שהתלמיד ייכשל בשתי הבחינות?
- ג. מה ההסתברות שתלמיד יעבור את שתי הבחינות?

8) בכד 5 כדורים אדומים ו-3 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי כדור מהכד, אם הוא אדום אז מחזירים אותו חזרה לכד ומוציאים כדור נוסף. אם הוא ירוק אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כדור נוסף.

- א. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם ירוקים?
- ב. מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא אדום?
- ג. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו בעלי אותו הצבע?

- (9)** בתוך ארגז ישנם 7 ספלים הממוספרים מ-1 עד 7. מוציאים ספל אחד, משאירים אותו בחוץ ומוציאים ספל נוסף.
- א. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים זוגיים?  
 ב. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים המתחלקים ב-3?  
 ג. מה ההסתברות ששני הספלים שהוצאו הם בעלי מספרים שסכומם גדול מ-10?
- (10)** במעטפה יש 30 בולים, מתוכם 6 בולים פגומים. מוציאים שני בולים בזה אחר זה (ללא החזרה) מהמעטפה.
- א. מה ההסתברות ששני הבולים שהוצאו הם פגומים?  
 ב. מה ההסתברות שהבול הראשון שהוצא אינו פגום אך הבול השני פגום?  
 ג. מה ההסתברות שהבול השני פגום?  
 ד. מה ההסתברות ששני הבולים או פגומים או אינם פגומים?
- (11)** בכיתה ישנם 24 בנים ו-18 בנות. מוציאים באקראי 3 ילדים מהכיתה בזה אחר זה. חשב את ההסתברויות הבאות:
- א. שכל שלושת הילדים יהיו בנים.  
 ב. שכל שלושת הילדים יהיו מאותו המין.  
 ג. שתהיה בקבוצה לפחות בת אחת.  
 ד. שיהיה בקבוצה לכל היותר בן אחד.
- (12)** בתוך שקית יש 6 חטיפי "מקופלת" ו-4 חטיפי "במבה" מוציאים באקראי 3 חטיפים מהשקית בזה אחר זה. חשב את:
- א. ההסתברות שיצאו 3 חטיפי במבה.  
 ב. ההסתברות שיצאו לכל היותר שני חטיפי במבה.  
 ג. ההסתברות שיצאו לפחות שני חטיפי מקופלת.
- (13)** צלף יורה למטרה שלוש פעמים. ההסתברות שיקלע בפעם הראשונה היא 0.7. ההסתברות שיקלע לאחר מכן תלויה בקליעה הקודמת. אם קלע הצלף בירייה הקודמת אז ההסתברות שלו לקלוע שנית היא 0.8 אך אם הוא החטיא אז ההסתברות שלו לקלוע כעת היא 0.6.
- א. מה ההסתברות שיקלע בכל שלושת הפעמים?  
 ב. מה ההסתברות שיקלע בירייה השלישית בלבד?  
 ג. מה ההסתברות שיקלע הקלע בירייה אחת בלבד?  
 ד. מה ההסתברות שיקלע לכל היותר פעם אחת?

- 14) שחקן כדורגל בועט לשער שלוש פעמים. ההסתברות שיבקיע בפעם הראשונה היא 0.6. ההסתברות שיבקיע לאחר מכן תלויה בבקיעה הקודמת. אם השחקן הבקיע אז ההסתברות שיבקיע שנית היא 0.8 אך אם הוא החמיץ אז ההסתברות שיחמיץ שנית היא 0.3. חשב את:
- ההסתברות שיבקיע השחקן בכל שלושת הפעמים.
  - ההסתברות שיבקיע השחקן בפעם השנייה בלבד.
  - ההסתברות שיבקיע השחקן פעם אחת בלבד.
  - ההסתברות שיבקיע השחקן לפחות פעם אחת.

### תרגילים הכוללים שימוש בדיאגרמת עץ:

- 15) בעיר מסוימת 40% מהתושבים הם גברים והשאר נשים. ידוע כי 40% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-60% מהנשים לא מרכיבות משקפיים. בוחרים באקראי תושב מהעיר. חשב את ההסתברויות הבאות:
- שנבחר גבר שלא מרכיב משקפיים.
  - שנבחרה אישה שמרכיבה משקפיים.
  - שהתושב שנבחר מרכיב משקפיים.

- 16) צלף יורה למטרה שלוש פעמים. אם בירייה הקודמת הוא פגע אז ההסתברות שיפגע שוב בירייה הבאה היא 0.8 אך אם הוא החטיא בירייה הקודמת אז ההסתברות שיפגע בירייה שאחריה היא 0.6. הצלף החטיא בירייה הראשונה. חשב את ההסתברויות הבאות:
- הצלף יחטיא גם בשתי היריות הבאות.
  - הצלף יפגע בירייה השלישית.
  - הצלף יפגע בירייה אחת בלבד.
  - הצלף יחטיא בירייה השלישית.

- 17) אם ביום מסוים יורד גשם אז ההסתברות שביום שאחריו לא ירד גשם היא 0.4 אך אם ביום מסוים לא יורד גשם ההסתברות שירד גשם ביום שאחריו היא 0.9. ביום שלישי ירד גשם. חשב את ההסתברויות הבאות:
- ביום חמישי לא ירד גשם.
  - בימים שלישי, רביעי וחמישי ירד גשם.
  - בימים רביעי וחמישי לא ירד גשם.

- 18** במפעל שמיכות שלושה פסי ייצור. פס הייצור הראשון מייצר 40% מהמוצרים, פס הייצור השני מייצר 30% מהמוצרים ופס הייצור השלישי מייצר את ה-30% הנותרים. 50% מהמוצרים של פס הייצור הראשון, 10% מהמוצרים של פס הייצור השני ו-80% ממוצרי הפס השלישי מיועדים לייצוא. בוחרים באקראי מוצר. חשב את:
- ההסתברות שהמוצר מיוצר על ידי פס הייצור השני ומיועד לייצוא.
  - ההסתברות שהמוצר מיועד לייצוא.
  - ההסתברות שהמוצר לא יוצר על ידי פס הייצור הראשון ואינו מיועד לייצוא.
- 19** במשחק "חיש-חש" אפשר לזכות ב-100 ₪, 50 ₪ או לא לזכות כלל. ההסתברות לזכות במשחק בודד ב-100 ₪ היא 0.2, ההסתברות לזכות ב-50 ₪ היא 0.35 וההסתברות לא לזכות כלל היא 0.45. רועי משחק פעמיים. חשב את:
- ההסתברות שרועי יזכה ב-50 ₪ בסה"כ.
  - ההסתברות שרועי יזכה לפחות ב-100 ₪.
  - ההסתברות שרועי לא יזכה במשחק השני.
- 20** בכד א' יש 5 כדורים אדומים ו-2 כדורים לבנים. בכד ב' יש 4 כדורים אדומים ו-6 כדורים לבנים. בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו בזה אחר זה שני כדורים בלי החזרה.
- מה ההסתברות שיצאו שני כדורים בעלי אותו הצבע?
  - מה ההסתברות שהכדור השני הוא אדום?
  - מבין כל האפשרויות בהן הכדור השני הוא אדום, מה ההסתברות שגם הכדור הראשון שיצא יהיה אדום?
- 21** זורקים קוביית משחק פעם אחת. אם היא מראה מספר המתחלק ב-3 בלי שארית רושמים אותו אך אם היא מראה מספר אחר זורקים אותה שנית. חוזרים על התהליך פעם שנייה ושלישית כאשר בפעם השלישית רושמים את המספר שהתקבל. חשב את ההסתברויות הבאות:
- המספר שנרשם הוא זוגי.
  - המספר שנרשם גדול מ-4.
  - המספר שנרשם מתחלק ב-3 בלי שארית.
  - המספר שנרשם לא מתחלק ב-3.

**(22)** ישנם שני כדים. בכד א' יש 4 כדורים כחולים ו-2 כדורים צהובים ובכד ב' יש 3 כדורים כחולים ו-6 כדורים צהובים. זורקים קובייה. אם מתקבל מספר המתחלק ב-3 בלי שארית אז מוציאים כדור מכד א' ואם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3 אז מוציאים כדור מכד ב'. לאחר מכן זורקים את הקובייה שנית וחוזרים על התהליך ומוציאים כדור שני. (ההוצאות הן בלי החזרה).

- א. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים כחולים?
- ב. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים צהובים?
- ג. מה ההסתברות שיבחרו שני כדורים מאותו הצבע?

**(23)** בכד יש 4 כדורים ירוקים ו-2 כדורים לבנים. מוציאים כדור מהכד, אם הוא ירוק אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כדור נוסף ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף. חוזרים על התהליך פעם שנייה ולאחר מכן מוציאים כדור שלישי. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. מה ההסתברויות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו ירוקים?
- ב. מה ההסתברות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו בעלי אותו הצבע?
- ג. מה ההסתברות שיצאו לפחות שני כדורים ירוקים?
- ד. מה ההסתברות שיצא בדיוק כדור לבן אחד?

**(24)** בכד יש 8 כדורים שחורים ו-5 כדורים סגולים. מוציאים בלי החזרה 3 כדורים. מה ההסתברות שיצא לפחות כדור אחד סגול?

## תרגילים עם נעלמים – כפל וחיבור הסתברויות, דיאגרמת עץ:

### מציאת ההסתברות $P$ :

**(25)** קלע יורה למטרה פעמיים. ההסתברות שיקלע בירייה בודדת היא  $p$  ( $p > 0.5$ ). מצא את  $p$  אם ידוע כי ההסתברות שיקלע פעם אחת בדיוק היא 0.48.

**(26)** 44% מעובדי מפעל הם מנהלים והשאר הם פועלים. ההסתברות שפועל מעשן היא 0.7 וההסתברות שמנהל מעשן היא  $p$ . בוחרים באקראי עובד מהמפעל. מצא את  $p$  אם ידוע כי ההסתברות שהעובד שנבחר מעשן היא 0.48.

**(27)** במפעל מסוים המונה 5000 עובדים, 1500 הם מנהלים והשאר הם פועלים פשוטים. ההסתברות שמנהל מעשן היא  $p$  וההסתברות שפועל מעשן היא  $2p+0.1$ . בוחרים באקראי עובד. מצא את ההסתברות  $p$  אם ידוע כי ההסתברות שהעובד שנבחר אינו מעשן היא 0.59.

**(28)** ההסתברות שקלע יפגע במטרה בירייה בודדת היא  $p$ . הקלע יורה שתי יריות. מצא את  $p$  אם ידוע כי ההסתברות שיפגע בשתי הפעמים קטנה פי 16 מההסתברות שיחטיא בשתייהן.

**(29)** שני צלפים יורים למטרה ירייה אחת. ידוע כי ההסתברות שהצלף הראשון יפגע גדולה פי 3 מההסתברות שהצלף השני יפגע. מצא את ההסתברות של כל צלף לפגוע בירייה בודדת אם ידוע כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם יפגע היא 0.66.

**(30)** במשחק "חיש חש" אפשר לזכות ב-200 ₪, 100 ₪ או לא לזכות כלל. ידוע כי ההסתברות לזכות ב-200 ₪ היא 0.1 וההסתברות לזכות ב-100 ₪ היא  $p$ . שחקן משחק שני משחקים. ההסתברות שלא יזכה כלל גדולה פי 36 מההסתברות שיזכה ב-400 ₪.  
א. מצא את  $p$ .

ב. חשב את ההסתברות של השחקן לזכות לפחות ב-200 ₪.

**(31)** אלי ורפי משחקים שני משחקי שחמט. כל משחק יכול להסתיים בניצחון לאחד השחקנים או בתיקו. ידוע כי ההסתברות של אלי לנצח במשחק בודד היא 0.36 וההסתברות שינצח בתחרות כולה (שני המשחקים יחדיו) היא 0.2304.  
א. מצא את ההסתברות שרפי ינצח במשחק בודד.  
ב. חשב את ההסתברות שהתחרות כולה תסתיים בתיקו.

**(32)** שני שחקני שחמט משחקים שני משחקים. כל משחק יכול להסתיים בניצחון לאחד הצדדים או בתיקו. ההסתברות של כל שחקן לנצח במשחק בודד היא זהה. ההסתברות שהשחקן הראשון ינצח לפחות במשחק אחד היא 0.64.  
מצא את ההסתברות של כל שחקן לנצח במשחק בודד.

**(33)** צלף יורה שלוש יריות למטרה. אם הצלף פוגע בירייה מסוימת אז ההסתברות שיפגע גם בירייה הבאה היא  $q$ . אם הצלף מחטיא בירייה מסוימת אז ההסתברות שיפגע בירייה הבאה היא  $p$ . הצלף מחטיא בירייה הראשונה. ידוע כי ההסתברות שהצלף יפגע בירייה השנייה והשלישית היא 0.12 וההסתברות שהצלף יפגע בירייה השנייה ויחטיא בשלישית היא 0.18.

א. מצא את  $p$  ו- $q$ .

- ב. חשב את ההסתברות שהצלף יפגע בירייה השלישית.
- ג. חשב את ההסתברות שהצלף יפגע בירייה אחת לפחות.

**(34)** שני שחקני כדורסל זורקים זריקה אחת לסל. ההסתברות שהשחקן הראשון יקלע היא  $p$  וההסתברות שהשחקן השני יחטיא היא  $q$  ( $q > 0.5$ ). ידוע כי ההסתברות ששני השחקנים יקלעו היא 0.28 וההסתברות ששני השחקנים יחטיאו היא 0.18. מצא את  $p$  ו- $q$ .

#### מציאת מספר $x$ :

**(35)** בכד יש  $x$  כדורים. 8 מהם ירוקים והשאר כחולים. מוציאים באקראי עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא את  $x$  אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים ירוקים היא 0.64.

**(36)** בכד יש 12 כדורים חלקם אדומים וחלקם שחורים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא  $\frac{4}{9}$ .

**(37)** במעטפה יש 8 מכתבים. רובם מיועדים להישלח בתוך הארץ והשאר לחו"ל. מוציאים באופן אקראי מהמעטפה שני מכתבים בלי החזרה בזה אחר זה. מצא את מספר המכתבים המיועדים להישלח לחו"ל אם ידוע כי ההסתברות שהמכתב הראשון שהוצא מיועד לארץ והשני לחו"ל היא  $\frac{3}{14}$ .

**(38)** בכד יש 8 כדורים ירוקים והשאר כחולים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד. מצא כמה כדורים יש בכד אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא  $\frac{4}{9}$  ויש יותר כדורים ירוקים מכחולים.

**(39)** בתוך קלמר יש 5 עפרונות ועוד  $x$  עטים. מוציאים כלי כתיבה מהקלמר, אם הוא עפרון אז מחזירים אותו לקלמר ומוציאים כלי כתיבה נוסף. אם הוא עט אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים כלי כתיבה נוסף.

מצא כמה עטים יש בקלמר אם ידוע כי ההסתברות להוציא שני עטים היא  $\frac{1}{6}$ .

**(40)** בקופסא א' ישנם 5 זוגות נעליים ו-3 זוגות מגפיים. בקופסא ב' יש 8 פריטים -  $x$  זוגות נעליים והשאר הם זוגות מגפיים. מוציאים באקראי מקופסא א' זוג כלשהו ומעבירים אותו לקופסא ב'. לאחר מכן מוציאים מקופסא ב' זוג. כמה זוגות נעליים יש בקופסא ב' אם ידוע כי ההסתברות להוציא בפעם השנייה

זוג מגפיים היא  $\frac{17}{24}$ .

**(41)** בקלמר יש 6 עפרונות ו-3 עטים. בתיק יש 9 כלי כתיבה -  $x$  עפרונות והשאר עטים. מוציאים באקראי מהקלמר כלי כתיבה ומכניסים אותו לתיק. לאחר מכן מוציאים מהתיק כלי כתיבה נוסף.

מצא כמה עפרונות יש בתיק אם ידוע כי ההסתברות שכלי הכתיבה שהוצא

מהקלמר שונה מכלי הכתיבה שהוצא מהתיק היא  $\frac{13}{30}$ .

**(42)** בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים. מוציאים באקראי כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים יש מכל צבע אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא

הוא לבן היא  $\frac{3}{8}$ .

**(43)** בתוך כד ישנם 10 כדורים, חלקם צהובים וחלקם כחולים. מוציאים באקראי כדור, מתבוננים בו ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף. מצא כמה כדורים יש מכל צבע בכד אם ידוע כי ההסתברות שיצא לפחות כדור

אחד כחול היא  $\frac{44}{45}$ .

**(44)** בתוך שק ישנם 9 כדורים, חלקם סגולים וחלקם ירוקים. מוציאים באקראי כדור, אם הוא סגול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא ירוק אז מחזירים אותו חזרה לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף.

מצא כמה כדורים מכל צבע יש בשק אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני

שיבחר יהיה סגול היא  $\frac{11}{36}$ .



## התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי:

### תרגילים יסודיים:

45) צלף יורה למטרה. ידוע כי מתוך 2000 יריות הוא פוגע ב-1200 מהן. הצלף יורה 4 יריות למטרה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שהצלף יפגע בדיוק פעמיים במטרה.
- ב. שהצלף יפגע במטרה בכל ארבעת הפעמים.
- ג. שהצלף יפגע לפחות פעמיים במטרה.
- ד. שהצלף לא יפגע במטרה כלל.

46) ב-70% מהמכונות יש רדיו. בוחרים באקראי 5 מכונות. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. בדיוק ב-3 מתוך 5 המכונות יהיה רדיו.
- ב. בכל 5 המכונות יהיה רדיו.
- ג. ב-4 מתוך 5 המכונות יהיה רדיו.
- ד. לפחות ב-3 מכונות יהיה רדיו.

47) במכללה המונה 20,000 סטודנטים ישנם 6000 בנים והשאר בנות. בוחרים באקראי 5 סטודנטים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. מתוך 5 הסטודנטים תהיה לכל היותר בת אחת.
- ב. מתוך 5 הסטודנטים יהיה לכל היותר בן אחד.
- ג. יבחרו 3 סטודנטים בנים מתוך החמישה.
- ד. יבחרו לכל היותר 3 סטודנטים בנים.

48) בבה"ס הספר 40% מהתלמידים הם בנים והשאר בנות. בוחרים באופן אקראי 4 תלמידים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שנבחרו 2 בנים ו-2 בנות.
- ב. שתבחר בת אחת.
- ג. שיבחרו יותר בנים מבנות.
- ד. שמספר הבנים שנבחרו יהיה שונה ממספר הבנות שנבחרו.

49 רפי וגיל משחקים 4 משחקי שש-בש. מתוך 60 משחקים בודדים ששיחקו השניים, ניצח רפי ב-48 פעמים. חשב את:

- א. ההסתברות שרפי ינצח במשחק אחד.
- ב. שגיל ינצח בתחרות.
- ג. שרפי ינצח בתחרות.
- ד. שהתחרות תסתיים בתיקו.

50 טנק יורה טיל על חומה. ההסתברות שהטיל יפגע בחומה היא 0.6. כדי להפיל את החומה יש לפגוע בה לפחות עם 3 טילים. הטנק יורה 4 טילים. מה ההסתברות שהטנק יפיל את החומה?

#### הוצאה עם החזרה:

51 בתוך סל קניות יש 6 תפוחים ו-4 תפוזים. מוציאים עם החזרה 4 פירות מהסל. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. להוציא שני תפוחים ושני תפוזים.
- ב. להוציא 3 תפוחים ותפוז אחד.
- ג. רוב הפירות שמוציאים יהיו תפוחים.
- ד. לא להוציא תפוחים כלל.

52 בתוך קופסה יש 4 כדורים אדומים ו-2 כדורים ירוקים. מוציאים עם החזרה 4 כדורים מהקופסה. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שכל הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע.
- ב. שהוצאו לפחות שני כדורים ירוקים ולכל היותר 3 כדורים ירוקים.
- ג. שהוצא לפחות כדור אחד אדום ולכל היותר 3 כדורים אדומים.

53 בתוך קלמר יש 8 עפרונות ו-2 עטים. מוציאים עם החזרה 5 כלי כתיבה מהקלמר.

- א. הראה כי ההסתברות להוציא 3 עפרונות ו-2 עטים גדולה פי 4 מההסתברות להוציא 2 עפרונות ו-3 עטים.
- ב. חשב את ההסתברות להוציא 5 כלי כתיבה מאותו הסוג.
- ג. חשב את ההסתברות להוציא כלי כתיבה שונים.

**בעיות שונות – התפלגות בינומית אחת:**

54) זורקים קובייה 4 פעמים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שיתקבל בכל פעם המספר 4.
- ב. שיתקבל בדיוק פעמיים המספר 3.
- ג. שיתקבל פעמיים מספר הקטן מ-4.
- ד. שיתקבל בכל ארבעת הפעמים מספר המתחלק ב-3 בלי שארית.

55) במבחן יש 5 שאלות ולכל שאלה 3 תשובות שרק אחת מהן נכונה.

- א. מה ההסתברות לענות נכון בניחוש על כל השאלות?
- ב. מה ההסתברות לקבל ציון של 60 במבחן?
- ג. נניח שתלמיד יודע את התשובות הנכונות ל-2 מתוך 5 השאלות. מה ההסתברות שתלמיד זה יקבל 100 במבחן?
- ד. מה ההסתברות שהתלמיד בסעיף הקודם יקבל ציון של 60 לפחות?

56) ההסתברות ששחקן כדורסל יקלע לסל בזריקה בודדת היא 0.7.

- השחקן זורק כדורים עד שהוא קולע 4 פעמים.
- מה ההסתברות שהשחקן יזרוק בדיוק 6 כדורים?

57) זורקים קובייה עד שהמספר 5 מתקבל בדיוק 4 פעמים.

- מה ההסתברות לזרוק את הקובייה בדיוק 5 פעמים?

**תרגילים הכוללים שתי התפלגויות בינומיות:**

58) בעיר מסוימת 40% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-30% מהבנות מרכיבות משקפיים.

- א. בוחרים באקראי 4 גברים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם מרכיבים משקפיים?
- ב. בוחרים באקראי 5 נשים. מה ההסתברות שלכל היותר אישה אחת תרכיב משקפיים?
- ג. מה ההסתברות שמבין 4 הגברים ו-5 הנשים שנבחרו יהיו בדיוק 3 גברים שמרכיבים משקפיים ואישה אחת לכל היותר שמרכיבה משקפיים?

**(59)** 2 קלעים יורים למטרה. ההסתברות שהקלע הראשון יפגע היא 0.9 וההסתברות שהקלע השני יפגע היא 0.6. הקלע הראשון יורה 5 יריות והקלע השני יורה 3 יריות. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שהקלע הראשון יפגע בדיוק ב-2 יריות והקלע השני יפגע רק בירייה אחת במטרה.
- ב. שני הקלעים יפגעו כל אחד 3 פעמים במטרה.
- ג. שני הקלעים לא יפגעו כלל במטרה.
- ד. שני הקלעים יפגעו אותו מספר פגיעות כל אחד במטרה.

**(60)** בכד א' יש 4 כדורים לבנים ו-6 כדורים שחורים. בכד ב' יש 8 כדורים לבנים ו-2 כדורים שחורים. מוציאים באקראי 4 כדורים עם החזרה מכד א' ו-5 כדורים עם החזרה מכד ב'.

- א. הראה כי ההסתברות להוציא שני כדורים לבנים ושני כדורים שחורים מכד א' גדולה פי 54 מההסתברות להוציא כדור לבן אחד ו-4 כדורים שחורים מכד ב'.
- ב. חשב את ההסתברות להוציא 4 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'.
- ג. חשב את ההסתברות להוציא 3 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'.
- ד. מה היא ההסתברות להוציא לפחות 3 כדורים שחורים מכד א' וגם מכד ב'?

**(61)** במשפחה מרובת ילדים 40% מהבנים ו-30% מהבנות היו בחופשה בחו"ל. בוחרים באקראי 5 בנים ו-5 בנות.

- א. חשב את ההסתברות שבדיוק בן אחד ובת אחת היו בחו"ל.
- ב. חשב את ההסתברות שבדיוק שני בנים היו בחו"ל ואף אחת מהבנות שנבחרו לא הייתה בחו"ל.
- ג. חשב את ההסתברות שכל הבנים שנבחרו לא היו בחו"ל ו-2 בנות היו בחו"ל.
- ד. חשב את ההסתברות שבדיוק 2 מתוך 10 הילדים שנבחרו היו בחו"ל.

**(62)** זורקים שתי קוביות משחק – אחת ירוקה והשנייה כחולה, 4 פעמים כל אחת. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. שיתקבל מספר הגדול מ-4 פעם אחת בקובייה הירוקה ו-3 פעמים בקובייה הכחולה.
- ב. שיתקבל המספר 5 בשתי הקוביות בכל הזריקות שלהן.
- ג. שיתקבל מספר זוגי בקובייה הירוקה ב-3 מתוך 4 הזריקות שלה ומספר אי-זוגי בקובייה הכחולה ב-3 מתוך 4 הזריקות שלה.
- ד. שיתקבל מספר הגדול מ-3 לפחות 3 פעמים בקובייה הירוקה ולכל היותר 3 פעמים בקובייה הכחולה.

**תרגילים מורכבים – מציאת ההסתברות להצלחה בניסיון בודד :**

- 63) כדי להתקבל למגמת הנדסה במכללת חולון סטודנט צריך לעבור לפחות אחד משני מבחנים. ההסתברות להצליח במבחן הראשון היא 0.2 וההסתברות להצליח במבחן השני היא 0.5.
- בוחרים 5 סטודנטים שרוצים להתקבל למגמה הנ"ל.
- א. מה ההסתברות שסטודנט בודד יתקבל למגמה?
- ב. מה ההסתברות ששניים מתוך 5 הסטודנטים יתקבלו למגמה?
- ג. מה ההסתברות שלפחות 2 מתוך 5 הסטודנטים יתקבל למגמה?

- 64) בעיר מסוימת המונה 500,000 תושבים, ישנם 300,000 גברים והשאר נשים. ידוע כי 40% מהגברים מעשנים ו-90% מהנשים מעשנות.
- א. בוחרים תושב באופן אקראי. מה ההסתברות שהוא תושב מעשן?
- ב. בוחרים 5 מהתושבים הנ"ל.
- i. מה ההסתברות שלכל היותר תושב אחד הוא מעשן?
- ii. מה ההסתברות שכל התושבים שנבחרו הם מעשנים?

**65) ענה על השאלות הבאות :**

- א. מצא את ההסתברות שבמשפחה שבה 5 ילדים יהיו בדיוק 3 בנות אם ידוע כי ההסתברויות להולדת בן ובת זהים.
- ב. מבין כל המשפחות בעיר מסוימת בעלות 5 ילדים ומתוכן 3 בנות בוחרים באקראי 4 משפחות.
- i. מה ההסתברות שבדיוק ל-3 מהמשפחות הנ"ל יהיו 3 בנות?
- ii. מה ההסתברות שלפחות ל-3 משפחות מהמשפחות הנ"ל יהיו 3 בנות?

- 66) בכיתה שבה 45 תלמידים ישנם 18 בנים. בוחרים באקראי 3 תלמידים מהכיתה.
- א. מה ההסתברות שתבחרנה בדיוק שתי בנות?
- ב. חוזרים על התהליך הנ"ל כל חצי שנה.
- מה ההסתברות שבמשך שנתיים יבחרו רק פעם אחת שתי בנות ובן?

**תרגילים המכילים התפלגות שבה יותר משתי אפשרויות בניסיון בודד:**

**67** פאות של קובייה הן אדומות. פאה אחת היא כחולה ועוד שתי פאות הן צהובות. זורקים את הקובייה 4 פעמים.

- א. מה ההסתברות לקבל ב-3 מתוך 4 הזריקות צבע אדום?
- ב. מה ההסתברות לקבל לכל היותר פעם אחת צבע כחול?
- ג. מה ההסתברות לקבל בכל 4 הזריקות את הצבע הצהוב?
- ד. מה ההסתברות לקבל צבע זהה בכל 4 הזריקות?

**68** שחקן שחמט מנוסה מנצח ב-70% מהמשחקים, ב-20% מהם הוא נשאר בתיקו ובשאר הוא מפסיד. השחקן משחק בטורניר 4 משחקים ברצף.

- א. מה ההסתברות שהשחקן ינצח ב-3 מתוך 4 המשחקים?
- ב. מה ההסתברות שהשחקן יסיים בתיקו בכל 4 המשחקים?
- ג. מה ההסתברות שהשחקן יפסיד לכל היותר במשחק אחד?
- ד. מה ההסתברות שהשחקן ינצח לפחות ב-3 משחקים?

**69** בכד יש 4 כדורים שחורים, 3 כדורים לבנים ו-3 כדורים כחולים. מוציאים עם החזרה 5 כדורים מהכד.

- א. הראה כי ההסתברות שבדיוק 2 כדורים יהיו לבנים זהה להסתברות שבדיוק 2 כדורים יהיו כחולים.
- ב. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים הם לבנים?
- ג. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים הם שחורים?
- ד. מה ההסתברות שבדיוק 4 כדורים יהיו מאותו הצבע?

**70** אדם מתקשר לחברו. ההסתברות שהחבר יענה לטלפון היא 0.6, ההסתברות שהקו יהיה תפוס היא 0.3 וההסתברות שלא יענה כלל היא 0.1. מתקשרים 4 פעמים. חשב את ההסתברויות הבאות:

- א. פעמיים בדיוק הקו יהיה תפוס.
- ב. לכל היותר פעם אחת לא יענו.
- ג. החבר יענה לטלפון בכל 4 הפעמים.
- ד. החבר יענה לשיחה לכל היותר 3 פעמים.

71) צובעים את הפאות של סביבון בעל 8 פאות כך : 3 פאות באדום, 2 פאות בכחול, 2 פאות בירוק ופאה אחת בצהוב.

א. מה ההסתברות שמתוך 4 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא לא ייפול אף פעם על פאה אדומה?

ב. מה ההסתברות שמתוך 5 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול 4 פעמים על פאה כחולה?

ג. מה ההסתברות שמתוך 3 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול לפחות פעמיים על פאה צהובה?

ד. מה ההסתברות שמתוך 4 פעמים שמסובבים את הסביבון הוא ייפול פעם אחת לכל היותר על פאה ירוקה?

### תרגילים הכוללים נעלמים – התפלגות בינומית :

72) אם מוציאים מתוך פס ייצור לקיסמי שיניים 4 קיסמי שיניים ההסתברות שכולם פגומים היא 0.0001.

א. מה ההסתברות להוציא קיסם שיניים פגום מפס הייצור?

ב. מה ההסתברות שמתוך 4 הקיסמים כולם יהיו תקינים?

ג. מה ההסתברות שמתוך 4 הקיסמים שניים בדיוק יהיו פגומים?

73) מבדיקה של משרד הרישוי נמצא כי מתוך 2000 נבחנים שעשו טסט ראשון, 1400 עברו בהצלחה.

א. חשב את ההסתברות להצליח לעבור את בחינת הנהיגה.

ב. חשב את ההסתברות לבחור 5 תלמידים שמתוכם 3 עברו את בחינת הנהיגה.

ג. חשב את ההסתברות לבחור 4 תלמידים שמתוכם אף אחד לא עבר את בחינת הנהיגה.

74) אם בוחרים 4 תושבים מעיר מסוימת אז ההסתברות שלפחות אחד מהם ירכיב משקפיים היא 0.8704.

א. חשב את ההסתברות שתושב אחד ירכיב משקפיים.

ב. בוחרים 5 תושבים. מה ההסתברות שלפחות 4 מהם ירכיבו משקפיים?

**75** ההסתברות להוציא עפרון מקלמר היא  $p$  והיא יותר גדולה מההסתברות להוציא כלי כתיבה אחר. ידוע שמבין שני כלי כתיבה שמוציאים מהקלמר עם החזרה ההסתברות שאחד מהם בדיוק יהיה עפרון היא 0.32.

א. מצא את  $p$ .

ב. חשב את ההסתברות שמתוך 5 כלי כתיבה שמוציאים מהקלמר אף אחד לא יהיה עפרון.

**76** קלע יורה למטרה 4 פעמים. ההסתברות שלו לפגוע בירייה בודדת היא  $p$ .

א. מצא את  $p$  אם ידוע כי ההסתברות של הקלע לפגוע פעמיים שווה להסתברות שלו לפגוע 3 פעמים.

ב. מצא את ההסתברות של הקלע לפגוע פעם אחת במטרה.

**77** בעיר מסוימת ההסתברות שלמשפחה יהיה מחשב בבית היא  $p$ .

בוחרים באקראי 5 משפחות מעיר זו.

א. מצא את  $p$  אם ידוע כי ההסתברות שלשתי משפחות בדיוק יהיה מחשב קטנה פי 4 מההסתברות של-3 משפחות יהיה מחשב.

ב. הראה כי ההסתברות של-4 משפחות בדיוק יהיה מחשב גדולה פי 2 מההסתברות של-3 משפחות בדיוק יהיה מחשב.

**78** ההסתברות להצליח במבחן מסוים היא  $p$ .

ידוע שאם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות שלושתם יעברו את המבחן קטנה פי 16 מ- $p$ .

א. מצא את  $p$ .

ב. חשב את ההסתברות ששלושתם יכשלו במבחן.



## טבלה דו מימדית:

### תרגילים הכוללים הסתברות מותנה:

- 79) בעיר מסוימת 70% מהתושבים תומכים בקיום פעילויות אחה"צ לילדים.  
ל-60% מהתושבים יש ילדים בבית ול-40% אין ילדים כלל.  
ל-36% מהתושבים יש ילדים והם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ.  
א. מה הוא אחוז התושבים שאינם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ ויש להם ילדים?  
ב. מה הוא אחוז התומכים בקיום הפעילויות מבין התושבים שיש להם ילדים?  
ג. מה הוא אחוז התושבים שאינם תומכים בקיום פעילויות אחה"צ לילדים מבין התושבים שאין להם ילדים?
- 80) במכללה המונה 16,000 סטודנטים, נערכו שני מבחני סוף סמסטר.  
9600 סטודנטים עברו את המבחן הראשון ו-20% מהם עברו את השני.  
1920 סטודנטים עברו את שני המבחנים.  
א. מה הוא אחוז הסטודנטים שלא עברו אף מבחן?  
ב. מה הוא אחוז הסטודנטים שעברו את המבחן הראשון מבין אלו שעברו את המבחן השני?  
ג. מה הוא אחוז הסטודנטים שעברו את המבחן השני מבין אלו שעברו את המבחן הראשון?  
ד. מה הוא אחוז הסטודנטים שלא עברו אף מבחן מבין אלו שלא עברו את המבחן הראשון?
- 81) בחברה מסוימת מספר הנשים גדול פי 3 ממספר הגברים.  
ידוע כי ההסתברות לבחור עובד שהוא מרכיב משקפיים היא 0.4.  
30% מבין העובדים שמרכיבים משקפיים הם גברים.  
א. מה ההסתברות לבחור עובד שהוא אישה שאינה מרכיבה משקפיים?  
ב. בוחרים עובד באקראי, ידוע שנבחר גבר.  
מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?  
ג. בוחרים עובד באקראי, ידוע שהעובד שנבחר מרכיב משקפיים.  
מה ההסתברות שזו אישה?

- 82** במדינה מסוימת 60% מהאזרחים בעד הממשלה ו-40% הם נגד.  
48% מהאזרחים הם גמלאים ו-25% מהגמלאים בעד הממשלה.  
א. מה הוא אחוז האזרחים שאינם גמלאים מבין אלה שנגד הממשלה?  
ב. בוחרים אזרח באקראי. ידוע כי הוא בעד הממשלה.  
מה ההסתברות שהוא לא גמלאי?  
ג. בוחרים אזרח באקראי. ידוע כי הוא נגד פעולות הממשלה.  
מה ההסתברות שהוא גמלאי?
- 83** מחצית מתלמידי התיכון נעזרים במורים פרטיים.  
בסוף השנה נערך מבחן מסכם והתברר כי 60% מבין התלמידים שנעזרו במורים פרטיים עברו את המבחן בהצלחה. 20% מהתלמידים שלא נעזרו במורים פרטיים נכשלו במבחן.
- 84** איזה אחוז מתלמידי התיכון עברו את המבחן בהצלחה?  
א. איזה אחוז מבין התלמידים שלא נעזרים במורים פרטיים עברו את המבחן?  
ב. בוחרים באופן אקראי תלמיד. ידוע כי הוא נכשל במבחן.  
מה ההסתברות שהוא לא נעזר במורים פרטיים?
- 85** מספר הבנות במכללה גדול פי 1.5 ממספר הבנים. 20% מהבנים לומדים מקצוע הומאני, ו-36% מכלל הסטודנטים לומדים מקצוע ריאלי.  
א. מה הוא אחוז הבנות שלומדות מקצוע ריאלי?  
ב. בוחרים באופן אקראי סטודנט. ידוע כי נבחרה בת.  
מה ההסתברות שהיא לומדת מקצוע הומאני?  
ג. מה הוא אחוז הבנים מבין כל אלו שלומדים מקצוע הומאני?

### תרגילים הניתנים לפתירה גם על ידי דיאגרמת עץ:

- 86** במפעל מסוים  $\frac{3}{7}$  מהעובדים הם נשים ו  $\frac{4}{7}$  הם גברים.  
70% מהנשים הן מעשנות ו  $\frac{7}{8}$  מהגברים מעשנים.  
א. מה הוא אחוז העובדים שלא מעשנים במפעל?  
ב. בוחרים עובד וידוע כי נבחר עובד מעשן. מה ההסתברות שזו אישה?  
ג. מבין העובדים שלא מעשנים, מה ההסתברות לבחור גבר?

- (87)** בכפר מסוים  $\frac{2}{3}$  מהתושבים הם גברים ו- $\frac{1}{3}$  הם נשים. ידוע כי 60% מהגברים מרכיבים משקפיים ו-25% מהנשים לא מרכיבות משקפיים.
- מה ההסתברות להיתקל בגבר שלא מרכיב משקפיים בכפר?
  - בוחרים באקראי תושב. ידוע כי נבחרה אישה. מה ההסתברות שהיא מרכיבה משקפיים?
  - בוחרים באקראי תושב.
    - מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?
    - פי כמה גדול אחוז הגברים שמרכיבים משקפיים מאחוז הנשים שמרכיבות משקפיים?

- (88)** בכד יש 8 כדורים כחולים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי בלי החזרה שני כדורים מהכד.
- מה ההסתברות להוציא שני כדורים כחולים?
  - מה ההסתברות שהכדור השני שיצא הוא כחול?
  - אם ידוע שהכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון גם יהיה כחול?

- (89)** בכד יש 10 כדורים צהובים ו-4 כדורים שחורים. מוציאים באקראי בלי החזרה שני כדורים מהכד.
- מה ההסתברות להוציא שני כדורים צהובים?
  - מה ההסתברות שהכדור השני שיצא הוא צהוב?
  - אם ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא צהוב, מה ההסתברות שגם הראשון הוא צהוב?

- (90)** בכד א' יש 5 כדורים לבנים ו-3 כדורים שחורים. בכד ב' יש 4 כדורים לבנים וכדור אחד שחור. מוציאים כדור מכד א'. אם הוא שחור אז מוציאים כדורים נוסף מכד א' ואם הוא לבן אז מוציאים כדור מכד ב'. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא שחור. חשב את ההסתברות שהכדור הוצא מכד ב'.

- (91)** בכד א' יש 3 כדורים ירוקים ו-2 כדורים אדומים. בכד ב' יש 4 כדורים ירוקים וכדור אחד אדום. מוציאים כדור מכד א'. אם הוא ירוק אז מוציאים כדור נוסף מכד א' ואם הוא אדום אז מוציאים כדור מכד ב'. ידוע שהכדור השני שהוצא הוא אדום. מה ההסתברות שהוא הוצא מכד א'?

92) בכד יש 5 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים ו-2 כדורים צהובים. מוציאים בלי החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מה ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים?
- ב. מה ההסתברות להוציא שני כדורים מאותו הצבע?
- ג. ידוע כי שני הכדורים שהוצאו הם מאותו הצבע, מה ההסתברות שהם אדומים?

93) בכד יש 6 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים סגולים. מוציאים בלי החזרה שני כדורים מהכד. ידוע כי שני הכדורים שהוצאו הם בעלי אותו הצבע, מה ההסתברות ששניהם סגולים?

- 94) קלע יורה שתי יריות למטרה. ההסתברות שיפגע בירייה הראשונה היא 0.6. אם הוא פגע בירייה הראשונה אז ההסתברות שיפגע גם בשנייה היא 0.8. אם הוא החטיא בירייה הראשונה אז ההסתברות שיפגע בשנייה היא 0.5.
- א. מה ההסתברות שהקלע יפגע בירייה אחת בדיוק?
  - ב. מה ההסתברות שהקלע יפגע בירייה השנייה?
  - ג. ידוע כי הקלע פגע בירייה השנייה.
  - מה ההסתברות שהוא פגע גם בירייה הראשונה?
  - ד. ידוע כי הקלע פגע בירייה השנייה.
  - מה ההסתברות שהוא פגע במטרה פעם אחת בדיוק?

- 95) בארץ מסוימת כל יום הוא יום שמש או יום גשום. ההסתברות ליום שמש לאחר יום שמש היא 0.4 וההסתברות ליום גשום לאחר יום גשום היא 0.7. ביום ראשון היה גשום.
- א. מה ההסתברות שהיום השלישי יהיה גם גשום?
  - ב. ידוע כי היום השלישי הוא גשום.
  - מה ההסתברות שהיום השני יהיה יום שמש?

**תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס עם נעלם אחד:**

- 96)** בעיר מסוימת המונה 200,000 תושבים ידוע כי 120,000 מהם מרכיבים משקפיים. מחצית מהתושבים שמעשנים הם מרכיבים משקפים ו-20% מהתושבים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים.
- מהו אחוז התושבים שמעשנים?
  - מהו אחוז התושבים שמעשנים ומרכיבים משקפיים?
  - מהו אחוז התושבים שלא מעשנים ולא מרכיבים משקפיים?

- 97)** 45% מהסטודנטים באוניברסיטה משתמשים במחשב נייד והשאר משתמשים במחברות.  $\frac{4}{9}$  מבין הסטודנטים שמשתמשים במחשב נייד אינם מרכיבים משקפיים והסטודנטים שמשתמשים במחברות ולא מרכיבים משקפיים מהווים 60% מכלל הסטודנטים שלא מרכיבים משקפיים.
- מהו אחוז הסטודנטים שמשתמשים במחשב נייד ולא מרכיבים משקפיים?
  - מהו אחוז הסטודנטים שמשתמשים במחברות מבין אלו שמרכיבים משקפיים?
  - מה ההסתברות לבחור סטודנט שלא מרכיב משקפיים?

- 98)** בחברה מסוימת עובדים פי 4 גברים מנשים.
- ל-75% מהגברים אין תואר שני ו- $\frac{6}{7}$  מבין העובדים בלי תואר שני הם גברים.
- מהו אחוז הגברים בחברה בלי תואר שני?
  - בוחרים באקראי עובד. ידוע כי יש לו תואר שני. מה ההסתברות שזו אישה?
  - הראה כי ההסתברות להיתקל באקראי באישה העובדת בחברה זהה להסתברות להיתקל בגבר עם תואר שני.

- 99)** במפעל מסוים יש פי 3 עובדים גברים מנשים. ל- $\frac{2}{7}$  מהנשים יש רישיון נהיגה ומספר הגברים בעלי הרישיון במפעל מהווים  $\frac{6}{7}$  מכלל העובדים עם רישיון.
- הראה כי למחצית מהעובדים יש רישיון נהיגה.
  - מה ההסתברות לבחור גבר מבין העובדים בלי רישיון נהיגה?
  - מה ההסתברות לבחור אישה בלי רישיון מבין כל הנשים העובדות במפעל?

**תרגילים בהסתברות מותנה ונוסחת בייס עם שני נעלמים:**

- (100)** בעיר מסוימת 45% מהתושבים הם גברים ו-55% הם נשים.  
 $\frac{3}{8}$  מבין מרכיבי המשקפים בעיר הם גברים ו-50% מהתושבים שאינם מרכיבים משקפיים הם נשים.  
 א. מהו אחוז מרכיבי המשקפיים בעיר?  
 ב. בוחרים באקראי תושב. ידוע כי הוא גבר.  
 מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?  
 ג. פי כמה גדולה ההסתברות לפגוש אישה שלא מרכיבה משקפיים מגבר שמרכיב משקפיים?

- (101)** במשחק כדורגל 27% מהצופים הם ילדים והשאר מבוגרים.  
 40% מבין האוהדים של קבוצה א' הם ילדים ו-80% מבין האוהדים של קבוצה ב' הם מבוגרים. לאיזו קבוצה יש יותר אוהדים?

**תרגילים הכוללים טבלה שבה יש שלוש עמודות או שורות:**

- (102)** בארץ מסוימת יש 3 מפלגות – מפלגה א', ב' ו-ג'. בבחירות מצביעים גברים ונשים.  
 ידוע כי 55% מהאזרחים הם גברים. 60% מהאזרחים הצביעו למפלגה א'.  
 15% הצביעו למפלגה ב' ו-25% הצביעו למפלגה ג'. 75% מבין המצביעים למפלגה א' הם גברים ו-80% מבין המצביעים למפלגה ג' הם נשים.  
 א. מצא איזה חלק מהגברים הצביע למפלגה א'.  
 ב. מצא איזה חלק מהנשים הצביע למפלגה ב'.

- (103)** במפעל מסוים מייצרים שוקולד ווניל על ידי 3 מכונות. מכונה א' מייצרת 80% מהמוצרים. מכונה ב' מייצרת 6% מהמוצרים ומכונה ג' מייצרת 14%.  
 ידוע כי מכונה א' מייצרת 80% ממוצרי הווינל ומכונה ב' מייצרת פי 5 יותר ממוצרי הווינל מאשר מוצרי השוקולד.  
 סך כל מוצרי הווינל שהמפעל מייצר הם 76% מכלל המוצרים.  
 א. מהו אחוז מוצרי השוקולד המיוצרים על ידי מכונה ב' ?  
 ב. איזה חלק מבין מוצרי השוקולד מיוצרים על ידי מכונה א' ?  
 ג. איזה חלק מבין המוצרים של מכונה ג' מהווים מוצרי הווינל ?

- 104** במשק יש תרנגולים, אפרוחים ואווזים מפותמים. עקב בצורת קשה 47% מהעופות איבדו משקל רב. אחוז האווזים במשק הוא 20%. ידוע כי 75% מהאפרוחים ומהאווזים ירדו במשקל ו-1/6 מהתרנגולות ירדו גם כן במשקל.
- א. מה הוא אחוז התרנגולים במשק?  
 ב. מה ההסתברות לבחור תרנגול שלא איבד משקל כלל?  
 ג. בוחרים עוף מהמשק. ידוע כי הוא לא איבד משקל כלל. מה ההסתברות שהוא אפרוח?

### תרגילי חישוב הכוללים שימוש בנוסחאות בהסתברות:

- 105** A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.  
 נתון:  $P(A) = 0.9$  ,  $P(B) = 0.4$  .  
 חשב את:
- א.  $P(A \cap B)$   
 ב.  $P(A \cup B)$
- 106** A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.  
 נתון:  $P(A \cap B) = 0.3$  ,  $P(B) = 0.5$  . חשב את:
- א.  $P(A)$   
 ב.  $P(A \cup B)$   
 ג.  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$   
 ד.  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$  (רמז: אם A ו-B בלתי תלויים אז גם  $\bar{A}$  ו- $\bar{B}$  בלתי תלויים).
- 107** A ו-B הם שני מאורעות בלתי תלויים בניסוי מקרי.  
 נתון:  $P(A \cup B) = 0.92$  ,  $P(A) = 0.8$  . חשב את:
- א.  $P(B)$   
 ב.  $P(A \cap B)$   
 ג. הראה כי מתקיים התנאי:  $P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$

**(108)** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון:  $P(\overline{B}) = 0.75$ ,  $P(A) = 0.4$ ,  $P(A \cap B) = 0.1$ .

א. הוכח כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

ב. חשב את:  $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

(הסתמך על הטענה כי אם A ו-B בלתי תלויים אז גם  $\overline{A}$  ו- $\overline{B}$  בלתי תלויים).

**(109)** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון:  $P(B) = \frac{2}{5}$ ,  $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{3}{4}$ ,  $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{3}{8}$ . חשב את:

א.  $P(A)$

ב.  $P(A \cap B)$

ג.  $P(A \cup B)$

**(110)** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון:  $\frac{P\left(\frac{A}{B}\right)}{P\left(\frac{B}{A}\right)} = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{14}{15}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$ .

חשב את  $P(A)$  ואת  $P(B)$ .

**(111)** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון:  $\frac{P\left(\frac{A}{B}\right)}{P\left(\frac{B}{A}\right)} = \frac{2}{5}$ ,  $P(A \cup B) = 0.55$ ,  $P(A \cap B) = 0.15$ .

חשב את:  $P(A)$  ואת  $P(B)$ .

**(112)** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון:  $P(A \cup B) = 0.72$ ,  $P(A \cap B) = 0.18$ ,  $P(A) > P(B)$ .

חשב את  $P(A)$  ואת  $P(B)$  אם ידוע כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.



**113** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.  
נתון:  $P(A) > P(B)$ ,  $P(A \cap B) = 0.24$ ,  $P(A \cup B) = 0.86$ .  
חשב את  $P(A)$  ואת  $P(B)$  אם ידוע כי המאורעות A ו-B הם בלתי תלויים.

### תרגילי הוכחה בעזרת נוסחאות ההסתברות:

**114** A ו-B הם מאורעות הניסוי מקרי. נתון:  $A \subseteq B$ .

א. הוכח:  $P(A) = P\left(\frac{A}{B}\right) \cdot P(B)$

ב. A ו-B הם מאורעות תלויים.

**115** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח:

א.  $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$

ב.  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \left(1 - P\left(\frac{B}{A}\right)\right)$

**116** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח:  $P\left(\frac{A}{B}\right) + P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = 1$ .

**117** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון:  $P(A) = 0.7$ ,  $P(B) = 0.9$ . הוכח:

א.  $0.9 \leq P(A \cup B) \leq 1$

ב.  $0.6 \leq P(A \cap B) \leq 0.7$

**118** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון:  $P(A) = 0.4$ ,  $P(B) = 0.7$ . הוכח:

א.  $0.1 \leq P(A \cap B) \leq 0.4$

ב.  $0.7 \leq P(A \cup B) \leq 1$

**(119)** בניסוי מקרי ההסתברות למאורע A היא:  $P(A) = 0.4$ ,

ההסתברות למאורע B היא:  $P(B) = 0.2$ . הוכח:

א.  $0.4 \leq P(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq 0.6$

ב.  $0.8 \leq P(\bar{A} \cup \bar{B}) \leq 1$

**(120)** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי.

נתון:  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.8$ . הוכח:

א.  $0.1 \leq P(A \cap B) \leq 0.3$

ב.  $\frac{1}{3} \leq P\left(\frac{B}{A}\right) \leq 1$

ג.  $\frac{1}{8} \leq P\left(\frac{A}{B}\right) \leq \frac{3}{8}$

**(121)** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי שמרחב המדגם שלו הוא  $\Omega$ . הוכח:

א.  $\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - A \cup B$

ב.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

ג. אם A ו-B הם מאורעות בלתי תלויים אז גם  $\bar{A}$  ו- $\bar{B}$  יהיו בלתי תלויים.

**(122)** א. הוכח בעזרת דיאגרמת וון את הנוסחה:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ב. הוכח בעזרת דיאגרמת וון כי כאשר A ו-B הם קבוצות זרות אז מתקיים:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**(123)** A ו-B הם שני מאורעות בניסוי מקרי. הוכח כי הנתונים הבאים הם בלתי

אפשריים לקיום:  $P(\bar{A}) = 0.6$ ,  $P(B) = 0.8$ ,  $P(\bar{A} \cap B) = 0.7$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א. 0.1288 ב. 0.7912 ג. 0.0112
- (2) א.  $\frac{1}{64}$  ב.  $\frac{9}{64}$  ג.  $\frac{9}{32}$
- (3) א.  $\frac{9}{25}$  ב.  $\frac{13}{25}$  ג.  $\frac{2}{5}$
- (4) א.  $\frac{1}{9}$  ב.  $\frac{29}{81}$  ג.  $\frac{49}{81}$  ד.  $\frac{2}{9}$
- (5) א. 0.116 ב. 0.432 ג. 0.568 ד. 0.876
- (6) א.  $\frac{1}{512}$  ב.  $\frac{135}{512}$  ג.  $\frac{23}{128}$
- (7) א. 0.15 ב. 0.15 ג. 0.63
- (8) א.  $\frac{3}{28}$  ב.  $\frac{295}{448}$  ג.  $\frac{223}{448}$
- (9) א.  $\frac{1}{7}$  ב.  $\frac{1}{21}$  ג.  $\frac{4}{21}$
- (10) א.  $\frac{1}{29}$  ב.  $\frac{24}{145}$  ג. 0.2 ד.  $\frac{97}{145}$
- (11) א.  $\frac{253}{1435}$  ב.  $\frac{71}{287}$  ג.  $\frac{1182}{1435}$  ד.  $\frac{561}{1435}$
- (12) א.  $\frac{1}{30}$  ב.  $\frac{29}{30}$  ג.  $\frac{2}{3}$
- (13) א. 0.448 ב. 0.072 ג. 0.164 ד. 0.212
- (14) א. 0.348 ב. 0.056 ג. 0.176 ד. 0.964
- (15) א. 0.24 ב. 0.24 ג. 0.4
- (16) א. 0.16 ב. 0.72 ג. 0.36 ד. 0.28
- (17) א. 0.28 ב. 0.36 ג. 0.04
- (18) א. 0.03 ב. 0.47 ג. 0.33
- (19) א. 0.315 ב. 0.4825 ג. 0.45
- (20) א.  $\frac{52}{105}$  ב.  $\frac{39}{70}$  ג.  $\frac{64}{117}$
- (21) א.  $\frac{1}{2}$  ב.  $\frac{23}{54}$  ג.  $\frac{19}{27}$  ד.  $\frac{8}{27}$
- (22) א.  $\frac{73}{405}$  ב.  $\frac{118}{405}$  ג.  $\frac{191}{405}$
- (23) א.  $\frac{1}{5}$  ב.  $\frac{32}{135}$  ג.  $\frac{52}{75}$  ד.  $\frac{37}{75}$
- (24)  $\frac{115}{143}$
- (25)  $P=0.6$
- (26)  $P=0.2$
- (27)  $P=0.2$
- (28)  $P=0.2$

0.28 ב. א.  $P = 0.3$  (30)

$P_1 = 0.9$  ,  $P_2 = 0.3$  (29)

$P = 0.4$  (32)

0.3796 ב. א.  $P = 0.5$  (31)

$P = 0.7$  ,  $Q = 0.6$  (34)

0.51 ג. ב.  $P = 0.3$  ,  $Q = 0.4$  א. (33)

4 (36)

$x = 10$  (35)

12 (38)

2 (37)

$x = 2$  (40)

$x = 4$  (39)

5 אדומים ו-3 לבנים (42)

$x = 5$  (41)

3 סגולים ו-6 ירוקים (44)

8 כחולים ו-2 צהובים (43)

0.16807 ב. א. 0.3087 (46)  
0.83692 ד. 0.36015 ג.

0.0256 ד. 0.8208 ג. 0.1296 ב. א. 0.3456 (45)

0.1536 ב. א. 0.3456 (48)  
0.6544 ד. 0.1792 ג.

0.1323 ג. 0.52822 ב. א. 0.3078 (47)  
0.96922 ד.

0.4752 (50)

0.4752 ד. 0.8192 ג. 0.0272 ב. א. 0.0256 (49)

$\frac{64}{81}$  ג.  $\frac{32}{81}$  ב.  $\frac{17}{81}$  א. (52)

0.4752 ד. 0.3456 ב. א. 0.3456 (51)  
0.0256

$\frac{1}{81}$  ד.  $\frac{3}{8}$  ג.  $\frac{25}{216}$  ב.  $\frac{1}{1296}$  א. (54)

0.672 ג. 0.328 ב. (53)

0.21609 (56)

$\frac{19}{27}$  ד.  $\frac{1}{27}$  ג.  $\frac{40}{243}$  ב.  $\frac{1}{243}$  א. (55)

0.52822 ב. א. 0.1536 (58)  
0.08113 ג.

$\frac{5}{1944}$  (57)

0.0176 .ג 0.00082 .ב (60  
0.02752 .ד

0.0193 .ד  $6.4 \cdot 10^{-7}$  .ג 0.0157 .ב 0.0023 .א (59

$5.95 \cdot 10^{-7}$  .ב  $\frac{256}{6561}$  .א (62

0.17543 .ד 0.024 .ג 0.05808 .ב 0.09335 .א (61

0.2929 .ד 0.0625 .ג

0.08704 .ב  $P=0.6$  .א (64  
0.07776 .ג

0.91296 .ג 0.2304 .ב  $P=0.6$  .א (63

0.304 .ב  $\frac{1053}{2365}$  .א (66

0.09346 .ג 0.08392 .ב  $P=\frac{5}{16}$  .א (65

0.0016 .ב 0.4116 .א (68  
0.6517 .ד 0.9477 .ג

0.0756 .ד  $\frac{1}{81}$  .ג 0.86805 .ב  $\frac{1}{4}$  .א (67

0.1296 .ג 0.9477 .ב 0.2646 .א (70  
0.8074 .ד

0.1335 .ג 0.0768 .ב 0.02835 .א (69

0.6561 .ב  $P=0.1$  .א (72  
0.0486 .ג

$\frac{189}{256}$  .ד  $\frac{11}{256}$  .ג  $\frac{15}{1024}$  .ב  $\frac{625}{4096}$  .א (71

0.08704 .ב  $P=0.4$  .א (74

0.0081 .ג 0.3087 .ב  $P=0.7$  .א (73

0.1536 .ב  $P=0.6$  .א (76

0.00032 .ב  $P=0.8$  .א (75

$\frac{27}{64}$  .ב  $P=\frac{1}{4}$  .א (78

$P=0.8$  .א (77

20% .ג 60% .ב 32% .א (80  
80% .ד

15% .ג 60% .ב 24% .א (79

0.9 .ג 0.8 .ב 10% .א (82

0.7 .ג 0.48 .ב 0.47 .א (81

12.5% .ג  $\frac{14}{15}$  .ב 4% .א (84

$\frac{1}{3}$  .ג 80% .ב 70% .א (83

$P=0.65$  .א  $P=0.75$  .ב  $P=\frac{4}{15}$  .א (86  
1.6 .א

$P=\frac{5}{14}$  .ג  $P=0.375$  .ב 20% .א (85

$P=\frac{9}{13}$  .ג  $P=\frac{5}{7}$  .ב  $P=\frac{45}{91}$  .א (88

$P=\frac{7}{11}$  .ג  $P=\frac{2}{3}$  .ב  $P=\frac{14}{33}$  .א (87

$$P = \frac{15}{19} \quad (90)$$

$$P = \frac{7}{13} \quad (89)$$

$$P = \frac{1}{19} \quad (92)$$

$$P = \frac{5}{7} \text{ .ג} \quad P = \frac{14}{45} \text{ .ב} \quad P = \frac{2}{9} \text{ .א} \quad (91)$$

$$P = \frac{18}{67} \text{ .ב} \quad P = 0.67 \text{ .א} \quad (94)$$

$$P = \frac{5}{17} \text{ .ג} \quad P = \frac{12}{17} \text{ .א} \quad P = 0.68 \text{ .ב} \quad P = 0.32 \text{ .א} \quad (93)$$

$$P = 0.5 \text{ .ג} \quad 50\% \text{ .ב} \quad 20\% \text{ .א} \quad (96)$$

$$28\% \text{ .ג} \quad 12\% \text{ .ב} \quad 24\% \text{ .א} \quad (95)$$

$$P = \frac{5}{7} \text{ .ג} \quad P = \frac{9}{14} \text{ .ב} \quad (98)$$

$$P = \frac{1}{3} \text{ .ב} \quad 60\% \text{ .א} \quad (97)$$

$$\text{ב' } (100)$$

$$2 \text{ פי } \text{ .ג} \quad P = \frac{1}{3} \text{ .ב} \quad 40\% \text{ .א} \quad (99)$$

$$\frac{51}{70} \text{ .ג} \quad 0.8 \text{ .ב} \quad 1\% \text{ .א} \quad (102)$$

$$P = \frac{2}{9} \text{ .ב} \quad P = \frac{9}{11} \text{ .א} \quad (101)$$

$$0.94 \text{ .ב} \quad 0.36 \text{ .א} \quad (104)$$

$$\frac{8}{53} \text{ .ג} \quad P = 0.4 \text{ .ב} \quad 48\% \text{ .א} \quad (103)$$

$$0.48 \text{ .ב} \quad 0.6 \text{ .א} \quad (106)$$

$$0.7 \text{ .ג} \quad 0.2 \text{ .ג} \quad 0.8 \text{ .ב} \quad 0.6 \text{ .א} \quad (105)$$

$$0.88 \text{ .ג} \quad 0.32 \text{ .ב} \quad 0.8 \text{ .א} \quad (108)$$

$$0.9 \text{ .ב} \quad (107)$$

$$P(A) = 0.2 \text{ , } P(B) = 0.5 \quad (110)$$

$$P(A) = 0.4 \text{ , } P(B) = 0.8 \quad (109)$$

$$P(A) = 0.8 \text{ , } P(B) = 0.3 \quad (112)$$

$$P(A) = 0.3 \text{ , } P(B) = 0.6 \quad (111)$$

## תרגול נוסף - שאלות משולבות:

- (1) בקלמר יש 6 עפרונות ו-3 עטים. בתיק יש 9 כלי כתיבה -  $x$  עפרונות והשאר עטים. מוציאים באקראי כלי כתיבה מהקלמר ומכניסים אותו לתיק. לאחר מכן מוציאים מהתיק כלי כתיבה נוסף.
- א. מצא כמה עפרונות יש בתיק אם ידוע כי ההסתברות שכלי הכתיבה שהוצא מהקלמר שונה מכלי הכתיבה שהוצא מהתיק היא  $\frac{13}{30}$ .
- ב. מחזירים את המצב לקדמותו ומבצעים את הפעולה הבאה:  
מוציאים באקראי כלי כתיבה מהקלמר, מתבוננים בו ומחזירים אותו חזרה. אם יצא עט אז לוקחים  $y$  עטים מהתיק ושמים בקלמר, ואם יצא עפרון אז לוקחים 3 עפרונות מהקלמר ושמים אותם בתיק. לאחר מכן מוציאים שני כלי כתיבה מהתיק בזה אחר זה. מצא את  $y$  אם ידוע כי ההסתברות לקבל שני עפרונות היא:  $\frac{50}{99}$ .
- (2) נתון שק עם 16 כדורים בתוכו המחולקים לשני צבעים: אדום וכחול. מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. ידוע כי ההסתברות לקבל שני כדורים בצבעים שונים גדולה ב-  $\frac{1}{32}$  מההסתברות לקבל שני כדורים בצבעים שונים אילו ההוצאה הייתה עם החזרה.
- א. מצא כמה כדורים מכל צבע יש בשק אם ידוע כי יש יותר כדורים כחולים.
- ב. שני ושרון משחקות את המשחק הבא:  
תחילה הן מחזירות את כל הכדורים לשק. שני מוציאה 3 כדורים בזה אחר זה ללא החזרה מהשק, מתבוננת בהם ומחזירה חזרה. שרון מוציאה 3 כדורים עם החזרה בזה אחר זה ומתבוננת בהם. כל אחת מהבנות טוענת כי שיטתה היא זו שתיתן הסתברות גבוהה יותר להוציא 3 כדורים מאותו הצבע. מי מהבנות צודקת?
- ג. שי, אחיהן הגדול של הבנות, הכניס מספר כדורים אדומים לשק. מוציאים 4 כדורים עם החזרה מהשק. ידוע כי ההסתברות לקבל 3 כדורים כחולים וכדור אדום אחד, זהה להסתברות לקבל 3 כדורים אדומים וכדור אחד כחול. כמה כדורים אדומים הכניס שי לשק?

(3) בבית ספר מסוים 52% מהתלמידים הם בנים והשאר בנות. ידוע כי ההסתברות להיתקל בתלמיד (או תלמידה) המרכיב משקפיים גדולה ב-0.14 מההסתברות להיתקל בשתי בנות שאינן מרכיבות משקפיים ברחבי בית הספר (מניחים כי מספר התלמידים בבית הספר הוא גדול).

א. מצא את אחוז התלמידים שמרכיבים משקפיים אם ידוע כי החלק היחסי של הבנים שמרכיבים משקפיים בבית הספר מכלל מרכיבי המשקפיים

$$\text{הוא } \frac{11}{15}.$$

ב. איזה חלק מבין כלל התלמידים שאינם מרכיבים משקפיים מהווים קבוצת הבנים?

ג. בוחרים בבית הספר 4 תלמידים. ידוע כי כולם לא מרכיבים משקפים. מה ההסתברות שרובם בנים?

(4) בכד כדורים בשלושה צבעים שונים: כחול, צהוב וירוק. ידוע כי מספר הכדורים הירוקים גדול ב-2 ממספר הכדורים הצהובים וכי מספר הכחולים גדול ב-2 ממספר הכדורים הירוקים.

מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. ההסתברות להוציא שני

$$\text{כדורים באותו הצבע היא: } \frac{49}{153}.$$

א. מצא כמה כדורים מכל צבע יש בכד.

ב. על 5 הכדורים רשום מספר ועל שאר הכדורים רשומה אות. ידוע כי ההסתברות לבחור כדור צהוב עם מספר זהה להסתברות לבחור כדור כחול עם מספר וכי הסתברויות אלו קטנות פי 3 (כל אחת) מההסתברות לבחור כדור ירוק שרשומה עליו אות. חשב את ההסתברות לבחור כדור כחול שרשומה עליו אות.

ג. מוציאים מהכד שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. ידוע כי שני הכדורים כחולים. מה ההסתברות שלפחות על אחד מהם רשומה אות?



5) אבי קנה תפוחים ותפוזים. ידוע כי כמות התפוחים שקנה גדולה פי 3 מכמות התפוזים. במקביל קנתה אודט, בת זוגתו של אבי, תפוחים ותפוזים. אודט קנתה פי 3 יותר תפוזים מתפוחים. כשהגיעו השניים הביתה, הם שמו את כל הפירות שקנו במגירה במקרר, מעורבבים יחדיו. ידוע כי בסה"כ קנו שני בני הזוג 32 פירות וכי כמות התפוחים שקנתה אודט מהווה  $\frac{5}{14}$  מבין כל התפוחים שבמגירה.

א. מצא כמה פירות קנה כל אחד מבני הזוג.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. אודט רוצה להכין סלט פירות המורכב משני תפוחים ותפוז. מה ההסתברות של אודט להוציא את כל הפירות שצריכה בזה אחר זה ללא החזרה?

ii. ידוע כי אודט הוציאה את כל הפירות שצריכה, מה ההסתברות שהפרי הראשון שהוציאה הוא תפוח?

ג. ענה על השאלות הבאות:

i. שרון, בתה של אודט, ניגשת למגירה ורוצה לקחת תפוז. היא מוציאה 4 פירות עם החזרה מהמגירה, מה ההסתברות ששרון תוציא בדיוק תפוז אחד? הנח כי כמות הפירות שבמגירה היא לאחר הכנת הסלט.

ii. ידוע כי מתוך 4 הבחירות, הוציאה שרון בדיוק תפוז אחד, מה ההסתברות שהוא הפרי האחרון שהוציאה?

6) על קובייה בת 5 פאות רושמים המספרים 1, 2 ו-3 כך שהמספר 2 רשום על שלוש פאות ואילו המספרים 1 ו-3 רשומים כל אחד על פאה אחת בלבד. זורקים את הקובייה 5 פעמים.

א. ענה על השאלות הבאות:

i. מה ההסתברות לקבל לפחות 4 פעמים את המספר 2?

ii. ידוע כי התקבל המספר 2 לפחות 4 פעמים, מה ההסתברות לקבל בדיוק 4 פעמים את המספר 2?

iii. מה ההסתברות לא לקבל את אותו המספר בכל הזריקות?

ב. לוקחים 5 קוביות זהות וזורקים כל אחת פעם אחת בדיוק. מסתכלים על המספרים שהתקבלו בכל קובייה ומחשבים את ההסתברויות שבסעיף הקודם. האם התוצאות תשתנה? אם כן חשב אותן והסבר, אם לא – תן הסבר מתאים.

ג. מה ההסתברות לקבל בזריקות הראשונה והחמישית בלבד את המספר 2?

(7) מפעל מייצר שבבי תקשורת אלחוטית. 3% מהשבבים במפעל אינם תקינים. 90% מהשבבים התקינים ו-2% מהשבבים הפגומים מזוהים במהלך בדיקה שגרתית (טסט) במעבדה כתקינים.

- א. מה ההסתברות ששבב יזוהה כתקין?  
במסגרת הבדיקות במעבדה מבצעים 4 טסטים לכל שבב באופן בלתי תלוי אחד בשני. אם שבב זוהה בכל הפעמים כתקין, אז הוא נמכר במחיר מלא.  
אם הוא זוהה ב-3 טסטים כתקין אז הוא נמכר בחצי מחיר.  
בכל מקרה אחר השבב נשלח חזרה למחלקת הייצור במפעל ואינו נמכר.
- ב. מה ההסתברות ששבב יימכר במחיר מלא?
- ג. מה ההסתברות ששבב יחזור חזרה למפעל?

(8) בכד יש פי 4 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים כדור מהכד. אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוץ, אחרת מחזירים אותו לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף.

ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא:  $\frac{58}{175}$ .

- א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד?
- ב. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר הוא אדום?
- ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים באופן בלתי תלוי.  
ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול,  
מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

(9) בחדר  $x$  גברים ו- $x+5$  נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת. אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר  $x$  גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר  $x$  נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

- א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא  $\frac{5}{7}$ .
- ב. מה ההסתברות שתצא אישה מהחדר לאחר שנוספו לחדר נשים אם ידוע כי וודאי יצאה אישה מהחדר?  
אנשי החדר לובשים חולצות שחורות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלוובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלוובשים חולצות שחורות. כמו כן ההסתברות של הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות שחורות היא 0.25.
- ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלוובש חולצה שחורה בחדר.
- ד. בוחרים 5 אנשים מהחדר (ללא הוצאה) וידוע כי כולם לובשים חולצות שחורות. מה ההסתברות שרובם נשים?

**10** ללינוי שתי חבילות דפים, האחת בצבע כחול והשנייה בצבע כתום. בסה"כ יש ללינוי פי 3 דפים כחולים מכתומים. ביום חורפי אחד הלכה לחברתה, ספיר, כששתי החבילות בידה ובדרך נרטבו חלק מהדפים עקב הגשמים העזים. כשהגיעה לביתה של ספיר, מיינו השתיים את החבילות וגילו את הדברים הבאים:

1. 0.2 מבין הדפים הכתומים התרטבו.
2. כמות הדפים הכתומים היבשים שווה לכמות הדפים הרטובים הכוללת.
  - א. מה ההסתברות לבחור דף כחול רטוב מבין כל הדפים?
  - ב. איזה אחוז מהדפים הכחולים הם יבשים?
  - ג. ספיר הוציאה באופן אקראי 6 דפים מהתיק של לינוי ללא הסתכלות. הנח כי כמות הדפים גדולה מאוד.
    - i. מה הסיכוי שספיר תוציא לפחות דף אחד יבש?
    - ii. מה הסיכוי שספיר תוציא לפחות דף אחד כחול יבש?

**11** כדי לקבל עבודה בחברת מחשבים יש לעבור שני ראיונות באופן הבא: ראיון ראשון עם המהנדס הראשי של החברה. אם המועמד עבר את הראיון הראשון בהצלחה אז עליו לעבור ראיון נוסף עם מנכ"ל החברה. ידוע כי ההסתברות לעבור את הראיון הראשון היא  $p$  וכי ההסתברות לעבור את הראיון השני קטנה ב-0.1 מההסתברות לעבור את הראיון הראשון. הסיכוי להתקבל לחברה הוא 0.12 (לעבור בהצלחה את שני הראיונות).

א. מצא את  $p$ .

- ב. 6 אנשים מגישים מועמדות ביום מסוים. מה הסיכוי שרובם יתקבלו לעבודה בחברה?
- ג. ידוע כי רוב המועמדים התקבלו. מה הסיכוי כי בדיוק 4 מועמדים התקבלו?

**12** מפעל מייצר נורות בשלושה פסי ייצור: A, B ו-C. ידוע כי 25% מהנורות מיוצרות בפס ייצור A. כמו כן נתון כי:

- 3% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור A הן פגומות.
- 2% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור B הן פגומות.
- 5% מהנורות שמיוצרות בפס ייצור C הן פגומות.

סה"כ המפעל מייצא בממוצע 900 נורות תקינות מתוך כל 1000 נורות שהוא מייצר.

א. מצא את אחוז הנורות המיוצרות בפסי הייצור B ו-C.

ב. בוחרים באקראי נורה, ידוע כי היא תקינה, מה ההסתברות שהיא מפס ייצור C?

ג. כמה נורות מייצר המפעל ביום עבודה אם ידוע כי כמות הנורות התקינות שהתקבלו בפס ייצור B הוא 5600 יחידות?

- 13** בכד יש 4 כדורים אדומים, 3 כדורים כחולים ו-2 כדורים לבנים. מוצאים באקראי כדור מהכד. אם הוא אדום אז משאירים אותו בחוץ ומוציאים מכד כדור נוסף, אך אם הוא לא אדום מחזירים אותו לכד ומוציאים כדור נוסף.
- א. חשב את ההסתברות להוציא שני כדורים בעלי אותו הצבע.  
 ב. מוציאים שני כדורים מהכד, ידוע כי שניהם מאותו הצבע, מה ההסתברות ששניהם כחולים?  
 ג. כעת משנים את כללי במשחק בצורה הבאה: מוציאים כדור מהכד, מתבוננים בו ומחזירים אותו בחזרה לכד. חוזרים על התהליך 6 פעמים. מה ההסתברות שבמחצית המקרים יצא כדור לבן?
- 14** מפעל מייצר כפיות ומזלגות פלסטיק (חד-פעמיים). ההסתברות לבחור מזלג במפעל היא  $p$ . בוחרים באקראי 4 כלים.
- א. מצא את  $p$  אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו 3 מזלגות קטנה פי 4 מההסתברות שיבחר מזלג אחד מתוך הארבעה.  
 המפעל מייצר כפיות ומזלגות בשני צבעים – שחור או לבן.  
 ידוע כי רבע מהמזלגות הם בצבע לבן ו- $\frac{2}{3}$  מהכפיות הם בצבע שחור.
- ב. מה היא ההסתברות לבחור כלי שחור?  
 ג. ידוע כי נבחר כלי שחור, מה ההסתברות שהוא מזלג?
- 15** תלמיד הלומד נהיגה ניגש לטסט ראשון.
- ידוע כי ההסתברות שיעבור את הטסט היא  $p$ .
- אם התלמיד נכשל בטסט הראשון הוא ניגש שנית וכעת ההסתברות שלו לעבור גדולה ב-0.1. אם הוא נכשל פעם נוספת אז הוא ניגש בפעם האחרונה כאשר גם כעת ההסתברות שלו לעבור גדולה ב-0.1 מהפעם הקודמת.
- ידוע כי הסיכוי של התלמיד לעבור את הטסט השני הוא 0.28.
- א. מצא את  $p$ .  
 ב. מה הסיכוי של התלמיד לעבור טסט כלשהו?  
 ג. ידוע כי התלמיד עבר טסט, מה הסיכוי שהוא עבר את הטסט השלישי?

- 16** לשני קוביית משחק הגונה בעלת 6 פאות הממוספרות מ-1 עד 6 ולשרון סביבון חנוכה הגון בעל 4 פאות הממוספרות מ-1 עד 4. הבנות משחקות את המשחק הבא: שני מטילה את הקובייה ושרון מסובבת את הסביבון.
- אם הקובייה מראה מספר הגדול מ-3 והסביבון מראה מספר הגדול מ-2 אז כל אחד מהבנות מקבלת נקודה.
  - אם הקובייה מראה מספר הקטן או שווה ל-3 והסביבון מראה מספר הגדול מ-2 אז שרון מקבלת נקודה.
  - אם הקובייה מראה מספר הגדול מ-3 אך הסביבון מראה מספר הקטן או שווה ל-2 אז שני מקבלת נקודה.
  - אם הקובייה מראה מספר הקטן או שווה ל-3 והסביבון מראה מספר הקטן או שווה ל-2 אז אף אחת מהבנות לא מקבלת נקודה.
- הבנות מטילות את הקובייה והסביבון פעמיים.
- א. מה ההסתברות שלשני יהיו יותר נקודות?
- ב. ידוע כי שני צברה יותר נקודות, מה ההסתברות שבהטלה הראשונה לא קיבלה שני נקודה?
- ג. האם התוצאות של הסעיפים הקודמים ישתנו אם שני תשחק עם הסביבון במקום הקובייה ושרון תשחק עם הקובייה במקום הסביבון? נמק.

- 17** חנות מוכרת חרוזים בשלושה צבעים בלבד: כסף, זהב ולבן. נטלי קנתה חרוזים מכל צבע. ידוע כי כמות החרוזים הכסופים קטנה פי 3 מכמות החרוזים הזהובים וכי כמות החרוזים הזהובים קטנה פי 3 מכמות החרוזים הלבנים. המוכרת ריכזה עבור נטלי את כל החרוזים בשקית אחת.
- א. מצא כמה חרוזים קנתה נטלי מכל סוג אם ידוע כי ההסתברות להוציא מהשקית שני חרוזים בצבעים שונים בזה אחר זה ללא החזרה היא:  $\frac{360}{779}$ .
- ב. החרוזים מיוצרים ע"י שתי חברות: ניצוץ וקריסטל. ידוע כי כמות החרוזים הכסופים תוצרת ניצוץ וכמות החרוזים הזהובים תוצרת ניצוץ זהות. כמו כן כמות החרוזים הזהובים תוצרת קריסטל גדולה פי 5 מכמות החרוזים הזהובים תוצרת ניצוץ.
- מצא את ההסתברות לבחור חרוז בצבע כסף מתוצרת קריסטל.
- ג. בוחרים 4 חרוזים, ידוע כי כולם תוצרת ניצוץ.
- ההסתברות שבדיוק 2 מהם יהיו כסופים היא:  $\frac{27}{128}$ .
- מצא את ההסתברות לבחור חרוז תוצרת קריסטל אם ידוע כי חרוזי הכסף תוצרת ניצוץ אינם מהווים רוב מכמות כל חרוזי ניצוץ שברשותה של נטלי.

18) בבחירות מקומיות בעיר מסוימת ישנם שלושה מתמודדים - מתמודד א',

מתמודד ב' ומתמודד ג'. ידוע כי  $\frac{43}{90}$  מתושבי העיר הם מבוגרים ו-  $\frac{47}{90}$  הם

צעירים. 60% מבין המצביעים למועמד א' הם מבוגרים, 60% מבין המצביעים למועמד ב' הם צעירים וידוע כי ההסתברות למצוא בעיר תושב צעיר שהצביע

למועמד ג' היא  $\frac{1}{9}$ .  $\frac{24}{43}$  מהמבוגרים הצביעו למועמד א'

א. מי מהמתמודדים קיבל את רוב הקולות?

ב. בוחרים באקראי תושב מהעיר.

חשב את ההסתברויות שנבחר צעיר המצביע למתמודד ב'.

ג. בוחרים באקראי תושב. ידוע כי הוא הצביע למתמודד ג'.

מה ההסתברות כי הוא צעיר?

ד. בוחרים באקראי 4 תושבים וידוע כי כולם הצביעו למתמודד ג'.

מה ההסתברות כי לפחות אחד מהם מבוגר?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5 עפרונות ב.  $y = 3$ .
- (2) א. 10 כדורים כחולים ו-6 אדומים. ב. שרון צודקת. ג. 4 כדורים.
- (3) א. 30% ב.  $\frac{3}{7}$  ג.  $\frac{513}{2401} = 0.21366$ .
- (4) א. 4 כדורים צהובים, 6 כדורים ירוקים ו-8 כדורים כחולים. ב.  $\frac{7}{18}$  ג.  $\frac{28}{153}$ .
- (5) א. אבי קנה 12 פירות ואודט קנתה 20 פירות. ב. i.  $\frac{819}{2480}$  ב. ii.  $\frac{2}{3}$ .
- ג. i. 0.16613 ג. ii.  $\frac{1}{4}$ .
- (6) א. i. 0.33696 א. ii.  $\frac{10}{13}$  א. iii.  $\frac{576}{625}$  ב. לא ג. 0.02304.
- (7) א. 0.8736 ב. 0.58244 ג. 0.08047.
- (8) א. 3 כדורים אדומים ו-12 כחולים. ב.  $\frac{14}{69}$  ג. 0.05982.
- (9) א. 8 נשים ב.  $\frac{11}{15}$  ג. 0.05 ד.  $\frac{675}{1024}$ .
- (10) א. 0.15 ב. 75% ג. i. 0.999936 ג. ii. 0.995904.
- (11) א.  $P = 0.4$  ב. 0.00254 ג.  $\frac{55}{58}$ .
- (12) א. פס ייצור B - 30%. פס ייצור C - 45%. ב.  $\frac{4}{9}$  ג. 20,000 יחידות ליום.
- (13) א.  $\frac{53}{162}$  ב.  $\frac{18}{53}$  ג. 0.103266.
- (14) א.  $p = \frac{1}{3}$  ב.  $\frac{25}{36}$  ג. 0.36.
- (15) א.  $p = 0.6$  ב. 0.976 ג.  $\frac{6}{61}$ .
- (16) א.  $\frac{5}{16}$  ב. 0.2 ג. לא, מכיוון שיש סימטריה בהסתברויות ההטלות.
- (17) א. 60 בצבע כסף, 180 בצבע זהב ו-540 בצבע לבן. ב.  $\frac{1}{26}$  ג.  $\frac{11}{13}$ .
- (18) א. מתמודד א' ב. 0.2 ג. 0.5 ד.  $\frac{15}{16}$ .

## תרגול מבגרויות:

- (1)  $\frac{3}{4}$  מהתלמידים בכיתה אוהבים שוקולד או גלידה (כולל תלמידים האוהבים שוקולד וגם גלידה). 9 תלמידים לא אוהבים שוקולד וגם לא אוהבים גלידה.  
א. ענה על השאלות הבאות:  
i. בוחרים באקראי תלמיד אחד מהכיתה.  
מהי ההסתברות שהוא לא אוהב שוקולד וגם לא אוהב גלידה?  
ii. מצא כמה תלמידים יש בכיתה.  
ב. כל תלמיד בכיתה שאוהב שוקולד כתב על פתק: אוהב, וכל תלמיד שלא אוהב שוקולד כתב על פתק: לא אוהב. ערבבו את כל הפתקים ובחרו מביניהם באקראי 5 פתקים עם החזרה. נתון כי ההסתברות שעל 3 מהם כתוב "אוהב" שווה להסתברות שעל 2 מהם כתוב "אוהב".  
מצא כמה תלמידים בכיתה אוהבים שוקולד.
- (2) בבית ספר מסוים 60% מכלל המורים (גברים ונשים) מתנגדים ללעיסת מסטיק בשיעור. מספר המורים (גברים) בבית הספר גדול פי 4 ממספר המורות (נשים).  
0.57 מכלל המורים (גברים ונשים) הם גברים המתנגדים ללעיסת מסטיק.  
בוחרים באקראי מורה (גבר או אישה).  
א. חשב את ההסתברות שהמורה שנבחר הוא אישה המתנגדת ללעיסת מסטיק.  
ב. ידוע שהמורה שנבחר הוא אישה.  
i. חשב את ההסתברות שהיא מתנגדת ללעיסת מסטיק.  
ii. מבין 5 מורות בבית הספר, מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מורות מתנגדות ללעיסת מסטיק? (בתשובתך דייק עד 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
- (3) בתוך שק נמצאים 3 קלפים. לאחד הקלפים יש שני צדדים לבנים, לאחד הקלפים יש שני צדדים שחורים, ולאחד הקלפים יש צד אחד לבן וצד אחד שחור.  
מערבבים את הקלפים, ובעיניים עצומות מוציאים קלף מהשק ומניחים אותו על השולחן.  
א. מהי ההסתברות ששני צדי הקלף יהיו זהים?  
ב. מהי ההסתברות שהצד הגלוי לעין של הקלף יהיה לבן? נמק.  
ג. ידוע שהצד הגלוי לעין של הקלף הוא לבן.  
מהי ההסתברות ששני צדי הקלף הם לבנים?



(4) במכללה מסוימת הסטודנטים למחשבים נבחנו בסוף השנה במבחן בהסתברות וסטטיסטיקה. במבחן יש שני תרגילים בהסתברות ותרגיל אחד בסטטיסטיקה.

נבחן מקבל ציון עובר או ציון נכשל בכל תרגיל במבחן. כדי לקבל ציון עובר במבחן כולו על הנבחן לקבל ציון עובר בשני תרגילים לפחות מבין שלושה. הסיכוי שסטודנט יקבל ציון עובר בתרגיל בהסתברות הוא 60%, והסיכוי שסטודנט יקבל ציון עובר בסטטיסטיקה הוא 80%. ההסתברויות לקבל ציון עובר או נכשל בתרגילים השונים אינן תלויות זו בזו.

א. ענה על השאלות הבאות:

i. מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר בשלושת התרגילים במבחן?

ii. מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר בשני תרגילים במבחן וציון נכשל בתרגיל אחד?

iii. מהי ההסתברות שנבחן יקבל ציון עובר במבחן כולו?

ב. נבחן קיבל ציון עובר במבחן כולו.

מהי ההסתברות שהוא קיבל ציון עובר בשני התרגילים בהסתברות?

(5) יוסי משחק שלושה משחקי שש-בש בזה אחר זה. בכל משחק הוא יכול לנצח או להפסיד (אין תיקו). אם יוסי ניצח באחד המשחקים, ההסתברות שהוא ינצח במשחק שאחריו היא  $p$ , ואם הוא הפסיד באחד המשחקים, ההסתברות שהוא יפסיד במשחק שאחריו גם היא  $p$ , נתון כי:  $p > 0.5$ .

א. אם ידוע כי יוסי ניצח במשחק הראשון:

i. הבע באמצעות  $p$ , את ההסתברות שיוסי יפסיד במשחק השני וינצח במשחק השלישי.

ii. חשב את  $p$  אם נתון כי ההסתברות שיוסי ינצח במשחק השלישי היא  $\frac{13}{25}$ .

ב. השתמש במה שחישבת, וחשב את ההסתברות שיוסי ינצח במשחק הראשון, אם נתון כי ההסתברות שיוסי ינצח בשלושת המשחקים היא 0.144.

6) במלאי של סוחר יש כובעים המיוצרים בשלושה מפעלים: מפעל A, מפעל B, מפעל C.

מלאי הכובעים הוא גדול מאוד.  $\frac{1}{2}$  מהכובעים במלאי מיוצרים במפעל A.

$\frac{1}{3}$  מהכובעים במלאי מיוצרים במפעל B. שאר הכובעים במלאי מיוצרים במפעל C.

5% מהכובעים המיוצרים במפעל A הם פגומים.

1.5% מהכובעים המיוצרים במפעל B הם פגומים.

3.5% מהכובעים במלאי הם פגומים.

א. בוחרים באקראי כובע אחד מבין הכובעים המיוצרים במפעל C. מהי ההסתברות שהכובע פגום?

ב. מהי ההסתברות שבמדגם מקרי של 6 כובעים המיוצרים במפעל C יש לכל היותר כובע אחד פגום?

7) מטילים שתי קוביות משחק מאוזנות: קובייה A וקובייה B.

א. מהי ההסתברות שבקובייה A יתקבל מספר 4 או מספר 6 וגם בקובייה B יתקבל מספר 4 או מספר 6?

ב. מהי ההסתברות שלפחות אחת מהקוביות יתקבל מספר 4 או מספר 6?

ג. מטילים שש פעמים את שתי הקוביות A ו-B. מהי ההסתברות שבדיוק בשלוש הטלות יתקבל מספר 4 או מספר 6 לפחות באחת מהקוביות?

8) מטילים פעם אחת קוביית משחק מאוזנת.

א. ענה על השאלות הבאות:

i. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ-3?

ii. האם המאורע "יתקבל מספר זוגי" והמאורע "יתקבל מספר גדול מ-3" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

מטילים קוביית משחק מאוזנת 3 פעמים.

ב. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ-3 בדיוק בשתי הטלות?

ג. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ-3 רק בהטלה הראשונה ובהטלה השלישית?

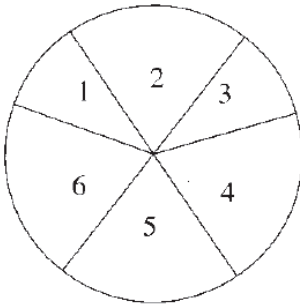
ד. מהי ההסתברות שיתקבל מספר זוגי גדול מ-3 בהטלה הראשונה ובהטלה השלישית?

9 מפעל מייצר מחשבים. 6% מהמחשבים המיוצרים במפעל הם לא תקינים. 95% מהמחשבים התקינים ו-2% מהמחשבים הלא-תקינים מזוהים על ידי היחידה לבקרת איכות כתקינים.

- א. מהי ההסתברות שמחשב יזוהה כתקין?
  - ב. היחידה לבקרת איכות בודקת כל מחשב 4 פעמים. (הבדיקות אינן תלויות זו בזו). אם המחשב זוהה 4 פעמים כתקין, הוא נמכר עם התווית של המפעל. אם המחשב זוהה 3 פעמים כתקין, הוא נמכר במחיר נמוך בלי התווית של המפעל. אם המחשב זוהה לפחות 2 פעמים כלא-תקין, הוא נשלח למחזור.
  - i. מהי ההסתברות שמחשב יימכר עם התווית של המפעל?
  - ii. מהי ההסתברות שמחשב יישלח למחזור?
- בתשובתך דייק עד ארבע ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

10 במפעל לייצור נורות ניאון יש שלוש מכונות : A, B, C.

- מכונה A מייצרת 60% מהנורות.
  - מכונה B מייצרת 30% מהנורות.
  - מכונה C מייצרת 10% מהנורות.
  - 2% מהנורות שמייצרת מכונה A הן פגומות.
  - 3% מהנורות שמייצרת מכונה B הן פגומות.
  - 4% מהנורות שמייצרת מכונה C הן פגומות.
- א. ענה על השאלות הבאות :
    - i. מצא את אחוז הנורות הפגומות במפעל.
    - ii. בוחרים באקראי נורה אחת מבין הנורות הפגומות.
  - מהי ההסתברות שהנורה שנבחרה יוצרה על ידי מכונה C?
  - ב. בוחרים באקראי 5 נורות מבין הנורות המיוצרות במפעל. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מהן יהיו תקינות?



**11** גלגל משחק מאוזן מחולק לשש גזרות.

על 2 גזרות שכל אחת היא  $\frac{1}{10}$  מהעיגול, רשומים

המספרים 1 ו-3, ועל 4 גזרות שכל אחת היא  $\frac{1}{5}$

מהעיגול, רשומים המספרים 2, 4, 5, 6 כמתואר בציור.  
כאשר מסובבים את הגלגל הוא נעצר על אחד המספרים  
(לא על הקו שבין הגזרות).

א. מסובבים את הגלגל פעם אחת.

מהי ההסתברות שהגלגל ייעצר על מספר זוגי?

מסובבים את הגלגל 5 פעמים.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. מהי ההסתברות שהגלגל ייעצר על מספר זוגי 2 פעמים לכל היותר?

ii. ידוע שהגלגל נעצר על מספר זוגי 2 פעמים לכל היותר.

מהי ההסתברות שהגלגל נעצר על מספר זוגי בדיוק 2 פעמים?

ג. מהי ההסתברות שרק בפעם הראשונה ובפעם האחרונה ייעצר הגלגל על מספר זוגי?

**12** בשלוש קופסאות A, B, ו-C יש כדורים שחורים ולבנים.

בקופסה A יש 2 כדורים שחורים ו-3 כדורים לבנים.

בקופסה B יש 3 כדורים שחורים ו-2 כדורים לבנים.

בקופסה C יש 4 כדורים שחורים ו-1 כדור לבן.

א. בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה באקראי כדור אחד.

i. מהי ההסתברות להוציא כדור לבן?

ii. ידוע שהוצא כדור לבן. מהי ההסתברות שהכדור הוצא מקופסה B?

ב. מקופסה C מוציאים באקראי 2 כדורים זה אחר זה בלי החזרה.

מהי ההסתברות שאחרי הוצאת הכדורים לא נותר בקופסה C כדור לבן?

**13** חקלאי מייצא פרחים לבנים ופרחים אדומים. במחסן של החקלאי :

$\frac{1}{12}$  מהפרחים הלבנים הם ורדים.  $\frac{2}{3}$  מהפרחים האדומים הם ורדים.

25% מכלל הפרחים הם ורדים, והשאר הם חבצלות.

א. בוחרים באקראי פרח מבין הפרחים שבמחסן.

i. מהי ההסתברות שהפרח הוא אדום?

ii. מהי ההסתברות שהפרח הוא אדום אם ידוע שהוא ורד?

ב. נתון שמספר הורדים האדומים במחסן הוא 300.

מהו מספר הפרחים במחסן?

**14** ידוע שההסתברות להצליח במבחן הנהיגה (טסט) גדולה ב-0.2 מההסתברות להיכשל בו.

א. מהי ההסתברות להצליח במבחן הנהיגה?

ב. ראובן, שמעון לוי ויהודה הם 4 אנשים שנבחרו באקראי מבין הנבחנים במבחן הנהיגה.

i. מהי ההסתברות שבדיוק 2 מהם יצליחו במבחן הנהיגה?

ii. ידוע שרק 2 מהם הצליחו במבחן הנהיגה.

מהי ההסתברות שהיו אלה ראובן ושמעון?

iii. האם ההסתברות שלפחות אחד מהארבעה יצליח במבחן הנהיגה גדולה מההסתברות שלפחות אחד מהארבעה ייכשל במבחן הנהיגה? נמק.

## תשובות סופיות:

- (1) א. i. 0.25      א. ii. 36      ב. 18.
  - (2) א. 0.03      ב. i. 0.15      ב. ii. 0.9999.
  - (3) א.  $\frac{2}{3}$       ב.  $\frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{3}$ .
  - (4) א. i. 0.288      א. ii. 0.456      א. iii. 0.744      ב.  $\frac{15}{31}$ .
  - (5) א. i.  $(1-p)^2$       א. ii.  $p = 0.6$       ב. 0.4.
  - (6) א. 0.03      ב. 0.9875.
  - (7) א.  $\frac{1}{9}$       ב.  $\frac{5}{9}$       ג. 0.301.
  - (8) א. i.  $\frac{1}{3}$       א. ii. לא, המאורעות תלויים.
  - (9) ב.  $\frac{2}{9}$       ג.  $\frac{2}{27}$       ד.  $\frac{1}{9}$ .
  - (10) א. 0.8942      ב. i. 0.6393      ב. ii. 0.0581.
  - (11) א. i. 2.5%      א. ii. 0.16      ב. 0.0059.
  - (12) א. 0.6      ב. i. 0.31744      ב. ii. 0.74248      ג. 0.02304.
  - (13) א. i.  $\frac{2}{5}$       א. ii.  $\frac{1}{3}$       ב.  $\frac{2}{5}$ .
  - (14) א. i.  $\frac{2}{7}$       א. ii.  $\frac{16}{21}$       ב. 1575 פרחים.
  - (15) א. 0.6      ב. i.  $\frac{216}{625}$       ב. ii.  $\frac{1}{6}$
- ב. iii. כן,  $(0.9744 > 0.8704)$ .

## תוכן העניינים

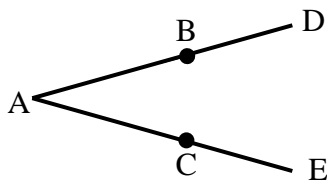
פרק 8.....	200
מבוא לגיאומטריה של המישור.....	200
ישרים וזוויות :	200
שאלות – חיבור וחסור קטעים :	200
שאלות – חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות :	201
שאלות – זוויות קדקודיות וזוויות צמודות :	202
שאלות - זוויות בין ישרים מקבילים :	203
תשובות סופיות :	205

## פרק 8

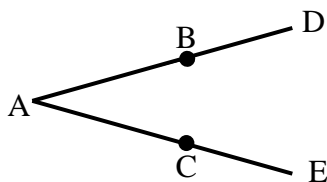
# מבוא לגיאומטריה של המישור

### ישרים וזוויות:

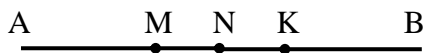
שאלות – חיבור וחיסור קטעים:



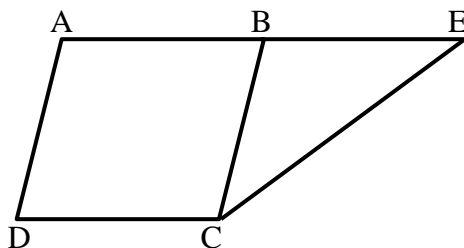
- (1) באיור שלפניך נתון:  
 $AB = AC$ ,  $BD = CE$   
 הוכח:  $AD = AE$



- (2) באיור שלפניך נתון:  
 $AD = AE$ ,  $AB = AC$   
 הוכח:  $BD = CE$



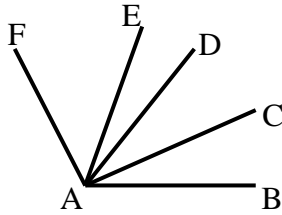
- (3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד. נתון כי:  $AM = KB$ ,  $MN = NK$   
 הוכח:  $AN = BN$



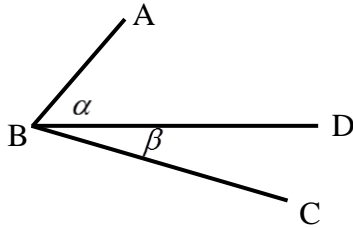
- (4) בסרטוט שלפניך נתון כי:  
 $BC = AB$ ,  $BE + BC = 2AB$   
 הוכח:  $AB = BE$



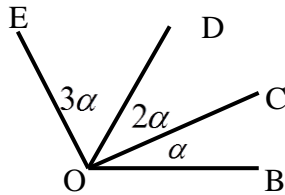
שאלות – חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות:



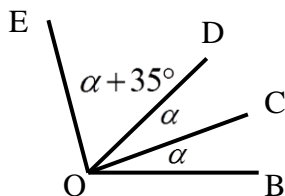
- (5) נתון:  $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$ ,  $\angle CAB = \angle DAC$ .  
וכן:  $\angle EAB = 80^\circ$ ,  $\angle FAD = 60^\circ$ .  
חשב את הזוויות הבאות:  
 $\angle FAB$ ,  $\angle EAC$ ,  $\angle CAB$



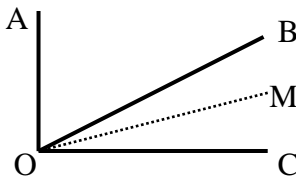
- (6) באיור שלפניך נתון:  $\angle ABC = 69^\circ$ .  
נתון כי:  $\alpha = 2\beta$  (זוויות סמוכות).  
מצא את  $\alpha$  ואת  $\beta$ .



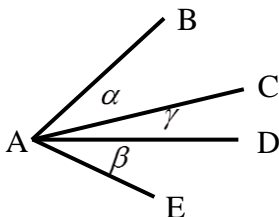
- (7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים  
מהנקודה O. הנתונים הם:  $\angle EOB = 138^\circ$ .  
חשב את הזוויות הבאות:  
 $\angle EOD$ ,  $\angle DOC$ ,  $\angle COB$



- (8) באיור שלפניך נתון:  $\angle EOB = 110^\circ$ .  
שאר הנתונים מופיעים בתרשים.  
חשב את הזוויות הבאות:  
 $\angle EOC$ ,  $\angle DOC$



- (9) נתון האיור הבא ובו:  $\angle AOC = 90^\circ$ .  
OM חוצה את זווית BOC.  
מתקיים:  $\angle AOB = 3\angle MOC$ .  
חשב את:  $\angle AOM$ ,  $\angle BOM$

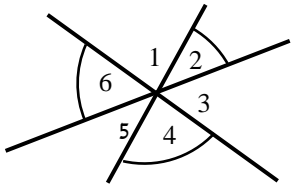


- (10) בסרטוט שלפניך נתון:  $\alpha = \beta$ .  
הוכח כי:  $\angle BAD = \angle EAC$

## שאלות – זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

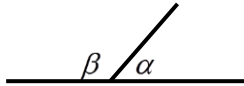
11) חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):

$$\angle 2 + \angle 4 + \angle 6$$



12) באיור שלפניך הזוויות  $\alpha$  ו-  $\beta$  הן זוויות צמודות.

ידוע כי:  $\alpha = 63^\circ$ . מצא את זווית  $\beta$ .

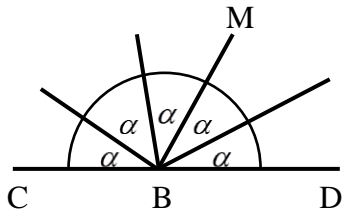


13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.

כל הזוויות שוות ל-  $\alpha$ .

א. חשב את  $\alpha$ .

ב. חשב את זווית CBM.

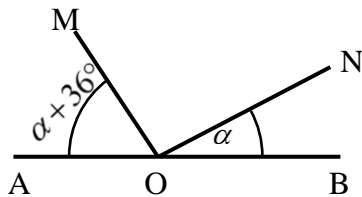


14) בסרטוט שלפניך ידוע:

הזווית AOB היא שטוחה.

נתון:  $\alpha = 27^\circ$ .

הוכח כי:  $MO \perp NO$ .

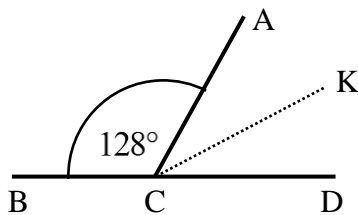


15) הזוויות  $\angle ACB$  ו-  $\angle ACD$  הן צמודות.

ידוע כי CK חוצה זווית ACD.

כמו כן:  $\angle ACB = 128^\circ$ .

חשב את זווית BCK.

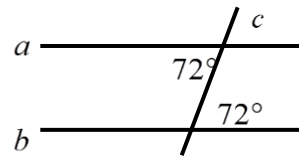
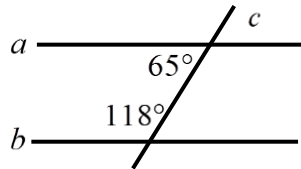


## שאלות - זוויות בין ישרים מקבילים:

16) קבע בכל מקרה האם הישרים  $a$  ו-  $b$  מקבילים או שלא. נמק.

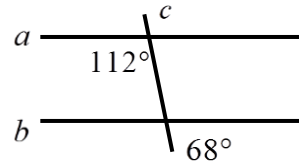
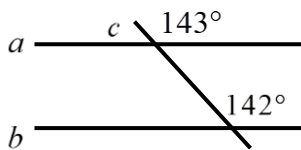
א.

ב.



ג.

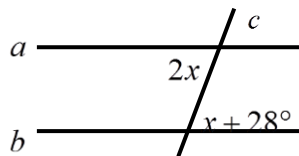
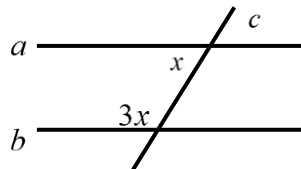
ד.



17) הישרים  $a$  ו-  $b$  מקבילים. מצא את  $x$  בכל אחד מהמקרים הבאים:

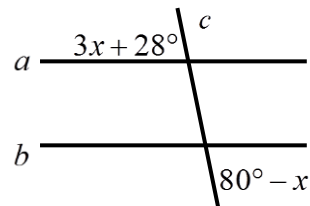
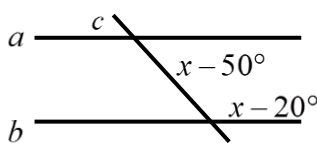
א.

ב.

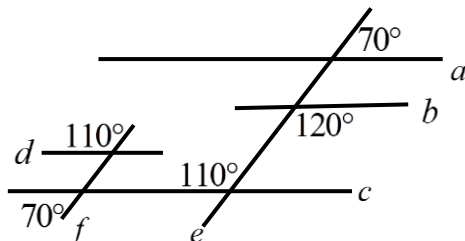


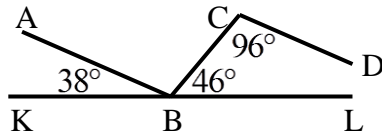
ג.

ד.

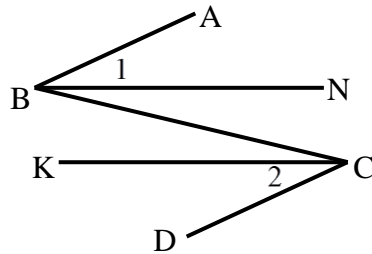


18) מצא את זוויות הישרים המקבילים בסרטוט הבא. נמק.

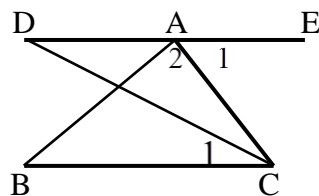




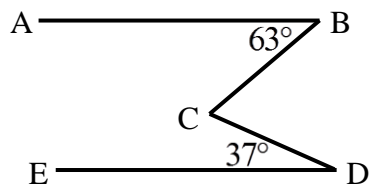
**19** בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר. שאר הזוויות מופיעות בתרשים. הוכח כי:  $AB \parallel CD$ .



**20** באיור שלפניך נתון כי:  
 $\angle B_1 = \angle C_2$ ,  $\angle ABC = \angle BCD$   
 הוכח כי:  $BN \parallel CK$ .



**21** באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE. מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC. מחברים את BC וידוע כי  $BC \parallel DE$ . מעבירים את CD – חוצה זווית C. נתון:  $\angle A_1 = 68^\circ$ ,  $\angle A_2 = 85^\circ$ .  
 א. חשב את הזווית  $\angle C_1$ .  
 ב. חשב את הזווית  $\angle B$ .



**22** בסרטוט שלפניך נתון:  
 $\angle D = 37^\circ$ ,  $\angle B = 63^\circ$ ,  $AB \parallel DE$ .  
 חשב את גודל הזווית BCD.

## תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5)  $\angle FAB = 120^\circ$ ,  $\angle EAC = 50^\circ$ ,  $\angle CAB = 30^\circ$
- (6)  $\alpha = 46^\circ$ ,  $\beta = 23^\circ$
- (7)  $\angle BOC = 23^\circ$ ,  $\angle COD = 46^\circ$ ,  $\angle DOE = 69^\circ$
- (8)  $\angle EOC = 85^\circ$ ,  $\angle DOC = 25^\circ$
- (9)  $\angle AOM = 72^\circ$ ,  $\angle BOM = 18^\circ$
- (10) שאלת הוכחה.
- (11)  $180^\circ$
- (12)  $\beta = 117^\circ$
- (13) א.  $\alpha = 36^\circ$  ב.  $\angle CBM = 108^\circ$
- (14) שאלת הוכחה.
- (15)  $\angle BCK = 154^\circ$
- (16) א. כן ב. לא ג. כן ד. לא.
- (17) א.  $28^\circ$  ב.  $45^\circ$  ג.  $13^\circ$  ד.  $125^\circ$
- (18)  $a \parallel c \parallel d$ ,  $e \parallel f$
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) א.  $34^\circ$  ב.  $27^\circ$
- (22)  $\angle BCD = 100^\circ$

## תוכן העניינים:

206	פרק 9.....
206	גיאומטריה אוקלידית – משולשים.....
206	משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות :
206	סוגי משולשים :
207	קטעים מיוחדים במשולשים :
207	משפטים כלליים במשולשים :
208	שאלות – זוויות במשולשים :
210	משפטים במשולש שווה שוקיים :
210	משפטים במשולש שווה צלעות :
211	שאלות – משולש שווה שוקיים :
212	חפיפת משולשים :
212	הגדרה :
212	משפטי החפיפה :
213	שאלות – חפיפת משולשים :
218	זווית חיצונית במשולש :
218	זווית חיצונית למשולש :
218	משפט :
218	שאלות – זווית חיצונית במשולש :
219	משולש ישר זווית :
219	משפטים במשולש ישר זווית :
219	איורים :
219	שאלות – משולש ישר זווית :
221	קטעים מיוחדים במשולש :
221	קטע אמצעים במשולש :
221	שאלות – קטע אמצעים במשולש :
222	מפגש התיכונים במשולש :
223	שאלות – מפגש תיכונים במשולש :
224	תשובות סופיות :

## פרק 9

# גיאומטריה אוקלידית – משולשים

## משולש כללי, משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות:

### סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.  
לפי זוויות:

1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.

2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.

3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

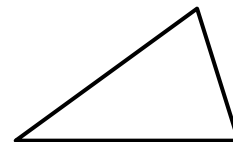
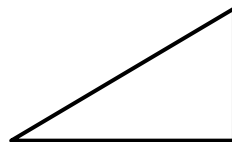
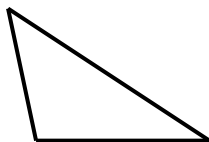
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.

5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.

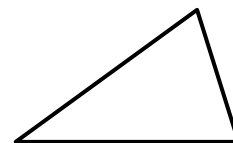
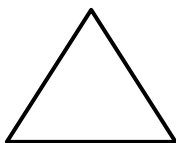
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

### איורים לכל מקרה לפי המספרים:

1. משולש חד זווית: 2. משולש ישר זווית: 3. משולש קהה זווית:



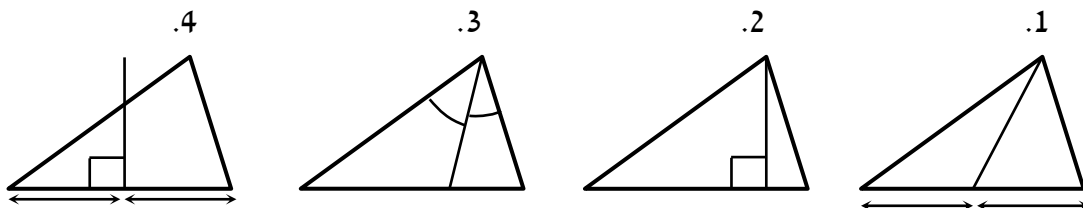
4. משולש שונה צלעות: 5. משולש שווה שוקיים: 6. משולש שווה צלעות:



### קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

### איורים לכל מקרה לפי המספרים:



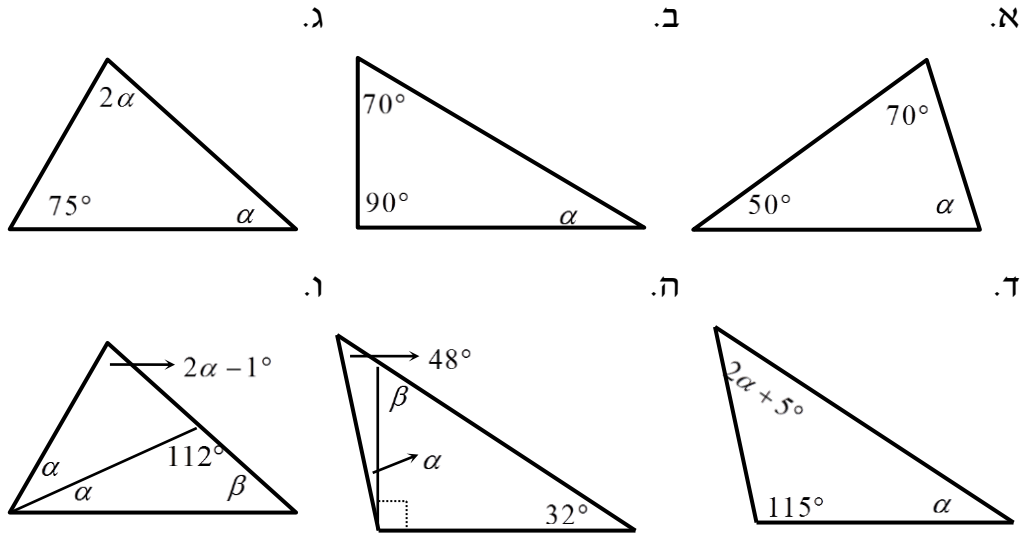
### משפטים כלליים במשולשים:

- סכום הזוויות במשולש הוא  $180^\circ$ .
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.  
במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.  
במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.



## שאלות – זוויות במשולשים:

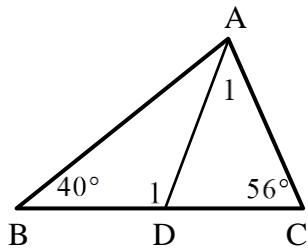
(1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:



(2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.

נתון:  $\angle B = 40^\circ$ ,  $\angle C = 56^\circ$ .

חשב את הזוויות  $\angle A_1$ ,  $\angle D_1$ .

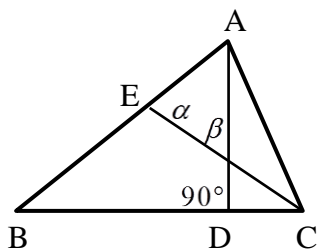


(3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.

$\angle D = 90^\circ$  הקטע CE חוצה זווית C.

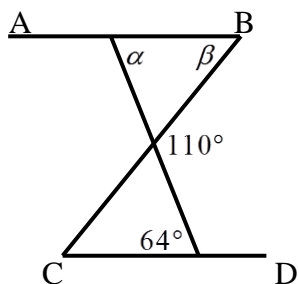
כמו כן:  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\beta = 63^\circ$ .

חשב את זוויות המשולש ABC.



(4) בסרטוט שלפניך נתון:  $AB \parallel CD$ .

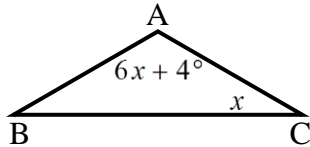
מצא את הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$ .



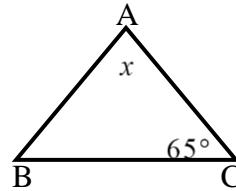
- (5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו : 1:2:6.  
חשב את זוויות המשולש.

- (6) בסרטוטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים ( $AB = AC$ )  
שאות מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל  $x$  בכל סרטוט.

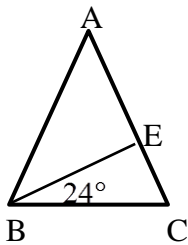
ב.



א.

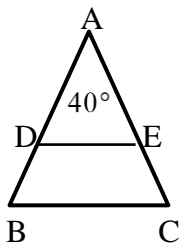


- (7) הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ),  
יוצר זווית בת  $24^\circ$  עם הבסיס  $BC$ .  
מצא את זוויות המשולש  $ABC$ .



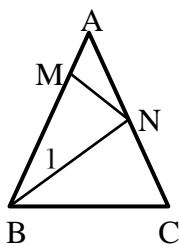
- (8) חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים :  
א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש.  
מצא את זוויות המשולש.  
ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב-  $12^\circ$  מזווית הראש.  
מצא את זוויות המשולש.

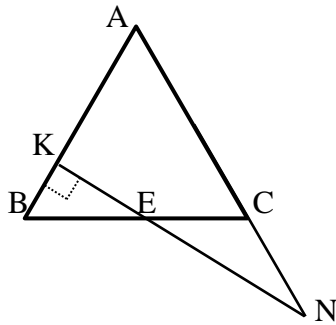
- (9) באיור שלפניך נתון :  $AB = AC$ ,  
 $\angle A = 40^\circ$ ,  $AD = AE$



- א. חשב את הזוויות :  $\angle B$ ,  $\angle C$ ,  $\angle D$ ,  $\angle E$ .  
ב. הוכח :  $DE \parallel BC$ .

- (10) באיור שלפניך נתון :  $AB = AC$ . מעבירים את הקטעים  $BN$   
ו-  $MN$  כך שמתקיים :  $BM = BN = BC$ .  
נתון בנוסף :  $\angle A = 32^\circ$ .  
חשב את זוויות :  $\angle B_1$ ,  $\angle ANM$ .





- 11) משולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).  
 בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל-AB.  
 ( $\angle K = 90^\circ$ ). אנך זה חותך את BC בנקודה E ואת  
 המשך AC בנקודה N. מתקיים:  $CE = CN$ .  
 חשב את זוויות המשולש ABC.

### משפטים במשולש שווה שוקיים:

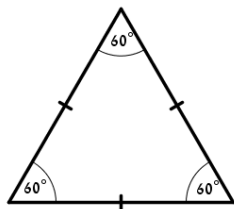
- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.  
 (משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים.  
 (משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה  
 הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

### משפטים במשולש שווה צלעות:

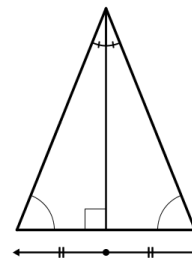
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות  $60^\circ$ .  
 (משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

### איורים:

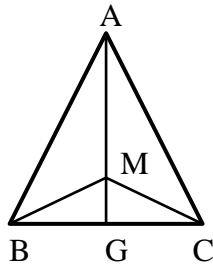
משפט במשולש שווה צלעות



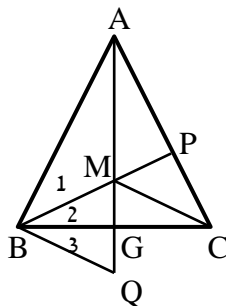
משפט במשולש שווה שוקיים



שאלות – משולש שווה שוקיים:



- 12** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ( $AB=AC$ ).  
 AG חוצה את זווית  $\angle A$ . M היא נקודה כלשהי על AG.  
 הוכח כי:  $BM = CM$ .



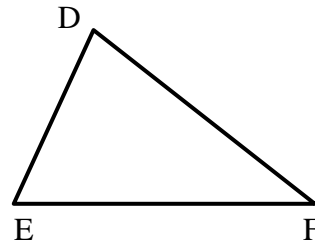
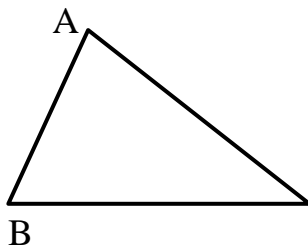
- 13** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ( $AB=AC$ ).  
 AG ו-BP חוצים את הזוויות  $\angle A$  ו- $\angle ABC$  בהתאמה.  
 הנקודה Q נמצאת על המשך AG.  
 נתון:  $GM = GQ$ . הוכח:  $\angle B_1 = \angle B_3$ .

## חפיפת משולשים:

### הגדרה:

משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

סימון מתמטי:  $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE, AC = DF, BC = EF \\ \angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F \end{cases}$

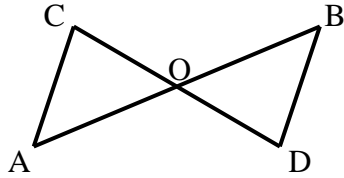


### משפטי החפיפה:

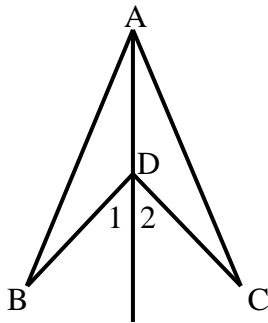
- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-זווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

## שאלות – חפיפת משולשים:

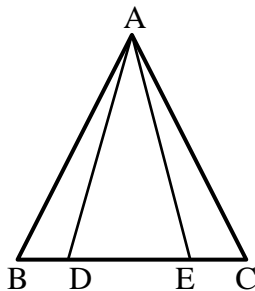
### שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:



- 14) באיור שלפניך הקטעים AB ו-CD חוצים זה את זה בנקודה O.  
הוכח:  $\triangle ACO \cong \triangle BDO$ .

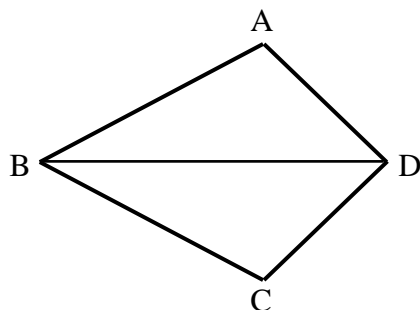


- 15) באיור שלפניך נתון:  $BD = CD$ .  
כמו כן:  $\angle D_1 = \angle D_2$ .  
הוכח:  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ .

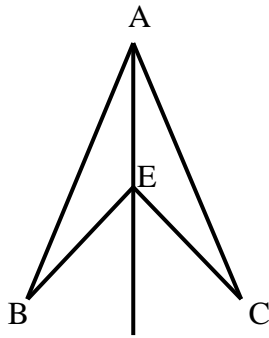


- 16) בסרטוט שלפניך נתון:  
 $AB = AC$ ,  $\angle B = \angle C$ ,  $BE = CD$ .  
הוכח:  $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ .

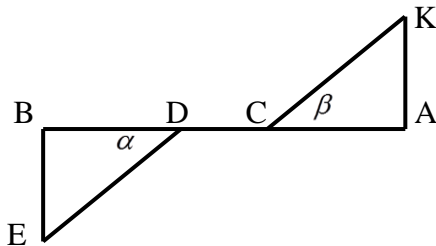
### שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:



- 17) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את  $\angle B$  ו- $\angle D$ .  
הוכח:  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ .

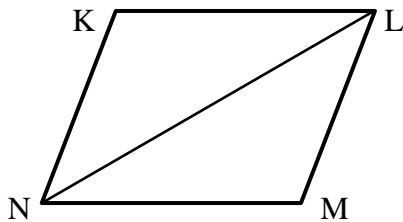


- 18) בסרטוט שלפניך נתון:  
 AE חוצה את הזוויות  $\angle BAC$  ו- $\angle BEC$ .  
 הוכח:  $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ .



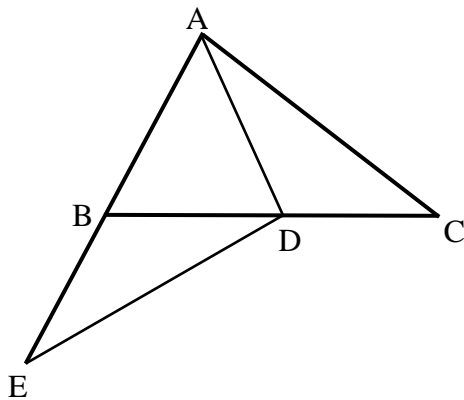
- 19) בציור שלפניך נתון:  
 $AC = BD$ ,  $\alpha = \beta$   
 $AB \perp BE$ ,  $AB \perp AK$   
 הוכח:  $\triangle AKD \cong \triangle BEC$ .

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:



- 20) באיור שלפניך נתון:  
 $KL = MN$ ,  $KN = LM$   
 הוכח:  $\triangle KLN \cong \triangle MLN$ .

שאלות העוסקות במשפט חפיפה: צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:



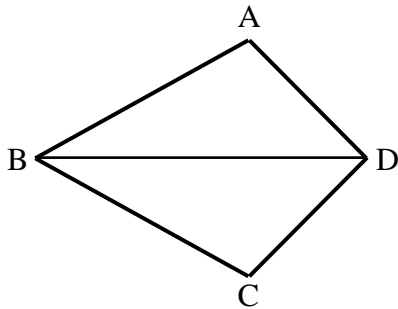
- 21) בציור שלפניך נתון:  
 $AC = DE$ ,  $AB = BE = AD$   
 הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:

(22) במרובע ABCD נתון:

.  $AB = BC$  ,  $AD = CD$

הוכח:  $\angle A = \angle C$

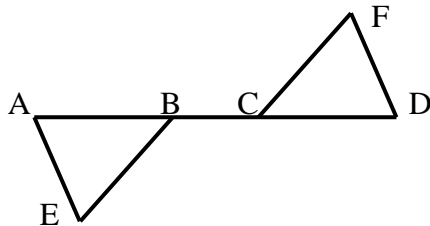


(23) הקטע AD הוא קו ישר.

נתון:  $AE = DF$  ,  $AC = BD$

כמו כן מתקיים:  $\angle A = \angle D$

הוכח כי הקטעים BE ו-FC שווים.



(24) באיור שלפניך נתון:

הנקודה F היא אמצע הקטע AC.

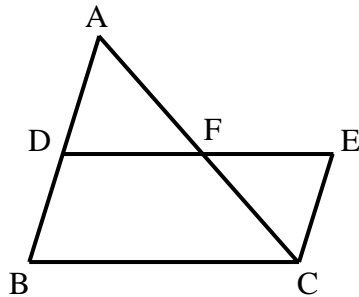
מתקיים:  $\angle BAC = \angle ACE$

הקטעים BD ו-CE שווים.

הוכח את הטענות הבאות:

א. F היא אמצע הקטע DE.

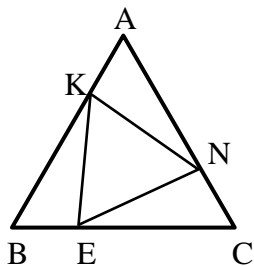
ב. D היא אמצע הקטע AB.



(25) המשולש ABC הוא שווה צלעות.

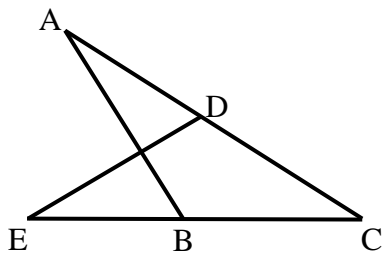
נתון:  $AK = BE = CN$

הוכח כי  $\triangle KEN$  הוא גם משולש שווה צלעות.



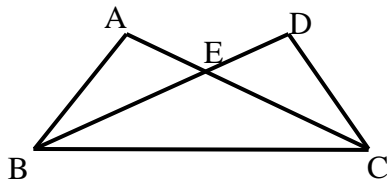


שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:

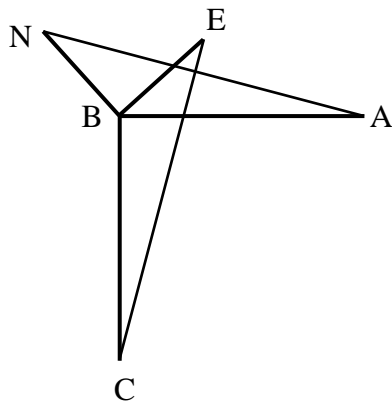


26) בציור שלפניך נתון:  $AC = CE$ ,  $DC = BC$ .  
הוכח:

- א.  $\triangle CDE \cong \triangle CBA$
- ב.  $\angle ADE = \angle ABE$

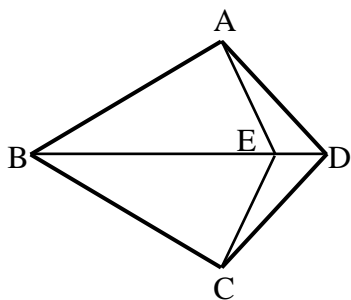


27) באיור שלפניך נתון:  
 $\angle DBC = \angle ACB$ ,  $\angle ABC = \angle DCB$   
הוכח:  $AB = CD$

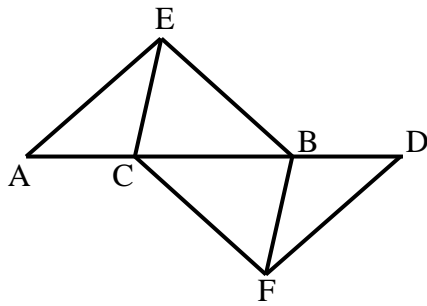


28) בציור שלפניך נתון:  
 $AB = BC$ ,  $BE = BN$   
 $AB \perp BC$ ,  $BE \perp BN$   
הוכח:  $AN = CE$

שאלות העוסקות בשתי חפיפות:



29) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.  
מתקיים:  $AD = CD$ ,  $AB = BC$   
הנקודה E נמצאת על BD.  
הוכח כי:  $AE = CE$



30) בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר.

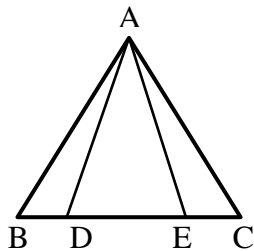
מתקיים:  $\angle AEC = \angle DFB$ ,  $\angle A = \angle D$

וכן  $AE = DF$ . הוכח:

א.  $CE = BF$

ב.  $BE = CF$

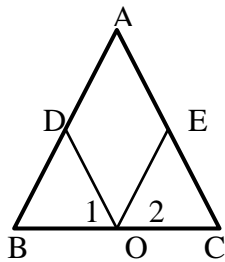
שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:



31) נתון משולש שווה שוקיים  $\triangle ABC$ ,  $(AB = AC)$ .

מתקיים:  $BD = CE$

הוכח:  $AD = AE$

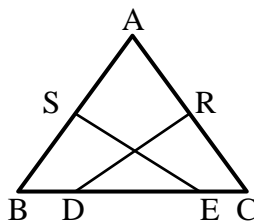


32) בסרטוט שלפניך נתון משולש שווה שוקיים

$\triangle ABC$ ,  $(AB = AC)$ . הנקודה O היא אמצע BC.

מתקיים:  $\angle O_1 = \angle O_2$

הוכח:  $AD = AE$

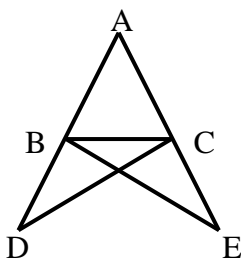


33) במשולש שווה שוקיים  $\triangle ABC$ ,  $(AB = AC)$

הנקודות S ו-R הן אמצעי השוקיים.

ידוע כי  $BD = CE$

הוכח כי:  $SE = RD$



34) נתון משולש ABC. הקטעים AD ו-AE ישרים

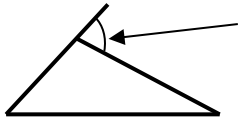
ונתון בנוסף כי:  $DC = BE$ ,  $BD = CE$

הוכח:  $AB = AC$

## זווית חיצונית במשולש:

**זווית חיצונית למשולש:**

**הגדרה:**



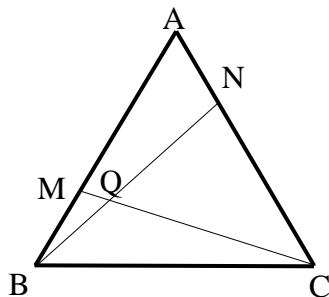
זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.

**משפט:**

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

## שאלות – זווית חיצונית במשולש:

**35** הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.



**36** המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.

נתון:  $AN = BM$ .

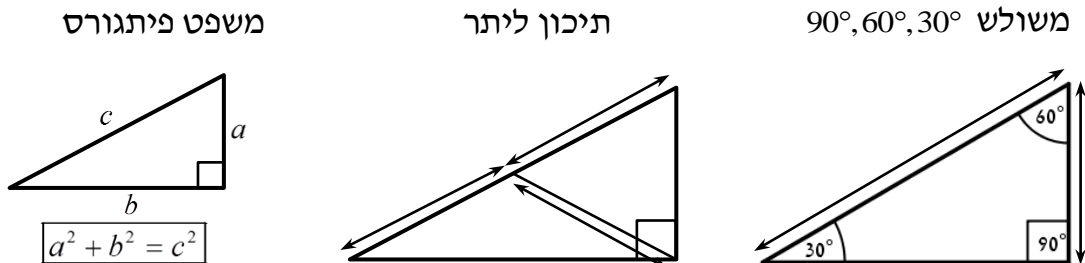
הוכח:  $\angle NQC = 60^\circ$ .

## משולש ישר זווית:

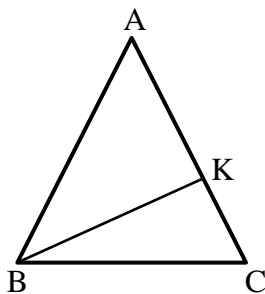
### משפטים במשולש ישר זווית:

- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא  $90^\circ$ .
- במשולש שזוויותיו  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ , הניצב שמול הזווית של ה- $30^\circ$  שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת  $30^\circ$ .
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר. כלומר:  $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$ .
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

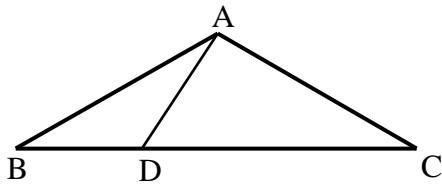
### איורים:



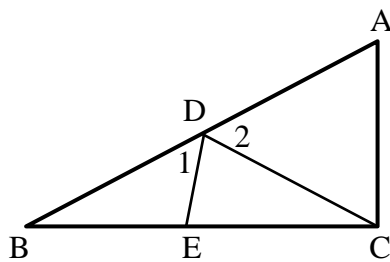
### שאלות – משולש ישר זווית:



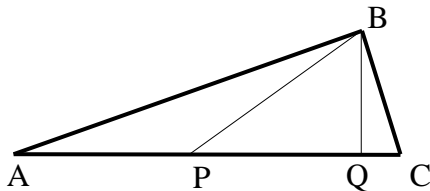
- 37) באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ). זווית הבסיס:  $\angle C = 75^\circ$ .  
וכן: 16 ס"מ  $AC$ . מעבירים גובה BK לשוק AC.  
מצא את אורך הגובה BK.



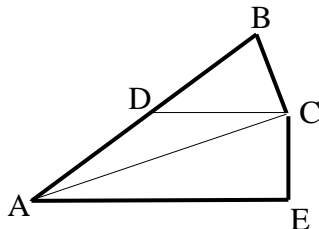
- (38) המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).  
נתון:  $\angle ABD = 30^\circ$ ,  $\angle DAC = 90^\circ$ ,  $BC = 18$  ס"מ.  
חשב את אורכו של הקטע BD.



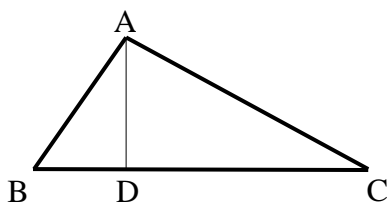
- (39) המשולש  $\triangle ABC$  הוא ישר זווית ( $\angle C = 90^\circ$ ).  
מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.  
הנקודה E נמצאת על BC כך ש-  $CD = CE$ .  
ידוע כי:  $\angle CED = 80^\circ$ .  
מצא את הזוויות:  $\angle D_1$ ,  $\angle D_2$ .



- (40) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ). BQ הוא הגובה ליתר AC ו-BP הוא התיכון ליתר AC.  
נתון:  $BQ = \frac{1}{2} BP$ .  
חשב את גודלה של הזווית C.



- (41) המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים ( $BD = DC$ ). AC חוצה את הזווית BAE.  
נתון:  $DC \parallel AE$ .  
חשב את גודלה של הזווית  $\angle ACB$ .



- (42) AD הוא גובה במשולש ABC.  
נתון:  $AB = 15$  ס"מ,  $AC = 20$  ס"מ,  $BC = 25$  ס"מ.  
א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש ABC.  
ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.

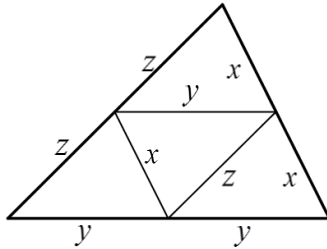
## קטעים מיוחדים במשולש:

### קטע אמצעים במשולש:

**הגדרה:** קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

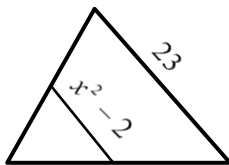
איור – קטע אמצעים במשולש:



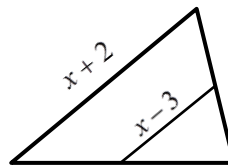
### שאלות – קטע אמצעים במשולש:

**43** לפניך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם.  
מצא את  $x$  בכל אחד מהמקרים:

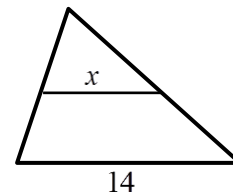
א.



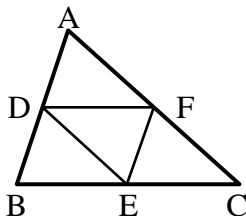
ב.

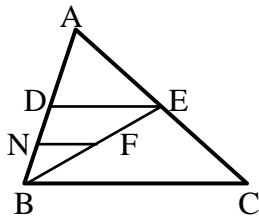


ג.

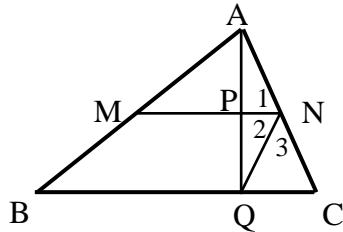


**44** הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש  $\triangle ABC$ .  
נתון:  $DE = 9$  ס"מ,  $EF = 12$  ס"מ,  $DF = 10$  ס"מ.  
חשב את היקף המשולש  $\triangle ABC$ .

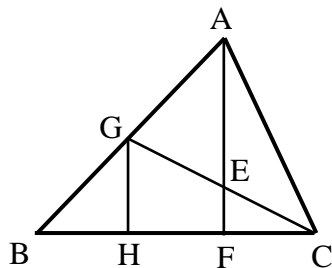




- 45) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש  $\triangle ABC$ .  
הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש  $\triangle BDE$ .  
נתון:  $3 \text{ ס"מ} = NF$ . מצא את אורך הצלע BC.



- 46) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש  $\triangle ABC$ .  
AQ הוא גובה לצלע BC.  
הוכח:  $\angle N_1 = \angle N_2$ .

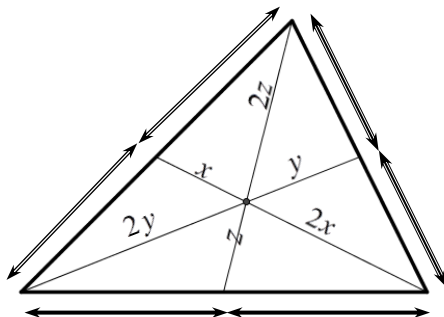


- 47) AF הוא גובה לצלע BC ו-GC הוא תיכון לצלע AB במשולש  $\triangle ABC$ .  
הקטע GH מאונך לצלע BC.  
א. הוכח:  $HF = BH$ .  
ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.  
חשב את אורך הקטע EF.

### מפגש התיכונים במשולש:

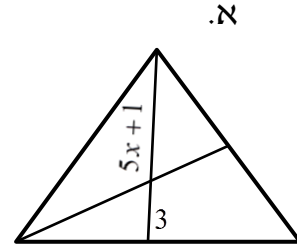
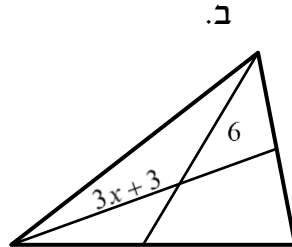
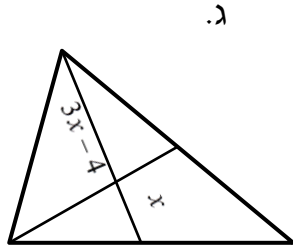
- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

איור – מפגש תיכונים במשולש:



שאלות – מפגש תיכונים במשולש:

48) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את  $x$  בכל אחד מהמקרים הבאים:

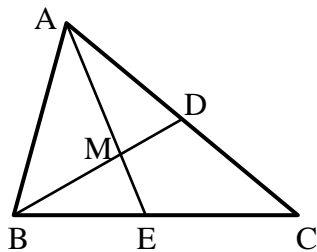


49) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש  $\triangle ABC$

אשר נחתכים בנקודה M.

נתון:  $AD = AM$  וכן:  $AC = 30$  ס"מ.

חשב את AE.



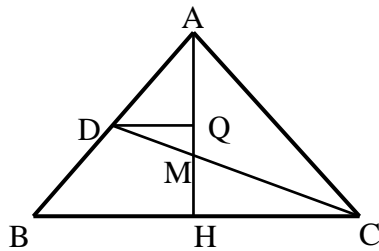
50) המשולש  $\triangle ABC$  שבציור הוא מש"ש

( $AB = AC$ ) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC.

CD, התיכון לשוק AB, יוצר זווית של  $30^\circ$  עם

הבסיס BC. נתון:  $BC = 12\sqrt{3}$  ס"מ,  $DQ \parallel BC$ .

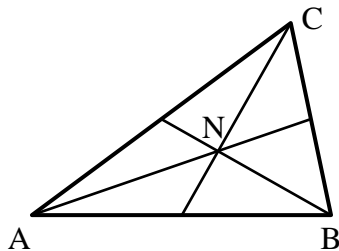
חשב את אורך הקטע MQ.



51) במשולש  $\triangle ABC$  נחתכים התיכונים בנקודה N.

נתון:  $\angle CNB = 90^\circ$ .

הוכח:  $BC = AN$ .





## תשובות סופיות:

- (1 א.  $\alpha = 60^\circ$  ב.  $\alpha = 20^\circ$  ג.  $\alpha = 35^\circ$  ד.  $\alpha = 20^\circ$   
ה.  $\alpha = 10^\circ, \beta = 58^\circ$  ו.  $\alpha = 75\frac{1}{3}^\circ, \beta = 30\frac{1}{3}^\circ$
- (2  $\angle A_1 = 42^\circ, \angle D_1 = 98^\circ$  (3  $\angle A = 78^\circ, \angle B = 48^\circ, \angle C = 54^\circ$
- (4  $\alpha = 64^\circ, \beta = 46^\circ$  (5  $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$
- (6 א.  $x = 50^\circ$  ב.  $x = 22^\circ$  ב. שאלת הוכחה
- (7  $\angle A = 48^\circ, \angle B = \angle C = 66^\circ$
- (8 א.  $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$  ב.  $52^\circ, 64^\circ, 64^\circ$
- (9 א.  $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 70^\circ$  ב. שאלת הוכחה
- (10 א.  $\angle B_1 = 42^\circ, \angle ANM = 37^\circ$  ב. שאלת הוכחה
- (11  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$
- (12 שאלת הוכחה (13 שאלת הוכחה
- (14 שאלת הוכחה (15 שאלת הוכחה
- (16 שאלת הוכחה (17 שאלת הוכחה
- (18 שאלת הוכחה (19 שאלת הוכחה
- (20 שאלת הוכחה (21 שאלת הוכחה
- (22 שאלת הוכחה (23 שאלת הוכחה
- (24 שאלת הוכחה (25 שאלת הוכחה
- (26 שאלת הוכחה (27 שאלת הוכחה
- (28 שאלת הוכחה (29 שאלת הוכחה
- (30 שאלת הוכחה (31 שאלת הוכחה
- (32 שאלת הוכחה (33 שאלת הוכחה
- (34 שאלת הוכחה (35 שאלת הוכחה
- (36 שאלת הוכחה (37 8 ס"מ
- (38 6 ס"מ (39  $\angle D_1 = 60^\circ, \angle D_2 = 40^\circ$
- (40  $75^\circ$  (41  $90^\circ$
- (42 א.  $AD = 12$  ס"מ,  $S_{ABC} = 150$  סמ"ר ב. כן.

(43) א.  $x = 7$     ב.  $x = 8$     ג.  $x = \sqrt{13.5}$

(44) 62 ס"מ.    (45) 12 ס"מ.

(46) שאלת הוכחה    (47) א. שאלת הוכחה    ב. 3 ס"מ.

(48) א.  $x = 1$     ב.  $x = 3$     ג.  $x = 4$     (49) 22.5 ס"מ.

(50) 3 ס"מ.    (51) שאלת הוכחה

## תוכן העניינים:

228	פרק 10
228	גיאומטריה אוקלידית – מרובעים
228	מרובע כללי :
228	שאלות יסודיות :
229	המקבילית :
229	שאלות – תכונות המקבילית :
231	שאלות – הוכחת מקבילית :
234	המלבן :
234	תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית) :
234	שאלות – תכונות המלבן :
236	שאלות – הוכחת מלבן :
237	המעוין :
237	תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית) :
237	שאלות – תכונות המעוין :
238	שאלות – הוכחת מעוין :
240	הריבוע :
240	שאלות – תכונות הריבוע :
241	שאלות – הוכחת ריבוע :
242	הטרפז :
243	שאלות – תכונות הטרפז הכללי :
244	שאלות – תכונות טרפז שווה שוקיים וישר זווית :
245	שאלות – הוכחת טרפז שווה-שוקיים וישר זווית :
246	שאלות – קטע אמצעים בטרפז :
248	הדלתון :
248	שאלות – דלתון :
249	סיכום משפחת המרובעים :
250	תשובות סופיות :

## פרק 10

# גיאומטריה אוקלידית – מרובעים

## מרובע כללי:

**הגדרה:** מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

**משפט:** סכום זוויות במרובע הוא  $360^\circ$ .

## שאלות יסודיות:

(1) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.

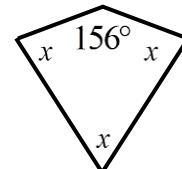
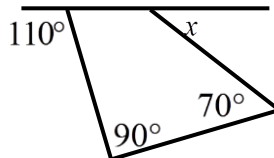
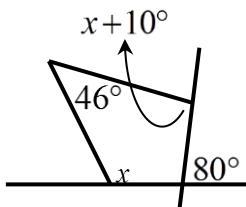
חלק מהזוויות מסומנות ב- $x$ .

מצא את  $x$  ואת הזוויות של כל מרובע.

ג.

ב.

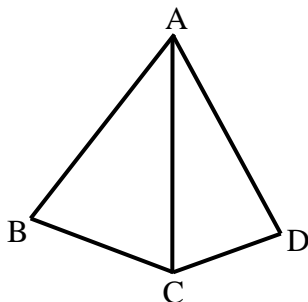
א.



(2) מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:

כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב- $10^\circ$  מהזווית הקודמת לה.

זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: 1: 2: 3: 4.

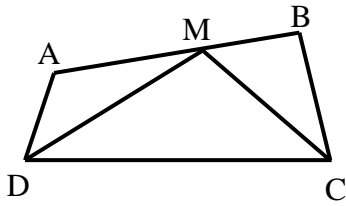


(3) המשולשים ABC ו-ACD שבציר הם

משולשים שווי שוקיים ( $AB = AC = AD$ ).

נתון:  $\angle BAD = 80^\circ$ .

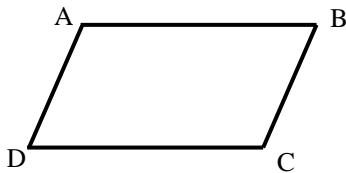
חשב את גודלה של הזווית BCD.



- (4) בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.  
 CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.  
 ידוע כי:  $CM = DM$ ,  $\angle A = 130^\circ$ ,  $\angle DMC = 110^\circ$ .  
 מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.

## המקבילית:

**הגדרה:** מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

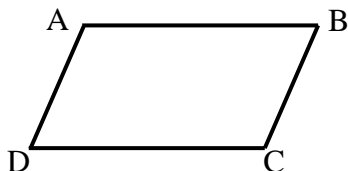


- במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.  
 במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.  
 במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא  $180^\circ$ .  
 במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.  
 היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע  $\cdot$  גובה לצלע.

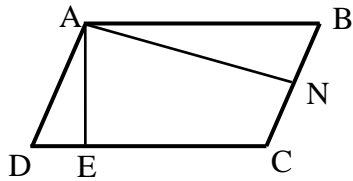
**כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

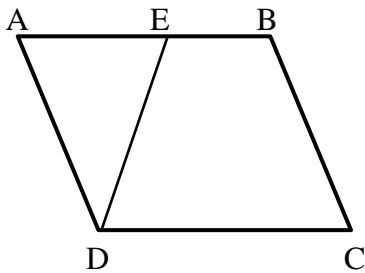
## שאלות – תכונות המקבילית:



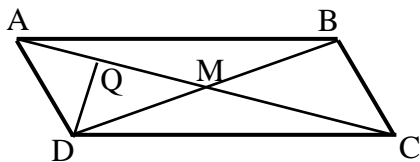
- (5) נתונה מקבילית ABCD. בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות. מצא את זוויות המקבילית בכל מקרה.
- א.  $\angle A = x$ ,  $\angle B = x - 70^\circ$ .
  - ב.  $\angle B = 3x - 130^\circ$ ,  $\angle D = x + 10^\circ$ .
  - ג.  $\angle A = x + 20^\circ$ ,  $\angle C = 100^\circ - x$ .



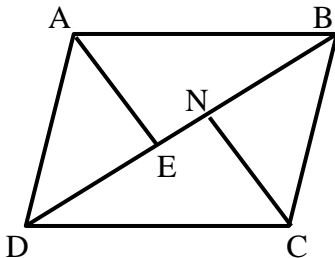
- 6) המרובע ABCD הוא מקבילית  
ובו :  $AE \perp CD$  ,  $AN \perp BC$  .  
הוכח כי :  $\angle DAE = \angle BAN$  .



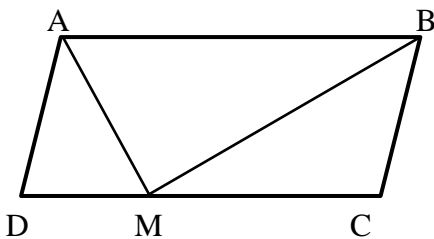
- 7) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע  
AB כך שמתקיים :  $DE = BC$  .  
הוכח כי :  $\angle EAD = \angle EDC$  .



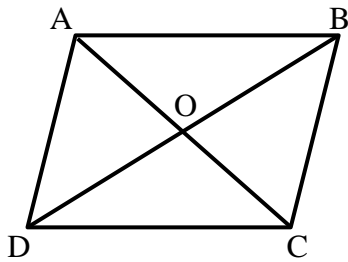
- 8) נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים  
בנקודה M. נתון :  $AC = 20$  ס"מ ,  $BC = \frac{1}{2}BD$  .  
ו-  $DQ \perp AC$  .  
חשב את אורך הקטע AQ.



- 9) הוכח כי במקבילית הקדקודים הנגדיים  
נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית  
שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח :  $AE = CN$  .



- 10) במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם  
חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה אשר  
נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC.  
א. הוכח כי :  $AB = 2BC$  .  
ב. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.



11) המרובע ABCD הוא מקבילית.

O – פגישת האלכסונים.

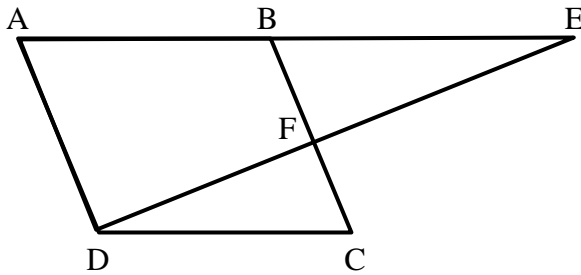
נתון:  $AO = x + 1$ ,  $BO = x + 8$ ,  $DO = 3x - 10$ .

מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.

12) נתונה מקבילית ABCD ובה:

$$\angle BEF = \frac{1}{2} \angle EAD, \angle ADC = 120^\circ$$

הוכח כי:  $BC \perp ED$ .



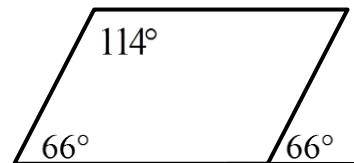
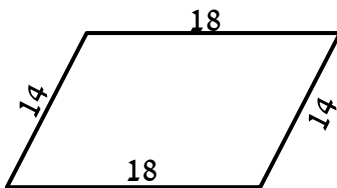
שאלות – הוכחת מקבילית:

13) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.

קבע אלו מהם הם מקביליות וציין מדוע.

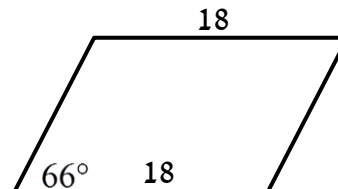
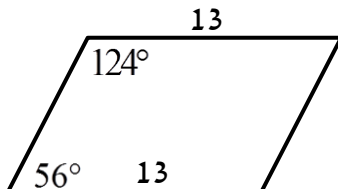
א.

ב.

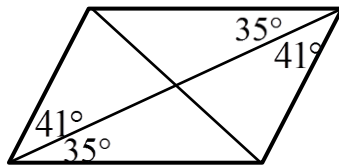


ג.

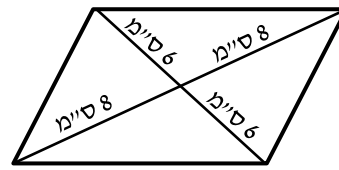
ד.



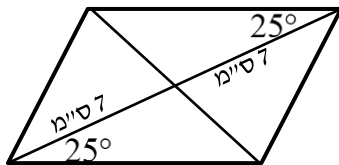
ו.



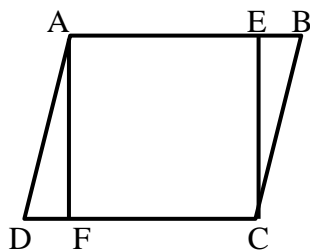
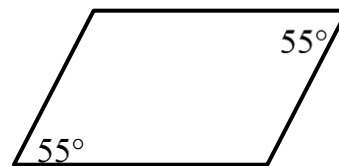
ה.



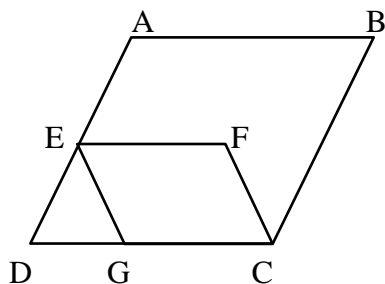
ח.



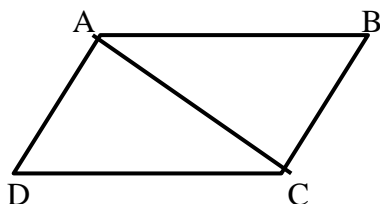
ז.



- 14) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה.  
נתון:  $\angle DAF = \angle BCE$ .  
הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.

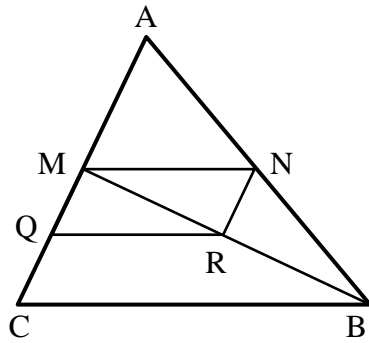


- 15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-BC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB.  
א. הוכח:  $\angle DAB = \angle EGC$ .  
ב. נתון:  $\angle GCF = \angle ABC$ .  
הוכח כי EFCG מקבילית.

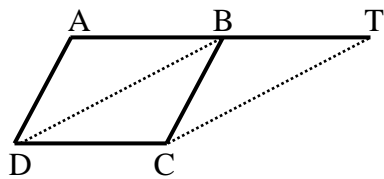


- 16) במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות. כמו כן:  $AD \perp AC$ ,  $BC \perp AC$ .  
הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.

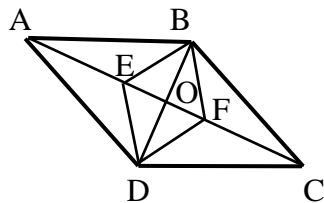




- 17 נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים. הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.  
א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.  
ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR. איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.



- 18 את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו כאורכה עד לנקודה T. הוכח: BTCD מקבילית. הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



- 19 הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC. נתון:  $AE = FC$ . הוכח כי EBFD הוא מקבילית.

## המלבן:

**הגדרה:** מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.  
(מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).

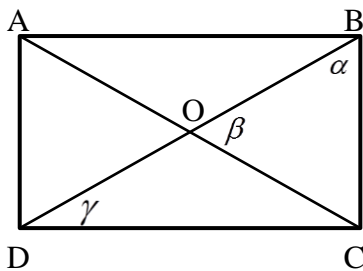
### תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

- ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
- האלכסונים במלבן שווים זה לזה
- היקף מלבן סכום הצלעות, שטח מלבן צלע גובה לצלע.

**כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

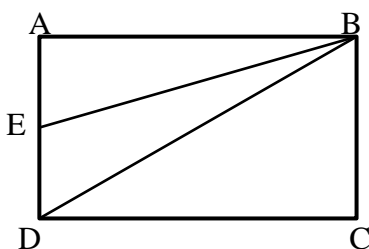
- מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
- מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
- מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

### שאלות – תכונות המלבן:

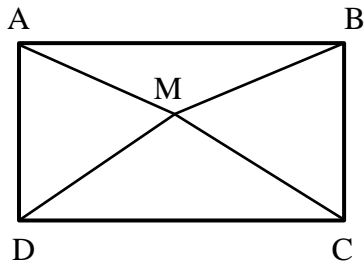


**20** המרובע ABCD הוא מלבן.  
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.  
חשב את הזוויות  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  במקרים הבאים:

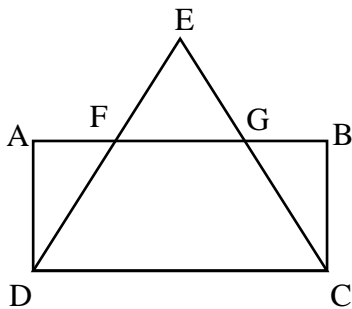
- א.  $\beta$  קטנה ב- $15^\circ$  מ- $\alpha$ .
- ב.  $\alpha = 2\gamma$ .
- ג.  $\gamma = 28^\circ$ .



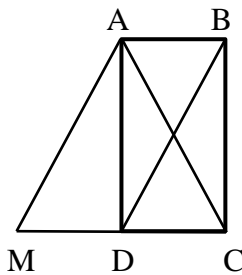
**21** במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.  
נתון:  $\angle AEB = 70^\circ$ ,  $BD = 2BC$ .  
חשב את גודלה של הזווית EBD.



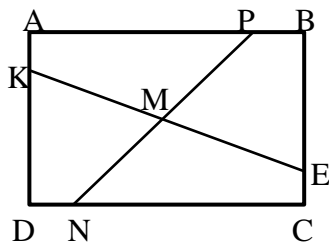
- 22 נתון מלבן ABCD שבו  $DM = MC$ .  
הוכח:  $\angle MAB = \angle MBA$ .



- 23 המרובע ABCD הוא מלבן.  
המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים  
בנקודה E.  
נתון:  $EF = EG$ .  
הוכח:  $FD = GC$ .

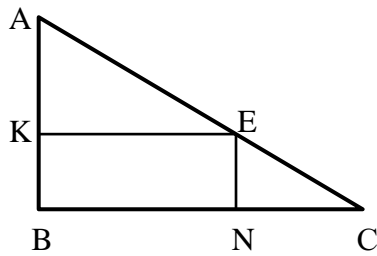


- 24 המרובע ABCD הוא מלבן.  
המרובע ABDM הוא מקבילית.  
הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.

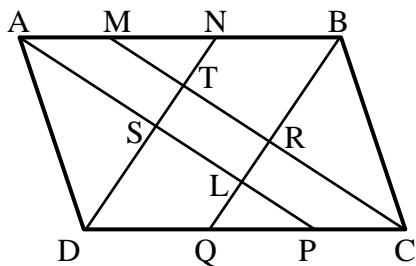


- 25 מרובע ABCD הוא מלבן.  
נתון:  $AP = CN$ ,  $AK = CE$ .  
הוכח:  $KM = EM$ ,  $PM = NM$ .

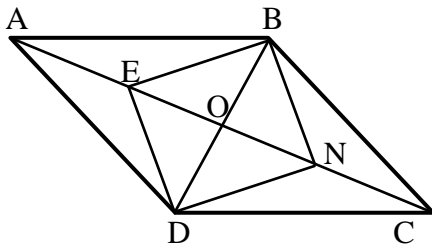
**שאלות – הוכחת מלבן:**



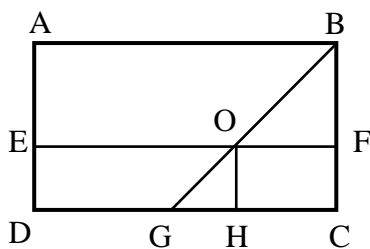
- 26**  $\triangle ABC$  הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ).  
המרובע KENB חסום במשולש זה.  
נתון כי:  $\angle AEK = \angle C$ ,  $\angle NEC = \angle A$ .  
הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.



- 27** נתונה מקבילית ABCD ובה AP, BQ, CM ו-DN הם חוצי הזוויות  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  ו- $\angle D$  בהתאמה. הוכח: TRLS מלבן.

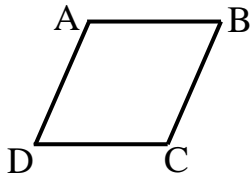


- 28** מרובע ABCD הוא מקבילית.  
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD  
אשר נחתכים בנקודה O.  
נתון:  $2BD = AC$ .  
E – אמצע AO. N – אמצע CO.  
הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.



- 29** במלבן ABCD נתון:  
 $OH \perp DC$ ,  $\angle ABO = \angle BOF$ .  
הוכח: EOHD הוא מלבן.

## המעוין:



**הגדרה:** מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.  
(מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית).

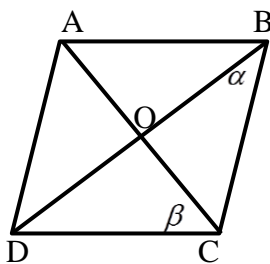
### תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

- במעוין כל הצלעות שוות.
- במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
- במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
- היקף מעוין = צלע  $\cdot 4$ , שטח מעוין = צלע  $\cdot$  גובה לצלע =  $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})/2$ .

### כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
- מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
- מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

### שאלות – תכונות המעוין:



**30** המרובע ABCD הוא מעוין.

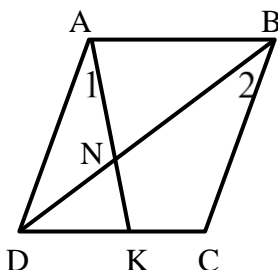
חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את  $\alpha$  ו- $\beta$ .

א.  $\angle A = 138^\circ$ .

ב.  $\beta = 3.5\alpha$ .

ג.  $\beta = \alpha + 20^\circ$ .

ד.  $\angle B = \beta$ .



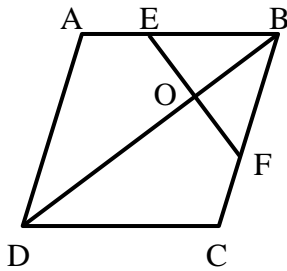
**31** המרובע ABCD הוא מעוין. מעבירים את האלכסון

BD ואת הקטע AK אשר נחתכים בנקודה N.

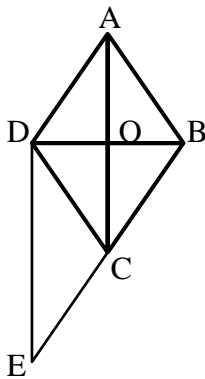
ידוע כי:  $\angle A_1 = \angle B_2$ .

א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.

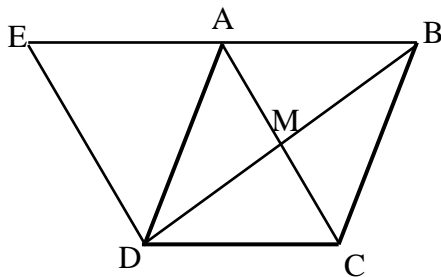
ב. הוכח כי:  $\angle AND = \angle C$ .



- 32) מעוין ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.  
נתון:  $\angle DCB = 120^\circ$ ,  $EF \perp BC$ .  
חשב את גודלה של זווית  $\angle EOD$ .

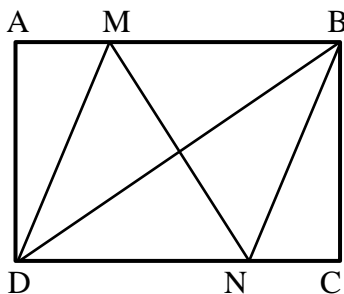


- 33) נתון מעוין ABCD.  
הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.  
נתון:  $\angle CDE = \angle BCA$ .  
הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.

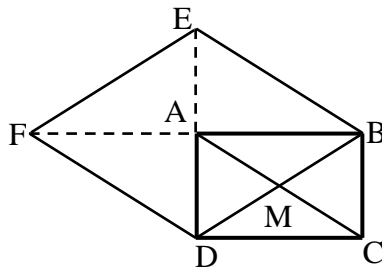


- 34) נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M. האריכו את הצלע AB עד לנקודה E כך שמתקיים:  $DE \perp BD$ .  
הוכח:  $AD = AE$ .

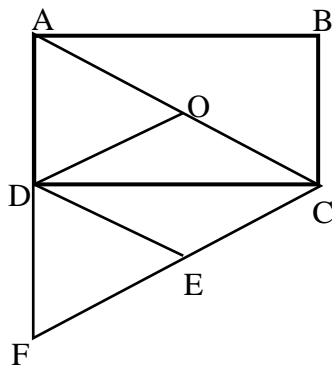
### שאלות – הוכחת מעוין:



- 35) במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD. הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB ו-DC בהתאמה.  
נתון:  $AM = CN$  ו- $DM = DN$ .  
הוכח כי הקטע MN חוצה את הזוויות BMD ו-BND.



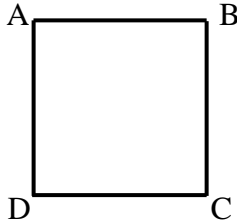
**36** נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M. האריכו את הצלע AB כאורכה עד לנקודה E ואת הצלע AD כאורכה עד לנקודה F כמתואר בשרטוט.  
הוכח: המרובע EBDF הוא מעוין.



**37** ABCD הוא מלבן שאלכסוניו נחתכים בנקודה O. הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD כך שמתקיים:  $AD = DF$ .  
נתון:  $FE = CE$ .  
הוכח כי DOCE הוא מעוין.

## הריבוע:

**הגדרה:** ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.  
(מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).

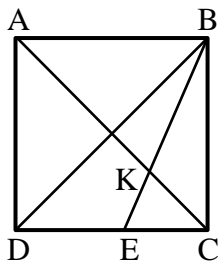


מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים כי אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.  
היקף ריבוע = צלע  $\cdot 4$ , שטח ריבוע =  $(\text{צלע})^2 / 2 = (\text{אלכסון})^2 / 2$

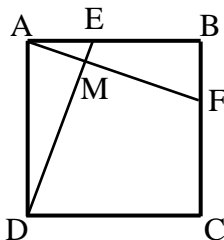
**כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:**

- מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
- מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
- מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
- מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

## שאלות – תכונות הריבוע:

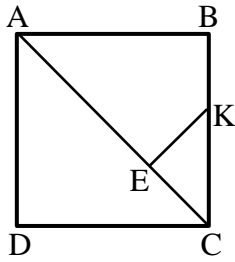


- 38** המרובע ABCD הוא ריבוע.  
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.  
BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.  
הוכח:  $CE = CK$ .

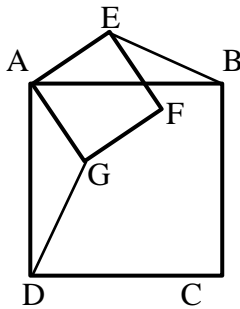


- 39** בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.  
נתון כי  $AE = BF$ .  
הוכח:  $DE \perp AF$ .



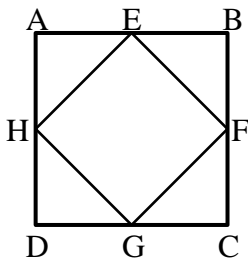


- 40 המרובע ABCD הוא ריבוע. מעבירים את האלכסון AC. מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים את הקטע KE אשר מאונך לאלכסון. נתון:  $AE = AB$ . הוכח כי:  $CE = KE = BK$ .

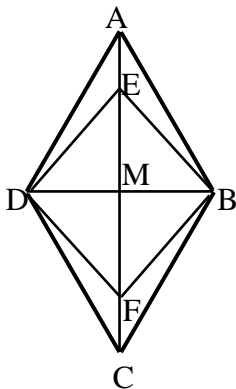


- 41 המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים. הוכח:  $BE = DG$ .

### שאלות – הוכחת ריבוע:



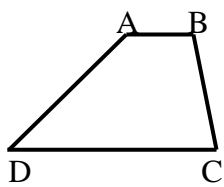
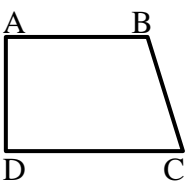
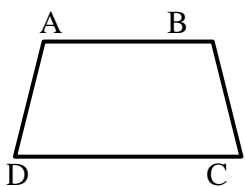
- 42 הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות הריבוע ABCD. הוכח כי EFGH הוא ריבוע.



- 43 נתון מעוין ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה M. נתון:  $\angle EBA = 15^\circ$ ,  $MB = \frac{1}{2} AB$ ,  $AE = FC$ . הוכח: המרובע EBF הוא ריבוע.

## הטרפז:

**הגדרה:** טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.  
היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז =  $\frac{(גובה \cdot סכום הבסיסים)}{2}$ .

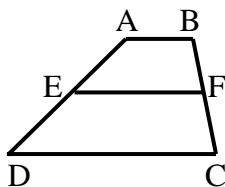
סוג הטרפז	טרפז כללי	טרפז ישר זווית	טרפז שווה שוקיים
איור מתאים			

### משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

- בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
- (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
- (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

### קטע אמצעים בטרפז:

**הגדרה:** קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.



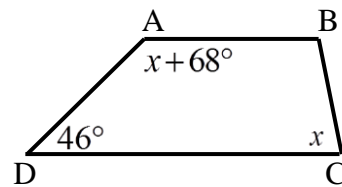
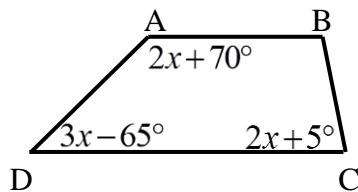
- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
- (משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).

שאלות – תכונות הטרפז הכללי:

- 44) בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים ( $AB \parallel CD$ ). מצא את  $x$  ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.

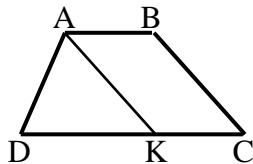
א.

ב.

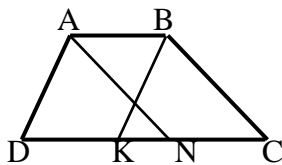


- 45) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ). מעבירים את

הקטע AK. נתון:  $AK \parallel BC$ ,  $AK = DK$ ,  $AB = 6$  ס"מ,  $DC = 14$  ס"מ. חשב את אורך השוק BC.



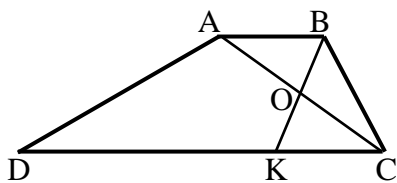
- 46) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ). נתון כי:  $AN \parallel BC$ ,  $AD \parallel BK$ . הוכח כי:  $DK = CN$ .

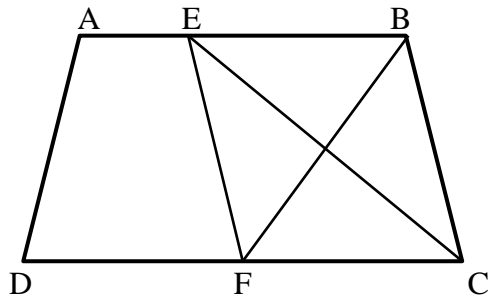


- 47) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ). מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע BK אשר חוצים זה את זה בנקודה O. ידוע כי:  $\angle C = 60^\circ$ ,  $\angle D = 30^\circ$ .

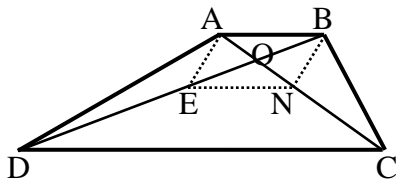
א. חשב את אורך DC, הבסיס הגדול, אם ידוע כי:  $AB = 7$  ס"מ,  $BC = 9$  ס"מ.

ב. הוכח כי אם  $AB = BC$  אז:  $DC = 3AB$ .



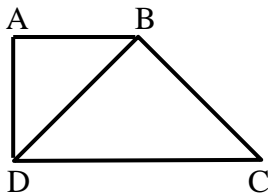


- 48 נתון טרפז  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$  ובו  
הקטעים  $CE$  ו- $BF$  חוצים את זוויות  
הקדקודים  $C$  ו- $B$  בהתאמה. הוכח:  
א.  $BF \perp CE$ .  
ב. המשולש  $EBC$  הוא שווה שוקיים.  
ג. המרובע  $EBCF$  הוא מעוין.

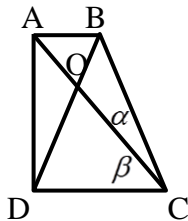


- 49 מרובע  $ABCD$  הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ .  
-  $O$  היא נקודת פגישת האלכסונים.  
נתון:  $BO = EO$ ,  $AO = NO$ .  
הוכח כי המרובע  $ENCD$  הוא טרפז.

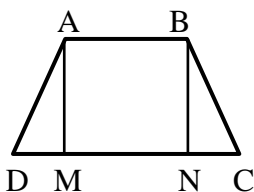
### שאלות – תכונות טרפז שווה שוקיים וישר זווית:



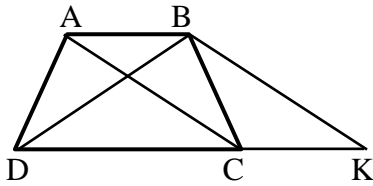
- 50 המרובע  $ABCD$  הוא טרפז ישר זווית  
 $(AB \parallel CD, \angle D = 90^\circ)$ .  
האלכסון  $BD$  חוצה את זווית  $D$   
ונתון בנוסף כי:  $BD = BC$  וכי:  $AD = 15$  ס"מ.  
חשב את אורכי בסיסי הטרפז.



- 51 המרובע  $ABCD$  הוא טרפז ישר זווית  
 $(AB \parallel CD, AD \perp DC)$ .  
נתון כי:  $BD = BC$ ,  $\beta = 2\alpha$  ו- $\angle DOC = 80^\circ$ .  
חשב את זוויות הטרפז.



- 52 מרובע  $ABCD$  הוא טרפז שווה  
שוקיים  $(AB \parallel CD, AD = BC)$ .  
נתון כי:  $AM \perp DC$ ,  $BN \perp DC$ .  
הוכח כי:  $DM = CN$ .



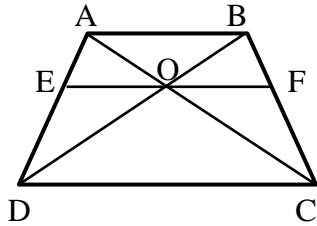
53) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים

$(AB \parallel CD, AD = BC)$ .

דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC הפוגש

את המשך הבסיס DC בנקודה K.

הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.



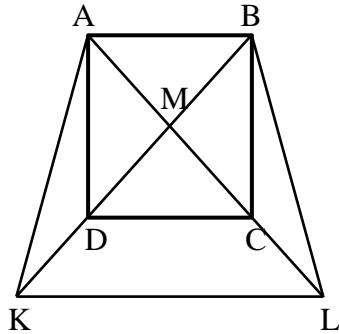
54) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים

$(AB \parallel CD, AD = BC)$ . O היא פגישת האלכסונים.

נתון כי:  $EF \parallel DC$  כאשר EF עובר דרך O. הוכח:

א.  $\angle BOF = \angle COF$

ב.  $EO = FO$



55) נתון ריבוע ABCD. הנקודה M היא מפגש

האלכסונים AC ו-BD. ממשיכים את האלכסונים

ויוצרים את הטרפז השווה שוקיים ABLK.

ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים משולש KML.

א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:

i. המשולש KML הוא ישר זווית ושווה

שוקיים.

ii. הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.

iii. המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.

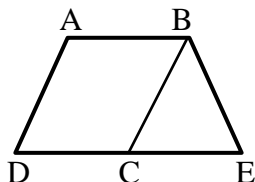
iv. הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.

ב. הוכח כי:  $3DK = AL$ .

ג. נתון כי  $8\sqrt{2}$  ס"מ  $AD =$ .

חשב את היקף הטרפז ABLK.

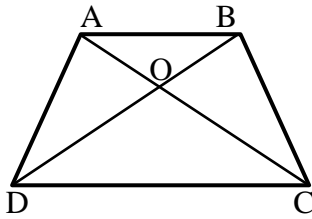
### שאלות – הוכחת טרפז שווה-שוקיים וישר זווית:



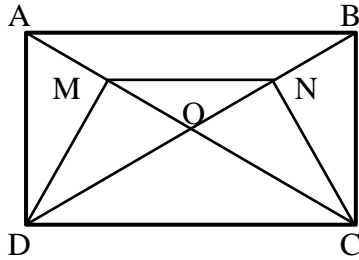
56) המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי:  $\angle A + \angle E = 180^\circ$ .

הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.

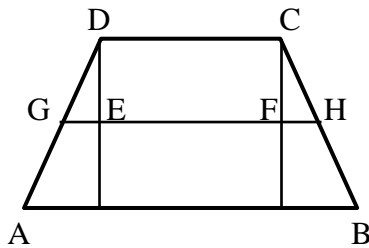


57) במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים. נתון כי:  $AO = BO$ ,  $CO = DO$ . הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

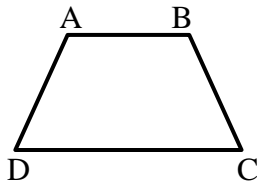


58) נתון מלבן ABCD שאלכסוניו נפגשים בנקודה O. נתון:  $MN \parallel DC$ . הוכח: DMNC טרפז שווה שוקיים.

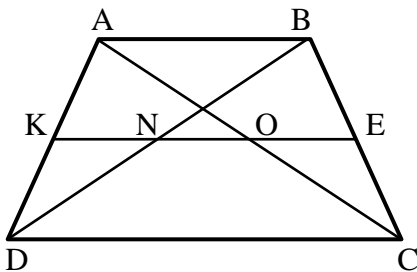
### שאלות – קטע אמצעים בטרפז:



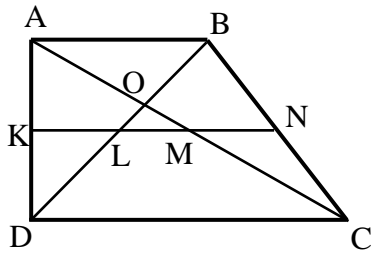
59) בטרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) הורדו מקצות הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול. קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F. נתון:  $GE = 3$  ס"מ,  $EF = 12$  ס"מ,  $FH = 2$  ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



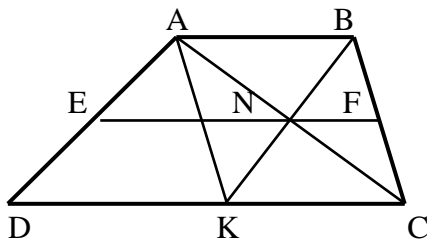
60) סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ. אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ. מצא את אורך שוק הטרפז.



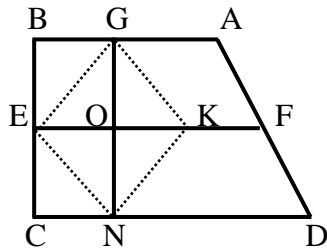
61) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ). KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O. א. הוכח כי:  $KN = EO$ . ב. בטרפז הנ"ל נתון:  $DC = 26$  ס"מ,  $AB = 14$  ס"מ. חשב את אורכי הקטעים KN ו-EO. ג. בטרפז הנ"ל נתון:  $KE = 13$  ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



- 62) KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCD שאלכסוניו (  $AB \parallel CD$  ,  $AD \perp AB$  ) נפגשים בנקודה O. נתון :  $AD = 12$  ס"מ ,  $DC = 2AB$  ,  $\angle ADB = 45^\circ$ . חשב את אורך הקטע LM והוכח כי :  $KL = LM = MN$ .

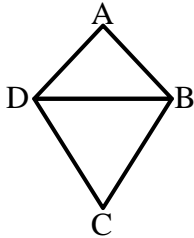


- 63) מרובע ABCD הוא טרפז (  $AB \parallel CD$  ). EF הוא קטע אמצעים. AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.  
א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.  
ב. נתון :  $EF = 13$  ס"מ ,  $EN = 9$  ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC ואת הקטע DK.



- 64) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית (  $AB \parallel CD$  ,  $\angle B = 90^\circ$  ). EF קטע אמצעים בטרפז. G ו-N הן נקודות על AB ו-CD בהתאמה המקיימות :  $GN \perp DC$ . בנוסף נתון :  $\angle D < 90^\circ$  ,  $KO = EO$ . הוכח כי מרובע GENK הוא מעוין.

## הדלתון:

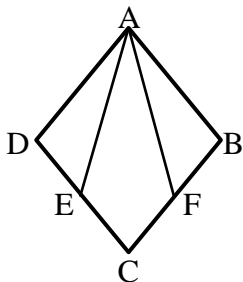


**הגדרה:**  
דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.  
(מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווים שוקיים בעלי בסיס משותף).

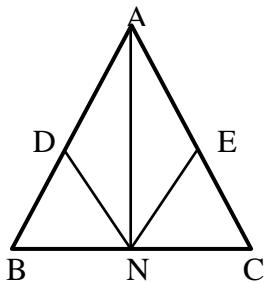
### תכונות האלכסונים בדלתון:

- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
- האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
- היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון =  $\frac{(אלכסון \cdot אלכסון)}{2}$ .

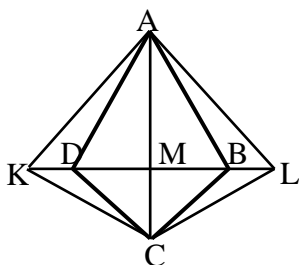
### שאלות – דלתון:



**65** נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ב-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון.  
הוכח:  $\angle DAE = \angle FAB$ .



**66** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) מקצים נקודות D ו-E על השוקיים.  
נתון כי:  $AD = AE$ .  
הנקודה N היא אמצע BC.  
הוכח כי ADNE הוא דלתון.

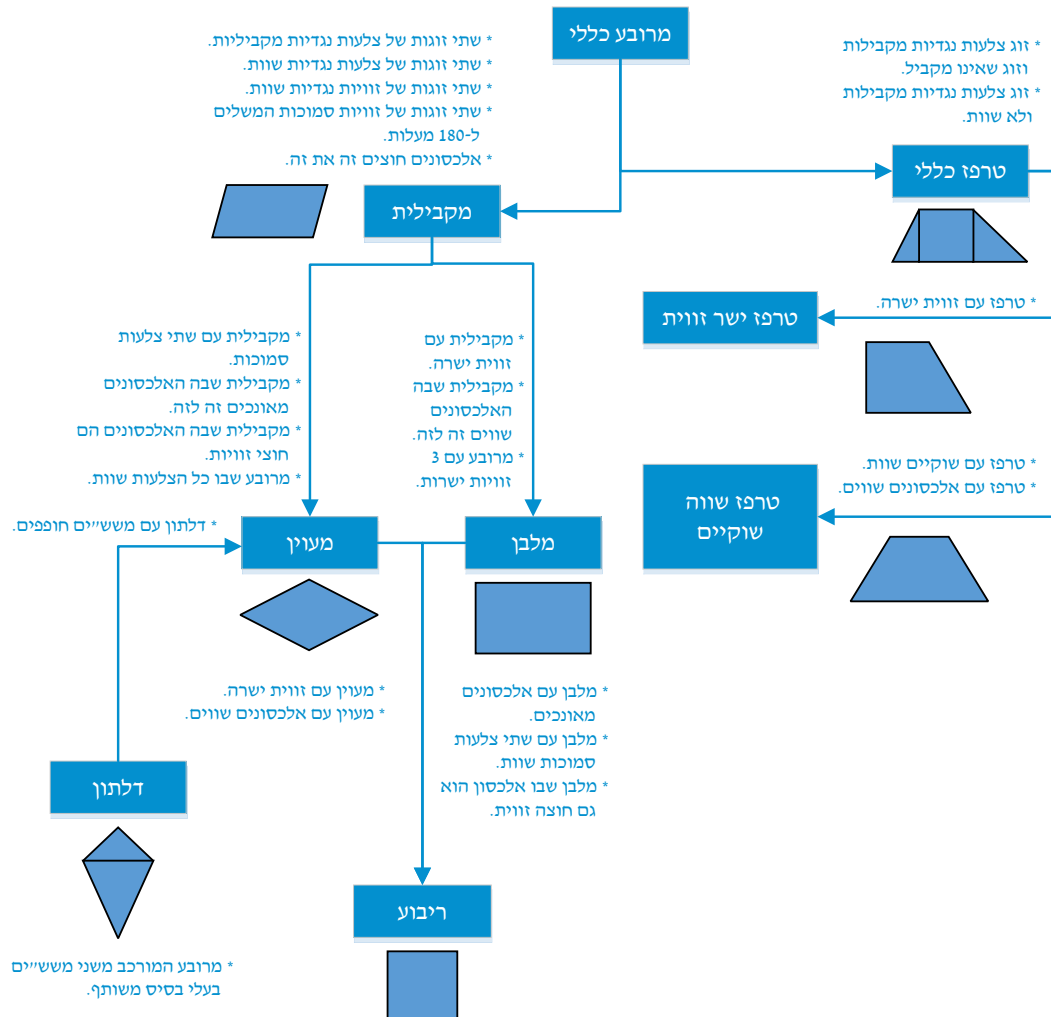


**67** בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים:  
 $KD = BL$ . הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.



## סיכום משפחת המרובעים:

להלן דיאגרמה מסכמת של כל משפחת המרובעים ותכונותיהם:



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x = 68^\circ$       ב.  $x = 50^\circ$       ג.  $x = 102^\circ$
- (2) א.  $75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ$       ב.  $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$
- (3)  $140^\circ$
- (4)  $\angle B = 90^\circ, \angle C = \angle D = 70^\circ$
- (5) א.  $125^\circ, 55^\circ$       ב.  $100^\circ, 80^\circ$       ג.  $140^\circ, 40^\circ$
- (6) שאלת הוכחה
- (7) שאלת הוכחה
- (8) 5 ס"מ.      (9) שאלת הוכחה
- (10) שאלת הוכחה      (11)  $BD = 34$  ס"מ,  $AC = 20$  ס"מ
- (12) שאלת הוכחה
- (13) מקביליות: א', ב', ד', ה', ו'.      אינן מקביליות: ג', ז', ח'.
- (14) שאלת הוכחה      (15) שאלת הוכחה
- (16) שאלת הוכחה      (17) שאלת הוכחה
- (18) שאלת הוכחה      (19) שאלת הוכחה
- (20) א.  $\alpha = 55^\circ, \beta = 70^\circ, \gamma = 35^\circ$       ב.  $\alpha = \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$
- ג.  $\alpha = 62^\circ, \beta = 56^\circ$
- (21)  $10^\circ$       (22) שאלת הוכחה
- (23) שאלת הוכחה      (24) שאלת הוכחה
- (25) שאלת הוכחה      (26) שאלת הוכחה
- (27) שאלת הוכחה      (28) שאלת הוכחה
- (29) שאלת הוכחה
- (30) א.  $\alpha = 21^\circ, \beta = 69^\circ$       ב.  $\alpha = 20^\circ, \beta = 70^\circ$
- ג.  $\alpha = 35^\circ, \beta = 55^\circ$       ד.  $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$
- (31) שאלת הוכחה      (32) שאלת הוכחה
- (33) שאלת הוכחה      (34) שאלת הוכחה
- (35) שאלת הוכחה      (36) שאלת הוכחה

- (37) שאלת הוכחה
- (38) שאלת הוכחה
- (39) שאלת הוכחה
- (40) שאלת הוכחה
- (41) שאלת הוכחה
- (42) שאלת הוכחה
- (43) שאלת הוכחה
- (44) א.  $x = 66^\circ; 46^\circ, 134^\circ, 66^\circ, 114^\circ$  ; ב.  $x = 35^\circ; 40^\circ, 140^\circ, 75^\circ, 105^\circ$
- (45) 8 ס"מ. (46) שאלת הוכחה
- (47) א. 25 ס"מ. ב. שאלת הוכחה
- (48) שאלת הוכחה (49) שאלת הוכחה
- (50) א. 15 ס"מ, 30 ס"מ. ב. שאלת הוכחה
- (51)  $90^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$  (52) שאלת הוכחה
- (53) שאלת הוכחה (54) שאלת הוכחה
- (55) א. ניתן להוכיח את טענות : i, iii. ב. שאלת הוכחה
- ג.  $P_{ABLK} = 16\sqrt{5} + 24\sqrt{2} \approx 69.71$  ס"מ
- (56) שאלת הוכחה (57) שאלת הוכחה
- (58) שאלת הוכחה (59) 22 ס"מ ו-12 ס"מ
- (60) 14 ס"מ.
- (61) א. שאלת הוכחה ב. 7 ס"מ = EO = KN, 6 ס"מ = NO
- ג. 10 ס"מ = AB, 16 ס"מ = DC.
- (62) 6 ס"מ.
- (63) 8 ס"מ = AB, 18 ס"מ = DC, 10 ס"מ = DK.
- (64) שאלת הוכחה (65) שאלת הוכחה
- (66) שאלת הוכחה (67) שאלת הוכחה

## תוכן העניינים:

253 .....	פרק 11
253 .....	גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים
253 .....	סיכום כללי :
253 .....	משולשים :
254 .....	שאלות – שטחים והיקפים של משולשים :
255 .....	מרובעים :
255 .....	הערות כלליות :
256 .....	שאלות עם מקבילית :
258 .....	שאלות עם מלבן :
259 .....	שאלות עם מעוין :
260 .....	שאלות עם ריבוע :
261 .....	שאלות עם טרפז :
263 .....	תשובות סופיות :

## פרק 11

# גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים

### סיכום כללי:

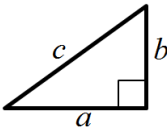
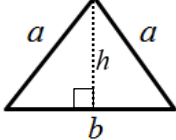
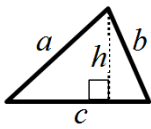
#### שטח – הגדרה:

גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.  
שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון:  
מטר ריבועי ( $m^2$ ), ס"מ ריבועי (סמ"ר  $cm^2$ ).

#### היקף – הגדרה:

היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

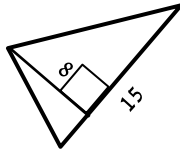
### משולשים:

משולש ישר זווית	משולש שווה שוקיים	משולש כללי	סוג
			איור
$S = \frac{a \cdot b}{2}$	$S = \frac{b \cdot h}{2}$	$S = \frac{c \cdot h}{2}$	שטח
$P = a + b + c$	$P = 2a + b$	$P = a + b + c$	היקף

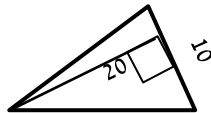
## שאלות – שטחים והיקפים של משולשים:

(1) מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):

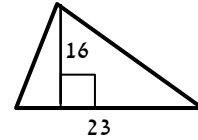
א.



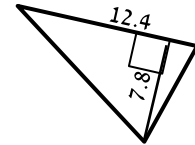
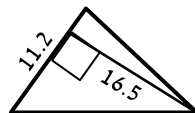
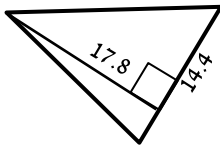
ב.



ג.

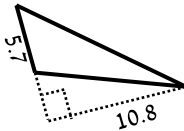


ד.

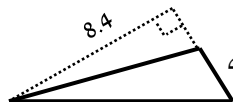


(2) מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):

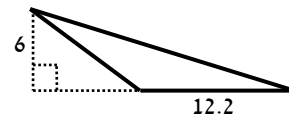
א.



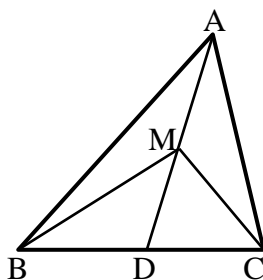
ב.



ג.



(3) הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקדקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים השווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.

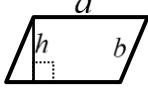
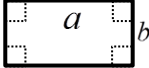
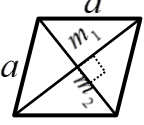

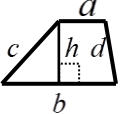


(4) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC. M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווים שטח.

ב.  $S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ .

## מרובעים:

סוג	מקבילית	מלבן	מעוין	ריבוע	טרפז
איור					
שטח	$S = a \cdot h$	$S = a \cdot b$	$S = a \cdot h$ $S = \frac{m_1 \cdot m_2}{2}$	$S = a^2$	$S = \frac{(a+b)h}{2}$
היקף	$P = 2(a+b)$	$P = 2(a+b)$	$P = 4a$	$P = 4a$	$P = a+b+c+d$

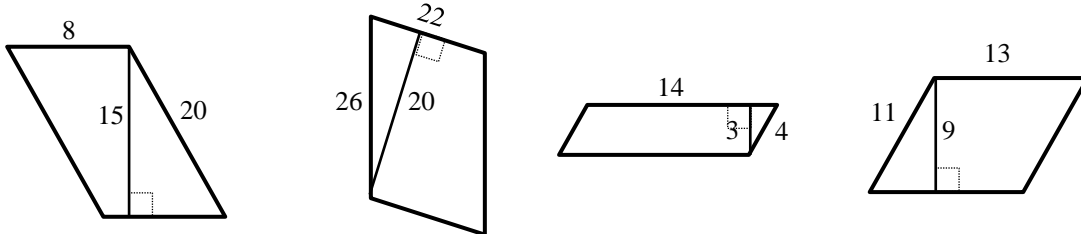
## הערות כלליות:

- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע"י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה.  
כך ניתן לקבל את הנוסחה:  $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$  כאשר  $h_a$  ו-  $h_b$  הם הגבהים לצלעות  $a$  ו-  $b$  בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע"י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע"י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו  $h = c$  נקבל:  $S = \frac{(a+b)c}{2}$ .
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע"י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

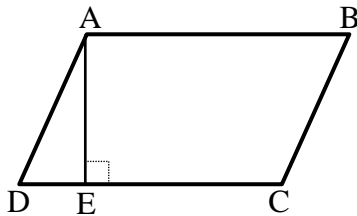
## שאלות עם מקבילית:

(5) חשב את השטחים וההיקפים של המקביליות הבאות (כל המידות בס"מ):

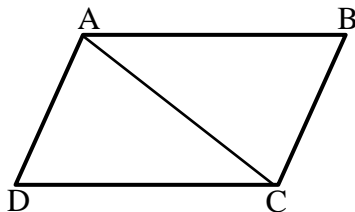
א. ב. ג. ד.



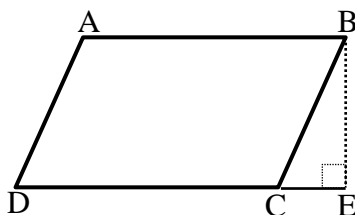
(6) נתונה מקבילית ABCD.  
מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ.  
ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.  
א. מצא את אורך הצלע AB.  
ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.  
מצא את אורך הצלע BC.



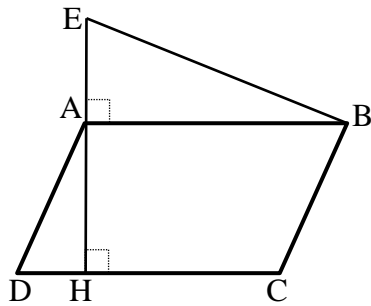
(7) נתונה מקבילית ABCD.  
מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.  
ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.  
חשב את היקף המקבילית.



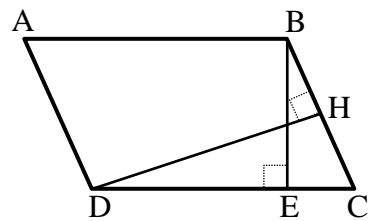
(8) נתונה מקבילית ABCD.  
מורידים גובה מהקדקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE. שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר. נתון:  $CE = 6$  ס"מ.  
א. מצא את אורך הגובה BE.  
ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.



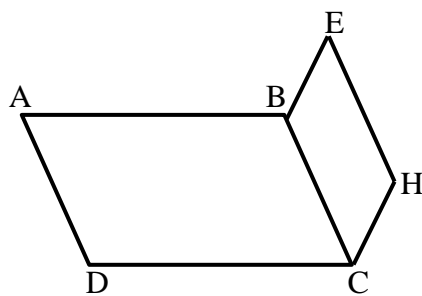




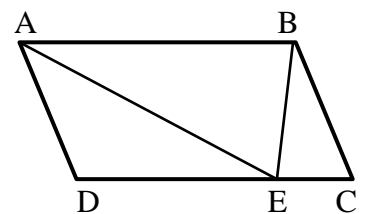
- 9 נתונה מקבילית ABCD. מעלים אנך מהקדקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB. מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ. נתון:  $AE = 8$  ס"מ,  $AD = 13$  ס"מ. שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.  
א. מצא את אורך הצלע AB.  
ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.



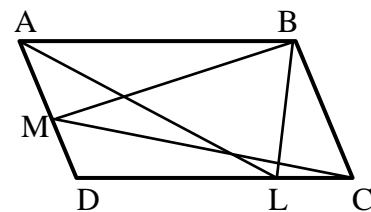
- 10 במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH לצלעות CD ו-BC בהתאמה. נתון:  $BE = 12$  ס"מ,  $BC = 14.4$  ס"מ,  $DH = 15$  ס"מ.  
א. חשב את שטח המקבילית ABCD.  
ב. חשב את אורך הצלע AB.  
ג. חשב את היקף המקבילית.



- 11 נתונה המקבילית ABCD. על הצלע BC בונים מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ. ידוע כי היקף הצורה BEHCD הוא 94 ס"מ. נתון:  $BC = 15$  ס"מ.  
א. חשב את אורך הצלע AB.  
ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.



- 12 המרובע ABCD הוא מקבילית. הנקודה E נמצאת על DC. הוכח כי:  $S_{AEB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ .



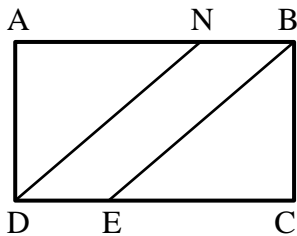
- 13 המרובע ABCD הוא מקבילית. הנקודות M ו-L נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה. הוכח כי:  $S_{BMC} = S_{ALB}$ .

## שאלות עם מלבן:

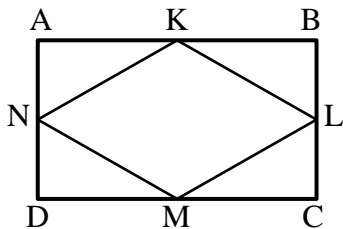
14) במלבן ABCD אורכי הצלעות הם:  $AB = 12$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ. מצאו את ההיקף של המלבן.

15) במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ. מצאו את שטח המלבן.

16) במלבן ABCD נתון:  $DC = 11$  ס"מ,  $AD = 9$  ס"מ. מצאו את האורך של האלכסון AC.



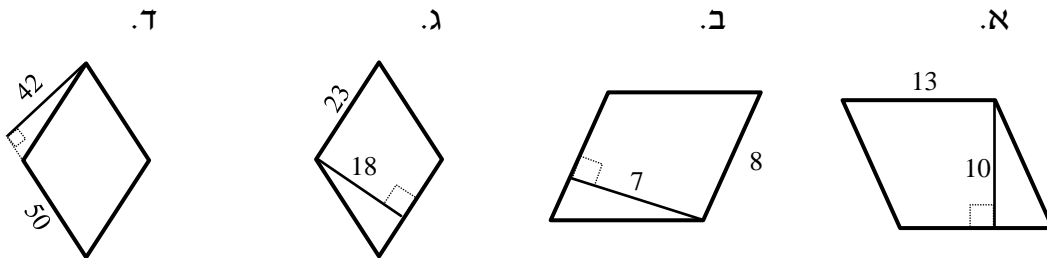
17) המרובע ABCD הוא מלבן. הישרים DN ו-BE מקבילים. נתון:  $AB = 32$  ס"מ,  $DN = 30$  ס"מ ו- $BN = 8$  ס"מ. הוכח כי מרובע NBED הוא מקבילית וחשב את שטחה.



18) הנקודות K, L, M ו-N הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD ו-AD בהתאמה במלבן ABCD. נתון כי היקף המלבן הוא 120 ס"מ וכי שטחו הוא 836 סמ"ר. חשב את שטחו של המרובע KLMN.

## שאלות עם מעוין:

19) חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס"מ):



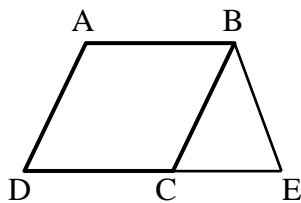
20) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O. נתון:  $AO = 3$  ס"מ,  $BO = 4$  ס"מ. מצא את אורך צלע המעוין.

21) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O. נתון:  $AB = 12$  ס"מ,  $BO = 8$  ס"מ. מצא את AO.

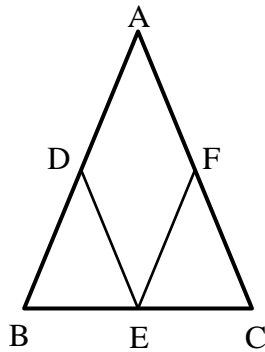
22) במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין. נתון:  $AB = 20$  ס"מ.

- חשב את אורך האלכסון BD.
- חשב את שטח המעוין.

23) נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס"מ ושטח המעוין הוא 35 סמ"ר. חשב את היקף המעוין.



- 24) נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס"מ. מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי:  $CE = 6$  ס"מ.
- איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.
  - חשב את היקף הצורה ABCE.

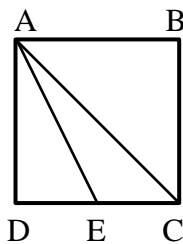


- 25 נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$ ,  $(AB = AC)$ . מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-  $D$ ,  $E$  ו-  $F$  ומעבירים את הקטעים  $DE$  ו-  $EF$  כך שהמרובע  $ADEF$  הוא מעוין. נתון:  $BC = 12$  ס"מ, וכי היקף המשולש  $ABC$  הוא 48 ס"מ.
- א. מצא את אורך צלע המעוין  $ADEF$ .
- ב. חשב את היקף המעוין  $ADEF$ .

## שאלות עם ריבוע:

- 26 נתון ריבוע  $ABCD$  בעל אורך צלע של 6 ס"מ.
- א. חשב את שטח הריבוע.
- ב. חשב את היקף הריבוע.
- ג. חשב את אורך האלכסון בריבוע.

- 27 שטחו של ריבוע  $ABCD$  הוא 49 סמ"ר.
- א. מהו אורך צלע הריבוע?
- ב. מהו אורך האלכסון בריבוע?
- ג. מהו היקף הריבוע?



- 28 בריבוע  $ABCD$  מעבירים את הקטע  $AE$  כך ש-  $E$  היא אמצע הצלע  $DC$  ואת האלכסון  $AC$ . שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.
- א. מצא את אורך צלע הריבוע.
- ב. מצא את אורך אלכסון הריבוע.
- ג. מצא את אורך הקטע  $AE$ .

- 29 חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

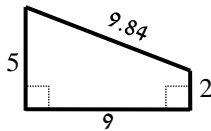
- 30 נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם. אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו- 9 ס"מ. חשב את היקף הריבוע.

- 31 נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם. שטח הריבוע הוא 36 ס"מ ואורך המלבן גדול ב- 8 ס"מ מרוחבו. חשב את שטח המלבן.

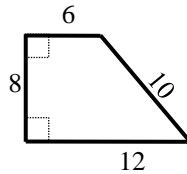
## שאלות עם טרפז:

32) חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):

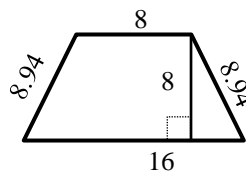
א.



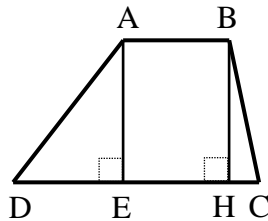
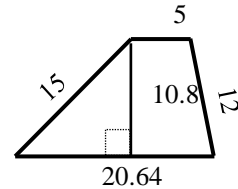
ב.



ג.

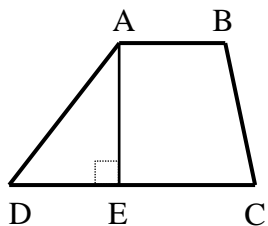


ד.



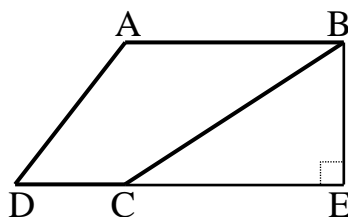
33) נתון טרפז ABCD,  $(AB \parallel CD)$ .

מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ.  
ידוע כי:  $DE = 6$  ס"מ,  $HC = 2$  ס"מ.  
שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר.  
מצא את אורך בסיס הטרפז AB.



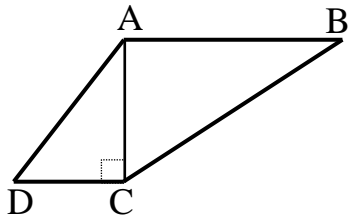
34) נתון טרפז ABCD,  $(AB \parallel CD)$ .

מורידים גובה AE מהקדקוד A.  
היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי:  
 $AD = 18$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ,  $AB = 12$  ס"מ.  
א. מצא את אורך הבסיס DC.  
ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.



35) נתון טרפז ABCD,  $(AB \parallel CD)$ .

מהקדקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE  
כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.  
ידוע כי:  $AB = 20$  ס"מ,  $DC = 8$  ס"מ.  
וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.  
א. מצא את הגובה BE.  
ב. נתון כי:  $\angle BCD = 130^\circ$ ,  $\angle D = 60^\circ$ .  
חשב את זווית A ואת זוויות המשולש BCE.



36 נתון טרפז  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$ .

האלכסון  $AC$  הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.

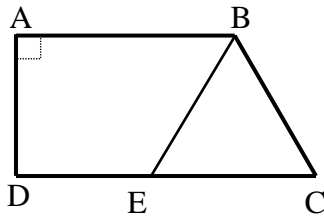
ידוע כי:  $AD = AB = 13$  ס"מ,  $BC = 17.7$  ס"מ.

היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\angle B = 42.71^\circ$ .

א. מצא את אורך הבסיס  $DC$ .

ב. חשב את שטח הטרפז.

ג. חשב את זווית  $C$ .



37 הטרפז  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$  הוא ישר זווית

$(\angle A = 90^\circ)$ . מהנקודה  $E$  שעל הבסיס  $DC$

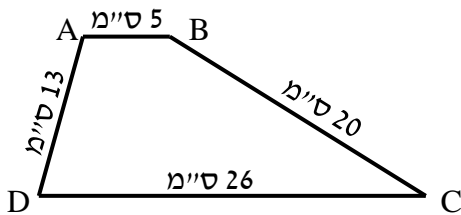
מעבירים את הקטע  $BE$  כך שהמשולש  $BCE$  הוא

שווה צלעות עם:  $BC = 14$  ס"מ. היקף הטרפז

$ABCD$  הוא 67 ס"מ ו- $AD$  הוא 10 ס"מ.

א. מהו היקף הטרפז  $ABED$ ?

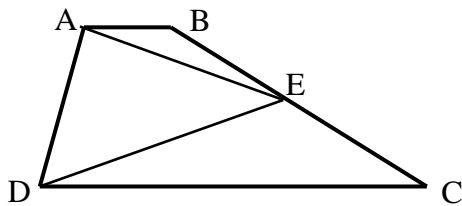
ב. חשב את שטח הטרפז  $ABED$ .



38 נתון טרפז  $ABCD$  שאורכי צלעותיו

נתונים בסרטוט. חשב את שטח הטרפז

(פתור כתרגיל חישוב).



39 המרובע  $ABCD$  הוא טרפז  $(AB \parallel CD)$ .

הנקודה  $E$  היא אמצע השוק  $BC$ .

הוכח כי:  $S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ .

## תשובות סופיות:

- (1 א. 184 סמ"ר      ב. 100 סמ"ר      ג. 60 סמ"ר      ד. 48.36 סמ"ר  
ה. 92.4 סמ"ר      ו. 128.16 סמ"ר.
- (2 א. 36.6 סמ"ר      ב. 16.8 סמ"ר      ג. 30.78 סמ"ר.
- (3 הוכחה.
- (4 הוכחה.
- (5 א. 48 ס"מ ,  $S = 117$  סמ"ר      ב. 36 ס"מ ,  $P = 42$  סמ"ר ,  $S =$   
ג. 96 ס"מ ,  $P = 440$  סמ"ר ,  $S =$       ד. 56 ס"מ ,  $P = 120$  סמ"ר ,  $S =$ .
- (6 א. 10 ס"מ  $AB =$       ב. 8 ס"מ  $BC =$ .
- (7 82 ס"מ  $P =$ .
- (8 א. 8 ס"מ  $BE =$       ב. 14 ס"מ  $AB =$ .
- (9 א. 16 ס"מ  $AB =$       ב. 58 ס"מ  $P =$ .
- (10 א. 216 סמ"ר  $S =$       ב. 18 ס"מ  $AB =$       ג. 64.8 ס"מ  $P =$ .
- (11 א. 25 ס"מ  $AB =$       ב. 80 ס"מ  $P =$ .
- (12 הוכחה.
- (13 הוכחה.
- (14 40 ס"מ.
- (15 60 סמ"ר.
- (16 14.21 ס"מ  $\approx \sqrt{202}$ .
- (17 144 סמ"ר.
- (18 418 סמ"ר.
- (19 א. 52 ס"מ ,  $P = 130$  סמ"ר ,  $S =$       ב. 32 ס"מ ,  $P = 56$  סמ"ר ,  $S =$   
ג. 92 ס"מ ,  $P = 414$  סמ"ר ,  $S =$       ד. 200 ס"מ ,  $P = 2100$  סמ"ר ,  $S =$ .
- (20 5 ס"מ.
- (21 8.94 ס"מ  $\approx \sqrt{80}$ .
- (22 א.  $BD = 20\sqrt{3}$  ס"מ      ב. 346.41 סמ"ר.

- (23) 24.413 ס"מ.
- (24) א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש-  $BE=BC$ . ב. 38 ס"מ  $P =$ .
- (25) א. 9 ס"מ. ב. 36 ס"מ  $P =$ .
- (26) א. 36 סמ"ר. ב. 24 ס"מ ג. 8.48 ס"מ.
- (27) א. 7 ס"מ. ב. 9.89 ס"מ ג. 28 ס"מ.
- (28) א. 6.32 ס"מ. ב. 8.94 ס"מ ג. 7.07 ס"מ.
- (29) 15 ס"מ.
- (30) 60 ס"מ.
- (31) 20 סמ"ר.
- (32) א. 52.64 ס"מ  $P =$ , 138.456 סמ"ר  $S =$ . ב. 41.88 ס"מ  $P =$ , 96 סמ"ר  $S =$ .  
ג. 36 ס"מ  $P =$ , 72 סמ"ר  $S =$ . ד. 25.48 ס"מ  $P =$ , 31.5 סמ"ר  $S =$ .
- (33)  $AB = 7$  ס"מ.
- (34) א. 22 ס"מ  $DC =$ . ב. 15 ס"מ  $AE =$ .
- (35) א. 14 ס"מ  $BE =$ . ב.  $\angle A = 120^\circ$ ,  $\angle CBE = 40^\circ$ ,  $\angle BCE = 50^\circ$ ,  $\angle E = 90^\circ$ .
- (36) א. 5 ס"מ  $DC =$ . ב. 108 סמ"ר  $S =$ . ג.  $\angle C = 137.29^\circ$ .
- (37) א. 53 ס"מ  $P =$ . ב. 145 סמ"ר  $S =$ .
- (38) 186 סמ"ר.
- (39) שאלת הוכחה.



## תוכן העניינים:

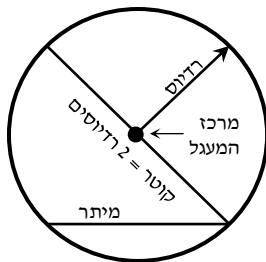
266	פרק 12
266	גיאומטריה אוקלידית – המעגל
266	הגדרות :
266	משפטים העוסקים במיתרים במעגל :
267	שאלות יסודיות – קשתות ומיתרים במעגל :
269	משפט אנך אמצעי למיתר :
269	שאלות – אנך אמצעי למיתר :
270	משפטים העוסקים בזוויות במעגל :
270	שאלות – זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל :
273	שאלות – זווית היקפית הנשענת על קוטר :
274	משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל :
274	שאלות – משיקים למעגל :
276	שאלות – משיק ומיתר :
277	משפטים העוסקים בשני מעגלים :
277	שאלות – שני מעגלים :
279	משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום :
279	שאלות – משולשים ומעגל :
279	שאלות – מרובעים ומעגל :
282	שטחים והיקפים במעגל :
285	תשובות סופיות :

## פרק 12

# גיאומטריה אוקלידית – המעגל

### הגדרות:

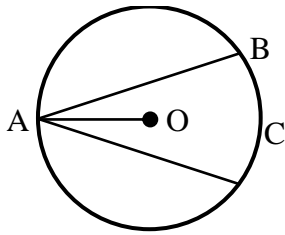
- מעגל – המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.
- הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.
- רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.
- מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.
- קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.
- היקף מעגל  $= 2\pi R$ .
- שטח מעגל  $= \pi R^2$ .
- קשת – חלק מהיקף המעגל.
- גזרה – חלק משטח המעגל.
- זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.
- זווית היקפית – זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים.



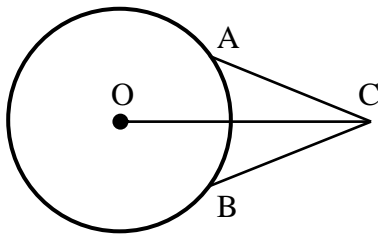
### משפטים העוסקים במיתרים במעגל:

1. מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהפך.
2. על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהפך.
3. מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.  
(משפט הפוך ל-3) מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

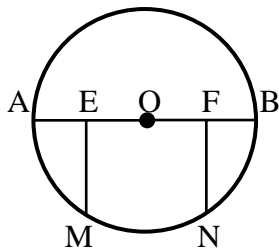
**שאלות יסודיות – קשתות ומיתרים במעגל:**



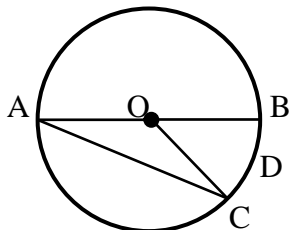
- (1) AB ו-AC הם שני מיתרים שווים במעגל שמרכזו O.  
הוכח כי AO חוצה את זווית BAC.



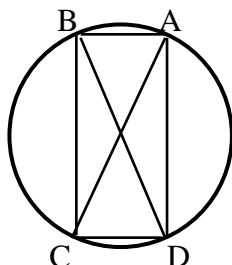
- (2) A ו-B הן שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל שמרכזו O. נקודה C הנמצאת מחוץ למעגל מקיימת כי:  $AC = BC$ .  
הוכח כי OC חוצה את זווית C.



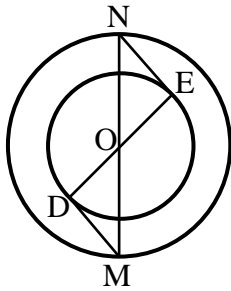
- (3) הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.  
נתון כי:  $FN \perp AB$ ,  $EM \perp AB$ ,  $EO = FO$ .  
הוכח כי  $MN = EF$ .



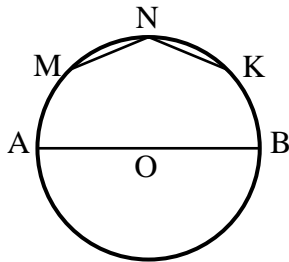
- (4) AB הוא קוטר במעגל שלפניך.  
AC הוא מיתר ו-O מרכז מעגל.  
המיתר OD חוצה את זווית BOC.  
הוכח כי DO מקביל ל-AC.



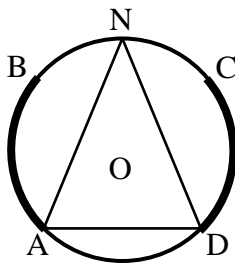
- (5) במעגל שלפניך AC ו-BD הם קטרים.  
הוכח כי המרובע ABCD הוא מלבן.



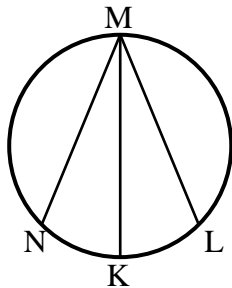
- 6 בסרטוט שלפניך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. הקטע MN הוא קוטר במעגל הגדול והקטע DE הוא קוטר במעגל הקטן. מעבירים את הקטעים MD ו-NE. הוכח כי MD שווה ל-NE.



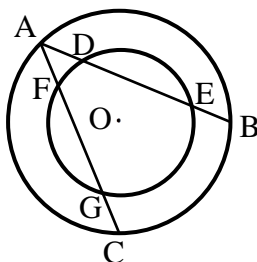
- 7 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. את הקשת העליונה של AB מחלקים ל-4 קשתות שוות, כלומר:  $\widehat{AM} = \widehat{MN} = \widehat{NK} = \widehat{KB}$ . חשב את זווית KNM.



- 8 במעגל שלפניך נתון כי הקשתות המסומנות שוות ז"א:  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ . הנקודה N היא אמצע הקשת  $\widehat{BC}$ . הוכח כי המשולש AND הוא שווה שוקיים.



- 9 המיתרים MN ו-ML שווים זה לזה. המיתר MK חוצה את זווית NML. א. הוכח כי  $\triangle KNM \cong \triangle KLM$ . ב. הוכח כי MK הוא קוטר במעגל.

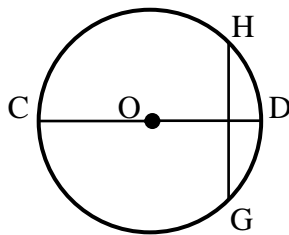


- 10 נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. מעבירים את המיתרים AB ו-AC במעגל הגדול. ידוע כי שני המיתרים שווים זה לזה. מסמנים את נקודות החיתוך של המיתרים עם המעגל הקטן ב-D ו-E עבור המיתר AB, ו-F ו-G עבור המיתר AC. הוכח:  $DE = FG$ .

## משפט אנך אמצעי למיתר:

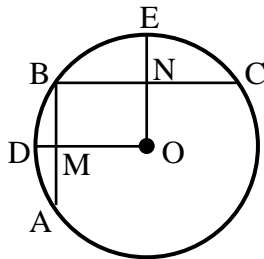
4. אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר.  
(משפט הפוך ל-4 (1)) רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.  
(משפט הפוך ל-4 (2)) קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

### שאלות – אנך אמצעי למיתר:

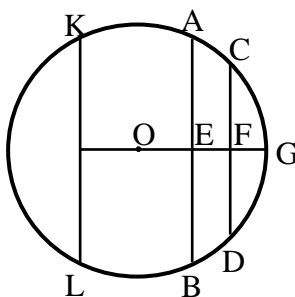


- 11 במעגל שמרכזו O המיתר GH מאונך לקוטר CD.  
א. הוכח כי  $GC = HC$ .

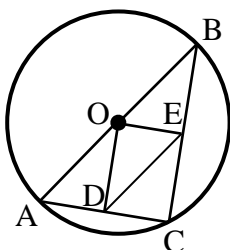
ב. נתון כי:  $\angle HDG = 80^\circ$ .  
בת כמה מעלות הקשת CG?



- 12 AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.  
מעבירים את הרדיוסים OD ו-OE אשר חותכים את המיתרים AB ו-BC בנקודות M ו-N בהתאמה.  
ידוע כי מרובע ONBM הוא מלבן. נתונות המידות הבאות:  $R = 8$  ס"מ,  $MD = 1.5$  ס"מ,  $NE = 3.5$  ס"מ.  
חשב את אורך כל אחד מהמיתרים AB ו-BC.



- 13 AB, CD ו-KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O, והם חותכים את הקטע MG, העובר במרכז המעגל, בנקודות E, F ו-M בהתאמה.  
נתון  $KL \parallel CD$ ,  $CF = DF$ .  
א. הוכח:  $KL = LM$ .  
נתון בנוסף כי:  $AB \perp MG$ ,  $ML = BE$ .  
ב. הוכח:  $MO = EO$ .



- 14 ABC הוא משולש החסום במעגל O. המיתר AB הוא קוטר במעגל. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AC ו-BC בהתאמה. מעבירים את הקטעים OD ו-OE וידוע כי:  $OD \perp AC$ ,  $OE \perp BC$ .  
הוכח כי DE שווה באורכו לרדיוס המעגל.

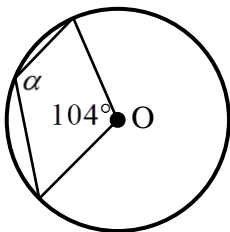
## משפטים העוסקים בזוויות במעגל:

5. שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן.  
(משפט הפוך ל-5) זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.
6. זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
7. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.  
(משפט הפוך ל-7) מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

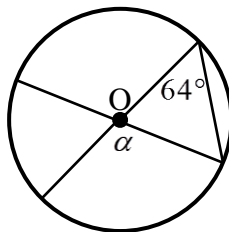
### שאלות – זוויות מרכזיות והיקפיות במעגל:

15 נתונים המעגלים הבאים שמרכזם הוא O.  
חשב את הזווית  $\alpha$  בכל אחד מהמקרים.

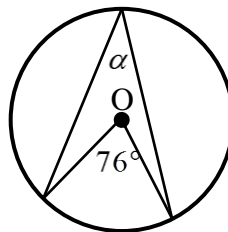
ג.



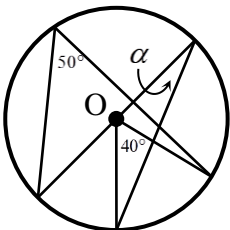
ב.



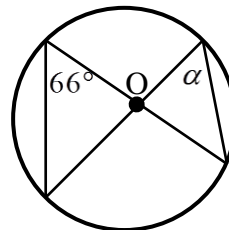
א.



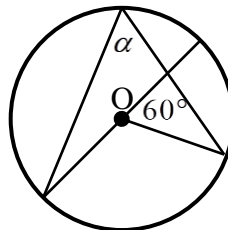
ו.



ה.



ד.

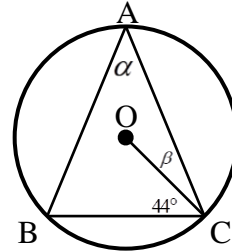
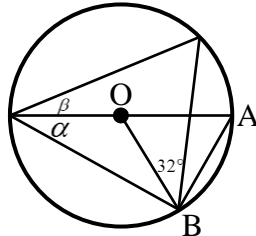
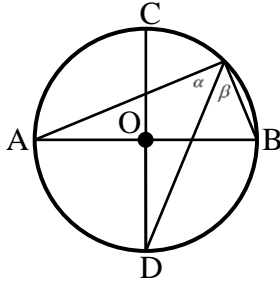


16 במעגלים הבאים שמרכזם O מופיעים הנתונים לידם.  
חשב את הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  בכל אחד מהמקרים:

ג. AB, CD קטרים  
מאונכים זה לזה.

ב.  $\triangle AOB$  - שווה  
צלעות

א.  $AB = AC$

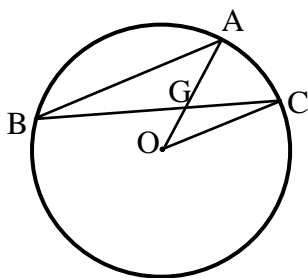
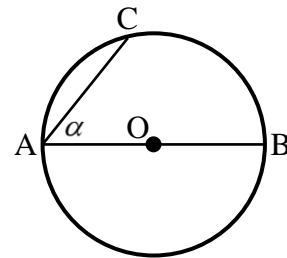
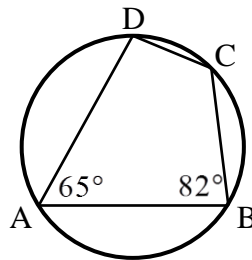
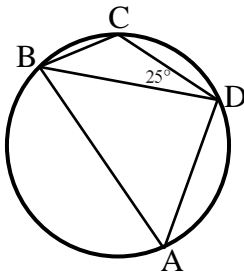


17 חשב את המבוקש בכל מקרה:

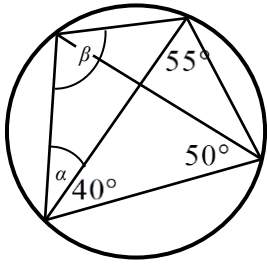
ג.  $DC = 60^\circ$ .  
חשב  $\angle BAD$ .

ב.  $DC = 52^\circ$ .  
חשב: AD, BC, AB.

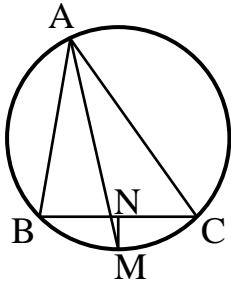
א. AB קוטר,  $AC = 84^\circ$ .  
חשב את  $\alpha$ .



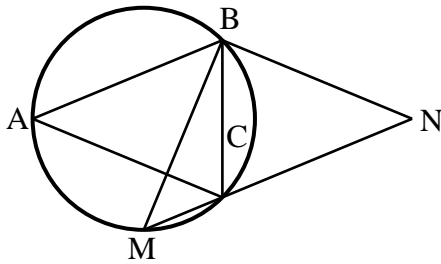
18 AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O.  
נתון:  $AB \parallel CO$ ,  $\angle AGC = 60^\circ$ .  
חשב את גודלה של הזווית  $\angle AOC$ .



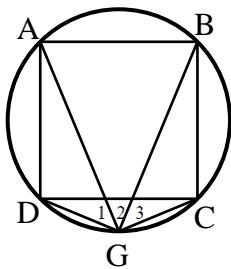
19) חשב את גודל הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  במעגל הנתון.



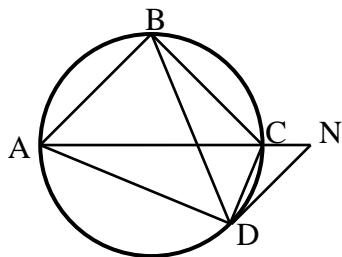
20) המשולש ABC חסום במעגל.  
המיתר AM חוצה את זווית A.  
מעבירים אנך מהנקודה M לצלע BC  
החותך אותה בנקודה N.  
הוכח:  $BN = CN$ .



21) בסרטוט שלפניך נתון כי המשולשים  
ABC ו-BMN הם שווים שוקיים  
( $AB = AC$ ,  $BM = BN$ ).  
זווית הראש במשולש BMN היא  $94^\circ$ .  
חשב את זווית ACB.



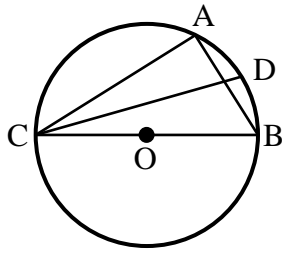
22) במעגל שלפניך חסום ריבוע ABCD.  
הנקודה G נמצאת על היקף המעגל.  
ממנה מעבירים מיתרים לכל קדקוד  
כך שנוצרות הזוויות  $\angle G_1$ ,  $\angle G_2$ ,  $\angle G_3$ .  
הוכח כי  $\angle G_1 = \angle G_2 = \angle G_3$  ומצא אותן.



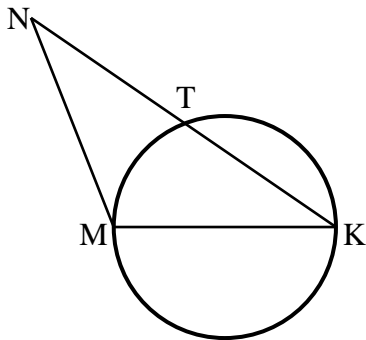
23) המרובע ABCD חסום במעגל. ממשיכים את  
האלכסון AC עד לנקודה N ומחברים אותה עם  
הקדקוד D כך שמתקיים:  $AB \parallel DN$ .  
הוכח כי זוויות המשולשים  $\triangle ADN$   
ו- $\triangle BDC$  שוות.



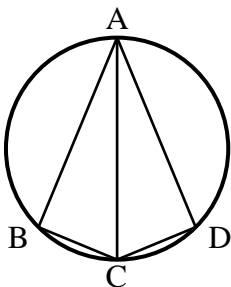
**שאלות – זווית היקפית הנשענת על קוטר:**



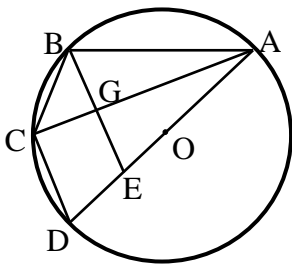
- 24** המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-BC הוא קוטר. מעבירים את המיתר CD המקיים:  $\angle DCB = 20^\circ$ . מצא את זווית CAD.



- 25** MK הוא קוטר במעגל שלפניך. הקטע KN חותך את המעגל בנקודה T. מתקיים:  $KT = NT$ . הוכח כי:  $MK = NM$ .



- 26** מרובע ABCD חסום במעגל כאשר האלכסון AC הוא קוטר וחוצה את זווית BCD. הוכח כי ABCD הוא דלתון.



- 27** AB, AC, AD, BC ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר AD עובר ב-O). הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G. נתון:  $BE \parallel CD$ ,  $BG = GE$ . הוכח:  $BC = CD$ .

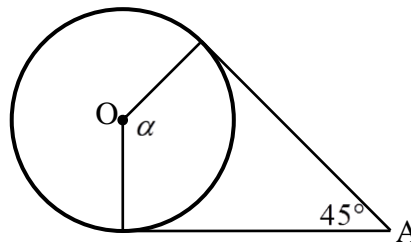
## משפטים העוסקים במשיק למעגל ושני משיקים למעגל:

8. משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.  
(משפט הפוך ל-8) קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.
9. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
10. קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.
11. הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

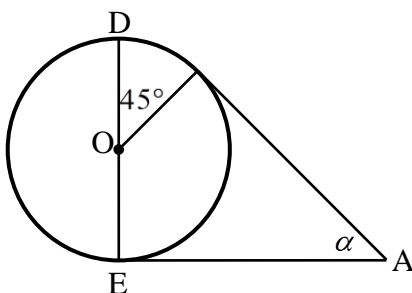
### שאלות – משיקים למעגל:

28 באיורים שלפניך נתונים שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה A שמחוץ למעגל. מרכזי המעגלים מסומן ב-O. מצא את  $\alpha$  בכל מקרה.

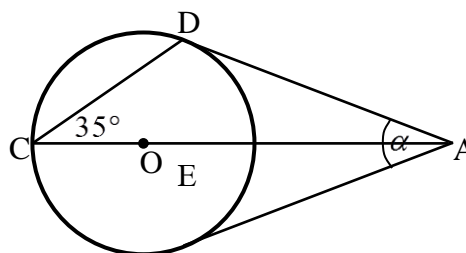
א.

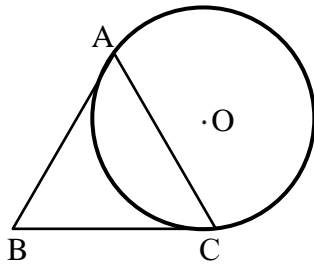


ב.

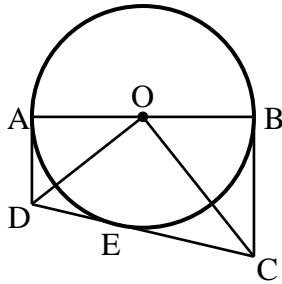


ג.

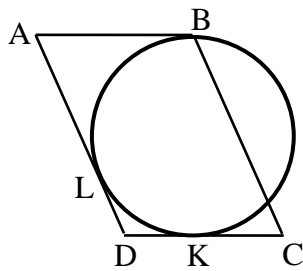




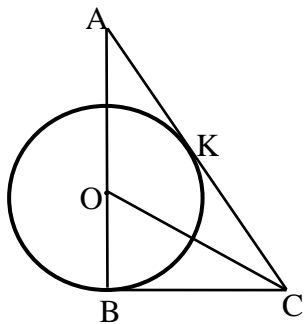
- 29) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). המעגל O משיק לצלעות AB ו-BC בנקודות A ו-C. הוכח כי ABC הוא שווה צלעות.



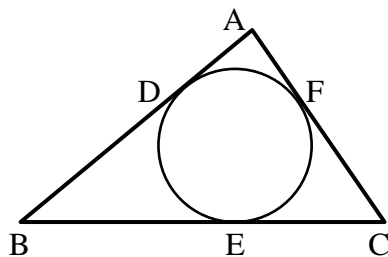
- 30) במעגל O מעבירים קוטר AB ושלושה משיקים AD, BC ו-CD. E היא נקודת ההשקה של CD עם המעגל. הוכח כי:  $\angle COD = 90^\circ$ .



- 31) הצלעות AB, AD ו-DC של המקבילית ABCD משיקות למעגל בנקודות L, K ו-M בהתאמה (ראה שרטוט). נתון:  $BC = 14$  ס"מ,  $CK = 6$  ס"מ. חשב את היקף המקבילית.



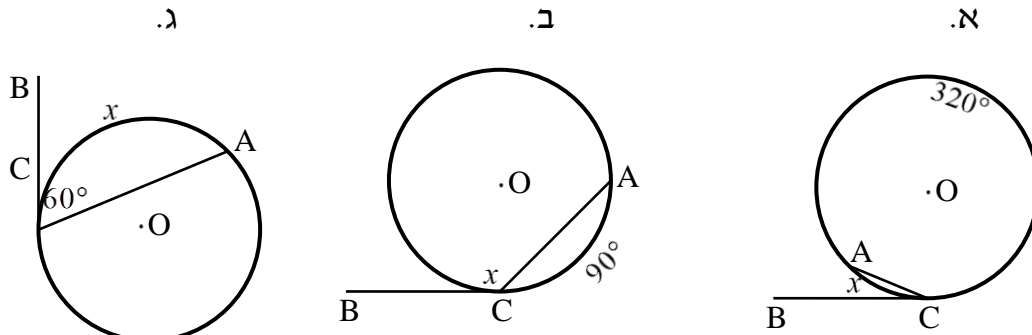
- 32) הצלעות AC ו-BC של המשולש ABC משיקות למעגל שמרכזו O, בנקודות K ו-B בהתאמה. הצלע AB עוברת בנקודה O. נתון:  $AB = 15$  ס"מ,  $AK = CK$ .  
א. חשב את גודלה של זווית A.  
ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.



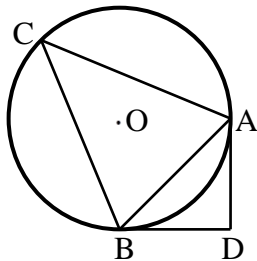
- 33) משולש ABC חוסם מעגל אשר משיק לצלעותיו בנקודות D, E ו-F כמתואר באיור. נתון כי:  $AC = 18$  ס"מ,  $BD = 14$  ס"מ. מצא את היקף המשולש ABC.

## שאלות – משיק ומיתר:

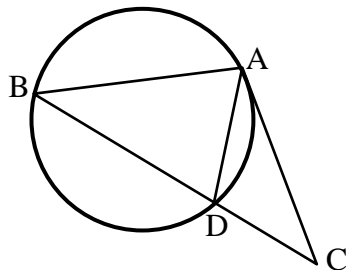
34 באיורים שלפניך נתון מעגל שמרכזו O, מיתר AC ומשיק BC בנקודה C. מצא את  $x$ .



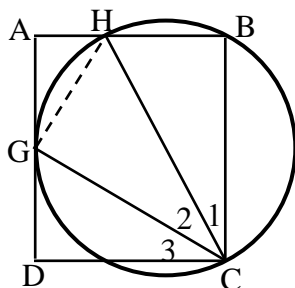
35 ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AC = BC$ ) החסום במעגל שמרכזו O. מהקדקודים A ו-B מעבירים משיקים אשר נחתכים בנקודה D. ידוע כי זווית הבסיס במשולש ABC היא  $68^\circ$ . חשב את זווית ADB.



36 AC הוא משיק למעגל בנקודה A. BC חותך את המעגל בנקודה D. נתון כי  $AD = CD$ , הוכח:  $AB = AC$ .



37 הקדקודים B ו-C של המלבן ABCD מונחים על מעגל. צלע AD משיקה למעגל בנקודה G והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H. הוכח:  $\angle C_2 = \angle C_3$ . (הדרכה: סמן  $\angle AGH = \alpha$ .)

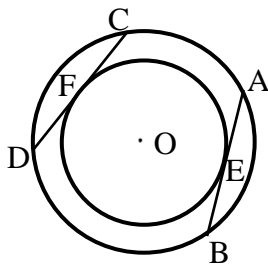


## משפטים העוסקים בשני מעגלים:

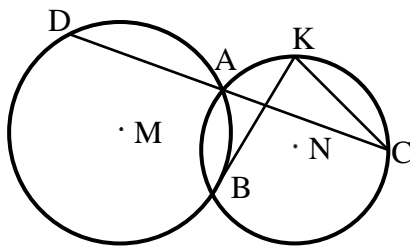
12. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

13. קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

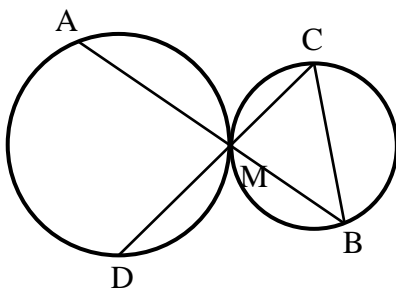
### שאלות – שני מעגלים:



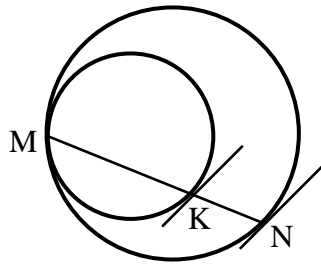
38 נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O. דרך שתי נקודות E ו-F שעל היקף המעגל הפנימי מעבירים משיקים אשר חותכים את המעגל החיצוני בנקודות A, B, C ו-D. הוכח כי המיתרים AB ו-CD הנוצרים באופן זה שווים.



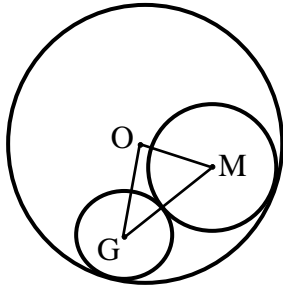
39 שני מעגלים M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B. הישר CD עובר דרך הנקודה A. מעבירים משיק למעגל M החותך את המעגל N בנקודה K. הוכח כי:  $CK \parallel BD$ .



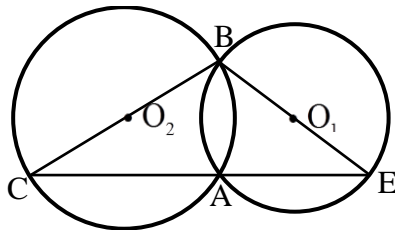
40 שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה M. דרך הנקודה M מעבירים שני ישרים חותכים. האחד חותך את המעגל השמאלי בנקודה A ואת הימני בנקודה B והאחר חותך את המעגל השמאלי בנקודה D ואת הימני בנקודה C. הוכח כי  $AD \parallel BC$ .



- 41 שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה M. מעבירים מיתר MN במעגל החיצוני אשר חותך את המעגל הפנימי בנקודה K. הוכח כי המשיקים לשני המעגלים בנקודות K ו-N מקבילים זה לזה.



- 42 המעגלים שמרכזיהם M ו-G משיקים מבחוץ זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O. נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8 ס"מ. חשב את היקף המשולש OMG.



- 43 שני מעגלים שמרכזיהם  $O_1$  ו- $O_2$  נחתכים בנקודות A ו-B. מעבירים את הקטרים BC ו-BE. הוכח כי הנקודות A, B, C נמצאות על ישר אחד. הוכח כי  $O_1O_2$  הוא קטע אמצעים במשולש BCE.

## משפטים העוסקים במעגל חוסם ומעגל חסום:

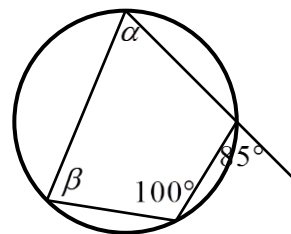
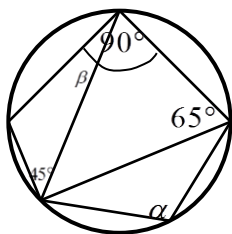
14. מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.
15. מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.
16. במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא  $180^\circ$ .  
(משפט הפוך ל-16) אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא  $180^\circ$ , המרובע בר חסימה במעגל.
17. במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.  
(משפט הפוך ל-17) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.
18. כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

### שאלות – משולשים ומעגל:

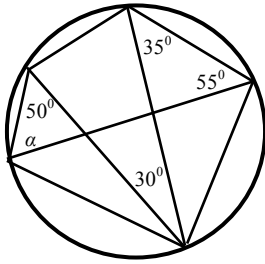
- 44 AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.  
א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא על AD אז המשולש ABC הוא שווה שוקיים.  
ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החוסם את משולש ABC נמצא על AD?

### שאלות – מרובעים ומעגל:

- 45 מצא את הנעלמים בכל אחד מהסרטוטים שלפניך:  
א. ב.

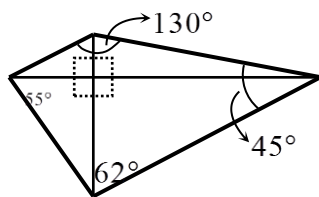


46) חשב את גודלה של הזווית  $\alpha$  בסרטוט הבא :

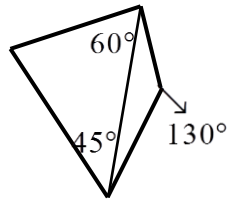


47) קבע אלו מהמרובעים הבאים ניתן לחסום במעגל :

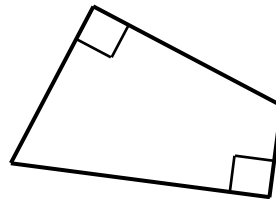
ג.



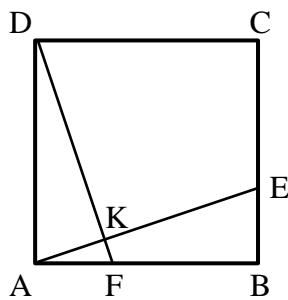
ב.



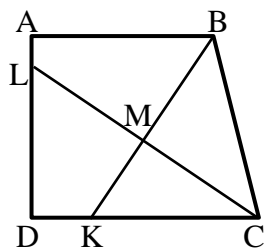
א.



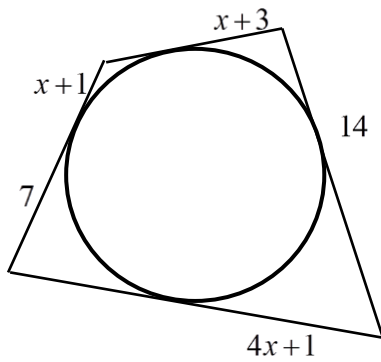
48) בריבוע ABCD נתון כי  $AF = BE$ . הנקודה K היא חיתוך של הקטעים AE ו-DF. הוכח כי את המרובע DKEC ניתן לחסום במעגל.



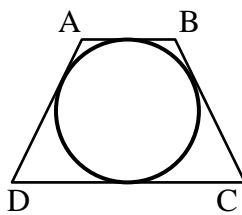
49) בטרפז ישר זווית ABCD שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו-DC הנקודות K ו-L נמצאות על הצלעות DC ו-AD בהתאמה, כך שהקטעים BK ו-CL הם חוצי הזוויות B ו-C בהתאמה. חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M. הוכח : את המרובע DKML ניתן לחסום במעגל. הערה : בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.







50) חשב את גודלו של  $x$  בשרטוט הבא :

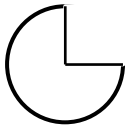


51) בטרפז שווה שוקיים ABCD ( $AB \parallel CD$ ) שהיקפו 60 ס"מ וזוויות הבסיס החדות שלו הן  $60^\circ$  חסום מעגל. מצא את אורכי צלעות הטרפז.

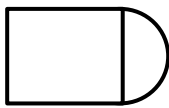
## שטחים והיקפים במעגל:

52) ענה על השאלות הבאות:

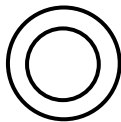
א. היקפו של עיגול הוא 44 ס"מ. חשב את שטחו.



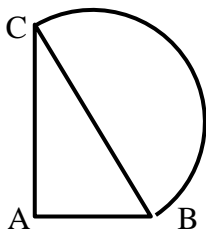
ב. הצורה שבאיור היא  $\frac{3}{4}$  עיגול.  
היקף הצורה שווה ל-45 ס"מ.  
חשב את אורך הרדיוס של העיגול.



ג. שטח צורה המורכבת מריבוע וחצי עיגול הוא 30 סמ"ר. חשב את רדיוס חצי העיגול.



ד. שטח טבעת הוא  $55\pi$  סמ"ר.  
הרדיוס הפנימי הוא 3 ס"מ.  
חשב את הרדיוס החיצוני של הטבעת.



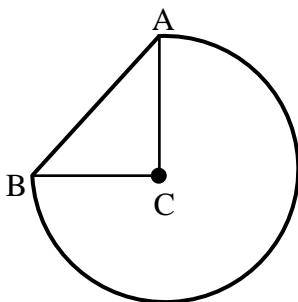
53) נתון משולש ישר זווית ABC, ( $\angle A = 90^\circ$ ).

על היתר BC בונים חצי עיגול.

נתון:  $AB = 10$  ס"מ,  $AC = 24$  ס"מ,  $BC = 26$  ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



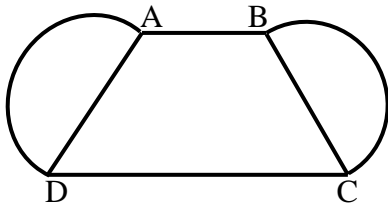
54) באיור שלפניך שלושה רבעי עיגול החסומים

ע"י הקטע AB ומשולש ישר זווית ABC (C מרכז העיגול). ידוע כי רדיוס העיגול הוא 14 ס"מ וכי

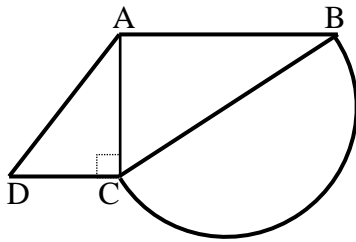
אורך הקטע AB הוא 19.8 ס"מ.

א. חשב את היקף הצורה המורכבת.

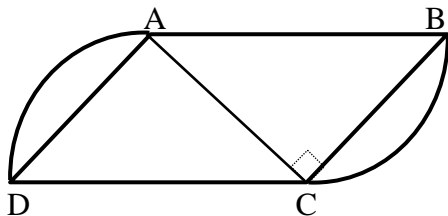
ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



- 55) באיור שלפניך נתון טרפז שווה שוקיים ABCD,  $(AB \parallel CD, AD = BC)$ . על שוקי הטרפז בונים חצאי עיגולים. נתון:  $AB = 10$  ס"מ,  $BC = 12$  ס"מ,  $CD = 16$  ס"מ. אורך גובה הטרפז הוא 11.6 ס"מ.
- א. חשב את היקף הצורה המורכבת.  
ב. חשב את שטח הצורה המורכבת.



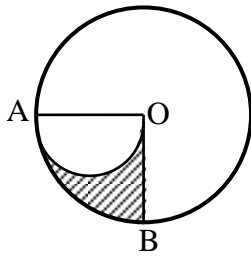
- 56) נתון טרפז ABCD,  $(AB \parallel CD)$ . מעבירים את האלכסון AC אשר מאונך לבסיסים AB ו-DC של הטרפז. על השוק BC בונים חצי עיגול. נתון:  $AB = 24$  ס"מ,  $AC = 18$  ס"מ. שטח הטרפז הוא 283.5 סמ"ר.
- א. מצא את הבסיס DC.  
ב. חשב את רדיוס העיגול.  
ג. חשב את היקף הצורה המורכבת.  
ד. חשב את שטח הצורה המורכבת.



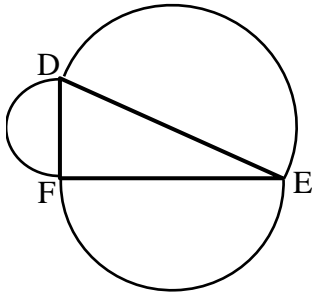
- 57) המרובע ABCD הוא מקבילית. על הצלעות BC ו-AD בונים שני רבעי עיגול זהים. מעבירים את האלכסון AC. ידוע כי האלכסון AC מאונך לשוק BC. נתון:  $AC = 15$  ס"מ,  $AB = 17$  ס"מ.
- א. מצא את הצלע BC.  
ב. חשב את היקף המקבילית.  
ג. מצא את רדיוס העיגול.  
ד. חשב את היקף הצורה המורכבת.

- 58) נתון מעגל שאורך רדיוסו הוא 16 ס"מ. חשב את אורך הקשת ואת שטח הגזרה המתאימות לזווית מרכזית בכל אחד מהמקרים הבאים:

- א.  $60^\circ$ .  
ב.  $45^\circ$ .  
ג.  $270^\circ$ .  
ד.  $17^\circ$ .



- 59 על הרדיוס OA של מעגל O בונים חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA. ידוע כי  $\angle BOA = 90^\circ$ .  
 א. חשב את השטח המקווקו OBA  
 אם ידוע כי 10 ס"מ  $OA =$ .  
 ב. הוכח באופן כללי כי שטח הגזרה OBA שווה לשטח חצי מעגל אשר קוטרו הוא OA.



- 60 על הצלעות של משולש ישר זווית  $\triangle DEF$  ( $\angle F = 90^\circ$ ) בונים חצאי מעגלים.  
 הוכח כי שטח חצי המעגל הבנוי על היתר שווה לסכום שטחי חצאי המעגלים הבנויים על הניצבים.

## תשובות סופיות:

- (1 שאלת הוכחה  
(2 שאלת הוכחה  
(3 שאלת הוכחה  
(4 שאלת הוכחה  
(5 שאלת הוכחה  
(6 שאלת הוכחה  
(7  $135^\circ$   
(8 שאלת הוכחה  
(9 שאלת הוכחה  
(10 שאלת הוכחה  
(11 א. שאלת הוכחה  
(12 9 ס"מ AB, 13 ס"מ BC.  
(13 שאלת הוכחה  
(14 שאלת הוכחה  
(15 א.  $38^\circ$  ב.  $128^\circ$  ג.  $128^\circ$  ד.  $60^\circ$  ה.  $66^\circ$  ו.  $30^\circ$   
(16 א.  $\alpha = 46^\circ, \beta = 23^\circ$  ב.  $\alpha = 30^\circ, \beta = 28^\circ$  ג.  $\alpha = \beta = 45^\circ$   
(17 א.  $\alpha = 48^\circ$  ב.  $AB = 118^\circ, BC = 78^\circ, AD = 164^\circ$  ג.  $55^\circ$   
(18  $\angle AOC = 40^\circ$   
(19  $\alpha = 35^\circ, \beta = 95^\circ$   
(20 שאלת הוכחה  
(21  $68.5^\circ$   
(22  $\angle G_1 = \angle G_2 = \angle G_3 = 45^\circ$   
(23  $110^\circ$   
(24 שאלת הוכחה  
(25 שאלת הוכחה  
(26 שאלת הוכחה  
(27 שאלת הוכחה  
(28 א.  $\alpha = 135^\circ$  ב.  $\alpha = 45^\circ$  ג.  $\alpha = 40^\circ$   
(29 שאלת הוכחה  
(30 שאלת הוכחה  
(31 48 ס"מ  
(32 א.  $30^\circ$  ב. 5 ס"מ  
(33 64 ס"מ  
(34 א.  $x = 20^\circ$  ב.  $x = 135^\circ$  ג.  $x = 120^\circ$   
(35  $92^\circ$   
(36 שאלת הוכחה  
(37 שאלת הוכחה  
(38 שאלת הוכחה  
(39 שאלת הוכחה  
(40 שאלת הוכחה  
(41 שאלת הוכחה  
(42 16 ס"מ  
(43 שאלת הוכחה  
(44 שאלת הוכחה

- (45) א.  $\alpha = 80^\circ$ ,  $\beta = 85^\circ$       ב.  $\alpha = 110^\circ$ ,  $\beta = 20^\circ$
- (46) ניתן לחסום את מרובע א' בלבד.      (47) שאלת הוכחה
- (48) שאלת הוכחה      (49) שאלת הוכחה
- (50)  $x = 2$       (51) 15 ס"מ, 15 ס"מ, 7.5 ס"מ, 22.5 ס"מ.
- (52) א.  $S = \frac{484}{\pi}$  סמ"ר      ב.  $R = 6.706$  ס"מ      ג.  $R = 2.32$  ס"מ      ד.  $R = 8$  ס"מ
- (53) א.  $P = 74.84$  ס"מ      ב.  $S = 385.46$  סמ"ר
- (54) א.  $P = 85.77$  ס"מ      ב.  $S = 559.814$  סמ"ר
- (55) א.  $P = 63.7$  ס"מ      ב.  $S = 263.89$  סמ"ר
- (56) א.  $DC = 7.5$  ס"מ      ב.  $R = 15$  ס"מ      ג.  $P = 98.12$  ס"מ      ד.  $S = 636.929$  סמ"ר
- (57) א.  $BC = 8$  ס"מ      ב.  $P = 50$  ס"מ      ג.  $R = 5.65$  ס"מ      ד.  $P = 51.75$  ס"מ
- (58) א.  $l = \frac{1}{3}\pi$  ס"מ,  $S = \frac{2}{3}\pi$  סמ"ר      ב.  $l = 4\pi$  ס"מ,  $S = 32\pi$  סמ"ר
- ג.  $l = 24\pi$  ס"מ,  $S = 192\pi$  סמ"ר      ד.  $l = 1.51\pi$  ס"מ,  $S = 12.08\pi$  סמ"ר
- (59) א.  $12.5\pi$  סמ"ר.      (60) שאלת הוכחה

## תוכן העניינים:

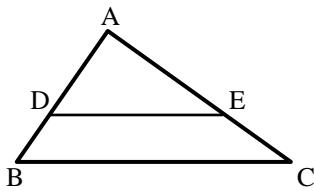
288	פרק 13
288	גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון
288	משפט תאלס :
289	שאלות יסודיות – משפט תלס :
291	שאלות יסודיות – הרחבות של משפט תלס :
294	משפט חוצה הזווית :
294	שאלות יסודיות – משפט חוצה זווית :
296	שאלות המשלבות את משפט תלס ומשפט חוצה זווית :
297	דמיון משולשים :
297	משפטי הדמיון :
298	שאלות העוסקות במשפט דמיון ז.ז. :
300	שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.ז.צ. :
300	שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.צ. :
301	יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים :
303	תשובות סופיות :

# פרק 13

## גיאומטריה אוקלידית - פרופורציה ודמיון

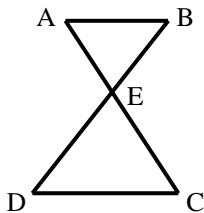
### משפט תאלס:

- שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.  
משפט הפוך: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים הישרים מקבילים.



- משפט תאלס + ההפוך:  $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

- משפט תאלס המורחב + ההפוך:  $DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

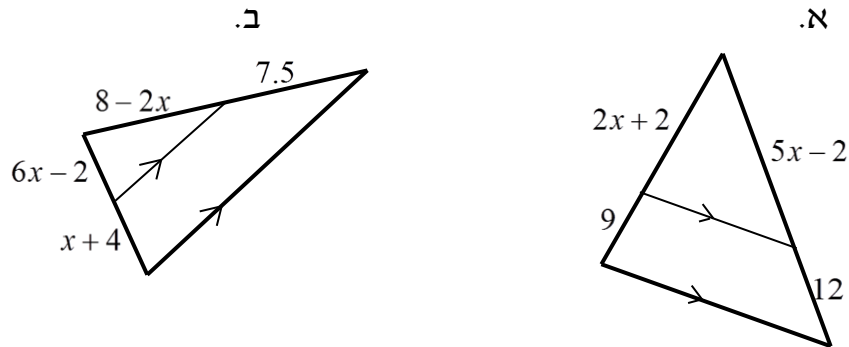


- משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך:  
 $AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD}$

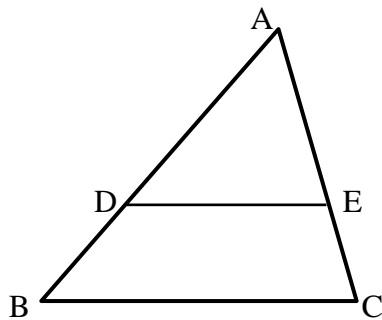


## שאלות יסודיות – משפט תלס:

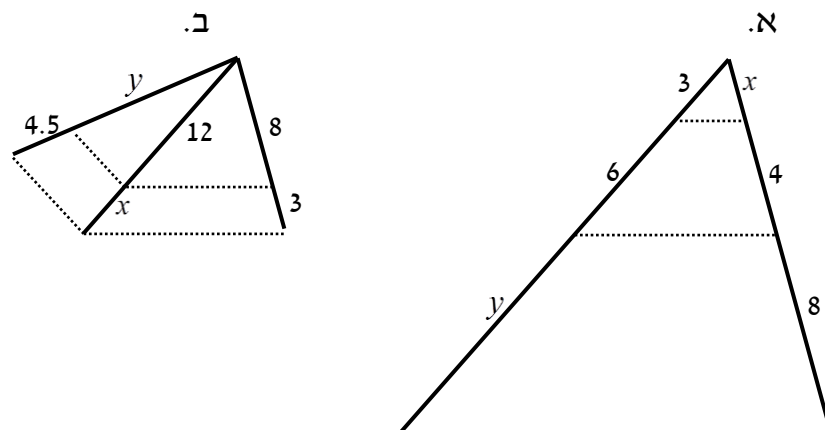
(1) מצא את ערכו של  $x$  בשרטוטים הבאים:



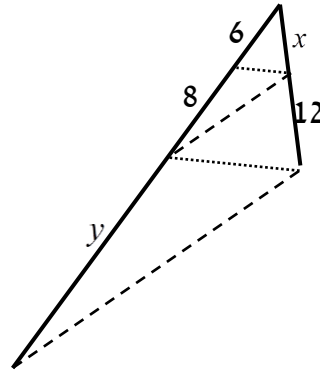
(2) בשרטוט שלפניך נתון  $DE \parallel BC$ .  
 $BD = 12$  ס"מ,  $AE = 20$  ס"מ,  $AC = 30$  ס"מ.  
 מצא את אורך הקטע  $AD$ .



(3) חשב את  $x$  ואת  $y$  בשרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:



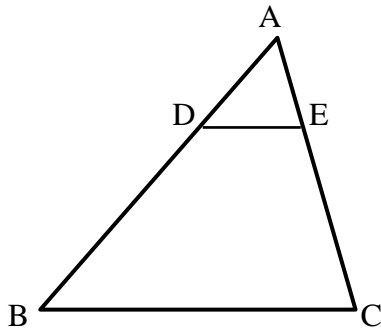
ג.



(4) בסרטוט שלפניך נתון:

$$AC = 36 \text{ ס"מ}, \frac{AD}{BD} = \frac{2}{7}, DE \parallel BC$$

מצא את אורכי הקטעים AE ו-CE.

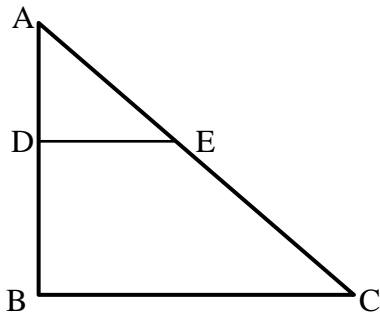


(5) במשולש שלפניך נתון  $DE \parallel BC$ .

כמו כן:  $\angle ADE = 90^\circ$

וכן:  $AE = BD = 10 \text{ ס"מ}$ ,  $DE = 8 \text{ ס"מ}$ .

מצא את אורכי הקטעים AD ו-CE.

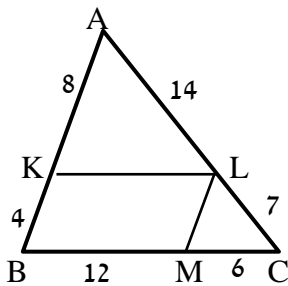


(6) מרובע KLMB חסום במשולש ABC.

הנתונים המספריים רשומים בסרטוט.

כל המידות הן בס"מ.

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

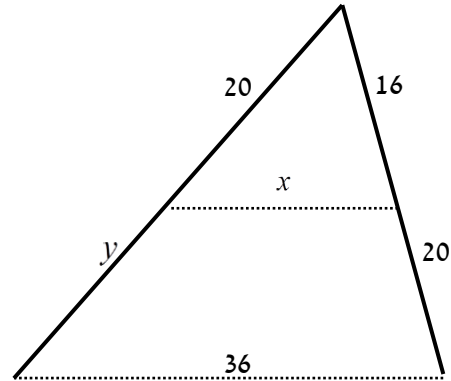
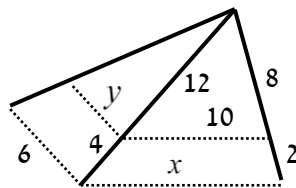


## שאלות יסודיות – הרחבות של משפט תלס:

7) חשב את  $x$  ואת  $y$  בסרטוטים שלפניך (הקטעים המקווקים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

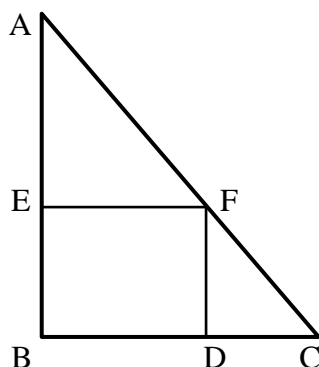
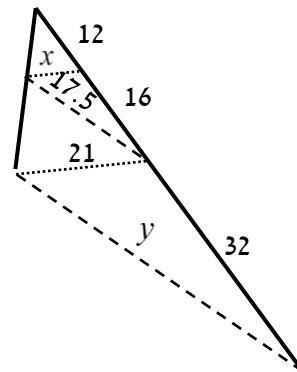
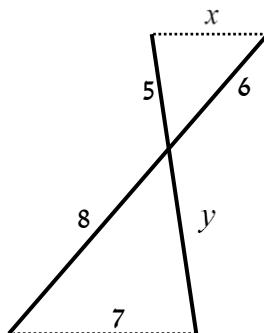
א.

ב.

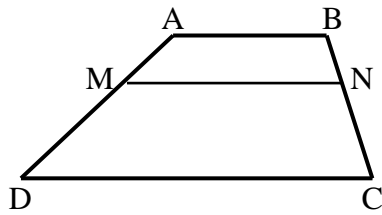


ג.

ד.

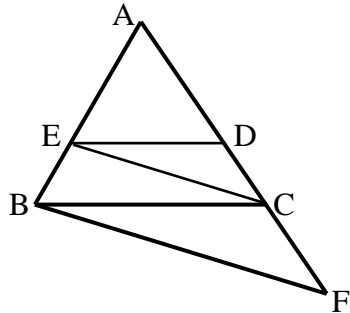


8) המרובע EFBF הוא מלבן החסום במשולש ישר זווית ABC. נתון כי:  $AB = 20$  ס"מ,  $BC = 15$  ס"מ,  $AF = 18$  ס"מ. מצא את אורכי צלעות המלבן.



- 9) המרובע ABCD הוא טרפז ( $AB \parallel CD$ ).  
מעבירים קטע MN אשר מקביל לבסיסים.

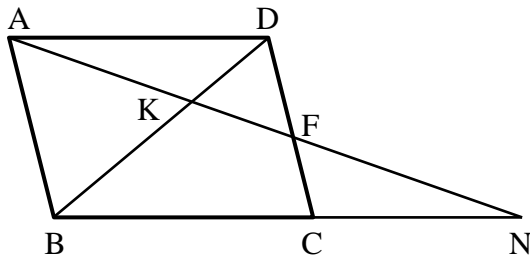
הוכח:  $\frac{AM}{DM} = \frac{BN}{CN}$



- 10) באיור שלפניך נתון:  $DE \parallel BC$ ,  $CE \parallel BF$ .  
הוכח את הטענות הבאות:

א.  $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CF}$

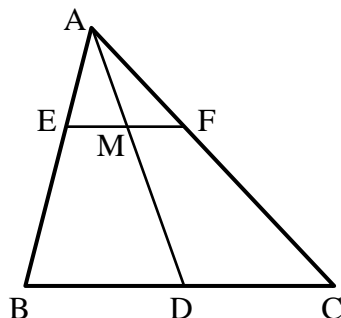
ב.  $AC^2 = AD \cdot AF$



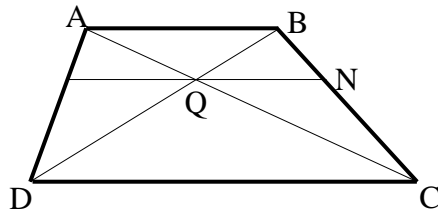
- 11) במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N.  
הוכח את הטענות הבאות:

א.  $\frac{NK}{AK} = \frac{AK}{KF}$

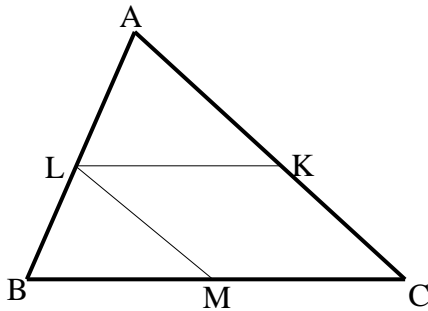
ב.  $\frac{BC}{CN} = \frac{DF}{CF}$



- 12) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC.  
הקטע EF מקביל ל-BC וחותך את התיכון בנקודה M. הוכח כי:  $EM = FM$ .

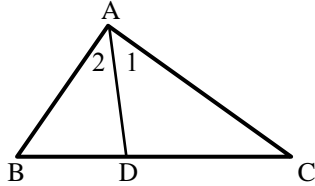


- 13) בטרפז ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה Q. בנקודה Q העבירו קטע המקביל לבסיסי הטרפז וחותך את שוקי הטרפז בנקודות M ו-N כמתואר בשרטוט. נתון:  $DC = 18$  ס"מ,  $DQ = 9$  ס"מ,  $BQ = 3$  ס"מ. חשב את גודל הקטע MQ.



- 14) בשרטוט נתון:  $\frac{AK}{CK} = \frac{CM}{BM} = \frac{AL}{BL}$ .  
א. הוכח: המרובע KLMC הוא מקבילית.  
ב. נתון:  $AL = 1.5BL$ ,  $BC = 10$  ס"מ. חשב את אורך הקטע LK.

## משפט חוצה הזווית:



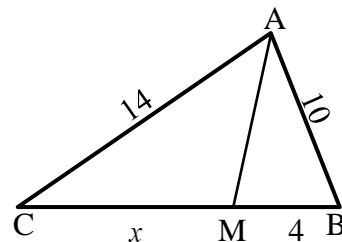
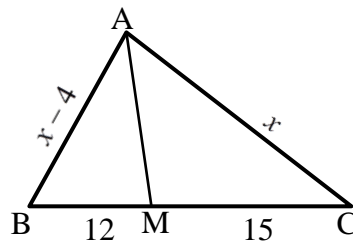
- חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהיפך.  
אם:  $\angle A_1 = \angle A_2$  אז:  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$  ולהיפך.

## שאלות יסודיות – משפט חוצה זווית:

15) מצא את גודלו של  $x$  בסרטוטים הבאים אם נתון כי AM חוצה זווית A בכל המשולשים, כל הגדלים הם בס"מ:

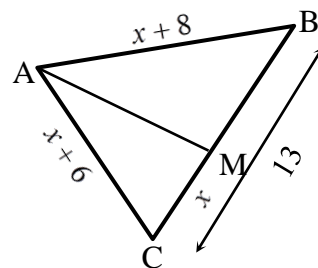
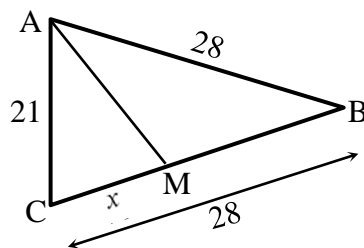
א.

ב.



ג.

ד.



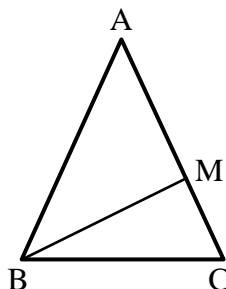
16) נתון משולש שווה שוקיים ABC,  $(AB = AC)$ .

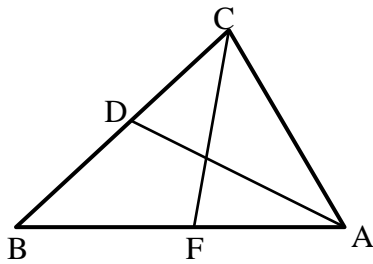
ידוע כי היקפו הוא 28 ס"מ.

הקטע BM הוא חוצה זווית B.

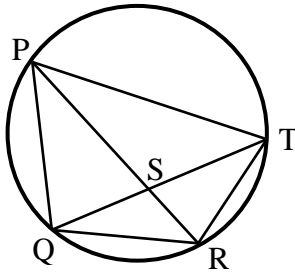
נתון כי הקטע AM גדול פי 3 מהקטע MC.

חשב את אורך הקטע MC.

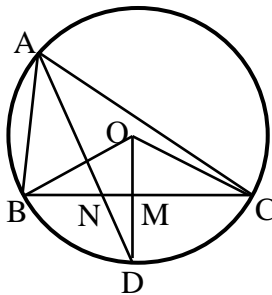




- 17) הקטעים AD ו-CF הם חוצי הזוויות A ו-C בהתאמה במשולש ABC.  
נתון:  $AB = 18$  ס"מ,  $AC = 12$  ס"מ,  
 $CD = 6$  ס"מ. חשב את אורך הקטע AF.

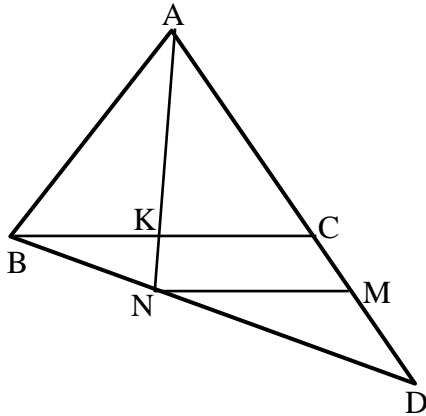


- 18) המרובע PQRT חסום במעגל.  
נתון כי:  $QR = RT$ . ידוע כי:  $PQ = 20$  ס"מ,  
 $PT = 28$  ס"מ,  $QT = 24$  ס"מ.  
חשב את אורך הקטע QS.



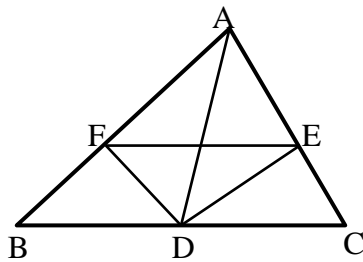
- 19) הנקודות A, B, C ו-D מונחות על היקפו של מעגל שמרכזו O. הרדיוס DO חוצה את הזווית BOC.  
נתון:  $AB = 8$  ס"מ,  $AC = 12$  ס"מ,  $BC = 10$  ס"מ.  
חשב את אורכו של הקטע MN.

## שאלות המשלבות את משפט תלס ומשפט חוצה זווית:

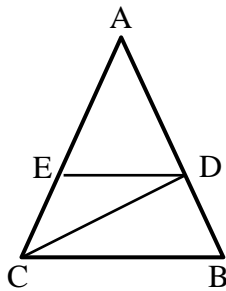


**20** נתון משולש ABC. ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D. מחברים את הנקודה D עם הקדקוד B. מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A במשולש ABC. המשך AK חותך את BD בנקודה N. מעבירים את הקטע MN. נתון:  $BC \parallel MN$ .

הוכח:  $\frac{AB}{AD} = \frac{CM}{DM}$



**21** נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC. נתון כי DE הוא חוצה זווית  $\angle ADC$  וכי DF הוא חוצה זווית  $\angle ADB$ . הוכח:  $EF \parallel BC$ .



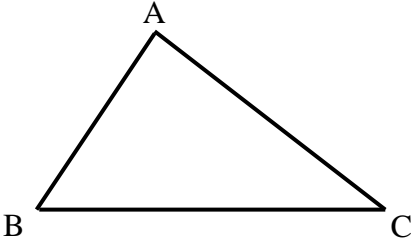
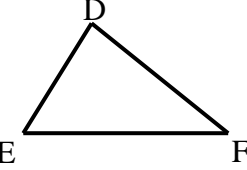
**22** נתון משולש ABC. מעבירים את הקטעים DE ו-CD. נתון כי:  $DE \parallel BC$  ו-  $AC = 2BC$ . הקטע AC גדול פי 3 מהקטע DE. הוכח כי:  $\angle BCD = \angle ACD$ .



## דמיון משולשים:

### הגדרה:

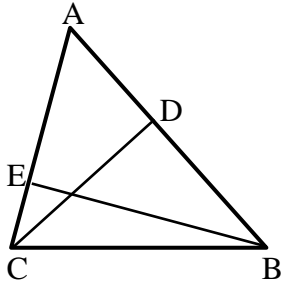
משולשים דומים הם משולשים ששווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות בהתאמה על אותו יחס.

משולש שני	משולש ראשון	יחס הדמיון ושוויונות
		$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ $\Downarrow$ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

### משפטי הדמיון:

- משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז.): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ.): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזוויות שבניהן שווה אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ.): אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
- משפט דמיון צלע-צלע-הזווית הגדולה (צ.צ.ז.): אם בין שני משולשים שתי לצעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מבניהם שווה אז המשולשים דומים.

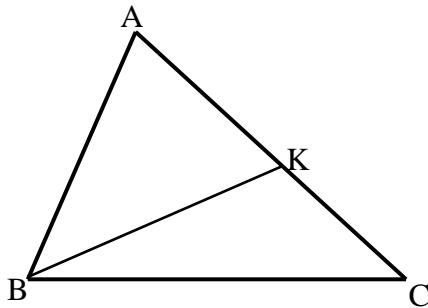
## שאלות העוסקות במשפט דמיון ז.ז:



23) CD ו-BE הם גבהים במשולש ABC.

א. הוכח כי:  $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ .

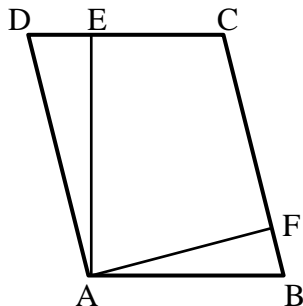
ב. נתון כי:  $AB = 18$  ס"מ,  $BE = 12$  ס"מ,  $CD = 10$  ס"מ. חשב את אורך הצלע AC.



24) במשולש ABC העבירו את הקטע BK

כך ש-  $\angle AKB = \angle ABC$ .

הוכח:  $\triangle AKB \sim \triangle ABC$ .

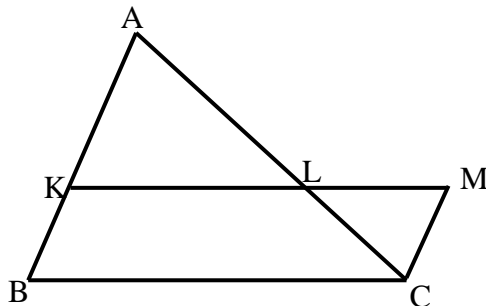


25) המרובע ABCD הוא מקבילית.

מעבירים גבהים AE ו-AF לצלעות DC ו-BC בהתאמה.

א. הוכח כי:  $\triangle ADE \sim \triangle AFB$ .

ב. הוכח כי:  $DC \cdot AE = BC \cdot AF$ .  
והסבר את המשמעות הגיאומטרית של התוצאה.

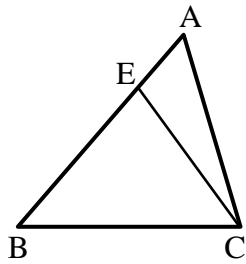


26) נתונה מקבילית BKMC.

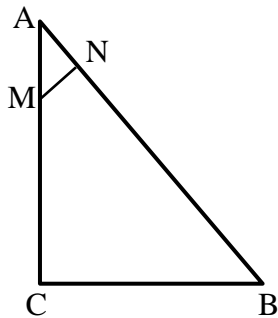
המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.

הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.

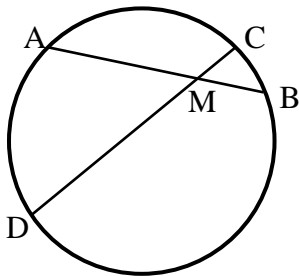
הוכח:  $LC \cdot BC = LM \cdot AC$ .



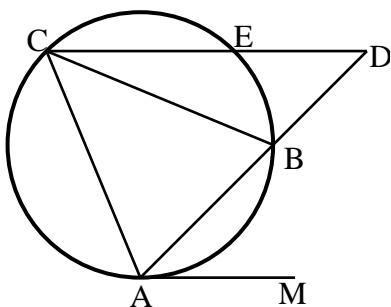
- (27) מעבירים את הקטע CE במשולש ABC. ידוע כי:  $\angle BAC = \angle ECB$  וכן:  $BE = 8$  ס"מ,  $BC = 10$  ס"מ. חשב את AB.



- (28) המשולש ABC הוא ישר זווית ( $\angle C = 90^\circ$ ). מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB. נתון כי:  $AB = 20$  ס"מ,  $AN = 4$  ס"מ,  $BC = 12$  ס"מ. מצא את אורך הקטע AM.

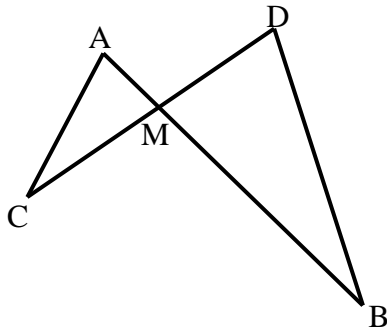


- (29) המיתרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.  
א. הוכח כי:  $\triangle ADM \sim \triangle CMB$ .  
ב. נתון כי:  $AM = 5$  ס"מ,  $DM = 8$  ס"מ,  $CM = 2$  ס"מ. חשב את אורכו של BM.

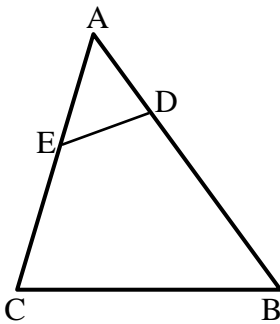


- (30) המשולש ABC חסום במעגל. מהנקודה A מעבירים משיק AM. ממשיכים את AB עד לנקודה D שמחוץ למעגל. מחברים את הנקודה D עם הקדקוד C. הישר CD חותך את המעגל בנקודה E כך ש-  $CE \parallel AM$ . הוכח כי AC הוא הממוצע הגיאומטרי בין AB לבין AD. כלומר:  $AC^2 = AB \cdot AD$ .

## שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.ז.צ:

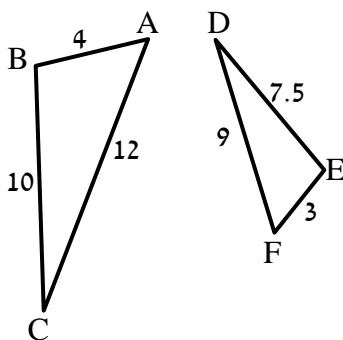


- 31) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.  
אורכי הקטעים הם:  $AM = 3$ ,  $CM = 6$ ,  $BM = 10$ ,  $DM = 5$ .  
א. הוכח כי:  $\triangle AMC \sim \triangle DMB$ .  
ב. האם  $AC \parallel BD$ ? נמק.  
ג. מצא את אורכו של AC אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.

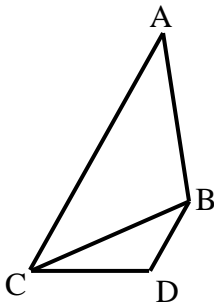


- 32) לפיגור משולש ABC. מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:  $AD = 4$ ,  $AE = 5$ ,  $BD = 11$ ,  $CE = 7$ .  
א. הוכח כי:  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ .  
ב. הוכח כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.

## שאלות העוסקות במשפט דמיון צ.צ.צ:



- 33) בסרטוט שלפניך רשומים שני משולשים. אורכי צלעותיהם נתונים בתרשים (בס"מ).  
א. הוכח כי המשולשים דומים ורשום את הדמיון עפ"י הקדקודים.  
ב. רשום את הזוויות השוות בשני המשולשים.



34 נתונים המשולשים ABC ו-BDC. ידוע כי:  $AC = 16$  ס"מ,  $AB = 10$  ס"מ,  $BC = 8$  ס"מ,  $DC = 5$  ס"מ,  $BD = 4$  ס"מ.

א. הוכח כי שני המשולשים דומים ורשום אותם לפי סדר התאמת קדקודיהם.

ב. הוכח כי:  $AC \parallel BD$ .

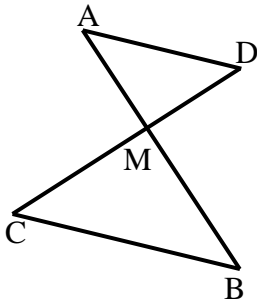
## יחסים בין גדלים שונים ושטחים במשולשים דומים:

35 הוכח את חלקי המשפט הבאים:

א. גבהים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

ב. תיכונים במשולשים דומים לצלעות המתאימות בכל משולש, מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

ג. היקפים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון.

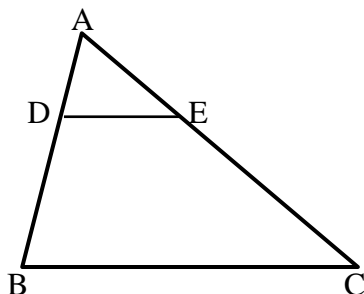


36 הקטעים AB ו-CD נפגשים בנקודה M. נתון כי:  $AD \parallel BC$  וכן נתונים הגדלים הבאים:

$AD = 4$  ס"מ,  $BC = 6$  ס"מ,  $S_{ADM} = 36$  סמ"ר.

א. הוכח כי:  $\triangle AMD \sim \triangle BMC$ .

ב. חשב את שטח המשולש MBC.

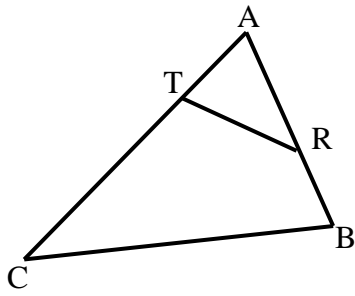


37 במשולש ABC הקטע DE מקביל לצלע BC.

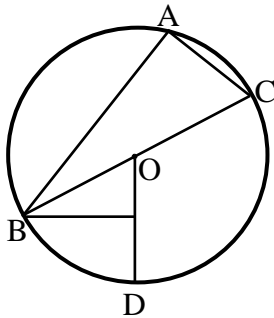
נתון:  $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$  וכי:  $S_{ADE} = 20$  סמ"ר.

א. חשב את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המרובע DECB.



- 38 בסרטוט שלפניך נתון משולש ABC ובו קטע RT כך שמתקיימים האורכים הבאים:  
 $BR = 4$  ס"מ,  $AT = 4$  ס"מ,  $AR = 6$  ס"מ,  
 $CT = 11$  ס"מ,  $S_{ABC} = 100$  סמ"ר.  
 מצא את שטח המרובע RTCB.



- 39 המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.  
 הצלע BC היא קוטר המעגל.  
 הקטע BM מאונך לרדיוס DO.  
 נתון:  $AC = 2OM$ .  
 א. הוכח:  $\widehat{AB} = 2\widehat{BD}$ .

ב. חשב את היחס:  $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BAC}}$ .

## תשובות סופיות:

- (1 א.  $x = 2$  ב.  $x = 1$  (2 24 ס"מ.
- (3 א.  $x = 2, y = 12$  ב.  $x = 4.5, y = 12$  ג.  $x = 9, y = 18\frac{2}{3}$
- (4 8 ס"מ  $AE$ , 28 ס"מ  $CE$ .
- (5 6 ס"מ  $AD$ ,  $21\frac{1}{3}$  ס"מ  $BC$ ,  $16\frac{2}{3}$  ס"מ  $CE$ .
- (6 הוכחה.
- (7 א.  $x = 16, y = 25$  ב.  $x = 12.5, y = 4.5$
- ג.  $x = 9, y = 37.5$  ד.  $x = 5.25, y = 6\frac{2}{3}$
- (8 10.8 ס"מ ו-5.6 ס"מ. (9 הוכחה.
- (10 הוכחה. (11 הוכחה.
- (12 הוכחה. (13 4.5 ס"מ.
- (14 א. הוכחה ב. 6 ס"מ.
- (15 א.  $x = 5.6$  ב.  $x = 20$  ג.  $x = 6$  ד.  $x = 12$
- (16 3 ס"מ. (17 8 ס"מ.
- (18 10 ס"מ. (19 1 ס"מ.
- (20 הוכחה. (21 הוכחה.
- (22 הוכחה. (23 15 ס"מ.
- (24 הוכחה. (25 הוכחה.
- (26 הוכחה. (27 12.5 ס"מ.
- (28 5 ס"מ.
- (29 א. הוכחה. ב. 3.2 ס"מ.
- (30 הוכחה.
- (31 א. הוכחה. ג. 8.4 ס"מ. ב. לא.
- (32 הוכחה.

ב.  $\angle A = \angle F$ ,  $\angle B = \angle E$ ,  $\angle C = \angle D$ .

35) הוכחה.

ב. 81 סמ"ר.

ב. 105 סמ"ר.

ב.  $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{1}{4}$ .

33) א. הוכחה.

34) הוכחה.

36) א. הוכחה.

37) א. 125 ס"מ.

38) 84 סמ"ר.

39) א. הוכחה.



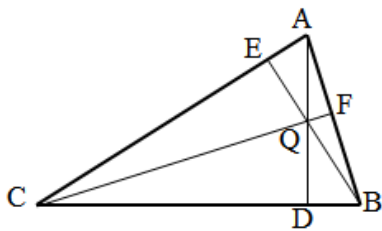
## תוכן העניינים:

פרק 14	306
גיאומטריה אוקלידית - שאלות חזרה	306
שאלות מסכמות ללא פרופורציה :	306
תשובות סופיות :	310
שאלות מסכמות הכוללות פרופורציה ודמיון :	311
תשובות סופיות :	321

## פרק 14

# גיאומטריה אוקלידית - שאלות חזרה

### שאלות מסכמות ללא פרופורציה:



(1) במשולש ABC מעבירים את שלושת

הגבהים: CF, BE, AD.

הגבהים נפגשים בנקודה Q.

א. הוכח:  $\angle ACF = \angle ABE$ .

ב. הוכח כי מרובע QDCE הוא

מרובע בר-חסימה.

ג. הוכח:  $\angle ADF = \angle ADE$ .

(2) במשולש ABC, E אמצע AB, F על BC ו-EF מקביל ל-AC.

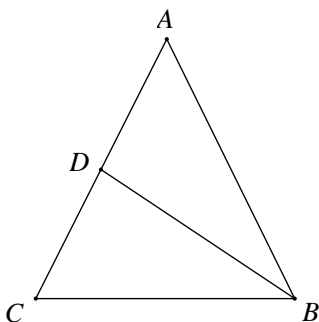
הנקודה G על AC ו-EG מקביל ל-BC.

בלי להשתמש במשפטים על קו אמצעים במשולש הוכח:

א. המשולש AEG והמשולש EBF חופפים.

ב. על פי הסעיף הקודם, הוכח כי קטע במשולש החוצה צלע של המשולש

ומקביל לצלע השלישית במשולש הוא קטע אמצעים.



(3) במשולש שווה שוקיים ABC,  $(AB=AC)$ ,

BD הוא תיכון לשוק AC,  $\angle CBD = 30^\circ$ .

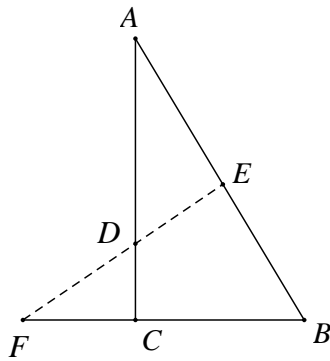
א. הוכח כי משולש ABC הוא משולש שווה

צלעות. (הדרכה: הורד אנכים AF ו-DE)

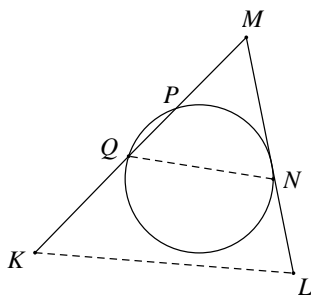
בסיס BC והוכח כי:  $DE = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2} BD$ .

ב. אם נתון כי אורך התיכון BD הוא a ס"מ,

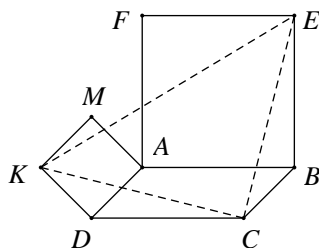
הבע את אורך צלע המשולש ואת שטחו.



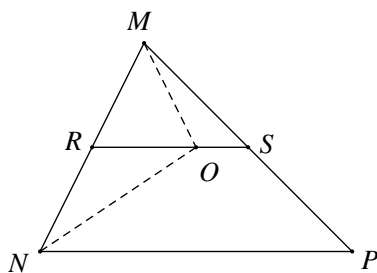
- (4) במשולש  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) הנקודה  $E$  מונחת על היתר  $AB$ . מהנקודה  $E$  מעבירים אנך ליתר, החותך את המשך הניצב  $BC$  בנקודה  $F$  ואת הניצב  $AC$  בנקודה  $D$ .  
נתון כי:  $AD = 10$  ס"מ,  $AE = 12$  ס"מ,  $BE = 8$  ס"מ.  
הוכח כי:  $\triangle ADE \cong \triangle DFC$ .



- (5) מנקודה  $M$  הנמצאת מחוץ למעגל מעבירים חותך  $MN$  ומשיק  $MPQ$ . מנקודה  $K$  הנמצאת בהמשך  $MPQ$  מעבירים ישר מקביל למיתר  $QN$ , החותך את המשך המשיק  $MN$  בנקודה  $L$ .  
א. הוכח כי:  $\angle QNL = \angle NPQ$ .  
ב. הוכח כי המרובע  $KPNL$  הוא בר-חסימה.

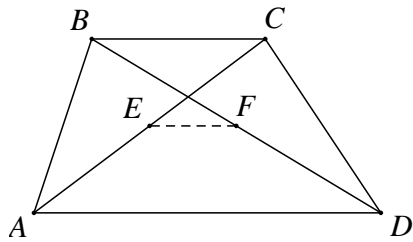


- (6) נתונה מקבילית  $ABCD$ .  
על הצלע  $AB$  בונים ריבוע  $ABEF$  ועל הצלע  $AD$  ריבוע  $ADKM$ . הוכח כי המשולש  $KCE$  הוא משולש שווה שוקיים וישר-זווית.



- (7) ענה על השאלות הבאות:  
א. הוכח: אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אזי המשולש הוא משולש ישר זווית.  
ב. בציור הנתון:  $RS$  הוא קטע אמצעים במשולש  $MNP$ .  $NO$  הוא חוצה זווית. הוכח כי:  $\angle MON = 90^\circ$ .

- (8) הוכח כי במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר. נסח והוכח את המשפט ההפוך למשפט הנ"ל.



9) בטרפז  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ).

נתון כי: נקודה  $E$  נמצאת באמצע אלכסון  $AC$  ונקודה  $F$  נמצאת באמצע אלכסון  $BD$ .

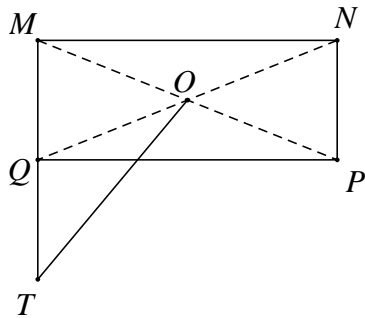
א. הסבר מדוע קטע האמצעים של

הטרפז  $ABCD$  עובר דרך

הנקודות  $E$  ו- $F$ .

ב. נתון כי:  $AD = 4 \cdot EF$ .

הוכח כי:  $AD = 2 \cdot BC$ .



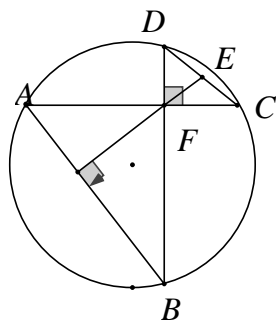
10) נתון מלבן  $MNPQ$  שבו  $QN = 2NP$ .

אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה  $O$ .

האריכו את הקטע  $MQ$  כאורכו ( $QT = MQ$ ).

א. הוכח כי:  $MO \perp OT$ .

ב. הוכח כי:  $PQ = OT$ .



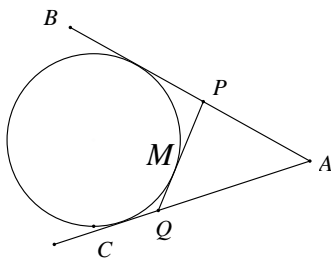
11) במעגל שבציר נתון כי המיתר  $AC$  מאונך למיתר

$BD$ . שני המיתרים נחתכים בנקודה  $F$ .

דרך הנקודה  $F$  מורידים אנך למיתר  $AB$ .

המשכו של האנך חותך את המיתר  $DC$  בנקודה  $E$ .

הוכח כי:  $DE = CE$ .



12) ענה על שתי השאלות הבאות:

א. הוכח את המשפט: שני משיקים למעגל

היוצאים מנקודה אחת חיצונית, שווים באורכם.

ב.  $AB$  ו- $AC$  הם שני משיקים למעגל.

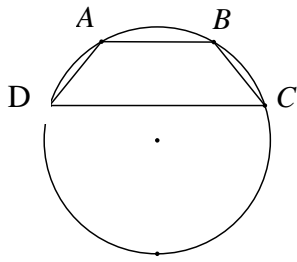
נתון:  $AC = a$ . נקודה  $M$  נמצאת על

הקשת  $BC$ .  $QP$  משיק למעגל בנקודה  $M$ .

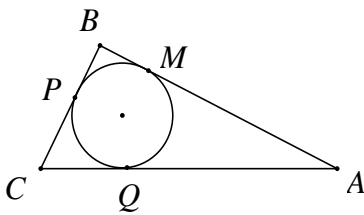
הוכח כי היקף המשולש  $APQ$  לא תלוי

במקומה של הנקודה  $M$  על הקשת  $BC$

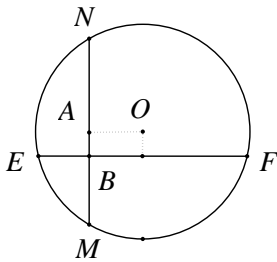
והוא גודל קבוע השווה ל- $2a$ .



- 13) טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) חסום במעגל כך שמרכז המעגל O נמצא מחוץ לטרפז.  
נתון כי:  $AB = 9$  ס"מ,  $CD = 21$  ס"מ, גובה הטרפז הוא 8 ס"מ. רדיוס המעגל הוא R.  
א. הבע באמצעות R את המרחק ממרכז המעגל O:  
1. לבסיס הקטן של הטרפז AB.  
2. לבסיס הגדול של הטרפז CD.  
ב. חשב את גודלו של רדיוס המעגל R.



- 14) במשולש ישר זווית ABC ( $\angle C = 90^\circ$ ), חוסמים מעגל כך שנקודות ההשקה הן P, M ו-Q. כמו כן, נתון כי:  $AQ = 2a$  ו-  $QC = a$ .  
הבע את היקף המשולש ABC באמצעות a.



- 15) ענה על השאלות הבאות:  
א. הוכח כי המחוג המאונך למיתר המעגל חוצה אותו.  
ב. בציור שלפניך המיתרים EF ו-MN מאונכים זה לזה. נתון כי:  $BE = 3$  ס"מ,  $BF = 8$  ס"מ,  $BM = 4$  ס"מ.  
1. חשב את אורך הקטע BN.  
2. מצא את המרחק המיתר EF ממרכז המעגל O.

## תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה

(2) שאלת הוכחה

(3) ב. אורך צלע המשולש:  $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a$ , שטח המשולש:  $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$

(4) שאלת הוכחה

(5) שאלת הוכחה

(6) שאלת הוכחה

(7) שאלת הוכחה

(8) שאלת הוכחה

(9) שאלת הוכחה

(10) שאלת הוכחה

(11) שאלת הוכחה

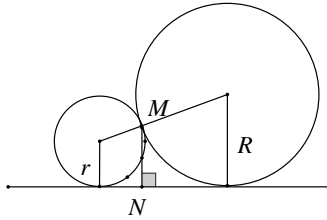
(12) שאלת הוכחה

(13) א. i.  $\sqrt{R^2 - 4.5^2}$  .א. ii.  $\sqrt{R^2 - 10.5^2}$  ב. 10.625 ס"מ  $R =$

(14)  $a(3 + \sqrt{17})$

(15) ב. i. 6 ס"מ ii. 1 ס"מ.

## שאלות מסכמות הכוללות פרופורציה ודמיון:

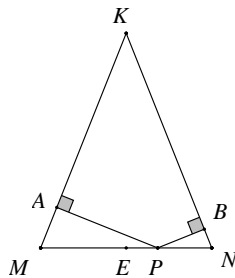


- (1) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה M. רדיוס המעגל הגדול הוא R ורדיוס המעגל הקטן הוא r. מעבירים משיק משותף לשני המעגלים. MN הוא המרחק שבין נקודת ההשקה של שני המעגלים לבין המשיק המשותף שלהם. הוכח כי:  $MN = \frac{2R \cdot r}{R + r}$ .

- (2) ענה על השאלות הבאות:

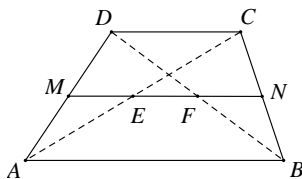
א. הוכח כי במשולש ישר זווית בעל זווית חדה בת  $30^\circ$ , הניצב שמול הזווית שווה למחצית היתר.

ב. בטרפז שווה שוקיים ABCD האלכסונים ניצבים לשוקיים. הוכח כי אם הזווית החדה בטרפז שווה ל- $60^\circ$ , אזי נקודת מפגש האלכסונים מחלקת כל אלכסון ביחס של 1:2.

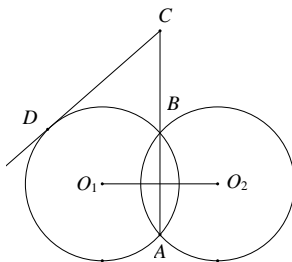


- (3)  $\triangle KMN$  הוא משולש שווה שוקיים ( $KM = KN$ ). מנקודה כלשהי P הנמצאת על הבסיס KN מורידים אנך לשוק KM ואנך לשוק KN החותכים אותן בנקודות A ו-B בהתאמה.

א. הוכח כי KAPB הוא מרובע בר חסימה.  
ב. הסבר מדוע הנקודה E הנמצאת באמצע הבסיס MN, נמצאת על היקף המעגל החוסם את המרובע KAPN.



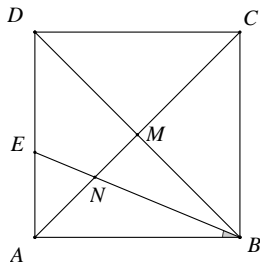
- (4) נסח והוכח את משפט קטע אמצעים בטרפז. MN הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ). נסמן:  $AB = a$ ,  $CD = b$ . הוכח כי:  $EF = \frac{1}{2}(a - b)$ .



- (5) שני מעגלים שווים,  $O_1$  ו- $O_2$ , שמחוגיהם שווים ל-10 ס"מ, נחתכים בנקודות A ו-B. מהנקודה C שעל המשיך המיתר המשותף AB של שני המעגלים יוצא המשיך CD לאחד מהמעגלים. נתון כי:  $9\sqrt{5}$  ס"מ  $CD =$  ו-16 ס"מ  $O_1O_2 =$ . חשב את אורך הקטע CB. (היעזר בעובדה ש-AB חוצה את הקטע  $O_1O_2$  ומאונך לו.)

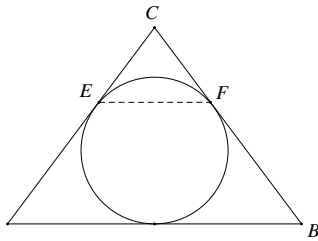






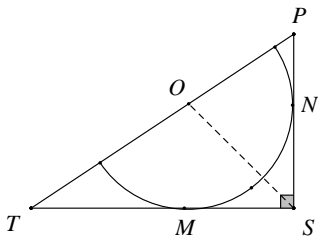
10) בריבוע ABCD נתון כי: אלכסונו נפגשים בנקודה M.  
BE חוצה את הזווית  $\angle DBA$  וחותך את האלכסון AC  
בנקודה N (ראה ציור).

- א. מצא את היחס  $\frac{DE}{AE}$  ואת היחס  $\frac{MN}{AN}$ .  
ב. הוכח כי המשולש ENA הוא משולש שווה שוקיים  
והוכח כי  $DE = 2 \cdot MN$ .



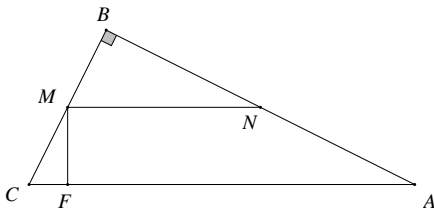
11) במשולש שווה שוקיים ABC נתון כי:  
 $AB = 24$  ס"מ,  $AC = BC = 20$  ס"מ.  
במשולש זה חסום מעגל, המשיק לשתי השוקיים  
בנקודות E ו-F.

- א. הוכח כי EF מקביל לבסיס.  
ב. חשב את אורך הקטע EF.

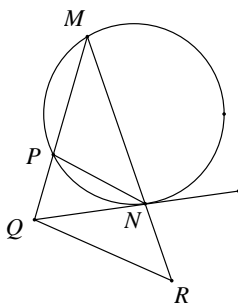


12) במשולש ישר זווית  $\triangle PST$  ( $\angle PST = 90^\circ$ ) חסום חצי  
מעגל שמרכזו O נמצא על יתר PT.

- א. הוכח כי OS חוצה את הזווית  $\angle PST$ .  
ב. נתון כי:  $PS = 18$  ס"מ ו-  $TS = 24$  ס"מ.  
חשב את אורכי הקטעים OP ו-OT.

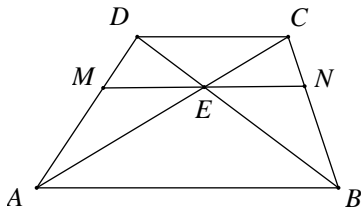


13) במשולש ABC, בו  $\angle B = 90^\circ$ . נתון כי:  
 $AB = 16$  ס"מ,  $BC = 12$  ס"מ,  $FC = 6$  ס"מ.  
הקטע FM מאונך ליתר AC, והקטע MN  
מקביל ליתר AC.  
חשב את אורך הקטע MN.

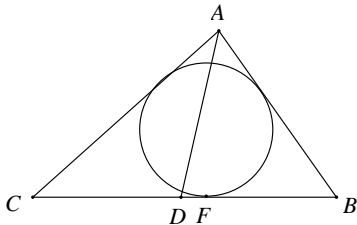


14) משולש MPN חסום במעגל. ישר NQ משיק למעגל זה  
בנקודה N. נתון כי:  $NP \parallel RQ$  (ראה ציור).

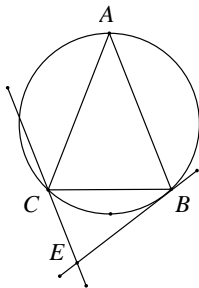
- א. הוכח כי  $\triangle QRN \sim \triangle MRQ$ .  
ב. נתון כי:  $MN = 5$  ס"מ ו-  $RN = 4$  ס"מ.  
חשב את RQ.



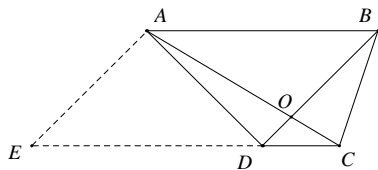
- 15) בטרפז  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$ . נתון כי:  $9 \text{ ס"מ} = DC$ ,  $18 \text{ ס"מ} = AB$ . דרך נקודת מפגש האלכסונים  $E$ , מעבירים ישר  $MN$  המקביל לבסיסי הטרפז. מצא את אורכו של  $MN$ .



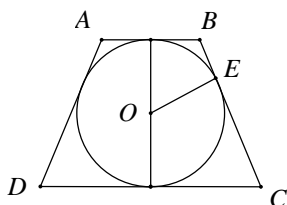
- 16) ענה על השאלות הבאות:
- א. הוכח: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית חלוקה פנימית לפי היחס של שתי הצלעות הכולאות את הזווית.
- ב. המעגל החסום במשולש  $ABC$  משיק בנקודה  $F$  לצלע  $CB$ . נתון כי:  $4 \text{ ס"מ} = BF$ ,  $7 \text{ ס"מ} = CF$ .  $AD$  חוצה הזווית  $\angle CAB$  מחלק את הקטע  $CB$  לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו  $2:3$ . חשב את אורכי הצלעות  $AC$  ו- $AB$ .



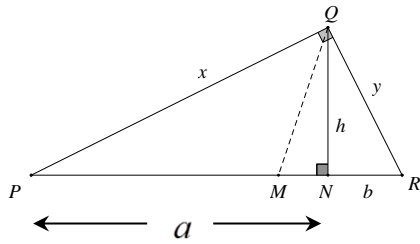
- 17) משולש שווה שוקיים  $ABC$ ,  $(AB = AC)$  חסום במעגל. דרך קדקוד  $B$  עובר משיק למעגל. דרך קדקוד  $C$  עובר ישר המקביל ל- $AB$  וחותך את משיק בנקודה  $E$  (ראה ציור). א. הוכח:  $\triangle ABC \sim \triangle CBE$ . ב. נתון כי:  $27 \text{ ס"מ} = AC$  ו- $12 \text{ ס"מ} = CE$ . חשב את אורך הקטע  $BC$ .



- 18) בטרפז  $ABCD$ ,  $(AB \parallel CD)$ . נתון כי:  $AB = 3CD$ . אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה  $O$ . דרך נקודה  $A$  מעבירים מקביל ל- $BD$ , החותך את המשך הצלע  $CD$  בנקודה  $E$  (ראה ציור). נסמן את שטח המשולש  $DOC$  באמצעות  $S$ . הבע את שטח הטרפז  $ABCE$  באמצעות  $S$ .



- 19)  $ABCD$  הוא טרפז שווה שוקיים  $(AB \parallel CD, AD = BC)$ .  $O$  הוא מרכז המעגל החסום בטרפז ו- $E$  היא נקודת ההשקה של השוק  $BC$  עם המעגל  $O$  (ראה ציור). א. הוכח כי  $OE^2 = BE \cdot EC$ . ב. הוכח כי הגובה בטרפז שווה שוקיים החוסם מעגל הוא הממוצע ההנדסי של שני הבסיסים של הטרפז.



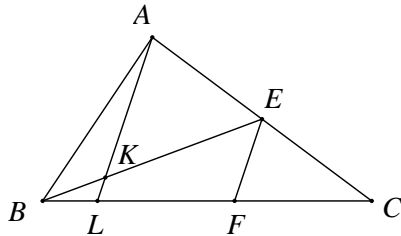
**20** במשולש ישר-זווית  $\Delta PQR$ , ( $\angle PQR = 90^\circ$ ). נתון:  $h$  הוא הגובה ליתר,  $x$  ו- $y$  הם הניצבים,  $a$  ו- $b$  הם היטלי הניצבים  $x$  ו- $y$  בהתאמה (ראה ציור).

א. הוכח כי הגובה ליתר הוא ממוצע גאומטרי של היטלי הניצבים  
על היתר:  $h = \sqrt{ab}$ .

ב. הוכח כי כל ניצב הוא ממוצע גאומטרי של היתר והיטל הניצב על

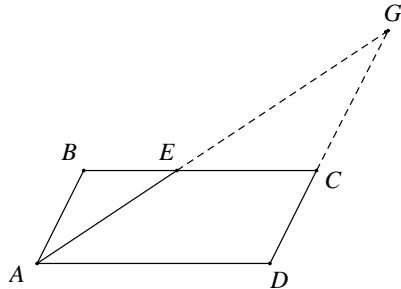
היתר:  $x = \sqrt{a(a+b)}$ ,  $y = \sqrt{b(a+b)}$ .

ג. מקדקוד Q מעבירים חוצה זווית החותך את היתר PR בנקודה M.  
הוכח כי:  $PM : MR = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ .



**21** במשולש ABC התיכון BE והקטע AL נחתכים בנקודה K. הקטע EF מקביל ל-AL (ראה ציור).  
נתון כי:  $LC = 5 \cdot BL$ .

א. הוכח כי:  $LF = 2.5 \cdot BL$ .  
ב. הוכח כי:  $\frac{BK}{BE} = \frac{2}{7}$ .

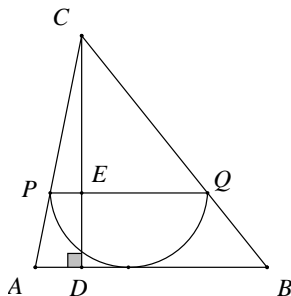


**22** ענה על השאלות הבאות:

א. הוכח את המשפט: היחס בין השטחים של שני משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.

ב. במקבילית ABCD נקודה E נמצאת על הצלע BC, כך ש-  $BE : CE = 2 : 3$ . המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC בנקודה G. נתון:  $18 \text{ סמ}^2 = S_{\Delta CEG}$ .

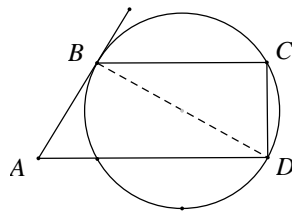
i. חשב את שטח המשולש  $\Delta ABE$ .  
ii. חשב את שטח המשולש  $\Delta ABC$ .



**23** ענה על השאלות הבאות:

א. הוכח כי: במשולשים דומים היחס בין הגבהים המתאימים שווה ליחס הדמיון של המשולשים.

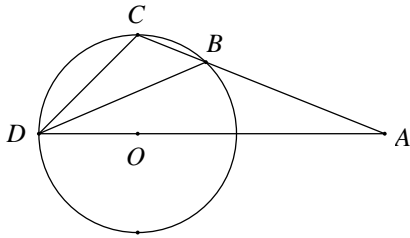
ב. במשולש ABC חסום חצי מעגל שרדיוסו 6 ס"מ. קוטר המעגל PQ מקביל לצלע AB. CD הוא גובה במשולש  $\Delta ABC$  וחותר את הקוטר PQ בנקודה E (ראה ציור). נתון כי:  $20 \text{ סמ} = AB$ .  
חשב את אורך הקטע CE.



**24** ABCD הוא טרפז ( $AD \parallel BC$ ). הצלעות AD ו-BC הן מיתרים במעגל. הצלע AB משיקה למעגל בנקודה B (ראה ציור).

א. הוכח כי:  $\triangle ABD \sim \triangle DCB$ .

ב. נתון כי:  $BC = 5$  ס"מ,  $AD = 12.8$  ס"מ.  
חשב את אורך האלכסון  $BD$ .



**(25) מנקודה A הנמצאת מחוץ למעגל שרדיוסו R,**

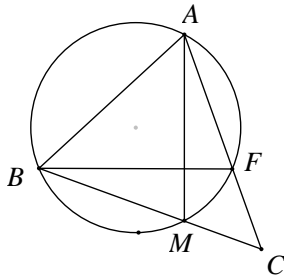
מעבירים חותך ABC וחותך AOD,

שעובר דרך מרכז המעגל  $O$ ,

כך נ-  $\angle CDB = \angle BDA = \angle BAD = \alpha$ .

נתון גם:  $AB = m$ ,  $BC = n$ .

הוכח כי:  $DC^2 = n^2 + m \cdot n$ .



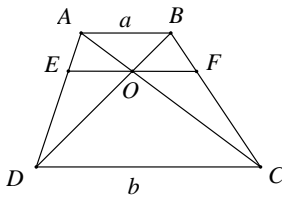
**26) ענה על השאלות הבאות:**

א. הוכח כי חותכים למעגל היוצאים מנקודה אחת מחוץ למעגל יוצרים קטעים פרופורציוניים כך שמכפלת כל החותך בחלקו מחוץ למעגל היא גודל קבוע.

ב. נתון משולש ABC. מעגל העובר דרך הקדקודים A ו-B, חותך הצלעות AC ו-BC בנקודות F ו-M בהתאמה.

i. הוכח כי  $\Delta ACM \sim \Delta BCF$ .

ii. נתון כי :  $BC = 48$  ס"מ ,  $AC = 40$  ס"מ ,  $AF = 16$  ס"מ .  
מצא את אורך המיתר  $BM$  .



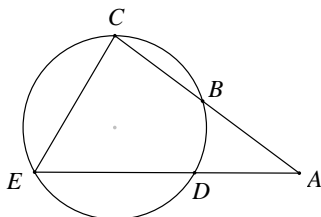
**(27)** בטרפז ABCD אורך הבסיס AB הוא  $a$  ואורך הבסיס

CD הוא  $b$ . אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O.

דרך הנקודה O מעבירים מקביל לבסיסים החותך את

AD בנקודה E ואת BC בנקודה F.

הוכח כי מתקיים:  $EO = FO = \frac{ab}{a+b}$ .



**(28)** מנקודה A מעבירים שני חותכים למעגל, חותך ABC

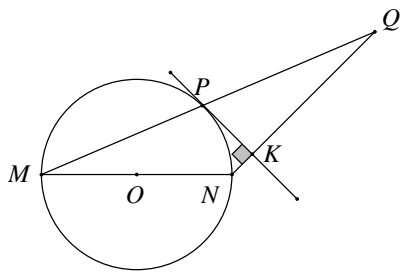
והותך ADE, כך שהנקודה B נמצאת באמצע

הקשת CD, ו- $\angle CED = 2\angle CAD$  (ראה ציור).

א. הוכח:  $\triangle ECB \sim \triangle ACE$ .

ב. נתון כי:  $BC = 4$  ס"מ,  $AC = 9$  ס"מ.

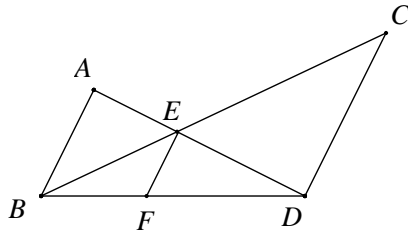
חשב את אורך הקטע CE.



29 MN הוא קוטר במעגל שמרכזו ב-O. PK משיק למעגל בנקודה P ומאונך ל-NQ. הנקודה Q נמצאת על המשך המיתר MP (ראה ציור).

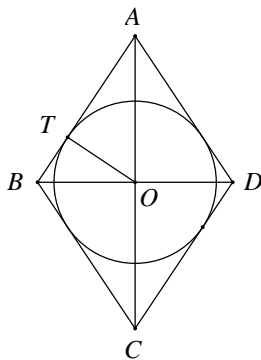
א. הוכח כי:  $MP \cdot KN = PK \cdot PN$ .

ב. הוכח כי:  $MP = PQ$ .



30 בציר נתון כי:  $AB \parallel EF \parallel CD$ .

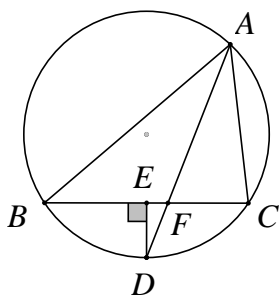
הוכח כי:  $\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}$ .



31 ענה על השאלות הבאות:

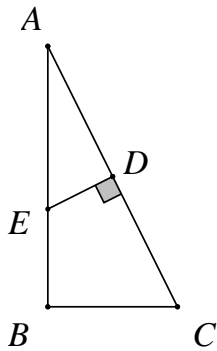
א. הוכח כי: הגובה ליתר במשולש ישר-זווית מחלק את המשולש לשני משולשים, שכל אחד מהם דומה למשולש כולו.

ב. מעוין ABCD חוסם מעגל שמרכזו ב-O. נתון כי אורך הרדיוס המעגל OT הוא 24 ס"מ ואורך צלע המעוין הוא 50 ס"מ. מצא את אורך האלכסון BD,  $(BD < AC)$ .

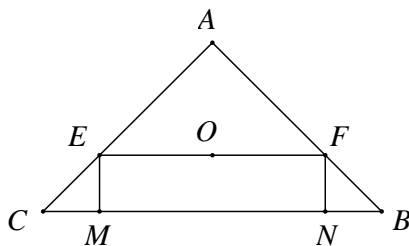


32 משולש ABC חסום במעגל. חוצה זווית  $\angle BAC$  חותך את המעגל בנקודה D ואת הצלע BC בנקודה F (ראה ציור). מנקודה D הורד אנך על הצלע CB החותך אותה בנקודה E. נתון כי:  $AB : AC = 5 : 3$ .

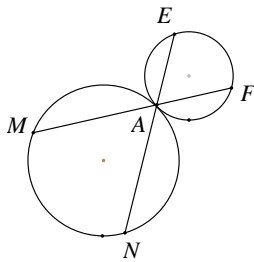
הוכח כי:  $BC = 8 \cdot EF$ .



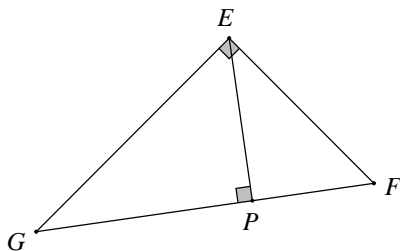
- 33** הנקודה D היא אמצע היתר AC במשולש ישר זווית ABC, ( $\angle B = 90^\circ$ ). בנקודה D מעלים אנך לצלע AC החותך את הניצב AB בנקודה E (ראה ציור).  
נתון כי:  $8 \text{ ס"מ} = AC$ ,  $AB = m$ .  
הבע את CE ו- BE באמצעות m.



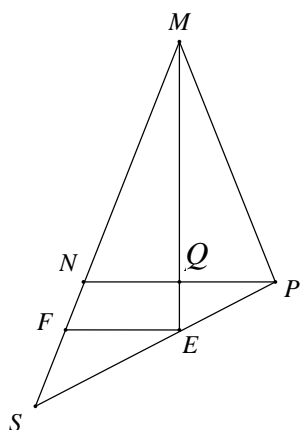
- 34** במשולש ABC נתון כי:  $15 \text{ ס"מ} = AB = AC$ ,  $18 \text{ ס"מ} = CB$ . דרך מרכז המעגל O החסום במשולש עובר הקטע EF המקביל לבסיס BC.  
EM ו-FN הם אנכים לבסיס BC.  
חשב את שטח המלבן EFMN.



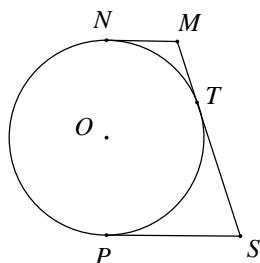
- 35** ענה על השאלות הבאות:
- הוכח כי הזווית הכלואה בין משיק ומיתר בעלי נקודה משותפת, שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה.
  - שני מעגלים משיקים מבחוץ בנקודה A. דרך נקודה זו עוברים שני ישרים, החותכים את המעגלים בנקודות E, F, M, ו-N.  
הוכח כי:  $\triangle AMN \sim \triangle AFE$ .



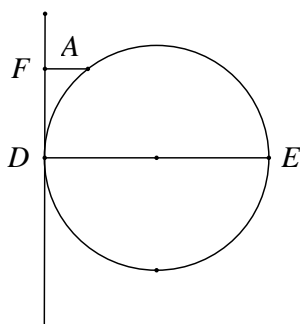
- 36** במשולש ישר-זווית EFG, ( $\angle GEF = 90^\circ$ ), EP הוא הגובה ליתר GF.  
נתון כי:  $24 \text{ ס"מ} = EF$ ,  $32 \text{ ס"מ} = GE$ .  
חשב את אורכי הקטעים: EP, GP, PF, GF.



(37) MQ הוא התיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים  
 $\triangle MNP$  ( $MN = MP$ ). S היא נקודה על המשך הצלע MN.  
 המשך התיכון MQ חותך את הקטע PS בנקודה E.  
 הקטע EF מקביל ל-NP (ראה ציור).  
 א. הוכח כי:  $MP:MS = NF:FS$ .  
 ב. נתון כי:  $20 \text{ ס"מ} = MP$ ,  $4 \text{ ס"מ} = NF$ .  
 חשב את אורך הקטע FS.



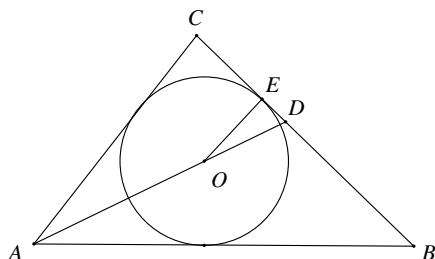
**(38)** NP הוא קוטר במעגל O. MT, MN ו- SP הם משיקים למעגל O בנקודות T, N ו- P בהתאמה.  
 א. הוכח כי:  $\angle MOS = 90^\circ$ .  
 ב. הוכח כי רדיוס המעגל שווה ל-  $\sqrt{MN \cdot SP}$ .



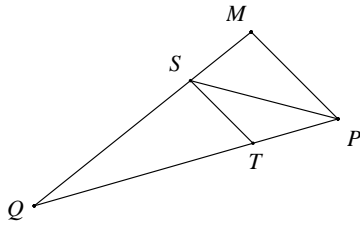
**(39)** DE הוא קוטר במעגל. בנקודה D מעבירים משיק למעגל. מנקודה A, שעל המעגל, מעבירים ישר מקביל לקוטר DE. הישר חותך את המשיק למעגל בנקודה F (ראה ציור).

א. הוכח כי:  $AD^2 = AF \cdot DE$ .

ב. נתון:  $AF = 4$  ס"מ,  $DE = 9$  ס"מ. חשב את שטח הטרפז AFDE.



**(40)** מעגל שמרכזו בנקודה O חסום במשולש ישר-זווית ( $\angle C = 90^\circ$ ) ומשיק לצלע BC בנקודה E. מעבירים את חוצה הזווית AD. נתון כי:  $AB = 30$  ס"מ,  $AC = 18$  ס"מ. חשב את אורך הקטע DE.



41 במשולש  $MPQ$ ,  $PS$  חוצה את הזווית  $\angle MPQ$ ,  
 $ST \parallel MP$ . נתון כי:  $MP = 27$  ס"מ,  $PQ = 45$  ס"מ.  
 חשב את אורך הקטע  $TP$ .



## תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה
- (2) שאלת הוכחה
- (3) שאלת הוכחה
- (4) שאלת הוכחה
- (5) 15 ס"מ.
- (6) ב.  $S_{\triangle ACD} = \frac{8}{25} R^2$
- (7) א. שאלת הוכחה
- (8) א. שאלת הוכחה
- (9) שאלת הוכחה
- (10) א.  $\frac{MN}{AN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{DE}{AE} = \sqrt{2}$
- (11) א. שאלת הוכחה
- (12) א. שאלת הוכחה
- (13)  $3\frac{1}{3}$  ס"מ.
- (14) ב. 6 ס"מ.
- (15) 12 ס"מ.
- (16) ב.  $AB = 5.2$  ס"מ,  $AC = 7.8$  ס"מ.
- (17) ב. 18 ס"מ.
- (18)  $S_{ABCE} = 28S$
- (19) שאלת הוכחה
- (20) שאלת הוכחה
- (21) שאלת הוכחה
- (22) ב. i. 8 סמ"ר ii. 20 סמ"ר.
- (23) ב. 9 ס"מ.
- (24) ב. 8 ס"מ.
- (25) שאלת הוכחה
- (26) ב. ii. 28 ס"מ.
- (27) שאלת הוכחה
- (28) ב. 6 ס"מ.
- (29) שאלת הוכחה
- (30) שאלת הוכחה
- (31) ב. 60 ס"מ.
- (32) שאלת הוכחה
- (33)  $BE = \frac{m^2 - 32}{m}$ ,  $CE = \frac{32}{m}$
- (34) 50.625 סמ"ר.
- (35) שאלת הוכחה
- (36)  $GF = 40$  ס"מ,  $PF = 14.4$  ס"מ,  $GP = 25.6$  ס"מ,  $PE = 19.2$  ס"מ.
- (37) ב. 6 ס"מ.
- (38) שאלת הוכחה

(40) 3 ס"מ = DE.

(39) ב. 29.07 סמ"ר.

(41) 16.875 ס"מ = TP

## תוכן העניינים:

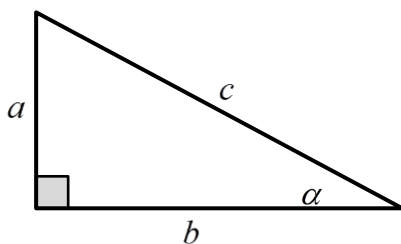
פרק 15	.....	324
טריגונומטריה במשולש ישר זווית	.....	324
משולש ישר זווית :	.....	324
שאלות:	.....	324
תשובות סופיות	.....	327

# פרק 15

## טריגונומטריה במשולש ישר זווית

### משולש ישר זווית:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

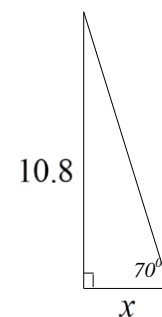
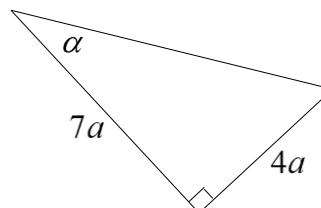
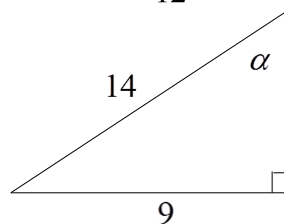
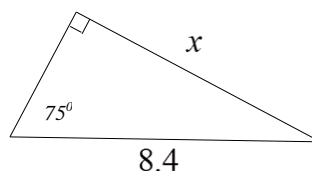
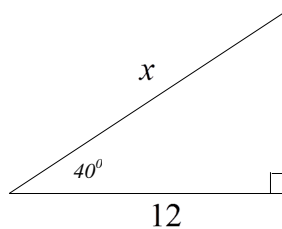
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

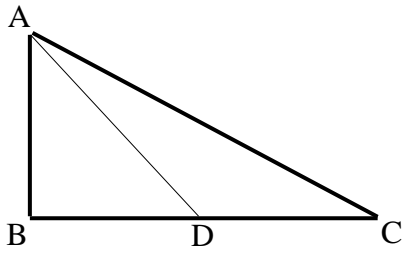
$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס:  $a^2 + b^2 = c^2$ .

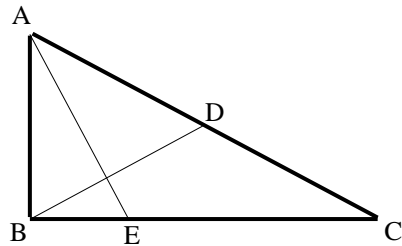
### שאלות:

1) מצא את ערכו של  $\alpha / x$  במשולשים ישרי הזווית הבאים:



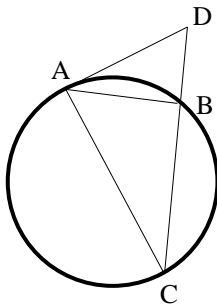


- (2) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ).  
AD הוא התיכון לניצב BC.  
נתון:  $\angle C = 28^\circ$ ,  $AB = 6$  ס"מ.  
מצא את AD ואת  $\angle BAD$ .



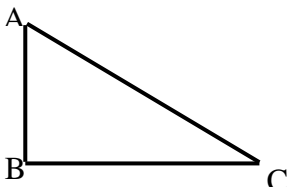
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). BD הוא התיכון ליתר AC.  
ו-AE הוא חוצה הזווית  $\angle A$ .  
נתון:  $BC = 8$  ס"מ,  $BD = 5.6$  ס"מ.  
מצא את BE ואת  $\angle BAE$ .

- (4) מצא את זוויתיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

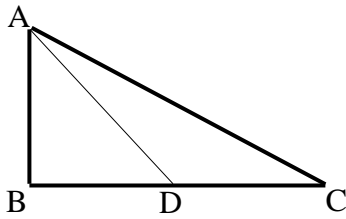


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.  
נתון:  $\angle DAB = 32^\circ$ ,  $BD = 4$  ס"מ.  
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא  $34.92^\circ$ . מצא את שטח המשולש.

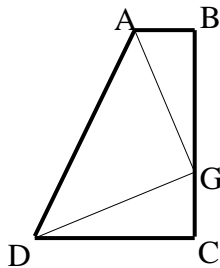


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). נתון:  $\angle A = \alpha$ ,  $AB = a$ .  
הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $a$  את היקף המשולש.



- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ).  
AD הוא התיכון לניצב BC.  
נתון:  $AB = b$ ,  $\angle C = \alpha$ .  
הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $b$  את אורכי הקטעים BD ו-AD.

- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא  $\alpha$  ואורך חוצה זווית זו הוא  $k$ .  
הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $k$  את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- (10) טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ).  
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$ .  
נתון:  $\angle BAG = \beta$ ,  $AG = DG = m$ .  
הבע באמצעות  $\beta$  ו- $m$  את שטח הטרפז.

- (11) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו  $k$  וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$  חוסם מעגל.  
הבע באמצעות  $\beta$  ו- $k$  את רדיוס המעגל.

## תשובות סופיות

$$\alpha = 29.745^\circ \text{ ה. } \alpha = 40.005^\circ \text{ ז. } x = 3.931 \text{ ג. } x = 8.114 \text{ ב. } x = 15.665 \text{ א. } \quad (1)$$

$$AD = 8.236 \text{ ס"מ}, \angle BAD = 43.24^\circ \quad (2)$$

$$BE = 3.294 \text{ ס"מ}, \angle BAE = 22.792^\circ \quad (3)$$

$$73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ \quad (4)$$

$$R = 6.04 \text{ ס"מ} \quad (5)$$

$$S = 28.618 \text{ סמ"ר} \quad (6)$$

$$P = a \left( 1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \quad (7)$$

$$AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha} \quad (8)$$

$$AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2} \quad (9)$$

$$S_{ABCD} = \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2} \quad (10)$$

$$R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2} \quad (11)$$

## תוכן העניינים:

329	פרק 16
329	זהויות טריגונומטריות
329	זהויות היסוד :
329	שאלות :
330	ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות :
331	תרגילים :
331	מעגל היחידה – הגדרה וזהויות :
331	הגדרת מעגל היחידה :
331	הזהויות של המעגל הטריגונומטרי :
332	זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות :
332	שאלות :
333	סכום והפרש זוויות :
333	שאלות :
334	זווית כפולה :
334	שאלות :
336	תשובות סופיות :



## פרק 16

# זהויות טריגונומטריות

### זהויות היסוד:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- $90^\circ$
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	קשרים בין פונקציות

### שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \quad \text{א.}$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha \quad \text{ד.}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha \quad \text{ג.}$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \quad \text{ו.}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \quad \text{ה.}$$

$$\sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(\alpha - 45^\circ) = 1 \quad \text{ח.}$$

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad \text{ז.}$$

$$\frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha \quad \text{י.}$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \quad \text{ט.}$$

$$\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad \text{יב.}$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha \quad \text{יא.}$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha \quad \text{יד.}$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha \quad \text{יג.}$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \quad \text{טז.}$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad \text{טו.}$$

## ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin \alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$
$\phi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan \alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\phi$	$\cot \alpha$

### הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של  $0^\circ$  ו-  $90^\circ$  תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי:  $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$  אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה-  $\cos \alpha$  יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי  $\tan \alpha$  ולסובב עבור ערכי  $\cot \alpha$ .

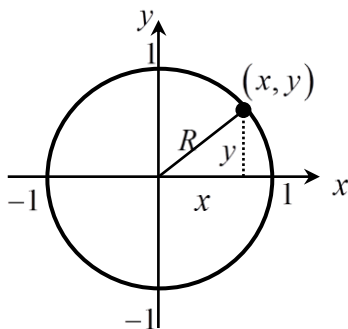
## שאלות:

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

א. $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$	ב. $\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$
ג. $\tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$	ד. $\frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ}$
ה. $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$	ו. $\frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ}$
ז. $\frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left( \sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)}$	ח. $\frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}$

## מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

### הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  מתאימות לזוויות של  $270^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $0^\circ$ .

### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
II	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$
III	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
סימנים			

### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\begin{array}{|l} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{array}, \quad \begin{array}{|l} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{array}$$

כאשר  $k$  הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

### שאלות:

(3) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.  
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120^\circ$	ב. $\cos 150^\circ$
ג. $\tan 160^\circ$	ד. $\cot 130^\circ$
ה. $\sin 215^\circ$	ו. $\cos 245^\circ$
ז. $\tan 230^\circ$	ח. $\cot 200^\circ$
ט. $\sin 300^\circ$	י. $\cos 310^\circ$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$	ב. $\cos 210^\circ$	ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$	ה. $\tan 225^\circ$	ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$	ח. $\tan(-30^\circ)$	ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$	יא. $\cos 930^\circ$	יב. $\tan(-225^\circ)$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

- א.  $(\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2$   
 ב.  $8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ)$   
 ג.  $\frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ$

## סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור  $\sin(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cos(\alpha \pm \beta)$  יחושב לפי:

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

סכום והפרש עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{cases} \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha} \end{cases}$$

הערה:

- בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו-  $\cot(\alpha \pm \beta)$ .

## שאלות:

6) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$	ב. $\sin 15^\circ$	ג. $\sin 105^\circ$
ד. $\sin(-15^\circ)$	ה. $\cos 75^\circ$	ו. $\cos 15^\circ$
ז. $\cos(-105^\circ)$	ח. $\cos 165^\circ$	ט. $\cos(-195^\circ)$

7) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א.  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$   
 ב.  $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(8) הוכח את הזהויות הבאות :

א.  $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$

ב.  $\cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$

ג.  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

ד.  $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

(9) נתון:  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{8}{17}$  ו- $\alpha, \beta$  זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב:

א.  $\sin(\alpha + \beta)$

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$

ג.  $\tan(\alpha + \beta)$

## זווית כפולה:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות :

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

## שאלות:

(10) הוכח את הזהויות הבאות :

א.  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ב.  $4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ג.  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$

ד.  $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ה.  $\frac{\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$

ו.  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$

ז.  $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$

ח.  $\cos^2 2\alpha = 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 1$

(11) הוכח את הזהות:  $\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\sin 3\alpha$

לפי:  $\sin(\alpha + 2\alpha)$  ושימשו בזהויות שנלמדו.

(12) הוכח את הזהות:  $\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\cos 3\alpha$

לפי:  $\cos(\alpha + 2\alpha)$  ושימשו בזהויות שנלמדו.

(13) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\cos \alpha$

ב.  $\tan \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

ה.  $\tan 2\alpha$

(14) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\sin \alpha$

ב.  $\cos \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

(15) נתונה זווית  $\alpha$  ברביע הראשון וזווית  $\beta$  ברביע השני המקיימות:  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$ . מבלי למצוא את  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב את הביטויים הבאים:

א.  $\sin(\alpha + \beta)$

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$

ג.  $\sin(2\alpha + \beta)$

(16) נתון כי  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$  עבור  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . חשב את  $\sin 2\alpha$ .

## תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב. } \frac{1}{2} \quad \text{ג. } 2 \quad \text{ד. } \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad \text{ה. } \frac{3}{4}$$

$$\text{ו. } 9 \quad \text{ז. } -\frac{1}{3} \quad \text{ח. } 2\sqrt{6}$$

$$(3) \quad \text{א. } \sin 60^\circ \quad \text{ב. } -\cos 30^\circ \quad \text{ג. } -\tan 20^\circ \quad \text{ד. } -\cot 50^\circ$$

$$\text{ה. } -\sin 35^\circ \quad \text{ו. } -\cos 65^\circ \quad \text{ז. } \tan 50^\circ \quad \text{ח. } \cot 20^\circ$$

$$\text{ט. } -\sin 60^\circ \quad \text{י. } \cos 50^\circ$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{1}{2} \quad \text{ב. } -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ג. } -\sqrt{3} \quad \text{ד. } -\frac{1}{2}$$

$$\text{ה. } 1 \quad \text{ו. } -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ז. } -\frac{1}{2} \quad \text{ח. } -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ט. } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{י. } \frac{1}{2} \quad \text{יא. } -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{יב. } -1$$

$$(5) \quad \text{א. } 1 \quad \text{ב. } -1 \quad \text{ג. } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$$

$$(6) \quad \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$(7) \quad \text{א. } 1 \quad \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

(8) שאלת הוכחה.

$$(9) \quad \text{א. } \frac{84}{85} \quad \text{ב. } -\frac{13}{85} \quad \text{ג. } -6\frac{6}{13}$$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.



$$-\frac{1519}{1681} \cdot \text{ד}$$

$$\frac{720}{1681} \cdot \text{ג}$$

$$4\frac{4}{9} \cdot \text{ב}$$

$$\frac{9}{41} \cdot \text{א} \quad (13)$$

$$-\frac{720}{1519} \cdot \text{ה}$$

$$\frac{129}{169} \cdot \text{ד}$$

$$\frac{120}{169} \cdot \text{ג}$$

$$\frac{12}{13} \cdot \text{ב}$$

$$\frac{5}{13} \cdot \text{א} \quad (14)$$

$$-\frac{123}{845} \cdot \text{ג}$$

$$-\frac{63}{65} \cdot \text{ב}$$

$$\frac{16}{65} \cdot \text{א} \quad (15)$$

$$.0.44 \quad (16)$$

## תוכן העניינים:

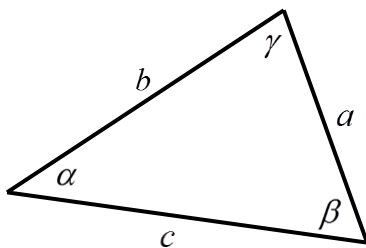
339	פרק 17
339	טריגונומטריה במישור
339	סיכום עיקרי הדברים הנלמדים בפרק :
340	שאלות :
344	תשובות סופיות :
345	תרגול מבגרויות :
356	תשובות סופיות :

## פרק 17

# טריגונומטריה במישור

## סיכום עיקרי הדברים הנלמדים בפרק:

### משפט הסינוסים:



במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

בצורה מתמטית:

### משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

בקוסינוס הזווית שבניהן:

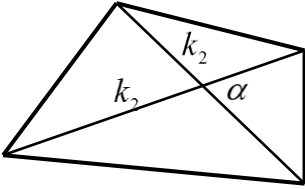
### מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  - נתונות שתי זוויות וצלע.
  - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  - נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שטחים של משולשים ומרובעים:

• שטח משולש ניתן לחישוב ע"י:  $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$

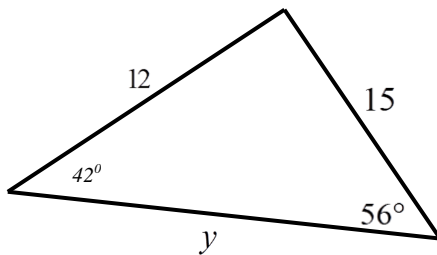
• שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו:  $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$



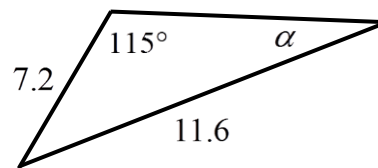
שאלות:

(1 מצא את ערכו של  $a/x/y$  במשולשים הבאים  
( $R$  הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

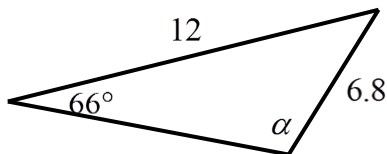
ב.



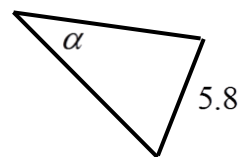
א.



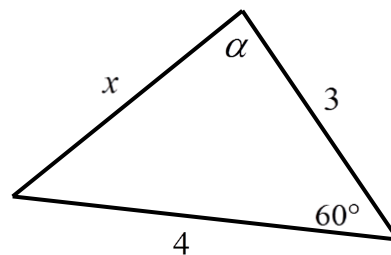
ד.



ג. רדיוס המעגל:  $R = 7$ .

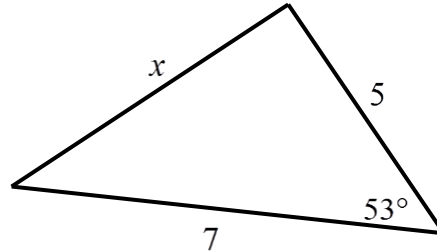


ה.

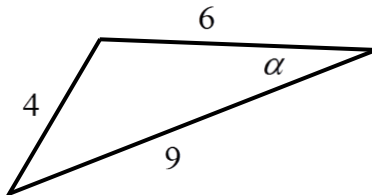


(2) מצא את ערכו של  $\alpha/x$  במשולשים הבאים:

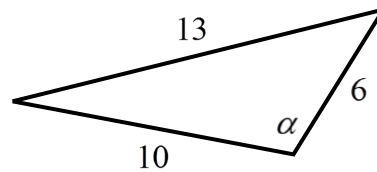
א.



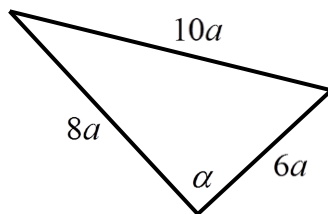
ב.



ג.



ד.



(3) נתון משולש שווה שוקיים ABC ( $AB=AC$ ) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ

וגודלה של זווית הבסיס בו הוא  $70^\circ$ .

CD הוא חוצה זווית הבסיס C.

מצא את אורכו של הקטע AD.

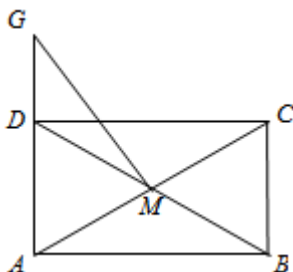
(4)

אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.

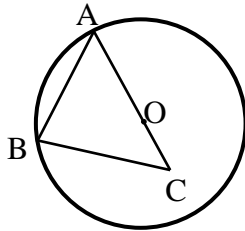
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.

נתון:  $AD = 3$  ס"מ,  $AB = 4$  ס"מ,  $DG = 1.2$  ס"מ.

מצא את גודלו של הקטע GM.

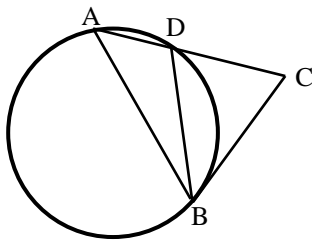


- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.



- (6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O. הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון:  $BC = 9$  ס"מ,  $OC = 3$  ס"מ,  $\angle BAC = 38^\circ$ . מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.

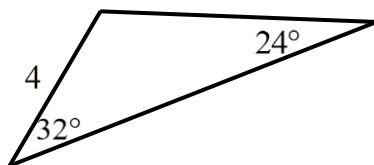
- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של  $30^\circ$  עם צלע אחת של המקבילית וזווית של  $61.05^\circ$  עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



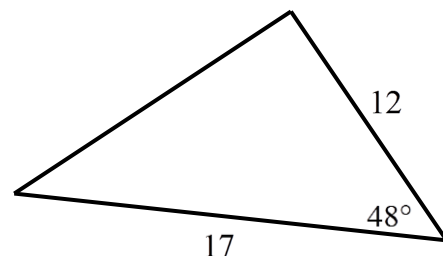
- (8) המשולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R. המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B נפגשים בנקודה C. נתון:  $\angle ADB = \beta$ ,  $\angle C = \alpha$ . הבע באמצעות R,  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורך הקטע BC.

- (9) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

ב.



א.



**10** חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של  $15^\circ$  עם הבסיסים.

**11** במשולש ישר זווית ABC ( $\angle B = 90^\circ$ ), BD חוצה את הזווית  $\angle B$ .

נתון:  $\angle A = \alpha$ ,  $AB = m$ .

הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $m$  את שטח המשולש BCD.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \alpha = 34.231^\circ \quad \text{א.} \quad \text{ב. } y = 22.199 \text{ ס"מ} \quad \text{ג. } \alpha = 155.526^\circ \text{ או } \alpha = 24.474^\circ$$

$$\text{ד. } \alpha = 41.382^\circ \text{ או } \alpha = 138.618^\circ \quad \text{ה. } x = 3.606 \text{ ס"מ}, \alpha = 73.898^\circ$$

$$(2) \quad \text{א. } x = 5.646 \text{ ס"מ} \quad \text{ב. } \alpha = 20.742^\circ \quad \text{ג. } \alpha = 105.962^\circ$$

$$\text{ד. } \alpha = 90^\circ$$

$$(3) \quad AD = 13.064 \text{ ס"מ}$$

$$(4) \quad GM = 3.360 \text{ ס"מ}$$

$$(5) \quad 66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$$

$$(6) \quad R = 9.242 \text{ ס"מ}, AB = 14.56 \text{ ס"מ}$$

$$(7) \quad P = 22 \text{ ס"מ}$$

$$(8) \quad BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$(9) \quad \text{א. } S = 8.641 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב. } S = 75.801 \text{ סמ"ר}$$

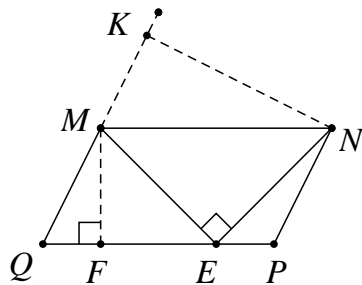
$$(10) \quad S = 16 \text{ סמ"ר}$$

$$(11) \quad S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$$

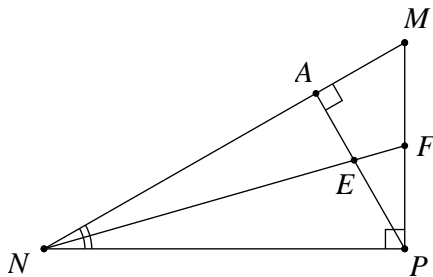


## תרגול מבגרויות:

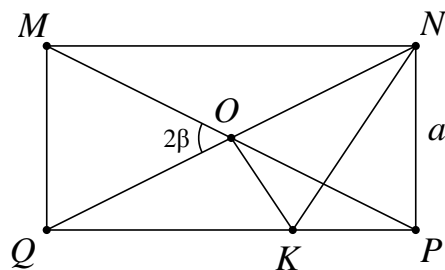
- (1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R. נתון כי  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .  
 א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת  $\alpha, \beta, R$ .  
 ב. נתון כי:  $\alpha = \beta = 60^\circ$ . חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R.



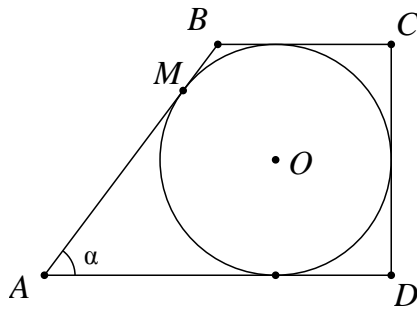
- (2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש-  $\angle MEN = 90^\circ$  (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle MQP = 70^\circ$ ,  $MQ = 12$  ס"מ,  $\angle MNE = 40^\circ$ .  
 מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



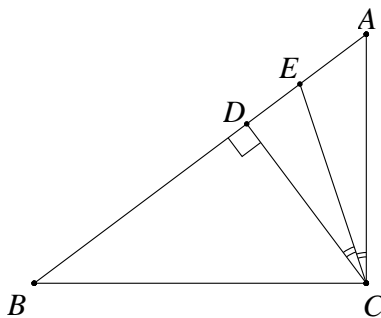
- (3) במשולש ישר-זווית MNP,  $\angle P = 90^\circ$  הוא גובה ליתר PA.  
 ו- NF חוצה את הזווית  $\angle MNP$ .  
 ו- PA ו- NF נחתכים בנקודה E.  
 (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle MNP = 40^\circ$ ,  $NP = 24$  ס"מ.  
 א. מצא את אורך הקטע NA.  
 ב. מצא את אורך הקטע EF.



- (4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.  
 מנקודה O מעלים אנך ל- QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle MOQ = 2\beta$ ,  $NP = \alpha$ .  
 א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות  $\beta$  ו-  $\alpha$ .  
 ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות  $\beta$  ו-  $\alpha$ .



- (5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.  
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.  
נתון:  $12 \text{ ס"מ} = AM$ ,  $\angle BAD = \alpha$ .  
א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת  $\alpha$ .  
ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת  $\alpha$ .

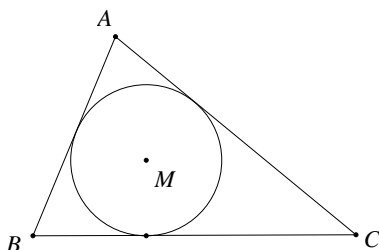


- (6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:  
 $8 \text{ ס"מ} = BC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = \beta$ .  
CD הוא הגובה ליתר.  
CE הוא חוצה-הזווית  $\angle ACD$ .  
הבע את אורך הקטע AE באמצעות  $\beta$ .

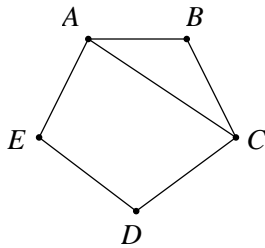
- (7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה. מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חוסם בתוך מעגל זה. חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

- (8)  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) שאורך בסיסו  $12 \text{ ס"מ}$ . AD הוא הגובה לבסיס BC, ו-CE הוא הגובה לשוק AB. שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון:  $\angle ABC = \alpha$  ( $\alpha > 45^\circ$ ).  
א. הבע את היחס  $AO : DO$  באמצעות  $\alpha$ .

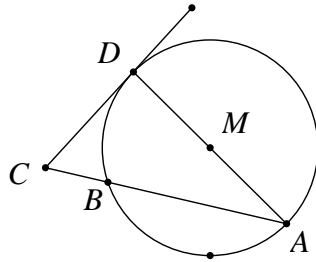
- ב. הראה כי בעבור  $\alpha = 60^\circ$  הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



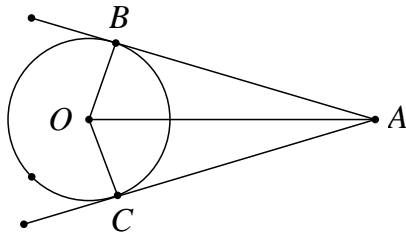
- (9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור).  
נתון:  $\angle C = 46^\circ$ ,  $\angle B = 62^\circ$ .  
א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.  
ב. נתון:  $16 \text{ ס"מ} = BC$ . מצא את r.



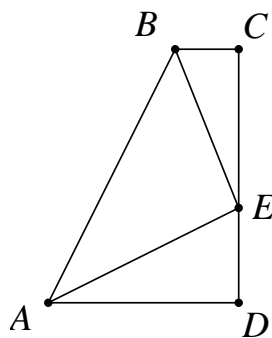
- 10 במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)  
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.  
חשב את שטח המחומש.



- 11 מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור). נתון:  $CD = \frac{3}{5}R$ .  
א. מצא את זוויות המשולש CAD.  
ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.

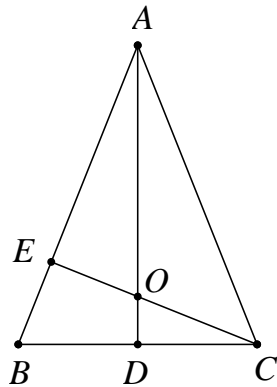


- 12 מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).  
נתון:  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $AO = 10$  ס"מ.  
א. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_1$ , שטח המרובע ABOC.  
ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $S_2$ , שטח המשולש BOC.  
ג. הראה שאם  $\alpha = 30^\circ$ , אזי:  $S_1 = 4 \cdot S_2$ .



- 13 ABCD הוא טרפז ישר-זווית ( $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ).  
נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).  
נתון:  $\angle AEB = 90^\circ$ ,  $AE = BE = k$ , ו- $\angle CBE = \beta$ .  
הבע באמצעות  $k$  ו- $\beta$  את שטח הטרפז.

- 14 ענה על השאלות הבאות:  
א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.  
ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים ( $AB = AC$ )

שבו זווית הראש היא זווית חדה.

נתון כי זווית הבסיס היא  $\beta$  ואורך הבסיס BC

הוא  $2\alpha$ . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא

הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים

בנקודה O (ראה ציור).

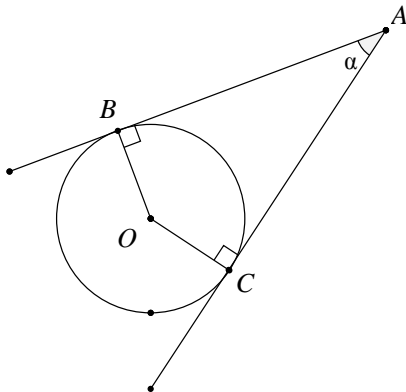
א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את אורכי

הקטעים CO ו-CE.

ב. הבע באמצעות  $\beta$  את היחס  $\frac{CO}{CE}$ .

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר  $\beta = 60^\circ$ ,

והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.



16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל

שמרכזו O, שאורכם  $m$

(כלומר:  $AB = AC = m$ ).

נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין

המשיקים היא  $\angle BAC = \alpha$

(ראה ציור).

א. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח

המשולש ABC.

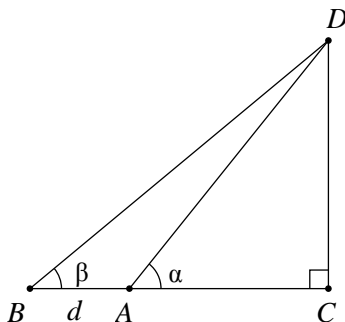
ב. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את שטח

המשולש BOC.

ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו

של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו  $\alpha = 90^\circ$ .



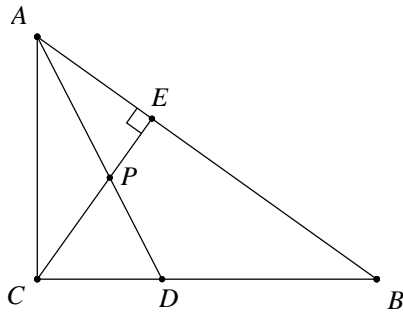
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון  $\angle DAC = \alpha$ .

מאריכים את הניצב AC כך ש-  $AB = d$ .

נתון כי:  $\angle DBA = \beta$  (ראה ציור).

סמן:  $AC = x$ .

הבע את  $x$  באמצעות  $d$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



18 נתון משולש ישר-זווית ABC ( $\angle C = 90^\circ$ ).

CE הוא הגובה ליתר.

AD הוא חוצה-הזווית  $\angle CAB$ .

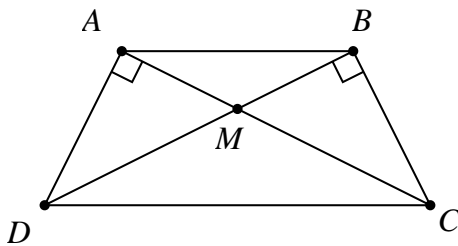
CE ו-AD נחתכים בנקודה P (ראה ציור).

נתון:  $\angle CAB = \alpha$ ,  $AC = m$ .

הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את:

א. אורך הקטע AE.

ב. אורך הקטע PD.



19 בטרפז שווה-שוקיים ABCD

( $AD = BC$ ), האלכסונים נפגשים

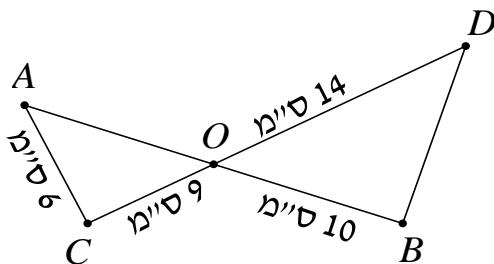
בנקודה M (ראה ציור).

נתון:  $\angle DAC = \angle DBC = 90^\circ$ ,

$\angle ADC = \angle BCD = 65^\circ$ ,

$DC = 11$  ס"מ.

חשב את שטח המשולש AMD.



20 הקטעים AB ו-CD נחתכים

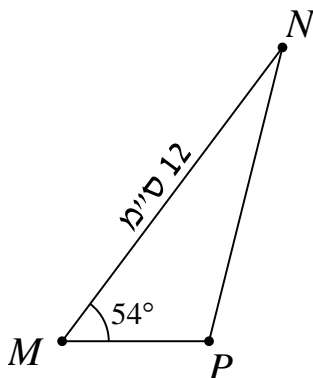
בנקודה O.

נתון כי:  $\angle OAC = 60^\circ$ ,

$AC = 6$  ס"מ,  $CO = 9$  ס"מ,

$OB = 10$  ס"מ,  $OD = 14$  ס"מ.

חשב את  $\angle ODB$ .



21 במשולש MNP גודל הזווית M הוא  $54^\circ$ .

נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ

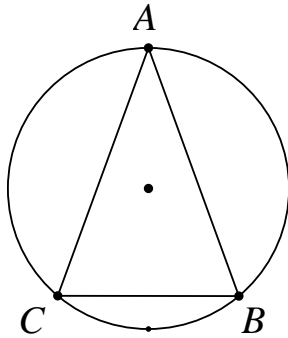
(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ

מהצלע MP.

א. חשב את אורך הצלע NP.

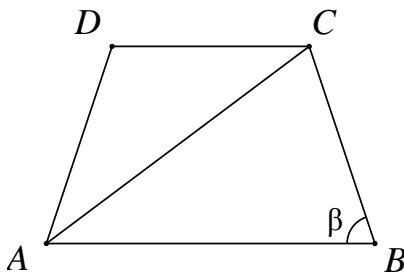
ב. PA הוא תיכון לצלע MN.

חשב את שטח המשולש PAN.

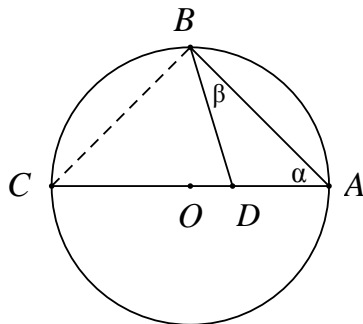


- (22)** המשולש השווה-שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ) חסום במעגל (ראה ציור).  
נתון:  $\angle ABC = \beta$ .  
כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.  
א. הבע בעזרת  $\beta$  את שטח המשולש  $ABC$ .  
ב. חשב את שטח המשולש  $ABC$  בעבור  $\beta = 45^\circ$ .

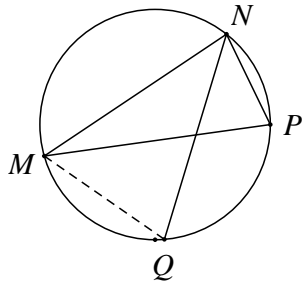
- (23)** במשולש  $ABC$  הזווית  $\angle C$  היא בת  $60^\circ$ , אורך הצלע  $AB$  הוא  $\sqrt{13}$  ס"מ, והיקף המשולש הוא  $7 + \sqrt{13}$  ס"מ. חשב את שטח המשולש.



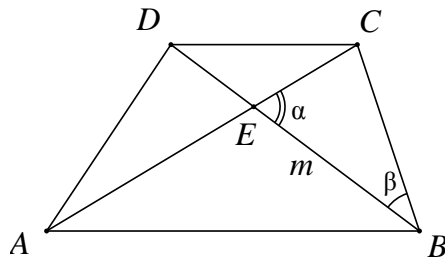
- (24)** בטרפז שווה-שוקיים  $ABCD$  ( $AD = BC$ ) אורך הבסיס הגדול  $AB$  שווה לאורך האלכסון.  
זווית הבסיס היא  $\beta$  ( $\beta > 60^\circ$ ),  
ראה ציור.  
הבע באמצעות  $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש  $ACD$  לשטח המשולש  $ABC$ .



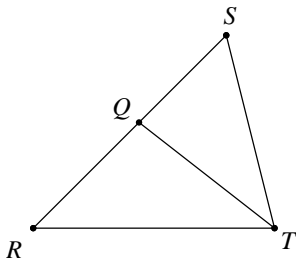
- (25)** הקדקודים  $A$  ו- $B$  של המשולש  $ABD$  נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו  $O$ . הקדקוד  $D$  של המשולש  $ABD$  נמצא על הרדיוס  $OA$ .  
א. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את שטח המשולש  $ABD$ .  
ב. הבע בעזרת  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס שבין שטח המשולש  $ABC$  לשטח המשולש  $ABD$ .



- 26** משולש MNP חסום במעגל.  
המיתר NQ חוצה את הזווית  $\angle MNP$ .  
נתון:  $\angle MPN = 70^\circ$ ,  $\angle MNP = 80^\circ$ ,  $NP = 12$  ס"מ.  
חשב את אורך המיתר MQ.



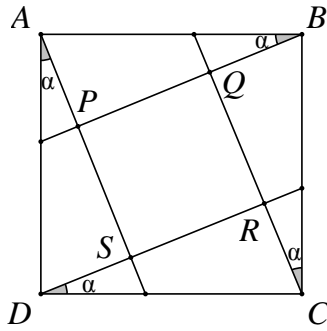
- 27** נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ).  
הנקודה E היא נקודת המפגש של  
אלכסוני הטרפז.  
נתון:  $BE = m$ ,  $DC = BC$ ,  
 $\angle CBD = \beta$ ,  $\angle CEB = \alpha$  (ראה ציור).  
הבע את אורכי בסיס הטרפז:  
AB ו-CD באמצעות  $m$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .



- 28** במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית  
 $\angle RTS$  (ראה ציור),  $QS = m$ ,  $RQ = \sqrt{2}$ ,  
 $\angle TRQ = 45^\circ$ ,  $\angle RST = \alpha$ .  
א. הבע את  $\sin \alpha$  באמצעות  $m$ .  
ב. נתון כי:  $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .  
חשב את זוויות המשולש RST.

- 29** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס  
המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

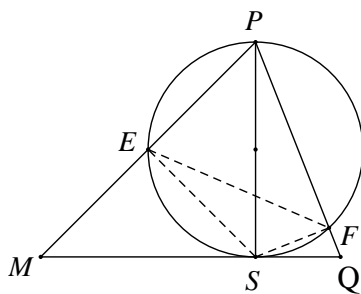
- 30** נתון משולש שצלעותיו  $t$ ,  $2t$ ,  $kt$ .  
א. לאיזה ערכים של הקבוע  $k$  המשולש הוא קהה זווית?  
ב. נתון  $k = \sqrt{7}$ . הבע ע"י  $t$  את אורך חוצה הזווית הקהה.



**31** בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית  $\alpha$  עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.

א. הוכח כי:  $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$ .

ב. לאיזו זווית  $\alpha$  מתקיים:  $PR = AB$ ?



**32** PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון  $PS = h$ ,  $\angle MPS = \alpha$ ,  $\angle SPQ = \beta$ .

א. הבע את שטח המשולש PMQ באמצעות  $h$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$ .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM ו-PQ בנקודות E ו-F בהתאמה (ראה ציור).

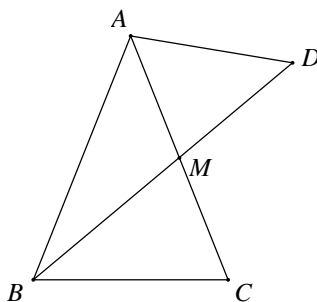
i. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את  $\angle ESF$ .

ii. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס בין שטח המשולש ESP לשטח המשולש PMQ.

**33** במשולש ABC הצלעות הן  $a$ ,  $b$  ו- $c$  והזוויות שמונחות מולן הן:  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון  $m_a$  (התיכון לצלע  $a$ ) באמצעות הצלעות  $b$  ו- $c$  והזווית  $\alpha$ .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



**34** במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ), BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

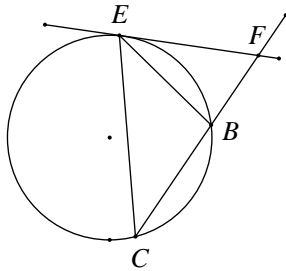
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$ .

א. מצא את גודל הזווית  $\angle BMC$ .

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D, כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

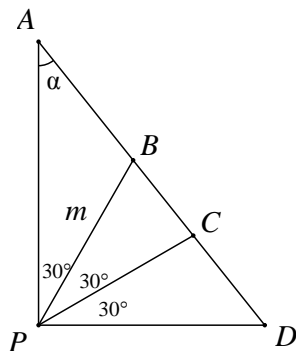
מצא את שטח המשולש AMD.



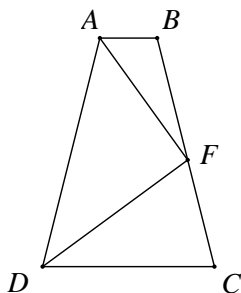


- 35** משולש שווה שוקיים  $BCE$  ( $BC = BE$ ) חסום במעגל שרדיוסו  $R$ .  
 זווית הבסיס של המשולש  $BCE$  היא  $\alpha$ .  
 בנקודה  $E$  העבירו משיק למעגל החותך את המשך השוק  $BC$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).  
 א. בטא את שטח המשולש  $BEF$  באמצעות  $R$  ו- $\alpha$ .  
 ב. מצא את הערך של  $\alpha$  שבעבורו שטח המשולש  $BCE$  שווה לשטח המשולש  $BEF$ .

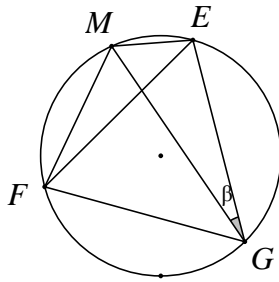
- 36** בטרפז  $BCDE$  ( $BC \parallel ED$ ) אורך הבסיס  $BC$  הוא 12 ס"מ.  
 הזווית שבין הבסיס  $BC$  לשוק  $DC$  היא  $80^\circ$ .  
 אורך האלכסון  $BD$  הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית  $\angle CBE$ .  
 חשב את היקף הטרפז.



- 37** במשולש ישר-זווית  $APD$  מחלקים את הזווית הישרה  $\angle P$  לשלוש זוויות שוות. כלומר:  $(\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ)$  (ראה ציור).  
 נתון כי:  $\angle PAD = \alpha$ ,  $PB = m$ .  
 א. היעזר במשפט הסינוסים, והבע את  $AB$ ,  $AC$ ,  $BD$  ו- $CD$  באמצעות  $m$  ו- $\alpha$ .  
 ב. הוכח כי:  $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$ .



- 38** בטרפז שווה שוקיים  $ABCD$  ( $AD = BC$ ,  $AB \parallel DC$ ),  
 $F$  היא נקודה על השוק  $BC$ , כך ש- $DF$  חוצה את הזווית  $\angle CDA$  ו- $AF$  חוצה את הזווית  $\angle DAB$ . (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle FAB = \beta$ ,  $AB = \beta$ .  
 הבע באמצעות  $b$  ו- $\beta$  את אורך הבסיס  $DC$ .



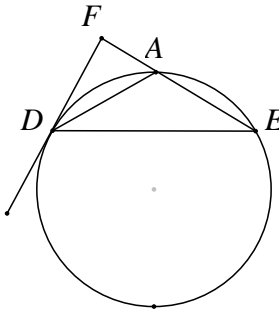
**39** משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל.

שרדיוסו R. M היא נקודה על המעגל.

נתון:  $\angle MGE = \beta$  (ראה ציור).

א. הוכח כי:  $ME + MF = MG$ .

ב. אם  $ME = R$  מה תוכל לומר על MG?



**40** משולש שווה שוקיים ADE ( $AD = AE$ ).

חסום במעגל שרדיוסו R. ישר המשיק

למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE

בנקודה F (ראה ציור).

נתון:  $\angle AEF = \alpha$  ( $60^\circ < \alpha < 180^\circ$ ).

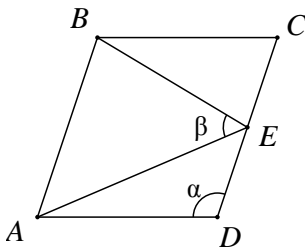
א. הבע את שטח המשולש ADF

באמצעות R ו- $\alpha$ .

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את היחס שבין שטח המשולש ADE ובין שטח

המשולש ADF.

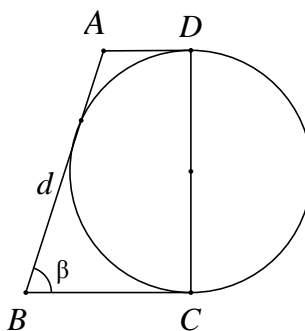
ג. חשב את  $\alpha$  אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



**41** במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.

נתון:  $\angle ADC = \alpha$ ,  $\angle AEB = \beta$  (ראה ציור).

הוכח כי:  $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$



**42** נתון טרפז ABCD ונתון מעגל.

השוק DC הוא קוטר המעגל. השוק AB משיקה

למעגל, והבסיסים AD ו-BC משיקים גם הם

למעגל בנקודות D ו-C בהתאמה (ראה ציור).

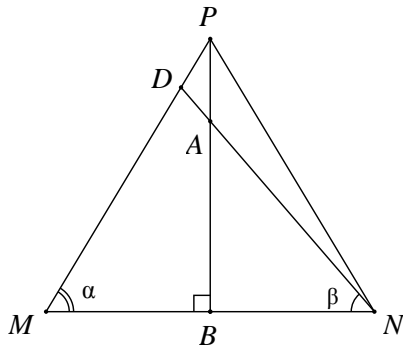
נתון כי:  $\angle B = \beta$ ,  $AB = d$ .

א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.

ב. הבע באמצעות d ו- $\beta$  את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה  $\beta$ .



43) במשולש שווה שוקיים  $PMN$  ( $PM = PN$ ),

$A$  היא נקודה על הגובה  $PB$ ,

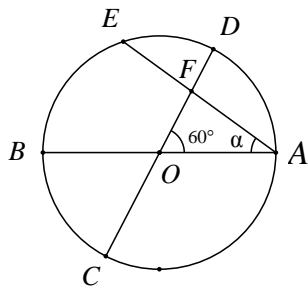
כך ש-  $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$ .

הישר  $NA$  חותך את השוק  $PM$  בנקודה  $D$  (ראה ציור).

נתון:  $\angle DNM = \alpha$ ,  $\angle DNB = \beta$  ו-  $BN = \alpha$ .

א. חשב את היחס  $\tan \beta : \tan \alpha$ .

ב. חשב את היחס  $PM:DM$ .



44) במעגל שמרכזו  $O$  ורדיוסו  $R$  מעבירים שני קטרים

$AB$  ו-  $CD$  הנחתכים בזווית של  $60^\circ$ .

מיתר  $AE$ , היוצר זווית  $\alpha$  עם הקוטר  $AB$ ,

חותך את הקוטר  $CD$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש  $ACF$

באמצעות  $R$  ו-  $\alpha$ .

ב. הוכח שכאשר  $\alpha = 30^\circ$ , שטח המשולש  $ACF$

הוא  $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$ .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{ב. } \frac{1}{2} R$$

$$(2) \quad \text{א. } 11.28 \text{ ס"מ}, \text{ ב. } 21.52 \text{ ס"מ}$$

$$(3) \quad \text{א. } 18.385 \text{ ס"מ}, \text{ ב. } 5.975 \text{ ס"מ}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{a}{2 \cos \beta}, \quad \text{ב. } \frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[ 1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right]$$

$$(5) \quad \text{א. } 12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2}, \quad \text{ב. } 24 \cdot \left( 1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

$$(6) \quad AE = 8 \sin \beta \cdot \left[ \tan \beta - \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left( \frac{1}{2} \beta \right)$$

$$(7) \quad 2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132$$

$$(8) \quad \text{א. } -2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1$$

ב. מתקיים:  $AO = 2 \cdot DO$  (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$(9) \quad \text{א. } BC = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r, \quad \text{ב. } r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98$$

$$(10) \quad S = 147.86 \text{ סמ"ר}$$

$$(11) \quad \text{א. } \angle C = 73.3^\circ, \angle D = 90^\circ, \angle A = 16.7^\circ, \quad \text{ב. } S \approx 0.0495 \cdot R^2$$

$$(12) \quad S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha$$

$$\text{ב. } S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$(13) \quad \text{א. } S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad (\text{או כל תשובה שקולה}) \quad \text{ב. } 27 \text{ יח"ש.}$$

$$(14) \quad \text{א. } 5.548 \text{ ס"מ} \approx r, \quad \text{ב. } 90.45 \text{ סמ"ר} \approx S$$

$$(15) \quad \text{א. } CE = 2a \cdot \sin \beta, \quad CO = \frac{a}{\sin \beta}, \quad \text{ב. } \frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta}$$

ג. היחס הוא:  $\frac{2}{3}$  (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

16) א.  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha$  ב.  $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2}$  ג. יחס השטחים:  $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה  $\triangle ABOC$  הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ( $\tan^2 45^\circ = 1$ ).

$$AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad (17)$$

18) א.  $AE = m \cdot \cos \alpha$  ב.  $PD = \frac{m(1 - \cos \alpha)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2m \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2m \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$

19)  $S \approx 9.07$  סמ"ר

20)  $\angle ODB \approx 44.7^\circ$

21) א.  $NP = 10.38$  ס"מ ב.  $S_{\triangle PAN} = 8.2$  סמ"ר

22) א.  $S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta$  ב.  $400$  סמ"ר

23)  $S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196$  סמ"ר

24) יחס השטחים הוא:  $1 - 4 \cos^2 \beta = \left( -\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right)$  או כל תשובה שקולה.

25) א.  $S_{\triangle ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$  ב.  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$

26)  $MQ \approx 15.43$  ס"מ

27)  $DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ ,  $AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

28) א.  $\sin \alpha = \frac{1}{m}$  ב.  $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  או  $45^\circ, 120^\circ, 15^\circ$

29)  $\alpha \approx 20.7$

30) א.  $\sqrt{5} < k < 3$  או  $1 < k < \sqrt{3}$  ב.  $\frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t$

31)  $\alpha = 15^\circ$

32) א.  $S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta)$  ב. i.  $\angle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

ב. ii.  $S_{\triangle EFS} : S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב.} \quad m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha} \quad \text{א.} \quad (33)$$

$$S_{\triangle AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad \angle BMC = 79.5^\circ \quad \text{א.} \quad (34)$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad \text{א.} \quad (35)$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \quad (36)$$

$$BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, \quad AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, \quad AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad \text{א.} \quad (37)$$

$$CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad (38)$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל.} \quad (39)$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{א.} \quad \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad \text{א.} \quad (40)$$

$$\beta = 30^\circ \quad \text{א.} \quad S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, \quad P = 2d + d \sin \beta \quad \text{ב.} \quad AD + BC = d \quad \text{א.} \quad (42)$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{ב.} \quad \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{א.} \quad (43)$$

$$S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{א.} \quad (44)$$

## תוכן העניינים:

פרק 18.....	360
חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים.....	360
סיכום כללי :	360
פונקציות נפוצות :	360
הנגזרת :	360
כללי הגזירה :	361
שיפוע של פונקציה :	361
שאלות :	362
תשובות סופיות.....	366

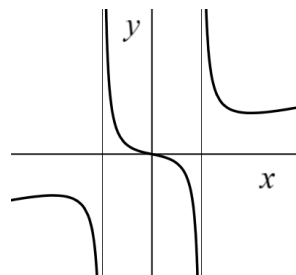
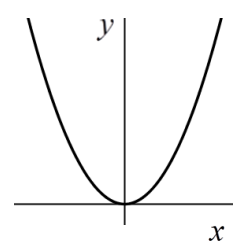
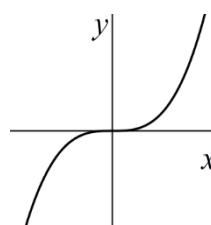
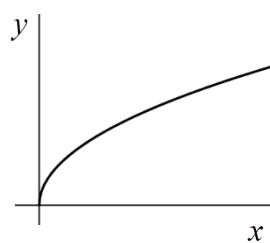
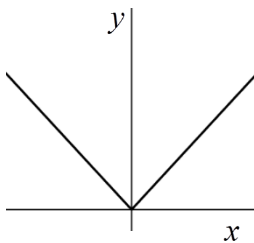
# פרק 18

## חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

### סיכום כללי:

#### פונקציות נפוצות:

הפונקציה  $f(x) = x^2$  : הפונקציה  $f(x) = x^3$  : הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  : הפונקציה  $f(x) = |x|$  :



פונקציה עם מכנה, למשל:  $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$  :

#### הנגזרת:

לכל פונקציה  $f(x)$  קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת  $f'(x)$ , המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.



## כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1:  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע):  $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע):  $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש):  $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת):  $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של  $\frac{1}{x}$ ):  $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה):  $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה):  $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש):  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

## שיפוע של פונקציה:

- השיפוע ( $m$ ) של פונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה  $A(x_1, y_1)$ , כלומר:  $m = f'(x_1)$
- השיפוע של המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה  $A(x_1, y_1)$
- משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x - 2)^3$	ב. $f(x) = (x^3 + 6)^5$	ג. $f(x) = 3(x - x^2)^2$
ד. $f(x) = \frac{(5 - x)^3}{4}$	ה. $f(x) = \frac{(2x + 1)^4}{3}$	

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3}{x}$       ב.  $f(x) = -\frac{2}{x}$       ג.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

ד.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$       ה.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$       ו.  $f(x) = \frac{2}{3-x}$

ז.  $f(x) = \frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = (5x+1)(x-3)$       ב.  $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$       ג.  $f(x) = x^3(6-x)^4$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$       ב.  $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$       ג.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד.  $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$       ה.  $f(x) = \frac{1}{x}$       ו.  $f(x) = \frac{3}{x^3}$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{x}$       ב.  $f(x) = 4\sqrt{x+1}$       ג.  $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד.  $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$       ה.  $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$       ו.  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = ax^4 - bx$       ב.  $f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c$       ג.  $f(x) = \frac{x-2a}{x-4a}$

ד.  $f(x) = a\sqrt{bx^2+c}$

11) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = 2x^3 - 7x$  בנקודה  $(2, 2)$ .

12) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$  בנקודה בה  $x = -2$ .

**(13)** מצא את שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = 4\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

**(14)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  בנקודה בה  $x = -1$ .

**(15)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{8}{x+1}$  בנקודה בה  $y = 2$ .

**(16)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

**(17)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 4$ .

**(18)** נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר  $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

**(19)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = x^2 - 2x - 8$  בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

**(20)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  ששיפועו 2.

**(21)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  ששיפועו -2.

**(22)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $135^\circ$ .

**(23)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = ax^2 - 4x$  (פרמטר  $a$ ) בנקודה בה  $x = 3$  הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

**(24)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  (פרמטר  $a$ ) בנקודה בה  $y = 2$  הוא -4.  
מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

**(25)** נתונה הפונקציה  $y = x^3 + a\sqrt{x}$  ( $a$  פרמטר).  
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה  $x = 1$  הוא 5.  
מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

**(26)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$  ( $A$  פרמטר).  
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה  $x = 1$  הוא 2.  
מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

**(27)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  ( $a, b$  פרמטרים) בנקודה  $(1, 6)$  הוא -6.  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$  ואת משוואת המשיק.

**(28)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות  $t$  את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^2 + 1$  בנקודה בה  $x = t$ .

ב. מצא את ערכיו של  $t$  אם נתון שהמשיק עובר בנקודה  $(-1, 1)$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } 3x^2 \quad \text{ב. } 7x^6 \quad \text{ג. } 2x \quad \text{ד. } 1 \quad \text{ה. } -\frac{3}{x^4}$$

$$\text{ו. } -\frac{1}{x^2} \quad \text{ז. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ח. } \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{ט. } \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

$$(2) \quad \text{א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 21x^6 \quad \text{ג. } 2x^3 \quad \text{ד. } \frac{6x^5}{7} \quad \text{ה. } 8$$

$$\text{ו. } -\frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^3} \quad \text{ז. } \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \text{ח. } \frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$$

$$(3) \quad \text{א. } 0 \quad \text{ב. } 0$$

$$(4) \quad \text{א. } 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב. } x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$(5) \quad \text{א. } 15(5x-2)^2 \quad \text{ב. } 15x^2(x^3+6)^4 \quad \text{ג. } 6(x-x^2)(1-2x)$$

$$\text{ד. } -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ה. } \frac{8(x+1)^3}{3}$$

$$(6) \quad \text{א. } -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד. } -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{ה. } -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ו. } \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ז. } -\frac{6}{(x+5)^2}$$

$$(7) \quad \text{א. } 10x-14 \quad \text{ב. } (5x+1)^2(20x-44)$$

$$(8) \quad \text{א. } \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב. } \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג. } \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad \text{ד. } \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$$

$$\text{ה. } -\frac{1}{x^2} \quad \text{ו. } -\frac{9}{x^4}$$

$$(9) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(10) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$. m = 17 \quad \text{(11)}$$

$$. m = 4 \quad \text{(12)}$$

$$. m = 2 \quad \text{(13)}$$

$$. y = 24x + 22 \quad \text{(14)}$$

$$. y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad \text{(15)}$$

$$. y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \quad \text{(16)}$$

$$. y = 22x - 56 \quad \text{(17)}$$

$$. y = 3x - 1 \quad \text{ג.} \quad y = 3x - 1 \quad \text{נ.} \quad \text{(18)}$$

$$. y = 6x - 24, y = -6x - 12 \quad \text{(19)}$$

$$. y = 2x - 3 \quad \text{(20)}$$

$$. y = -2x + 8 \quad \text{(21)}$$

$$. y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \quad \text{(22)}$$

$$. a = 2, y = 8x - 18 \quad \text{(23)}$$

$$. a = 2, y = -4x - 2 \quad \text{(24)}$$

$$. a = 4 \quad \text{(25)}$$

$$. a = 1 \quad \text{(26)}$$

$$. b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \quad \text{(27)}$$

$$. t = 0, t = -2 \quad \text{ג.} \quad y = 2tx - t^2 + 1 \quad \text{נ.} \quad \text{(28)}$$

## תוכן העניינים:

פרק 19 ..... 369

חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות ..... 369

369	חקירת פולינום :
369	נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום) :
369	נקודות קיצון מקומיות :
369	מציאת נקודות קיצון מקומיות :
370	שאלות :
372	תשובות סופיות :
374	פונקציה זוגית ואי-זוגית :
374	הגדרות :
374	שאלות :
378	תשובות סופיות :
382	חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש :
382	סעיפי חקירה מלאה של פונקציה :
382	תחום הגדרה של פונקציה :
382	אסימפטוטות :
383	שאלות :
388	תשובות סופיות :
391	חקירת פונקציה עם פרמטר :
391	שאלות :
392	תשובות סופיות :
393	תרגול נוסף :
393	תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית :
405	תשובות סופיות :
410	תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית :
420	תשובות סופיות :
425	תרגילים העוסקים בפונקצית שורש (אי-רציונאלית) :
448	תשובות סופיות :



## פרק 19

# חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות

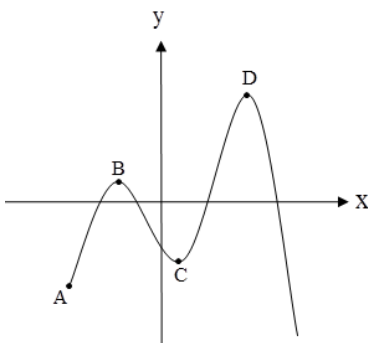
### חקירת פולינום:

**נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):**

מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D.

מינימום או מקסימום קצה - A.

מינימום או מקסימום מוחלט - D.



**נקודות קיצון מקומיות:**

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.

בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית – נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

**מציאת נקודות קיצון מקומיות:**

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- $x$  של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- $x$  מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- $y$ .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

## שאלות:

- (1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .  
א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.  
ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (3) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .  
א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.  
ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ .  
א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה.  
ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (5) לפונקציה  $f(x) = ax - x^3 - 5$  יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x = -1$ .  
מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .
- (6) לפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 1$  יש נקודת קיצון ששיעורה  $(2, 3)$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (7) לפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4x$  יש נקודת קיצון ב- $x = -1$  ו- $x = 4$ .  
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- $y$  של שתי נקודות הקיצון.
- (8) לפונקציה  $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$  יש נקודות קיצון ששיעוריה  $(2, 3)$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

**9) נתונה הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .**

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**10) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .**

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**11) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .**

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**12** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**13** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

- (1)  $\max(5, 25)$ .
- (2) א.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$  ב. עולה:  $x > 2$ ,  $x < -2$ , יורדת:  $-2 < x < 2$ .
- (3) א.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$  ב. עולה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$  יורדת:  $0 < x < \sqrt{5}$ ,  $x < -\sqrt{5}$ .
- (4) א.  $\min(3, 5)$  ב. עולה:  $x > 3$  יורדת:  $x < 3$ ,  $x \neq 0$ .
- (5)  $a = 3$ .
- (6)  $a = -1$ ,  $b = 3$ .
- (7)  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = -\frac{3}{2}$ ,  $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$ ,  $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$ .
- (8)  $a = 2$ ,  $b = -16$ .

9) א. כל  $x$  ב.  $\max(5, 25)$

ג. עלייה:  $x < 5$  ירידה:  $x > 5$  ד.  $(0, 0)$ ,  $(10, 0)$ .

10) א. כל  $x$  ב.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$

ג. עלייה:  $x < -2$ ,  $x > 2$  ירידה:  $-2 < x < 2$  ד.  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{12}, 0)$ ,  $(-\sqrt{12}, 0)$ .

11) א. כל  $x$  ב.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$

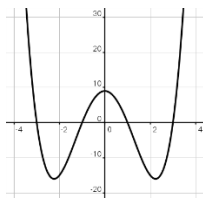
ג. עולה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$  יורדת:  $0 < x < \sqrt{5}$  או  $x < -\sqrt{5}$

ד.  $(0, 9)$ ,  $(\pm 1, 0)$ ,  $(\pm 3, 0)$ .

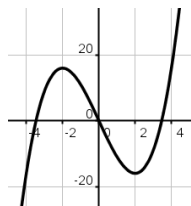
12) א. כל  $x$  ב.  $\min(3, 5)$  ג. עולה:  $x > 3$  יורדת:  $x < 3$  ד.  $(0, 32)$ .

13) א. כל  $x$  ב. אין ג. עולה לכל  $x$  ד.  $(0, 0)$ .

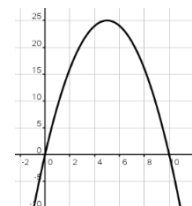
### סקיצות לשאלות החקירה:



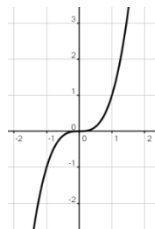
(11)



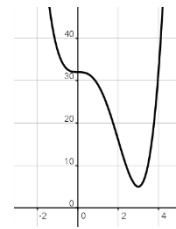
(10)



(9)



(13)



(12)

## פונקציה זוגית ואי-זוגית:

### הגדרות:

- פונקציה  $f(x)$  תיקרא זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(x) = f(-x)$ .
- פונקציה  $f(x)$  תיקרא אי-זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(-x) = -f(x)$ .

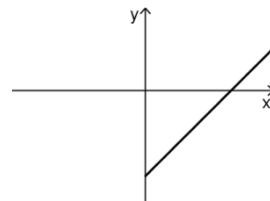
### שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

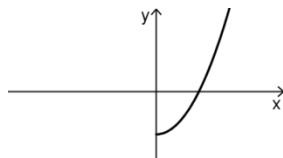
- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = 3x - 5$          | ב. $f(x) = 3x^2$            |
| ג. $f(x) = 2x^3$            | ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$      |
| ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$ | ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$ |

2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

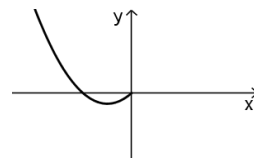
א.



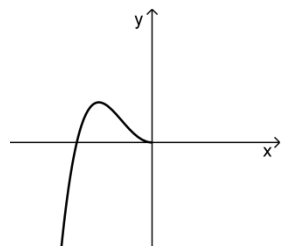
ב.



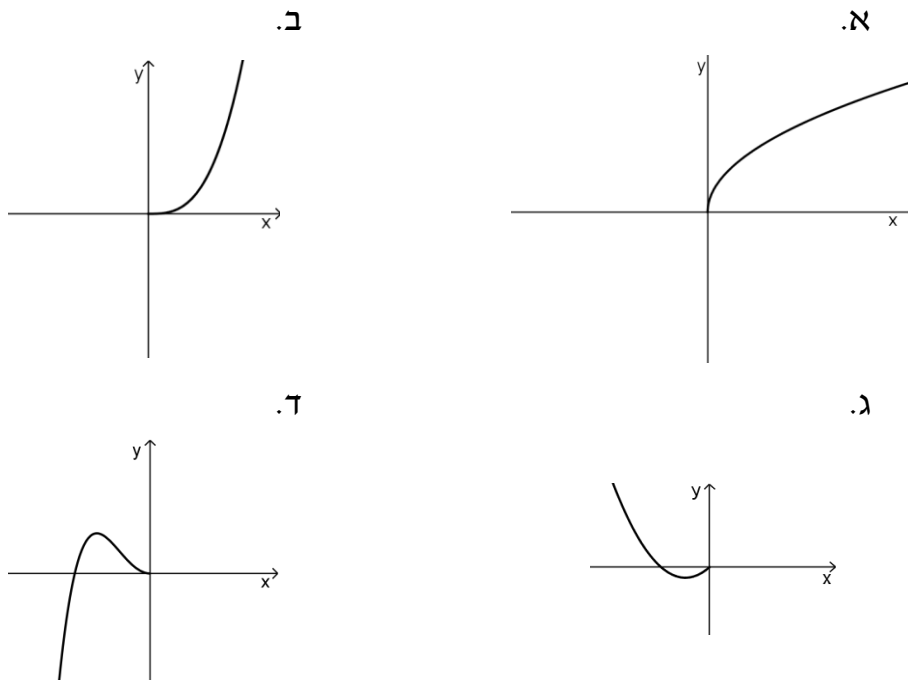
ג.



ד.



3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ .  
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



- 4) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^4 - 4x^2$  בתחום:  $[0:3]$ .
- חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:
    - תחום הגדרה.
    - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
    - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
    - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
    - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.
  - התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-3:3]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-3:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

(5) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:4]$  לפי הסעיפים הבאים:  
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$ , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?  
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום  $[-4:0]$ .
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

(6) לפניך הפונקציה:  $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$ ,  $a$  פרמטר.

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. חקור את הפונקציה בתחום:  $[-2:0]$  לפי הסעיפים הבאים:  
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?  
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום:  $[-2:2]$ .

(7) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x^3 - 9x$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:5]$  לפי הסעיפים הבאים:  
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-5:5]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-5:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).



- 8) לפי הפונקציה הבאה:  $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$ , פרמטר  $b$ .  
 ידוע כי הישר  $y = 2x$  עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה  
 שמקיימות:  $f'(x) = 0$ .
- מצא את  $b$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
  - חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:2]$  לפי הסעיפים הבאים:
    - תחום הגדרה.
    - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
    - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
    - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
    - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.  
 נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
  - הסתמך על ממצאיך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום  $[-2:0]$ .

9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$ .

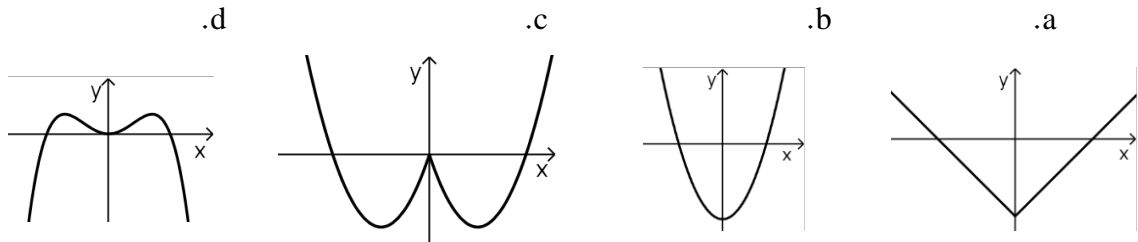
- חקור את הפונקציה בתחום:  $[-4:0]$  לפי הסעיפים הבאים:
  - תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן  
 (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?  
 נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממצאיך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום  $[0:4]$ .

## תשובות סופיות:

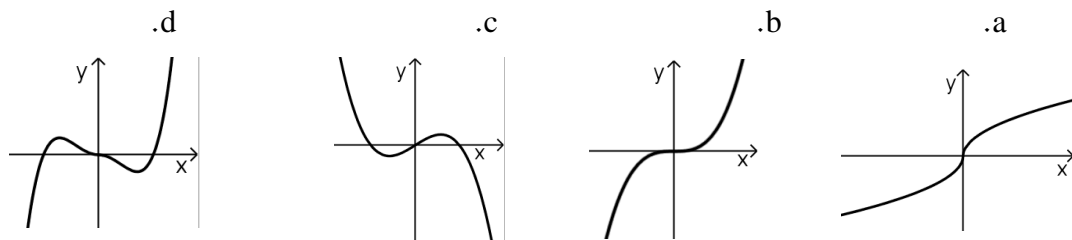
הערה: בסוף התשובות מופיעים כל הסרטוטים לשאלות החקירה במרכז.

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

(2) להלן הגרפים:



(3) להלן הגרפים:



(4) א. i.  $0 \leq x \leq 3$ . ii.  $(-2, 0), (0, 0), (2, 0)$ . iii.  $\max(3, 45)$  קצה,  $\min(\sqrt{2}, -4)$ ,

$\max(0, 0)$  קצה. iv. עולה:  $\sqrt{2} < x < 3$ , יורדת:  $0 < x < \sqrt{2}$ . v. סרטוט בסוף.

ב. סעיף הוכחה. ג. סרטוט בסוף.

(5) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 4$ , חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $(0, 3)$ ,

נקודות קיצון:  $\max(4, 4051)$  קצה,  $\min(1, 1)$ ,  $\max(0, 3)$  קצה,

עולה:  $1 < x < 4$ , יורדת:  $0 < x < 1$ , סרטוט בסוף.

ב. זוגית. ג. סרטוט בסוף. ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

(6) א.  $a = 0$ . ב. תחום הגדרה:  $-2 \leq x \leq 0$ , חיתוך עם הצירים:  $(0, 0)$ ,  $(-1.225, 0)$ ,

נקודות קיצון:  $\min(-2, -80)$  קצה,  $\max(-1, 1)$ ,  $\min(0, 0)$  קצה,

עולה:  $-2 < x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ . סרטוט בסוף.

ג. זוגית. ד. סרטוט בסוף.

(7) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 5$ , חיתוך עם הצירים:  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$ ,

נקודות קיצון:  $\max(5, 330)$  קצה,  $\min(1, -6)$ ,  $\max(0, 0)$  קצה,

עולה:  $1 < x < 5$ , יורדת:  $0 < x < 1$ , סרטוט סוף.

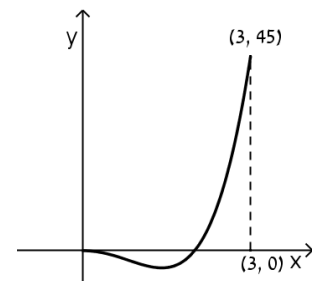
ב. אי-זוגית. ג. סרטוט בסוף.

- 8) א.  $b = 0$  ב.  $0 \leq x \leq 2$  ii.  $(0,0), (1.29,0)$  iii.  $\min(2, -56)$  קצה,  $\max(1, 2)$ ,  
 iv.  $\min(0,0)$  קצה. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $1 < x < 2$ . v. סרטוט בסוף.  
 ג. אי-זוגית. ד. סרטוט בסוף.
- 9) א.  $-4 \leq x \leq 0$  ii.  $(-1,0), (0,0)$  iii.  $\min(0,0)$  קצה,  $\max(-0.723, 0.207)$ ,  
 iv.  $\min(-4, -5460)$  קצה. עולה:  $-4 < x < -0.723$ , יורדת:  $-0.723 < x < 0$ .  
 v. סרטוט בסוף. ג. אי-זוגית. ד. סרטוט בסוף.

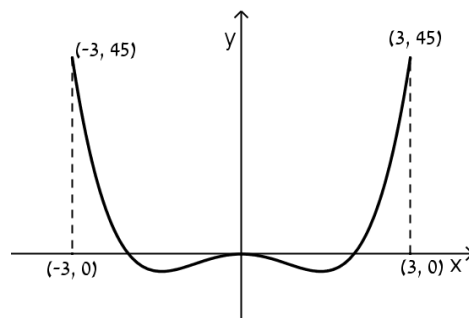
#### סרטוטים:

#### שאלה 4:

סעיף א'

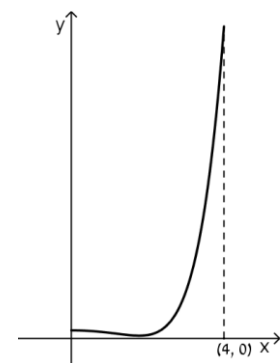


סעיף ג'

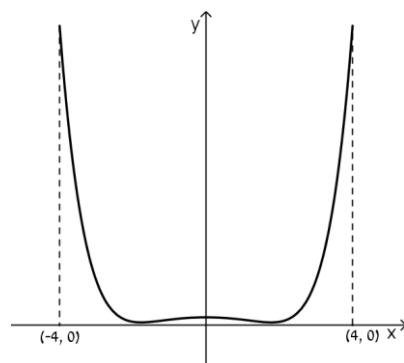


#### שאלה 5:

סעיף א'

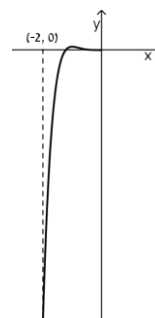


סעיף ג'

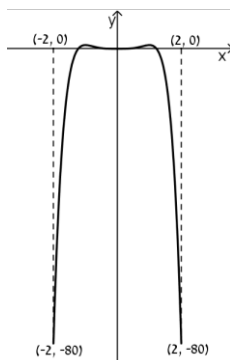


שאלה 6:

סעיף א'

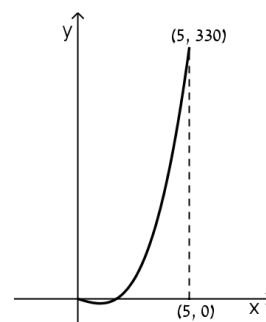


סעיף ג'

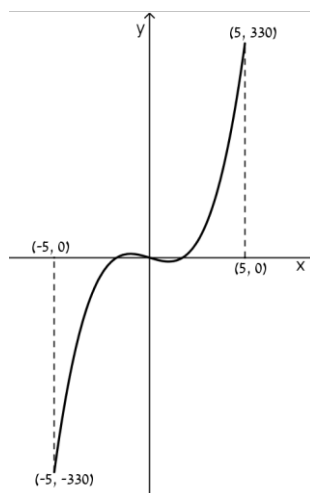


שאלה 7:

סעיף א'

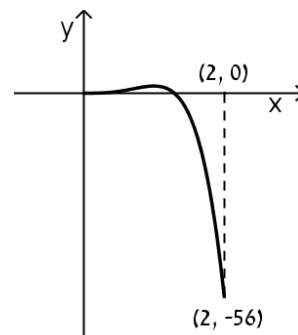


סעיף ג'

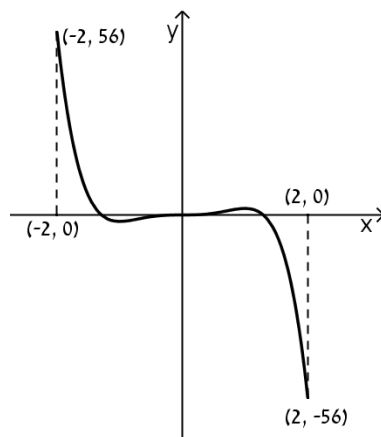


שאלה 8:

סעיף א'

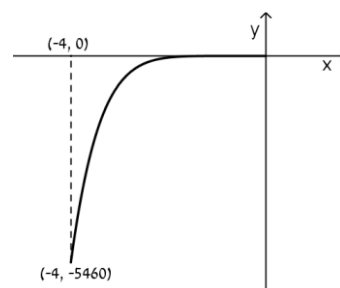


סעיף ג'

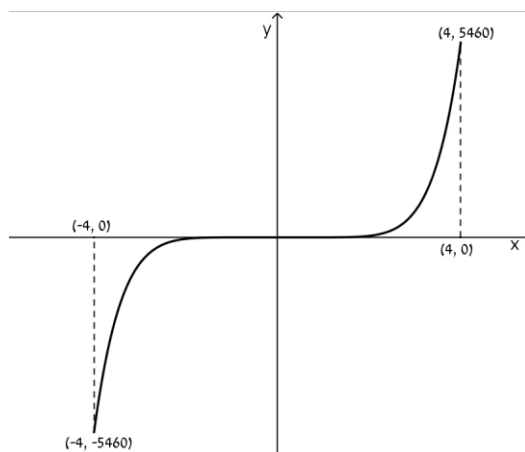


שאלה 9:

סעיף א'



סעיף ג'



## חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש:

### סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

- תחום הגדרה.
- נקודות קיצון.
- תחומי עלייה וירידה.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- שרטוט.

### תחום הגדרה של פונקציה:

- כל פולינום מוגדר לכל  $x$ .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

### אסימפטוטות:

- **אסימפטוטה אנכית:**  
בעבור ערכי  $x$  שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.  
כאשר ערך  $x$  מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.  
אם אחרי הצמצום אותו ערך של  $x$  עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך  $x$  זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

- **אסימפטוטה אופקית:**

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$  (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם  $m > n$ , לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם  $m = n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = \frac{a}{b}$ .
- אם  $m < n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 0$ .

## שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

ב.  $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$

א.  $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$

ד.  $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$

ג.  $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

ו.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$

ה.  $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$

ז.  $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

ב.  $f(x) = 2\sqrt{x-3}$

א.  $f(x) = \sqrt{x}$

ד.  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ג.  $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$

ו.  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

ה.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$

ז.  $f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $f(x) = x^2 - 4x - 12$ .

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ .

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $f(x) = \frac{5x^2 + 1}{x^2 - 9}$ .

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 + 3x^2}$ .

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2x - 15}$ .

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^3 - 5x + 1}{1 + 2x^2}$ .

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax + b}{x - b}$ .

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ .

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 12}$ .

(14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2}$ .

(15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 4x}$ .

(16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

(17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$ .

(18) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$ .



19 נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{ax^2 - x + b}$  .

לפונקציה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 2$  ואסימפטוטה אנכית שמשוואתה  $x = -1$  . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו-  $b$  .

20 נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{ax + 8}{x + b\sqrt{x}}$  .

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה  $(16, 2)$  .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו-  $b$  .

21 נתונה הפונקציה :  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

22 נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$  . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

23 נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$  . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(24)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(25)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(26)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(27)** נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(28)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{6-x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

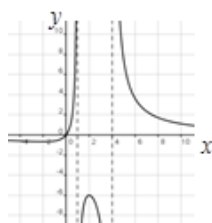
- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

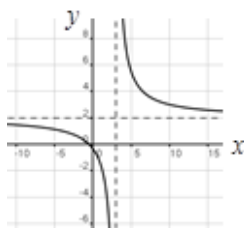
- (1) א. כל  $x$     ב. כל  $x$     ג.  $x \neq 3$     ד.  $x \neq \pm 1$     ה.  $x \neq 0, 2, -2$   
 ו.  $x \neq 4, -2$     ז. כל  $x$
- (2) א.  $x \geq 0$     ב.  $x \geq 3$     ג.  $x \leq \frac{1}{2}$     ד.  $x > -4$     ה.  $x \leq 5$  או  $x \geq 2$   
 ו.  $x > 3$  או  $-3 < x < 0$     ז.  $x \leq 2$  וגם  $x \neq -2, 1$
- (3) א.  $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$
- ב. תחומי עלייה:  $-3 < x < 3$  וגם  $x \neq 1$ , תחומי ירידה:  $3 < x \neq 9$  או  $x < -3$ .
- (4) אין.
- (5) אופקית:  $y = 3$  אנכית:  $x = 2$ .
- (6) אופקית:  $y = 5$  אנכית:  $x \pm 3$ .
- (7) אופקית:  $y = \frac{2}{3}$ .
- (8) אופקית:  $y = 0$ , אנכית:  $x = 5$ ,  $x = -3$ .
- (9)  $x = 0, y = 0$ .
- (10) אין.
- (11) אופקית:  $y = a$ , אנכית:  $x = b$ .
- (12) אופקית  $y = 1$  אנכית:  $x = 1$ , נקודת אי הגדרה:  $(2, 4)$ .
- (13)  $x = 4, y = 1$ .
- (14) אין, לפונקציה יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה הם  $(2, 10)$ .
- (15) אופקית:  $y = \frac{1}{2}$ , אנכית:  $x = 2$ .
- (16)  $x = 0, y = 0$ .
- (17)  $x = -1, y = 0$ .
- (18) אופקית:  $y = 0$ , אנכית:  $x = 2$ .
- (19)  $b = -3, a = 2$ .
- (20)  $b = 1, a = 2$ .
- (21) א.  $x \neq 0$     ב.  $\min(1, 2), \max(-1, -2)$   
 ג. תחומי עלייה:  $x > 1$  או  $x < -1$ , תחומי ירידה:  $-1 < x < 1$ ,  $x \neq 0$   
 ד. אין.    ה.  $x = 0$ .

- (22)** א.  $x \neq 3$       ב. אין.      ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה.
- ד.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$       ה.  $y = 2, x = 3$ .
- (23)** א.  $x \neq 1, x \neq 4$       ב.  $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$       ג. תחומי עלייה:  $-2 < x < 2$ ,  $x \neq 1$ , תחומי ירידה:  $2 < x \neq 4$  או  $x < -2$
- ד.  $(0, 0)$       ה.  $y = 0, x = 1, x = 4$ .
- (24)** א. כל  $x$       ב.  $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$       ג. תחומי עלייה:  $x > 1$  או  $x < -3$ , תחומי ירידה:  $-3 < x < 1$
- ד.  $(3, 0), (0, 0)$       ה.  $y = 1$ .
- (25)** א.  $x \neq \frac{1}{3}, x \neq 3$       ב.  $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$       ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  וגם  $x \neq \frac{1}{3}$  תחומי ירידה:  $1 < x \neq 3$  או  $x < -1$
- ד.  $(0, 2)$       ה.  $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$ .
- (26)** א.  $x \leq 3$       ב.  $\min(3, 0)$       ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה
- ד.  $(3, 0)$
- (27)** א.  $x \leq 1$       ב.  $\min(2, -2), \max(1, 0)$  קצה      ג. תחומי עלייה:  $x > 2$ , תחומי ירידה:  $1 < x < 2$
- ד.  $(1, 0), (4, 0)$ .
- (28)** א.  $x \leq 6$       ב.  $\min(6, 0), \max(4, 4\sqrt{2})$  קצה      ג. עולה:  $x < 4$ , יורדת:  $4 < x < 6$
- ד.  $(0, 0), (6, 0)$ .
- (29)** א.  $x \leq 0$       ב.  $\min(0, 0), \max(1, 1)$  קצה      ג. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $x > 1$
- ד.  $(0, 0)$ .
- (30)** א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$       ב.  $\max(-3, 0)$  קצה,  $\min(3, 0)$  קצה      ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3, x \neq 0$
- ד.  $(-3, 0), (3, 0)$       ה.  $x = 0$ .

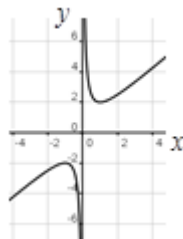
סקיצות לשאלות החקירה:



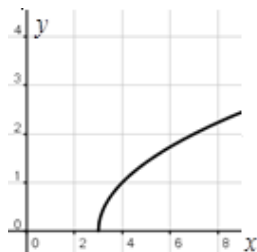
(23)



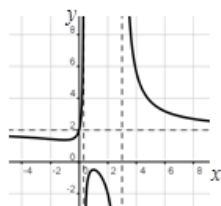
(22)



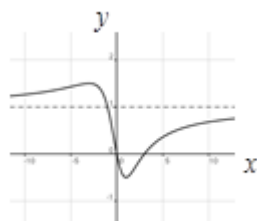
(21)



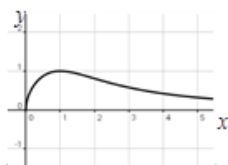
(26)



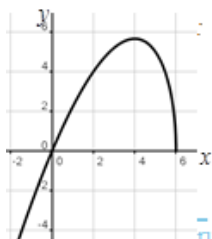
(25)



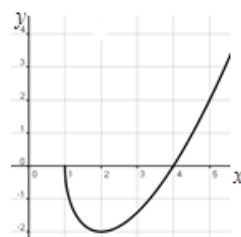
(24)



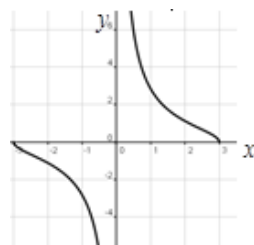
(29)



(28)



(27)



(30)

## חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "  $y$  :

אם הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת קיצון אז :

- אם  $f''(x_1) > 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מינימום.
- אם  $f''(x_1) < 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מקסימום.

## שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^3 - 12x$ .

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^2 - 6x - 16$ .

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^3 - 3b^2x$ ,  $b > 0$ , פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$  ( $a > 0$ ). חקור לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות :

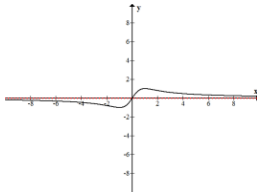
$$\min(2, -16), \max(-2, 16) \quad (1)$$

$$\min(3, -25) \quad (2)$$

$$\min(b, -2b^3), \max(-b, 2b^3) \quad (3)$$

$$\max\left(a, \frac{1}{a}\right), \min\left(-a, -\frac{1}{a}\right) \quad (4) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב.}$$

ג. תחומי עלייה:  $-a < x < a$  תחומי ירידה:  $x < -a$  או  $x > a$



ד.  $(0,0)$  ה. אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$



## תרגול נוסף:

\*הערה: לשאלות בחוץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

### תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

#### תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

- |   |  |                                   |
|---|--|-----------------------------------|
| (1) $y = x^2$                               | (2) $y = (x-1)^2$  | (3) $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$     |
| (4) $y = 3x^3 - 3x$                         | (5) $y = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$                             | (6) $y = x^2(2x+1)^2$             |
| (7) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$ | (8) $y = \frac{5}{7}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{2}x$ | (9) $y = \frac{4x^2 - 2x + 6}{2}$ |
| (10) $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 6x - 9}{5}$    | (11) $y = x^4 + 1 + \frac{x^3 + 9x}{3}$                  | (12) $y = \frac{x(x+7)^2}{2}$     |
| (13) $y = (x-1)^6$                          | (14) $y = (3x+2)^8$                                      | (15) $y = (4x-5)^4$               |

תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל:  $f'(x_0) = m$ .

(16) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

- |  |  |
|--|--|
| א. $x=1, f(x) = 2x^2 - x$  | ב. $x=7, f(x) = x^3 + 5x^2 - 5x$                 |
| ג. $x=-1, f(x) = x(4x-3)^3$  | ד. $x=2, f(x) = \frac{x^5 - 15x^3 + 20x + 4}{5}$ |
| ה. $x=0, f(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}$ | ו. $x=-1, f(x) = x(x-3)(x^2+1)$                  |

(17) לפניך מספר פונקציות. לכל פונקציה מצא את שיעורי הנקודות עבורם שיפוע המשיק הוא המצוין לידה.

- |                              |                                 |
|------------------------------|---------------------------------|
| א. $m=13, f(x) = 5x^2 + 3x$  | ב. $m=0, f(x) = x(x-2)^2$       |
| ג. $m=20, f(x) = 2x^3 + 14x$ | ד. $m=6, f(x) = (x^2 + 6)(x-2)$ |

**(18) ענה על הסעיפים הבאים :**

א. מצא נקודה על גרף הפונקציה:  $y = 3x^2 - x - 2$  אשר המשיק העובר דרכה

מקביל לישר:  $y = 5x + 2$ .

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה:  $y = x^3 + 3x^2 + 2x$  אשר המשיק העובר דרכה

מקביל לישר:  $y + x = 3$ .

**(19) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = 3x^2 - 12x$ .**

הראה כי שיפוע המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הם מספרים נגדיים ומצא את הזוויות שכל משיק יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

**תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה:**  $y - y_1 = m(x - x_1)$ ,

**כאשר:  $(x_1, y_1)$  - נקודת ההשקה ו-  $m$  שיפוע המשיק.**

**(20) מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן :**

ב.  $x = -1, y = x^3 - 4x$

א.  $x = 3, y = x^2 - 4x - 5$

ד.  $x = 1, y = 3x^4 + 4x^5 + 5x$

ג.  $x = 0, y = x(x + 5)^2$

ו.  $x = 1, y = \frac{4x^7}{7} - \frac{2x^{10}}{5}$

ה.  $x = -3, y = \frac{x^3 + 6x^2 - 9x}{3}$

ח.  $x = 2, y = x(x - 1)(3x + 8)$

ז.  $x = 0, y = (3x^2 - 4)(6 - x)$

**(21) נתונה הפונקציה:  $y = x^3 - 3x + 12$ . מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .**

**(22) נתונה הפונקציה:  $y = x^2 - 7x + 10$ . מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה העוברים דרך נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .**

**(23) נתונה הפונקציה:  $y = 2x^2 + 5x + 3$  ונתון הישר:  $y = 4x + 4$ .**

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שמצאת.

**(24)** נתונה הפונקציה:  $y = 4x^3$  ונתון הישר:  $y = 4x$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.  
ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שמצאת.

**(25)** נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 + 3x - 4$  ו-  $g(x) = 5x - x^2$ .

- א. מצא את משוואות המשיקים לכל הפונקציה העוברים דרך הנקודה שבה  $x = 1$ .  
ב. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים שמצאת בסעיף הקודם.

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 3$ .

- הישר  $y = 3$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בשלוש נקודות.  
א. מצא את נקודות החיתוך בין הפונקציה והישר.  
ב. מצא את משוואות המשיקים בנקודות החיתוך.

**תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:**

**(27)** ענה על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x^2 + x + 3$ .  
מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה ששיפועו:  $m = 9$ .  
ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 + 2x^2$ .  
מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה ששיפועם:  $m = -1$ .  
ג. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x(x+4)^2$ .  
מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה ששיפועם:  $m = 0$ .

**(28)** ענה על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^4 + 12x + 4$ .  
מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר:  $y = 44x + 1$ .  
ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$  המקבילים לישר:  $3y - 12x = 5$ .

29) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה :  $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 4x + 1$  בעלי שיפוע 2.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה :  $y = -2x^3 - 3x^2 + 10x + 3$  ששיפועם הוא :  $m = -2$ .

**תרגילים עם פרמטרים :**

30) נתונה הפונקציה :  $y = ax^2 + 4x + 5$  . ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  הוא 8. מצא את  $a$ .

31) נתונה הפונקציה :  $y = x^2 + a$  . ידוע כי לגרף הפונקציה יש משיק שמשוואתו :  $y = 2x - 2$  .  
א. מצא את נקודת ההשקה.  
ב. מצא את  $a$ .

32) נתונה הפונקציה :  $y = x^3 + 6x^2 + ax$  . ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  הוא 5. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.

33) נתונה הפונקציה :  $y = \frac{x^2}{A} + 8x + 20$  . ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך אחת מנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא :  $y = 12x + 24$  .  
א. מצא את  $A$ .

ב. מצא את משוואת המשיק העובר דרך נקודת החיתוך השנייה של הפונקציה עם ציר ה- $x$  .

ג. מצא את הזווית החדה שיוצר המשיק שמצאת בסעיף הקודם עם ציר ה- $x$  .

34) נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = (x-1)(x^2 + a)$  . ידוע כי :  $f'(1) = 2$  . מצא את  $a$  .

**(35)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^4}{A} + 2x^3 + 4x^2 + 4$ .

א. ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -2$  מקביל לציר ה- $x$ . מצא את  $A$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה משיקים נוספים המקבילים לציר ה- $x$ ? אם כן, מצא את המשוואות שלהם.

**(36)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^5 + Bx^3 + 4x$ .

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  מקביל לישר:  $y = 24x$ . א. מצא את  $B$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. האם יש משיק נוסף לגרף הפונקציה המקביל לישר  $y = 24x$ ? במידה וכן מצא את משוואתו.

**(37)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = Ax^2 + Bx + 5$ . ידוע כי:  $f(1) = 12$  וגם:  $f'(1) = 8$ . מצא את  $A$  ו- $B$ .

**(38)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + Ax + C$ .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה:  $y = 5$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודה זו הוא 4. מצא את  $A$  ו- $C$ .

**(39)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + 8$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה שבה  $x = -2$  היא:  $y = 12x + 28$ . מצא את  $A$  ו- $B$ .

**(40)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + 10$ . שיפוע הפונקציה בנקודה  $(1, 18)$  הוא 18.

א. מצא את  $A$  ו- $B$ .

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- $x$ .

**(41)** נתונות הפונקציות:  $f(x) = 3x^2 + Ax$  ו- $g(x) = x^2 + B$ .

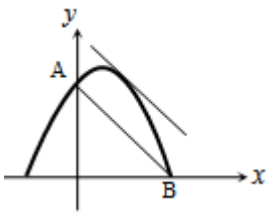
ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה:  $x = 1$  ולשתיהן יש את אותו השיפוע בנקודה שבה  $x = -0.25$ . מצא את  $A$  ו- $B$ .

42 נתונות הפונקציות:  $f(x) = Ax^2 + 10x$  ו-  $g(x) = x^2 + Bx - 16$ .

ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה:  $x = -1$ .

כמו כן לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע בעבור  $x = -8.5$ . מצא את A ו-B.

### תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:



43 באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $y = -x^2 + 6x + 16$ .

הנקודה A היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y והנקודה B היא נקודת החיתוך החיובית של הפונקציה עם ציר ה-x.

א. מצא את משוואת המיתר העובר דרך הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מצא את הזווית שיוצר המשיק שמצאת בסעיף הקודם עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.



44 נתונה הפרבולה:  $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x.

ב. דרך נקודות החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה-x מעבירים משיקים. מצא את משוואות המשיקים הללו.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים וציר ה-x.

ה. חשב את זווית המשולש הנוצר בין המשיקים וציר ה-x, איזה משולש זה?

45 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 27x$ .

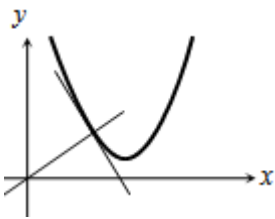
א. מצא את שיעורי הנקודות שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה-x.

ב. כתוב את משוואות המשיקים העוברים דרך הנקודות שמצאת.

ג. חשב את שטח המלבן הנוצר בין שני המשיקים שמצאת והאנכים לציר ה-x היוצאים מנקודות ההשקה.

46 נתונות הפונקציות:  $f(x) = 8 - x^2$  ו-  $g(x) = Ax^2 + 15.5x - 1$ .  
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה:  $x = 1$ .  
א. מצא את A.

ב. הראה כי המשיקים לכל פונקציה בנקודת החיתוך שבה  $x = 1$  מאונכים זה לזה.  
(תזכורת: השיפועים  $m_1, m_2$  של שני ישרים מאונכים מקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = -1$  - מכפלתם שווה ל-1-).



47 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 2x^2 - 10x + 13$ .  
א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה שבה  $x = 2$ .

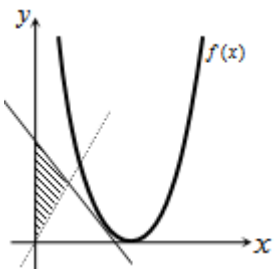
ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה העובר דרך נקודת ההשקה של המשיק שמצאת.

ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין הנורמל, המשיק והצירים. (היעזר באיור).

48 נתונה הפונקציה:  $f(x) = Ax^2 - 6x + 9$ . שיפוע הפונקציה בנקודה שבה  $x = 3$  הוא אפס.  
א. מצא את A.

ב. הראה כי הפונקציה משיקה לציר ה- $x$ .

ג. מעבירים את הישר  $y = 1$  החותך את הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות.  
מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם הישר.



49 נתונה הפונקציה:  $f(x) = (2x - 5)^8$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של משיק זה עם הישר  $y = 17x$ .

ג. חשב את שטח המשולש שנוצר בין המשיק, הישר וציר ה- $y$  (ראה איור).

ד. חשב את זווית המשולש הנ"ל (היעזר בשיפועי הישר והמשיק).

50 נתונה הפונקציה:  $f(x) = a(x-b)^2$ ,  $a, b \neq 0$ .

ידוע כי ערך הנגזרת הוא אפס כאשר  $x=1$ .

כמו כן הישר  $y = 15x - 27$  משיק לפונקציה בנקודה שבה:  $x=2$ .

א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

ב. מצא שתי נקודות על הפונקציה  $f(x)$  ועל הפונקציה:  $g(x) = 7.5(x-1)^4 - 24$ .

בעבורה שיפוע המשיק זהה לשני הגרפים.

תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון לפי הכלל:  $f'(x) = 0$ , סיווג

ומציאת תחומי עלייה וירידה:

51 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

ב.  $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 8$

א.  $y = x^2 - 6x + 8$

ד.  $y = x^5 + 80x$

ג.  $y = x(x+3)^2$

ה.  $y = \frac{x^5}{5} - \frac{26x^3}{3} + 25x$

52 לפניך מספר פונקציות. רשום בעבור כל פונקציה את תחומי העלייה והירידה שלה:

ב.  $y = x^3 - 12x$

א.  $y = x^2 - 7x + 10$

ד.  $y = 16 - x^2 + 2x^4$

ג.  $y = x^2(x-1)$

ו.  $y = \frac{x^3 + 6x^2 + 15x}{3}$

ה.  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

ח.  $y = (4-x)^7$

ז.  $y = (2x-5)^6$

53 נתונה הפונקציה הבאה:  $y = x^4 - 3x^3 + 4x$ .

א. הראה כי הנקודה שבה:  $x=2$  היא נקודת קיצון.

ב. כתוב את הנגזרת השנייה של הפונקציה.

ג. קבע על פי הנגזרת השנייה את סוג הקיצון של נקודה זו.



54) נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + 6x^2$ .

- א. הראה כי יש לפונקציה נקודת קיצון על ציר ה- $x$  וקבע את סוגה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וכתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

55) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את הערך הגדול ביותר של הפונקציה:  $y = 27 - x^2$ .
- ב. מצא את הערך הקטן ביותר של הפונקציה:  $y = x^4 - 8x^2 + 10$ .

56) נתונה הפונקציה:  $y = 4x^3 + x$ .

- א. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.
- ב. הראה כי הפונקציה עולה תמיד.
- ג. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

**תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון מוחלטות כאשר נתונה פונקציה בקטע מסוים:**

57) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות בעבור כל פונקציה בתחום הנתון לידה:

- |  |  |
|--|--|
| א. $1 \leq x \leq 7, y = x^2 - 2x$         | ב. $-4 \leq x \leq 4, y = 16 - x^2$            |
| ג. $-2 \leq x \leq 4, y = x^3 - 3x^2 - 9x$ | ד. $-1 \leq x \leq 5, y = -x^3 + 7.5x^2 - 12x$ |
| ה. $-6 \leq x \leq 6, y = x^4 - 50x^2 + 3$ |  |

58) נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + 6x^2 - 9x - 6$  בתחום הסגור:  $[0, 5]$ .

- א. מצא את נקודות קיצון הקצה בתחום הסגור הנ"ל.
- ב. מצא את נקודות הקיצון המקומיות בתחום הנ"ל.
- ג. קבע אלו נקודות הן נקודות הקיצון המוחלטות.

59) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 36x$  בתחום:  $[-8, 6]$ .

- א. מצא את שיעורי נקודות קיצון הקצה בתחום הנתון.
- ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון המקומיות.
- ג. מצא אלו נקודות הן נקודות הקיצון המוחלטות בתחום הנתון.

### תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה פולינומית:

60 חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- ii. תחום הגדרה.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- iv. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- vi. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $y = x^2 - 8x + 12$	ב. $y = x^3 - 12x$
ג. $y = x(x+8)^2$	ד. $y = x(x-12)(2x-9)$
ה. $y = x^4 - 4x$	ו. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$
ז. $y = (3x-1)^6$	ח. $y = (6-x)^8$

### תרגילים שונים העוסקים בחקירות:

61 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 3$ .

הישר  $y = 5$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$ .

- א. מצא את הפרמטר  $a$ .
- ב. מצא את הנקודות המקיימות  $f'(x) = 0$ .
- ג. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

62 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + a$ . ידוע כי הפונקציה עוברת בראשית הצירים

- א. מצא את הפרמטר  $a$ .
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

63 נתונה הפונקציה:  $y = (x-2)(x+1)^2$

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

**64** נתונה הפונקציה:  $y = (x-3)(2-x)^2$ .

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**65** נתונה הפונקציה:  $y = 2x^2(x+a)^2$ ,  $a > -6$ .

ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון שבה  $x = 4$

- א. מצא את הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה וכתוב את תחומי החיוביות והשליליות שלה.

**66** לגרף הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$  מעבירים משיק  $y = 31x + 6$  החותך אותו

בנקודה שבה  $x = 6$ .

- א. מצא את  $k$ .
- ב. מצא את נקודת ההשקה של המשיק עם הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון?
- ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

**67** נתונה הפונקציה:  $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ .

ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

- א. מצא את  $d$ .
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

68 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3(3x-5)^4$ .

- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

- (1)  $y' = 2x$  (2)  $y' = 2x - 2$  (3)  $y' = 3x^2 - 8x + 4$
- (4)  $y' = 9x^2 - 3$  (5)  $y' = 4x^3 + 4x$  (6)  $y' = 16x^3 + 12x^2 + 2x$
- (7)  $y' = x + \frac{1}{3}$  (8)  $y' = 5x^6 - 4x^4 + \frac{1}{2}$  (9)  $y' = 4x - 1$
- (10)  $y' = \frac{3x^2 - 6x - 6}{5}$  (11)  $y' = 4x^3 + x^3 + 3$  (12)  $y' = \frac{3x^2 + 28x + 49}{2}$
- (13)  $y' = 6(x-1)^5$  (14)  $y' = 24(3x+2)^7$  (15)  $y' = 16(4x-5)^3$
- (16) א. 3 ב. 212 ג. 105 ד. -16 ה. 0 ו. -18
- (17) א. (1,8) ב.  $(2,0)\left(\frac{2}{3}, 1\frac{5}{27}\right)$  ג.  $(-1,-16)$  ד.  $(0,-12)\left(\frac{4}{3}, -5\frac{5}{27}\right)$
- (18) א. (1,0) ב. (-1,0)
- (19)  $m = \pm 12, 97.64^\circ, 85.24^\circ$
- (20) א.  $y = 2x - 14$  ב.  $y = -x + 2$  ג.  $y = 25x$  ד.  $y = 29x - 17$  ה.  $y = -6x$
- ו.  $y = \frac{6}{35}$  ז.  $y = 4x - 24$  ח.  $y = 48x - 68$
- (21)  $y = -3x + 12$
- (22)  $y = -3x + 6, y = 3x - 15$
- (23) א. (0.5,6), (-1,0) ב.  $y = x + 1, y = 7x + 2.5$
- (24) א. (-1,-4), (1,4), (0,0) ב.  $y = 0, y = 12x + 8, y = 12x - 8$
- (25) א.  $y = 5x - 5, y = 3x + 1$  ב. (3,10)
- (26) א. (0,3), (1,3), (3,3) ב.  $y = 3x + 3, y = -2x + 5, y = 6x - 15$
- (27) א.  $y = 9x - 1$  ב.  $y = -x, y = -x - \frac{4}{27}$  ג.  $y = 0, y = -9\frac{13}{27}$
- (28) א.  $y = 44x - 44$  ב.  $y = 4x - 4, y = 4x + 5\frac{13}{27}$
- (29) א.  $y = 2x - 9, y = 2x + 4.5$  ב.  $y = -2x + 10, y = -2x - 17$

30.  $a = 1$  .
31. א.  $(1, 0)$  . ב.  $-1$  .
32.  $a = 5$  ,  $y = x^3 + 6x^2 + 5x$  .
33. א.  $-1$  . ב.  $y = -12x + 120$  . ג.  $85.24^\circ$  .
34.  $a = 1$  .
35. א.  $A = 4$  . ב. כ.  $y = 4$  : .
36. א.  $B = 5$  . ב.  $y = 24x - 14$  . ג.  $y = 24x + 14$  : .
37.  $A = 1$  ,  $B = 6$  .
38.  $A = 4$  ,  $C = 5$  .
39.  $A = 2$  ,  $B = 3$  .
40. א.  $A = 1$  ,  $B = 7$  .
41.  $A = 1$  ,  $B = 3$  .
42.  $A = 2$  ,  $B = -7$  .
43. א.  $y = -2x + 16$  . ב.  $y = -2x + 32$  . ג.  $116.57^\circ$  .
44. א.  $(2, 0)$  ,  $(6, 0)$  . ב.  $y = -4x + 14$  ,  $y = 4x - 8$  . ג.  $(4, 8)$  . ד.  $16$  .
- ה.  $75.96^\circ$  ,  $75.96^\circ$  ,  $28.08^\circ$  .
45. א.  $(3, -54)$  ,  $(-3, 54)$  . ב.  $y = \pm 54$  . ג.  $648$  .
46. א.  $A = -7.5$  .
47. א.  $y = -2x + 5$  . ב.  $y = 0.5x$  . ג.  $1.25$  .
48. א.  $A = 1$  . ג.  $y = -2x + 5$  ,  $y = 2x - 7$  .
49. א.  $y = -16x + 33$  . ב.  $(1, 17)$  . ג.  $16.5$  . ד.  $3.58^\circ$  ,  $3.37^\circ$  ,  $173.06^\circ$  .
50. א.  $a = 3$  ,  $b = 1$  . ב.  $(3, 96)$  ,  $(1, 0)$  .
51. א.  $(3, -1)$  . ב.  $(3, -10)$  ,  $\left(-\frac{1}{3}, 8\frac{14}{27}\right)$  . ג.  $(-3, 0)$  ,  $(-1, -4)$  .
- ד. אין קיצון . ה.  $\left(5, -333\frac{1}{3}\right)$  ,  $\left(-5, 333\frac{1}{3}\right)$  ,  $\left(1, 16\frac{8}{15}\right)$  ,  $\left(-1, -16\frac{8}{15}\right)$  .

52) א. עולה:  $x > 3.5$  יורד:  $x < 3.5$  ב. עולה:  $x < -2$ ,  $x > 2$  יורד:  $-2 < x < 2$

ג. עולה:  $x < 0$ ,  $x > \frac{2}{3}$  יורד:  $0 < x < \frac{2}{3}$

ד. עולה:  $-0.5 < x < 0$ ,  $x > 0.5$  יורד:  $0 < x < 0.5$ ,  $x < -0.5$

ה. עולה:  $x < -1$ ,  $x > 2$  יורד:  $-1 < x < 2$  ו. עולה לכל  $x$

ז. עולה:  $x > 2.5$  יורד:  $x < 2.5$  ח. יורד לכל  $x$

53) ב.  $f''(x) = 12x^2 - 18x$  ג. מינימום.

54) א.  $\min(0, 0)$  ב.  $\max(-4, 32)$  עולה:  $x < -4$ ,  $x > 0$  יורד:  $-4 < x < 0$

ג. חיובית:  $x > 0$ ,  $-6 < x < 0$  שלילית:  $x < -6$

55) א. 27 ב. -6

56) ג. חיובית:  $x > 0$  שלילית:  $x < 0$

57) א.  $\min(1, -1)$  מוחלט.  $\max(7, 35)$  מוחלט.

ב.  $\min(\pm 4, 0)$  מוחלט.  $\max(0, 16)$  מוחלט.

ג.  $\min(3, -27)$  מוחלט.  $\max(-1, 5)$  מוחלט.

ד.  $\min(1, -5.5)$  מוחלט.  $\max(-1, 20.5)$  מוחלט.

ה.  $\min(\pm 5, -622)$  מוחלט.  $\max(0, 3)$  מוחלט.

58) א.  $\max(0, -6)$ ,  $\min(5, -26)$  ב.  $\max(3, -6)$ ,  $\min(1, -10)$

ג.  $\min(5, -26)$  מוחלט,  $\max(0, -6)$ ,  $\max(3, -6)$  מוחלטים.

59) א.  $\max(6, 0)$ ,  $\min(-8, -224)$  ב.  $\max(-3.464, 83.13)$ ,  $\min(3.464, -83.13)$

ג.  $\max(-3.464, 83.13)$ ,  $\min(-8, -224)$

60) תשובות עבור סעיפים i-iv:

א. כל  $x$  ii.  $\min(4, -4)$  iii. עולה:  $x > 4$  יורד:  $x < 4$

iv.  $(0, 12)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(2, 0)$

ב. i. כל  $x$  ii.  $\max(-2, 16)$ ,  $\min(2, -16)$

iii. עולה:  $x < -2$ ,  $x > 2$  יורד:  $-2 < x < 2$  iv.  $(0, 0)$ ,  $(\pm 3.464, 0)$

ג. i. כל  $x$  ii.  $\max(-8, 0)$ ,  $\min\left(-2\frac{2}{3}, -75\frac{23}{27}\right)$

iii. עולה:  $x > -2\frac{2}{3}$ ,  $x < -8$  יורד:  $-8 < x < -2\frac{2}{3}$  iv.  $(0, 0)$ ,  $(-8, 0)$

ד. i. כל  $x$  ii.  $\max(2, 100)$ ,  $\min(9, -243)$

iii. עולה:  $x < 2$ ,  $x > 9$ , יורד:  $2 < x < 9$ . iv.  $(0,0)$ ,  $(12,0)$ ,  $(4.5,0)$ .

ה. i. כל  $x$ . ii.  $\min(1,-3)$ . iii. עולה:  $x > 1$ , יורד:  $x < 1$ .

iv.  $(0,0)$ ,  $(1.587,0)$ .

ו. i. כל  $x$ . ii.  $\min(\pm 1,0)$ ,  $\max(0,0.25)$ .

iii. עולה:  $-1 < x < 0$ ,  $x > 1$ , יורד:  $0 < x < 1$ ,  $x < -1$ . iv.  $\min(\pm 1,0)$ ,  $\max(0,0.25)$ .

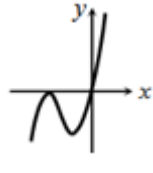
ז. i. כל  $x$ . ii.  $\min\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ . iii. עולה:  $x > \frac{1}{3}$ , יורד:  $x < \frac{1}{3}$ . iv.  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ ,  $(0,1)$ .

ח. i. כל  $x$ . ii.  $\min(6,0)$ . iii. עולה:  $x > 6$ , יורד:  $x < 6$ . iv.  $(6,0)$ ,  $(0,6)$ .

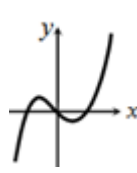
סקיצות עבור שאלה 60:



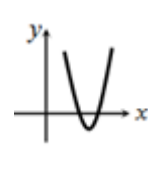
א.



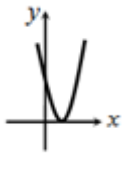
ב.



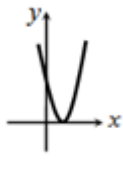
ג.



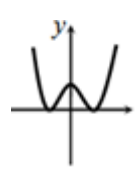
ד.



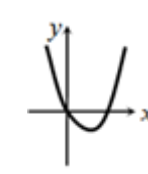
ה.



ו.



ז.



ח.

61. א.  $a = -3$ . ב.  $(1,4)$ . ג. לא. ד. עולה בכל תחום הגדרתה חוץ מ-  $x = 1$ .

62. א.  $a = 0$ . ב.  $\min(-2,-4)$ ,  $\max\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{256}\right)$ ,  $\min(0,0)$ .

ג. עולה:  $x > 0$ ,  $-2 < x < -\frac{1}{4}$ , יורדת:  $-\frac{1}{4} < x < 0$ ,  $x < -2$ .

63. א.  $\max(-1,0)$ ,  $\min(1,-4)$ . ב. עולה:  $x < -1$ ,  $x > 1$ , יורדת:  $-1 < x < 1$ .

ג.  $(-1,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(0,-2)$ . ה. חיובית:  $x > 2$ , שלילית:  $-1 < x < 2$ ,  $x < -1$ .

64. א.  $\max(2,0)$ ,  $\min\left(2\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ . ב. עולה:  $x > 2\frac{2}{3}$ ,  $x < 2$ , יורדת:  $2 < x < 2\frac{2}{3}$ .

ג.  $(3,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(0,-12)$ .

65. א.  $y = 2x^2(x-4)^2$ ,  $a = -4$ . ב.  $(0,0)$ ,  $(2,32)$ ,  $(4,0)$ .

ג. עולה:  $0 < x < 2$ ,  $x > 4$ , יורדת:  $2 < x < 4$ ,  $x < 0$ . ד.  $(4,0)$ ,  $(0,0)$ .

ה. חיובית:  $x \neq 0, 4$ .

66. א.  $k = 10$ . ב.  $(-1,-15)$ . ג.  $(0,0)$ . ד. לא. ה. עולה בכל תחום הגדרתה.

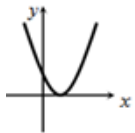


67 א.  $d=8$  ב. לא ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד.  $(0,8)$ .

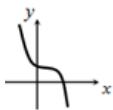
68 א.  $\min\left(1\frac{2}{3}, 0\right)$  ב. עולה בתחום:  $x > 1\frac{2}{3}$  יורדת בתחום:  $x < 1\frac{2}{3}$ .

ג.  $(0, 1875)$ ,  $\left(1\frac{2}{3}, 0\right)$ .

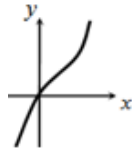
סקיצות של שאלות 63-68:



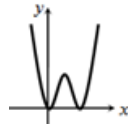
68



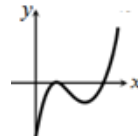
67



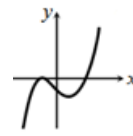
66



65



64



63

## תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:

### תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

- |                                     |  |                                      |
|-------------------------------------|--|--------------------------------------|
| $y = \frac{x}{6} + \frac{6}{x}$ (3) | $y = \frac{4x-1}{x}$ (2)               | $y = \frac{1}{x}$ (1)                |
| $y = \frac{(x+3)^2}{x^2}$ (6)       | $y = \frac{x^2-3x+4}{x^2}$ (5)         | $y = \frac{x^2+5x+4}{x}$ (4)         |
| $y = \frac{x+6}{x^2-6}$ (9)         | $y = \frac{6}{x^2+8x+12}$ (8)          | $y = \frac{3x}{2x+1}$ (7)            |
| $y = \frac{x^2}{(x^2+4)^2}$ (12)    | $y = 3 + \frac{(x-9)^2}{(x+9)^2}$ (11) | $y = \frac{x^2-6x+8}{x^2+2x+1}$ (10) |
|                                     | $y = \frac{x^2+7x+12}{x^4}$ (14)       | $y = \frac{x^3+x}{x^2-1}$ (13)       |

### תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$ .

(15) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| א. $x=1, f(x) = \frac{x-1}{x-2}$     | ב. $x=2, f(x) = \frac{x^2}{3x^2-2}$        |
| ג. $x=-2, f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2}$ | ד. $x=0, f(x) = \frac{x^2+3x+5}{3x^2-x-2}$ |

(16) לפניך מספר פונקציות. מצא את הנקודות שבהן שיפוע הפונקציה הוא  $m$ :

- |   |  |
|---|--|
| א. $m=-3, f(x) = \frac{x^2}{x-3}$           | ב. $m=\frac{5}{9}, f(x) = x + \frac{4}{x+1}$ |
| ג. $m=\frac{1}{36}, f(x) = \frac{x}{x^2+8}$ | ד. $m=4, f(x) = x^2+4x - \frac{x-16}{x}$     |

**תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה:**  $y - y_1 = m(x - x_1)$

**כאשר:**  $(x_1, y_1)$  - נקודת ההשקה ו-  $m$  שיפוע המשיק.

**17** מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

ב.  $x = 2, y = \frac{2x+5}{x^2+5}$

א.  $x = -1, y = \frac{x^2+2x}{x+3}$

ד.  $x = 3, y = \frac{(x+3)^2}{x^2}$

ג.  $x = 7, y = 3x - \frac{x+6}{x^2-12x+36}$

**18** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \frac{2x+4}{(x+1)^2}$  העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  ואת הזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

**19** נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2}$

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

**20** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

- מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה שבה  $x = 3$ .
- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים
- ג. מצא את הזווית שיוצר המשיק עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

**21** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+4}{2} + \frac{5}{2x}$

- א. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ ?
- ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 1$ .
- ג. האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם?
- אם כן – כתוב את משוואתו.

**(22)** נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .  
 ב. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

**(23)** נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{4x+2}{2x}$ ,  $g(x) = x^3 + 2$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.  
 ב. מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה העוברים דרך הנקודה הנמצאת ברביע הראשון.

**תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:**

**(24)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4x-6}{x}$ .

- א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה שהשיפוע שלהם הוא 6.  
 ב. מצא את המרחק בין שתי נקודות החיתוך של שני המשיקים עם ציר ה- $y$ .

**(25)** ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  היוצרים זווית של  $71.56^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

- ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$  המקבילים לישר:  $y + 3x = 10$ .

**תרגילים עם פרמטרים:**

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + kx - 5}{x}$ . הישר  $y = 6x - 14$  משיק לגרף הפונקציה

בנקודה שבה  $x = 1$ .

- א. מצא את הפרמטר  $k$ .  
 ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. האם קיים עוד משיק לגרף הפונקציה המקביל למשיק זה? אם כן, מצא את משוואתו.

**(27)** המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2+3}{x+A}$  בנקודה שבה  $x=1$  מקביל לציר ה- $x$ .  
מצא את  $A$ .

**(28)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2+kx+3}{x^2}$ .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=1$ .

- א. מצא את הפרמטר  $k$ .
- ב. האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.
- ג. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ .

**(29)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{12}{9-ax^2}$ . הישר  $x=3$  הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

- א. מצא את הפרמטר  $a$ .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=0$ .

**(30)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{8x+4}{x^2+a}$ . הישר  $x=4$  הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

- א. מצא את הפרמטר  $a$ .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלו עם הישר  $4y+2x+1=0$  הנמצאת על ציר ה- $x$ .

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{mx^2+2x+3}{x^2+1}$ .

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית:  $y=3$ .

- א. מצא את  $m$ .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית  $y=3$ .

**(32)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3} + A$ .

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית:  $y=3$ .

- א. מצא את  $A$ .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית  $y=3$ .

**(33)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+2} + A$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית:  $y = 5$ .

א. מצא את  $A$ .

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

**(34)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{Ax^2+1}{x^2+1} + B$

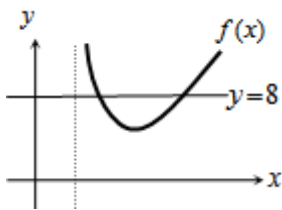
ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית:  $y = 1$ . כמו כן, שיפוע הפונקציה

בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 1.

א. מצא את  $A$  ואת  $B$ .

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

### תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:



**(35)** באיור שלפניך נתונות הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2}{2x-3}$

והישר:  $y = 8$ .

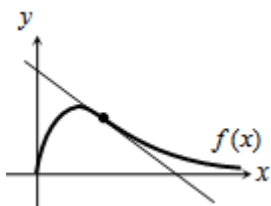
א. מצא את נקודות החיתוך של הישר והפונקציה.

ב. כתוב את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x)$

העוברים דרך נקודות החיתוך שלה עם הישר.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים לישר  $y = 8$ .



**(36)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$

מעבירים לפונקציה משיק בנקודה שבה  $x = 2$ .

חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק לצירים.

**(37)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

א. הראה כי הפונקציה עולה תמיד.

ב. מצא את משוואת המשיק המאונך לישר:  $y = -9x$  העובר דרך נקודת ההשקה

הנמצאת ברביע ראשון.

(38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$  בנקודה שבה:  $x=1$ .

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $g(x) = \frac{x^2-4x}{x+2}$  המקבילים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

ג. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה:  $h(x) = \frac{x^2+1}{x+7}$  המאונכים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

### תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה רציונאלית:

חקור את הפונקציות שבעמוד הבא לפי הסעיפים הבאים :

א. תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x} \quad (40)$$

$$y = -\frac{16x^2 - 3x + 4}{x} \quad (39)$$

$$y = 1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} \quad (42)$$

$$y = \frac{x^2 + 10x + 25}{x} \quad (41)$$

$$y = 1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} \quad (44)$$

$$y = 5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \quad (43)$$

$$y = \frac{3}{x^2 - 10x + 25} \quad (46)$$

$$y = \frac{3x}{5} - \frac{12}{5x} \quad (45)$$

$$y = \frac{6}{x^2 - 9} \quad (48)$$

$$y = \frac{4}{3x^2 - 6x - 9} \quad (47)$$

$$y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} \quad (50)$$

$$y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} \quad (49)$$

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{(x+4)^2}{3x-5} \quad (52)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 - 5x + 4} \quad (51)$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8} \quad (54)$$

$$f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5} \quad (53)$$

(55) נתונה הפונקציה:  $y = ax + \frac{9}{2x}$ ,  $(a \text{ פרמטר})$ .

ידוע כי גרף הפונקציה עובר בנקודה  $(3, 7.5)$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(56) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{-9}{10 + ax - 2x^2}$ . ידוע כי יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית:  $x = 5$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- ב. האם יש לפונקציה עוד אסימפטוטות? אם כן, מהן?
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(57) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{a}{2x^2 + 5}$ ,  $(a \text{ פרמטר})$ . ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- $y$

בנקודה שבה  $y = 2$ .

- א. מצא את הפרמטר  $a$ .
- ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ ? אם כן – מצא אותן.
- ה. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.



**58** ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הוכח כי לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-9}$  יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- $y$ .
- ב. ידוע כי שיעור ה- $y$  של נקודת הקיצון הוא 3. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר  $y = -1$ .
- ו. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

**59** לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+4}{x^2}$  ,  $a$  (פרמטר) יש נקודת קיצון שבה  $x = -8$ .

- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**60** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$  ,  $a$  (פרמטר).

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה  $(0.5, 3)$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. קבע לאלו ערכים של  $k$  הישר  $y = k$  יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

**61** הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax-30}{x^2-6x+a}$  ,  $a$  (פרמטר) מוגדרת לכל  $x$ .

ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון שבה  $x = 2$ .

- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**62** נתונה הפונקציה:  $y = \frac{a^2x-4}{2x^2-1}$ ,  $a$  פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1$  הוא 4.

- א. מצא את כל הערכים האפשריים בעבור  $a$ .
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

**63** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2+ax+6}{x-2}$ ,  $a$  פרמטר).

ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .

- א. מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .
- ב. הצב את הערך של  $a$  שמצאת בסעיף א' ומצא:
  - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
  - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
  - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
- ג. לאלו ערכי  $x$  הפונקציה שלילית?
- ד. לאלו ערכי  $k$  אין נקודות משותפות לישר  $y=k$  ולגרף הפונקציה? נמק.

**64** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$ ,  $a \neq 1$  פרמטר.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות  $a$  את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  ועם ציר ה- $y$ .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
  - i. מצא לאלו ערכים של  $a$  הפונקציה  $f(x)$  עולה לכל  $x$  בתחום ההגדרה. ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x=a$  מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=2$ .
  - ii. מצא את הערך של  $a$  אם נתון כי הפונקציה עולה לכל  $x$ .

**65** נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x+3}{x-2} + A$ ,  $A$  (פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה:  $(3A, A)$

- א. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל  $x$ .
- ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון הישר:  $y = k$ . האם קיים ערך של  $k$  בעבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

**66** נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$ ,  $m, a > 0$  פרמטרים.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .

- א. מצא את הערך של הפרמטר  $m$ .
- ב. הצב את הערך של  $m$  שמצאת בסעיף א' והבע באמצעות  $a$  את:
  - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. שרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות  $a$  בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$ , נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .
- ה. מצא לאלו ערכים של  $k$  אין לישר  $y = k$  ולגרף הפונקציה נקודות משותפות.

## תשובות סופיות:

- (1)  $y' = -\frac{1}{x^2}$
- (2)  $y' = \frac{1}{x^2}$
- (3)  $y' = \frac{1}{6} - \frac{6}{x^2}$
- (4)  $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$
- (5)  $y' = \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}$
- (6)  $y' = -\frac{6}{x^2} - \frac{18}{x^3}$
- (7)  $y' = \frac{3}{(2x+1)^2}$
- (8)  $y' = -\frac{6(2x+8)}{(x^2+8x+12)^2}$
- (9)  $y' = -\frac{x^2+12x+6}{(x^2-6)^2}$
- (10)  $y' = \frac{8x^2-14x-22}{(x^2+2x+1)^2}$
- (11)  $y' = \frac{36(x-9)}{(x+9)^3}$
- (12)  $y' = \frac{2x(4-x^2)}{(x^2+4)^3}$
- (13)  $y' = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$
- (14)  $y' = -\frac{2x^2+21x+48}{x^5}$
- (15) א. -1   ב.  $-\frac{2}{25}$    ג.  $-\frac{1}{9}$    ד.  $-\frac{1}{4}$
- (16) א.  $(1.5, -1.5)$  ,  $(4.5, 13.5)$    ב.  $(2, 3\frac{1}{3})$  ,  $(-4, -5\frac{1}{3})$    ג.  $(-2, -\frac{1}{8})$  ,  $(2, \frac{1}{8})$    ד.  $(2, 19)$
- (17) א.  $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$    ב.  $y = -\frac{2}{9}x + 1\frac{4}{9}$    ג.  $y = 28x - 188$    ד.  $y = -\frac{4}{3}x + 8$
- (18)  $y = 2x + 4$  ,  $63.64^\circ$
- (19) א.  $(-2, 0)$    ב.  $y = 1.5x + 3$
- (20) א.  $y = 4 - x$    ב.  $(0, 4)$  ,  $(4, 0)$    ג.  $135^\circ$    ד. 8
- (21) א. לא   ב.  $y = -2x + 7$    ג.  $y = -2x - 3$
- (22) א.  $y = 2x - 1$    ב.  $\frac{1}{4}$
- (23) א.  $(-1, 1)$  ,  $(1, 3)$    ב.  $y = 4 - x$  ,  $y = 3x$
- (24) א.  $y = 6x + 16$  ,  $y = 6x - 8$    ב. 24
- (25)  $y = -3x + 1$  ,  $y = -3x + 9$    ב.  $y = -3x - 2$  ,  $y = -3x - 18$
- (26) א.  $k = -4$    ב.  $(-1, 0)$  ,  $(5, 0)$    ג.  $y = 6x + 6$    ד. כן
- (27)  $A = 1$

- (28) א.  $k = -5$  ב. כן.  $(1.5, 0)$  ג.  $y = -x + 1, 9y = 4x - 6$
- (29) א.  $a = 1$  ב. כן.  $y = 0, x = -3$  ג.  $y = \frac{4}{3}$
- (30) א.  $a = -16$  ב.  $y = 0, x = -4$  ג.  $63y + 32x + 16 = 0$
- (31) א.  $m = 3$  ב.  $y = 2x + 3$
- (32) א.  $A = 3$  ב.  $y = -0.5x + 2.5$
- (33) א.  $A = 3$
- (34) א.  $A = 3, B = -2$
- (35) א.  $(2, 8), (6, 8)$  ב.  $y = -8x + 24, 9y = 8x + 24$  ג.  $(2.4, 4.8)$  ד. 6.4
- (36)  $S = 17\frac{1}{15}$
- (37) א. לכל  $x$  מתקיים:  $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$  ולכן הפונקציה עולה תמיד.  
ב.  $9y = x + 5$
- (38) א. -2 ב.  $y = -2x, y = -2x - 24$  ג.  $y = 0.5x - 0.5, y = 0.5x - 20.5$
- (39) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max(0.5, -13), \min(-0.5, 19)$  ג. עולה:  $-0.5 < x < 0.5, x \neq 0$  יורדת:  $x < -0.5, x > 0.5$  ד. אין. ה.  $x = 0$
- (40) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max(-1, -9), \min(1, -1)$  ג. עולה:  $x < -1, x > 1$  יורדת:  $-1 < x < 1, x \neq 0$  ד.  $(0.5, 0), (2, 0)$  ה.  $x = 0$
- (41) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max(5, 20), \min(-5, 0)$  ג. עולה:  $x < -5, x > 5$  יורדת:  $-5 < x < 5, x \neq 0$  ד.  $(-5, 0)$  ה.  $x = 0$
- (42) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max(2.5, 1.8)$  ג. עולה:  $0 < x < 2.5$  יורדת:  $x < 0, x > 2.5$  ד.  $(-5, 0), (1, 0)$  ה.  $x = 0, y = 1$
- (43) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max\left(3, 5\frac{1}{3}\right)$  ג. עולה:  $0 < x < 3$  יורדת:  $x < 0, x > 3$  ד.  $(-1, 0), (0.6, 0)$  ה.  $x = 0, y = 5$
- (44) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max\left(2\frac{2}{3}, -\frac{1}{8}\right)$  ג. עולה:  $x < 0, x > 2\frac{2}{3}$  יורדת:  $0 < x < 2\frac{2}{3}$  ד.  $(2, 0), (4, 0)$  ה.  $x = 0, y = 1$

(45) א.  $x \neq 0$  ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד.  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ .  
ה.  $x = 0$ .

(46) א.  $x \neq 5$  ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה:  $x < 5$  יורדת:  $x > 5$ . ד.  $(0, 0.12)$ .  
ה.  $x = 5$ ,  $y = 0$ .

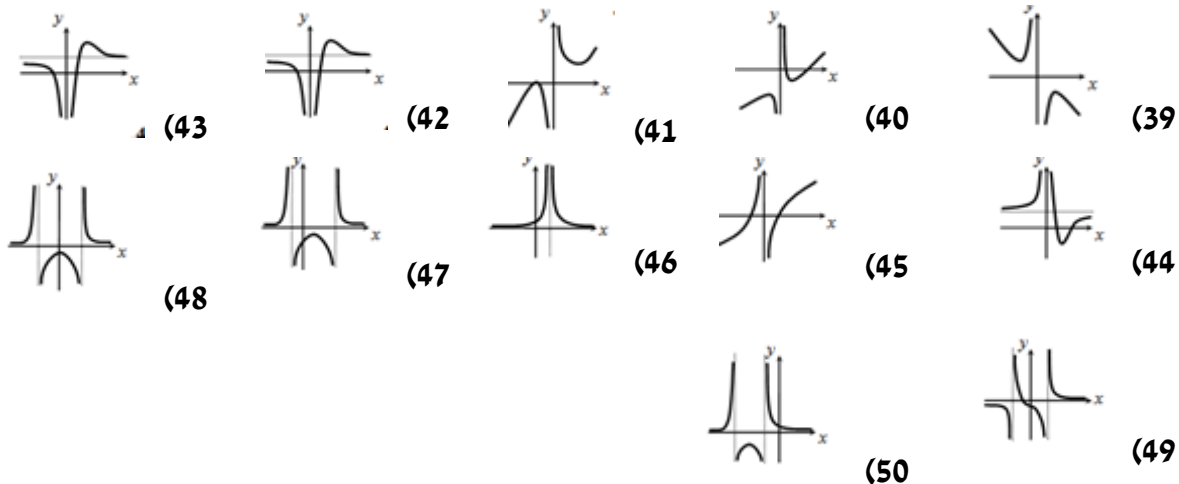
(47) א.  $x \neq -1, 3$  ב.  $\max\left(1, -\frac{1}{3}\right)$  ג. עולה:  $x < -1$ ,  $x > 1$  יורדת:  $x \neq 3$ . ד. חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $\left(0, -\frac{4}{9}\right)$ .  
ה.  $x = -1, 3$ ,  $y = 0$ .

(48) א.  $x \neq \pm 3$  ב.  $\max\left(0, -\frac{2}{3}\right)$  ג. עולה:  $x < -3$ ,  $x > 0$  יורדת:  $x \neq 3$ . ד. חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ .  
ה.  $x = \pm 3$ ,  $y = 0$ .

(49) א.  $x \neq -3, 2$  ב. אין נקודות קיצון. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד.  $(-0.5, 0)$ ,  $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$ .  
ה.  $x = -3, 2$ ,  $y = 0$ .

(50) א.  $x \neq -1, -5$  ב.  $\max(-3, -1)$  ג. עולה:  $x < -3$ ,  $x > -5$  יורדת:  $x \neq -1$ . ד.  $(0, 0.8)$ .  
ה.  $x = -5, -1$ ,  $y = 0$ .

#### סקיצות של שאלות 39-50:



(51) א.  $x \neq 1, 4$  ב.  $\max(2, 0)$ ,  $\min\left(-2, 1\frac{7}{9}\right)$

ג. עולה:  $-2 < x < 2$ ,  $x > 2$  יורדת:  $x < -2$ ,  $x > 4$ . ד.  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$ .  
ה.  $x = 1, 4$ ,  $y = 2$ .

52) א.  $x \neq \frac{5}{3}$  ב.  $\max(-4, 0), \min\left(7\frac{1}{3}, 7\frac{5}{9}\right)$

ג. עולה:  $x > 7\frac{1}{3}, x < -4, x < -4, x > 7\frac{1}{3}$  יורדת:  $-4 < x < 7\frac{1}{3}$  ד.  $(0, -3.2), (-4, 0)$  ה.  $x \neq \frac{5}{3}$

ה.  $x = \frac{5}{3}$

53) א.  $x \neq 5$  ב.  $\max(-1, -0.5), \min(9, -24.5)$

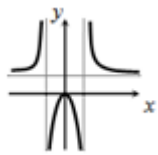
ג. עולה:  $x > -1, x < -9$  יורדת:  $-9 < x < -1$  ד.  $(-2, 0), \left(\frac{1}{3}, 0\right), (0, -0.2)$  ה.  $x = -5$

ה.  $x = -5$

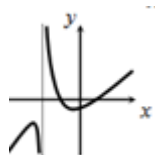
54) א.  $x \neq \pm 2$  ב.  $\max(0, 0)$  ג. יורדת:  $x > 0, x \neq 2$  עולה:  $x < 0, x \neq -2$

ד.  $(0, 0)$  ה.  $x = \pm 2, y = 1.5$

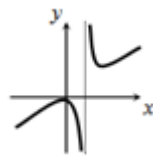
#### סקיצות של שאלות 51-54:



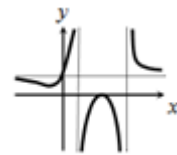
(54)



(53)



(52)



(51)

55) א.  $y = 2x + \frac{9}{2x}, a = 2$  ב.  $\max(-1.5, -6), \min(1.5, 6)$

ג. עולה:  $x > 1.5, x < -1.5$  יורדת:  $-1.5 < x < 1.5$  ד.  $x \neq 0$

56) א.  $a = 8$  ב. כן.  $y = 0, x = -1$  ג.  $\max(2, -0.5)$

ד. עולה:  $x < 2, x \neq -1$  יורדת:  $x > 2, x \neq 5$

57) א.  $a = 10$  ב. כל  $x$  ג.  $\max(0, 2)$  ד. אין חיתוך עם ציר ה- $x$

ה. חיובית לכל  $x$

58) א.  $k = -3$  ב. מתקבל:  $k = -3$  ג.  $(3, 0), (0, 3)$  ד.  $y = -1$

ה. באף נקודה. הגרף שואף לישר ואינו חותך אותו.

ו. חיובית:  $\sqrt{3} < x < 3, -3 < x < -\sqrt{3}$  שלילית:  $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

59) א.  $f(x) = \frac{x+4}{x^2}, a = 1$  ב. עולה:  $-8 < x < 0$  יורדת:  $x < -8, x > 0$

ג.  $(-4, 0)$

60 א.  $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$ ,  $a = 3$  . ב.  $\max(-2, 8)$ ,  $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$  .

ג. עולה:  $x < -2$ ,  $x > 3$ ; יורדת:  $-2 < x < 3$  . ד.  $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$ ,  $(2, 0)$ ,  $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$  .

ו.  $k = 8, -\frac{1}{3}, 3$  .

61 א.  $f(x) = \frac{10x - 30}{x^2 - 6x + 10}$ ,  $a = 10$  (הפתרון:  $a = -6$  נפסל). ב. כן -  $(4, 5)$  .

ג. עולה:  $2 < x < 4$ ; יורדת:  $x < 2$ ,  $x > 4$  . ד.  $(0, -3)$ ,  $(3, 0)$  .

62 א.  $a = \pm 2$  . ב.  $(0, 4)$ ,  $(1, 0)$  .

ג. המשיק:  $y = -4x + 4$  אשר עובר בנקודה  $(1, 0)$  .

63 א.  $a = -3$  . ב. i.  $x \neq 2$  . ii.  $(0, -3)$  . iii.  $\max(0, -3)$ ,  $\min(4, 5)$  .

4.  $x = 2$  . ג.  $x < 2$  . ד.  $-3 < k < 5$  .

64 א.  $x \neq 1$  . ב.  $x = 1$ ,  $y = 1$  . ג.  $(0, a)$ ,  $(a, 0)$  . ד. i.  $a > 1$  . ii.  $a = 2$  .

65 א.  $A = -1$  . ב.  $x \neq 2$  .

ג. הנגזרת בנויה ממנה של מספר שלילי בחיובי ולכן תמיד שלילית:

שלילי  $\rightarrow \left[ \frac{(-)}{(+)} \right] = \frac{-5}{(x-2)^2} = y'$  .

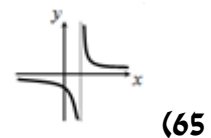
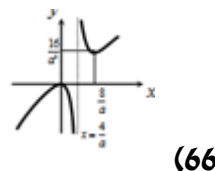
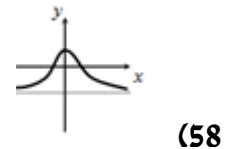
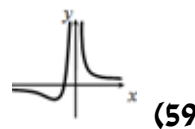
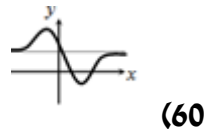
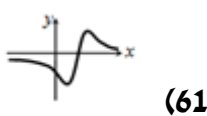
ד.  $(0, -2.5)$  . ו. לא. אין נקודות על גרף הפונקציה בעלות שיעור  $y$  זהה.

66 א.  $m = 0$  (מתקבל:  $am = 0$  וידוע כי:  $a > 0$  לכן נותרנו עם הפתרון הנ"ל).

ב. i.  $x \neq \frac{4}{a}$  . ii.  $\max(0, 0)$ ,  $\min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$  . iii.  $x = \frac{4}{a}$  . ד.  $a = 2$  .

ה.  $0 < k < 4$  .

סקיצות של שאלות: 61-58 ו-66-65:





## תרגילים העוסקים בפונקצית שורש (אי-רציונאלית):

### תרגילים העוסקים בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

- |  |                                    |                                    |
|--|------------------------------------|------------------------------------|
| $y = x^2 - 16\sqrt{x}$ (3)               | $y = x - 3\sqrt{x}$ (2)            | $y = \sqrt{x}$ (1)                 |
| $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ (6)           | $y = x^2\sqrt{x}$ (5)              | $y = (2x-1)\sqrt{x}$ (4)           |
| $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ (9)            | $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2}$ (8) | $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-1}$ (7) |
| $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2}$ (12)        | $y = (x^2+4)\sqrt{x-2}$ (11)       | $y = x\sqrt{5x-2}$ (10)            |
| $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ (15)    | $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ (14)  | $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ (13)  |
| $y = x\sqrt{x^4+6x^2-8}$ (18)            | $y = (3x+1)^8\sqrt{x^2+x}$ (17)    | $y = (x+10)^6\sqrt{x}$ (16)        |
| $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (21) | $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ (20)  | $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ (19)  |

### תרגילים העוסקים במציאת תחום ההגדרה של פונקציות:

(22) לפניך מספר פונקציות, מצא את תחום ההגדרה שלהן. תזכורת:

• תחום הגדרה של פונקציה המכילה ביטוי עם שורש:  $y = \sqrt{f(x)}$  הוא:  $f(x) \geq 0$ .

• תחום הגדרה של פונקציה אי-רציונאלית:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  הוא:  $g(x) \neq 0$ .

- |                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| א. $y = \sqrt{x}$        | ב. $y = \sqrt{x-5}$          |
| ג. $y = \sqrt{7-2x}$     | ד. $y = \sqrt{x^2-1}$        |
| ה. $y = \sqrt{x^2+2x}$   | ו. $y = \sqrt{x^2-4x-5}$     |
| ז. $y = x^2 - 3\sqrt{x}$ | ח. $y = \sqrt{x^3-3x^2-4x}$  |
| ט. $y = 2x\sqrt{2-x}$    | י. $y = (x^2-3)\sqrt{x^2+x}$ |

יא. $y = \frac{4 - \sqrt{x}}{x + 2}$	יב. $y = \frac{\sqrt{x}}{x - 5}$
יג. $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 16}$	יד. $y = \frac{x + 6}{\sqrt{x}}$
טו. $y = \frac{x^2}{\sqrt{3x - 8}}$	טז. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 25}}$
יז. $y = \frac{2x}{\sqrt{81 - 4x^2}}$	יח. $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 3}}$
יט. $y = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 4}}$	כ. $y = \sqrt{\frac{25x - x^2}{x + 2}}$

(23) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \sqrt{kx^2 - 18}$ ,  $(k \text{ פרמטר})$ .  
ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא:  $x \leq -3$ ,  $x \geq 3$ . מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \sqrt{k - 3x^2}$ ,  $(k \text{ פרמטר})$ .  
ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא:  $-1 \leq x \leq 1$ . מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ג. נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{x}{\sqrt{x + k}}$ ,  $(k \text{ פרמטר})$ .  
לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית:  $x = 7$ . מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ד. נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{6}{\sqrt{x^2 + k}}$ ,  $(k \text{ פרמטר})$ .  
לפונקציה יש אסימפטוטות אנכיות:  $x = \pm 4$ . מצא את  $k$ .

- (24) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = ax + \sqrt{x - b}$ ,  $(a, b \text{ פרמטרים})$ .  
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה:  $(2, 2)$  וכי תחום הגדרתה הוא:  $x \geq 2$ .  
מצא את  $a$  ואת  $b$ .

- (25) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = ax^2 \sqrt{bx + 3}$ ,  $(a, b \text{ פרמטרים})$ . ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה:  $(1, 4)$  וכי תחום הגדרתה הוא:  $x \geq -3$ . מצא את  $a$  ואת  $b$ .

- (26) נתונה הפונקציה:  $y = \sqrt{ax^2 + bx + 12}$ ,  $(a, b \text{ פרמטרים})$ .  
ידוע כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום:  $-4 < x < -3$ . מצא את  $a$  ואת  $b$ .

תרגילים העוסקים במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל:  $f'(x_0) = m$ .

(27) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

- א.  $x=1, f(x)=3x+\sqrt{x}$   
 ב.  $x=4, f(x)=(x+2)\sqrt{x}$   
 ג.  $x=9, f(x)=(x^2-4)\sqrt{x}$   
 ד.  $x=1, f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+3}$   
 ה.  $x=3, f(x)=\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$   
 ו.  $x=2, f(x)=x\sqrt{x^2+4x+8}$

(28) לפניך מספר פונקציות. מצא את שיעורי הנקודות שבעבורם שיפוע המשיק הוא המצוין לידה.

- א.  $m=1.5, f(x)=\sqrt{3x-2}$   
 ב.  $m=\frac{2}{5}, f(x)=\sqrt{4x-7}$   
 ג.  $m=\frac{1}{4}, f(x)=x-\frac{1}{4}\sqrt{x}$   
 ד.  $m=2, f(x)=\sqrt{x^2-12}$   
 ה.  $m=2, f(x)=x\sqrt{x-1}$   
 ו.  $m=5, f(x)=(x+3)\sqrt{x}$

(29) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא נקודה על גרף הפונקציה:  $y=2x\sqrt{4x+5}$  אשר המשיק העובר דרכה יוצר זווית של  $116.57^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .  
 ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה:  $y=3x+\sqrt{3x^2+24}$  אשר המשיק העובר דרכה מקביל לישר:  $y=4x-7$ .

(30) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x)=\sqrt{x^2+24}$ .  
 מצא את שיפוע הפונקציה בנקודה שבה:  $x=2$ .  
 ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x)=\sqrt{3x^2+240}$ .  
 מצא נקודה על גרף הפונקציה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה שווה לשיפוע הפונקציה שמצאת בסעיף א'. האם קיימת יותר מנקודה אחת?  
 אם כן, מצא את כולן. אם לא, נמק.  
 ג. הראה כי לשתי הפונקציה יש את אותו השיפוע בעבור:  $x=0$ . מהו השיפוע?

**31** נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \sqrt{x-3}$  ו-  $g(x) = 2 - \sqrt{5-x}$ .

- א. מצא את שיעור ה- $x$  בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.  
ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

**32** נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \sqrt{2x+6}$  ו-  $g(x) = 6 - \sqrt{9-x}$ .

- א. מצא את שיעור ה- $x$  בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.  
ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

**33** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 5\sqrt{4x-3} + \frac{1}{3}\sqrt{36x-27}$ .

- מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה שווה ל-12.  
הנחייה: לאחר הגזירה הוצא גורם משותף בתוך השורש שבמכנה השני וסמן:  $t = 4x-3$  ופתור משוואה בעבור  $t$ .

**34** מצא שתי נקודות על גרף הפונקציה  $y = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$  ששיפוע המשיק

העובר דרכן הוא:  $m = -1$ .

**תרגילים העוסקים במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה:**  $y - y_1 = m(x - x_1)$ ,

**כאשר:**  $(x_1, y_1)$  - נקודת ההשקה ו-  $m$  שיפוע המשיק.

**35** מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

ב.  $x=7$ ;  $y=\sqrt{2x-5}$

א.  $x=1$ ;  $y=3x^2-\sqrt{x}$

ד.  $x=2\frac{2}{3}$ ;  $y=\sqrt{x^2-2x}$

ג.  $x=4$ ;  $y=(2x^2-8)\sqrt{x}$

ו.  $x=3$ ;  $y=\frac{\sqrt{x+6}}{x}$

ה.  $x=2$ ;  $y=x\sqrt{x^2+5}$

ח.  $x=1$ ;  $y=\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$

ז.  $x=6$ ;  $y=\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}$

36 נתונה הפונקציה הבאה :  $y = x - 4\sqrt{x}$ .

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  שאינה בראשית הצירים.

37 נתונה הפונקציה הבאה :  $y = 2x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$ .

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  שאינה בראשית הצירים.

38 לגרף הפונקציה :  $y = x - 2\sqrt{x}$  מעבירים משיק בנקודה שבה  $y = 3$ .

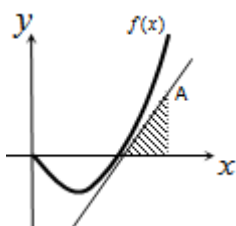
- מצא את משוואת המשיק.
- מצא את נקודות החיתוך של משיק זה עם הצירים.
- חשב את הזווית של המשולש שנוצר בין המשיק והצירים.
- חשב את שטח משולש זה.

39 נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$ .

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .

40 נתונה הפונקציה הבאה :  $y = 3x - \sqrt{25 - 2x^2} + 1$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .



41 נתונה הפונקציה :  $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הנמצאת ברביע הראשון.
- מהנקודה A שנמצאת על המשיק מורידים אנך לציר ה- $x$  כך שנוצר משולש בין המשיק, האנך וציר ה- $x$  (ראה איור). ידוע כי שטח המשולש הוא  $S = 12$ . מצא את שיעורי הנקודה A.

**(42)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = x\sqrt{x^2 + 4}$ .

מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה  $x = 1.5$ .

- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $y$ .
- ג. מעבירים אנך לציר ה- $y$  מנקודת ההשקה של המשיק. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק, האנך וציר ה- $y$ .

**(43)** נתונה הפונקציה:  $y = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$ .

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הראה כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 3$  עובר ב- $(0, 0)$ .

**(44)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{2x+3}$ .

- א. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 11$ .
- ב. כתוב את משוואת המשיק הנ"ל.
- ג. האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם? אם כן – כתוב את משוואתו.

**(45)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x}$ .

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 1$ .
- ב. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

**(46)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .
- ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק שמצאת לצירים.

**(47)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$  ונתון הישר:  $y = 2x$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון. הנחייה: השווה בין שני הביטויים והעלה בריבוע את המשוואה ופתור משוואה דו-ריבועית על ידי סימון:  $x^2 = t$ .
- ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

### תרגילים העוסקים במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

תזכורת: בחלק מהתרגילים יש להיעזר בתכונות השיפועים של ישרים מקבילים ומאונכים:

- ישרים מקבילים הם בעלי אותו השיפוע ולהפך.
- מכפלת השיפועים של ישרים מאונכים תמיד  $-1$ .
- כגון שני ישרים בעלי שיפועים:  $m_1, m_2$  אזי:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .

48) ענה על הסעיפים הבאים:

א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = 4\sqrt{x} - 2$

המקביל לישר:  $2y - x = 3$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{10x + 7}$

המקביל לישר:  $y = 5x$ .

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = 3x + \sqrt{x}$

המאונך לישר:  $4y = 5 - x$ .

ד. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{4x + 3} - 2x$

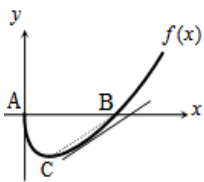
המאונך לישר:  $y = x$ .

49) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 8\sqrt{x} - x$ .

א. מצא על גרף הפונקציה נקודה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא 3.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך עם ציר ה- $x$  שאינה ראשית הצירים.



50) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x - 10\sqrt{x}$  באיור הסמוך.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B - נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה C המקיימת:  $f'(x) = 0$ .

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר BC.

51) נתונות הפונקציה הבאות:  $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ,  $g(x) = 4\sqrt{2x + 3}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בעל השיפוע  $m = 20$ .

ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק שמצאת בסעיף הקודם והפונקציה  $g(x)$ .

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

**(52)** נתונות הפונקציות הבאות:  $g(x) = 2x\sqrt{x+3}$ ,  $f(x) = 4\sqrt{3x-2}$ .  
הראה כי לשתי הפונקציות משיק משותף ששיפועו הוא 3.

**(53)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 4x\sqrt{10-x}$ .

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המאונך לישר:  $y = -0.5x + 51$ .  
ב. הראה כי הישר הנתון בסעיף הקודם הוא נורמל לפונקציה בנקודת ההשקה.

**(54)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. מצא את הנקודה אשר שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרכה הוא 0.  
ד. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות שמצאת בסעיפים ב' ו-ג'.

**(55)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2}$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
ב. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? אם כן, באיזו נקודה?  
ג. הראה כי לא קיים ישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לישר:  $y = 6$ .

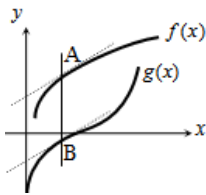
**(56)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$ .

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?  
ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- $x$ ?  
מצא אותן.  
ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

**(57)** נתונות הפונקציות הבאות:  $g(x) = \sqrt{3-3x}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.  
ב. הראה כי הגרפים מאונכים זה לזה בנקודת החיתוך שמצאת.  
ג. מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה בנקודת החיתוך שמצאת.  
ד. מהנקודות A ו-B הנמצאות על הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  בהתאמה מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$ .  
ידוע כי הפונקציות מאונכות זו לזו בנקודות A ו-B. מצא את הנקודות A ו-B.





58 נתונות הפונקציות הבאות :

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x-2}, \quad g(x) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{10-x}$$

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ונקודה B על גרף הפונקציה  $g(x)$  כמתואר באיור. ידוע כי הישר AB מקביל לציר ה- $y$ . מעבירים מהנקודות A ו-B משיקים לכל פונקציה. ידוע כי המשיקים מקבילים.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואות המשיקים.

תרגילים עם פרמטרים:

59 ענה על השאלות הבאות :

א. נתונה הפונקציה :  $f(x) = A\sqrt{x} + 3x^2$  (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x = 4$  הוא 25. מצא את A.

ב. נתונה הפונקציה :  $f(x) = 2\sqrt{5x+A}$  (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x = 2$  הוא 1. מצא את A.

ג. נתונה הפונקציה :  $f(x) = \sqrt{x^2 + Ax + 25}$  (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  הוא 2. מצא את A.

ד. נתונה הפונקציה :  $y = (x+A)\sqrt{x+1}$  (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה :  $x = 3$  הוא 3. מצא את A.

ה. נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+A}$  (A פרמטר). ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה

שבה :  $x = 1$  הוא  $\frac{1}{18}$ . מצא את A. הבחן בין שני מקרים.

ו. נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + Ax + 4}}$  (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  הוא 4. מצא את A.

60 נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = \sqrt{2x+A} + Bx$  (A, B פרמטרים).

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  היא :  $y = 3x + 1$ . מצא את A ואת B.

**61** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt{x^2 + Ax + B}$ ,  $(A, B)$  פרמטרים. משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת שבה:  $x=1$  היא:  $y=x+2$ . מצא את  $A$  ואת  $B$ .

**62** נתונה הפונקציה:  $f(x) = a\sqrt{x-3}$ ,  $a$  פרמטר. ידוע כי הפונקציה עוברת ב-  $A(12, a+4)$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $A$ .
- ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק לצירים.

**63** נתונה הפונקציה:  $f(x) = a\sqrt{3x+16}$ ,  $a$  פרמטר. ידוע כי הישר  $y=2x-8$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=11$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך.
- ב. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- ג. האם הישר חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודה? אם כן, מהי?
- ד. האם הישר הנתון הוא המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף א'?

אם כן, נמק. אם לא, מצא את משוואת המשיק.

**64** הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 2x + 5$  ו-  $g(x) = x^2 - k\sqrt{x}$  ( $k$  פרמטר) נחתכים בנקודה שבה:  $x=6.25$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ?
- ג. האם הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  נחתכים בעוד נקודות? אם כן – מצא אותן.
- ד. מצא את משוואות המשיקים לגרפים של שתי הפונקציות בנקודות החיתוך שלהם.

**65** נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$  ( $k$  פרמטר).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה:  $x=0.8$ .
- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
  - ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן – מצא אותה.
  - ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x=0.52$ .

66 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x+A}}{x+B}$ ,  $(A, B)$  פרמטרים.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה:  $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$  הוא:  $-\frac{1}{18}$ .

א. מצא את  $A$  ואת  $B$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$  והראה כי בעבור שני המקרים מתקבלת אותה הנקודה.

67 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{Ax^2 + Bx}}$ ,  $(A, B)$  פרמטרים.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה:  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$  הוא:  $\frac{1}{8}$ . מצא את  $A$  ואת  $B$ .

68 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x\sqrt{Ax+3}$ . ידוע כי  $f'(1) = 2.25$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=1$ .

ג. כתוב את משוואת הישר המאונך לגרף הפונקציה ועובר דרך נקודת ההשקה הנ"ל (נורמל לפונקציה).

69 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{x^2+A}$ ,  $A$  פרמטר.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש אסימפטוטה אנכית:  $x=4$ .

א. מצא את  $A$  ואת האסימפטוטה האנכית הנוספת של גרף הפונקציה.

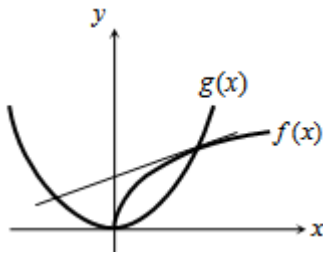
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה:  $x=2$ .

ג. מצא את נקודת החיתוך של המשיק והאסימפטוטה:  $x=4$ .

תרגילים שונים – שימושי הנגזרת:

70 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

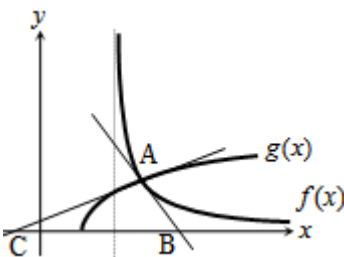
$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = x^2 - 1$$



- i. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- ii. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- iii. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה  $g(x)$ .

71 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \sqrt{x-3.5}$$



- i. מצא את הנקודה A - נקודת החיתוך של הגרפים.
- ii. מצא את משוואות המשיקים לכל גרף העוברים דרך נקודת החיתוך.
- iii. המשיקים חותכים את ציר ה- $x$  בנקודות B ו-C כך שנוצר המשולש ABC. חשב את שטח המשולש.

72 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{kx - \sqrt{x}}{2}$ . ידוע כי:  $f'(9) = \frac{5}{12}$ .

- א. מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שבה  $x$  חיובי שמצאת בסעיף הקודם.

73 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + 4}}$ ,  $A$  פרמטר.

- א. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- $x$  כלל.
- ב. מצא את  $A$  אם ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 5$ .
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .

74 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{\sqrt{x}}$ ,  $(A, B)$  פרמטרים. מעבירים לגרף הפונקציה שני

- משיקים. משיק אחד עובר דרך הנקודה שבה  $x = 4$  ושיפועו הוא:  $m = \frac{3}{8}$ .
  - משיק שני מעבירים דרך הנקודה שבה  $x = 1$  וידוע כי הוא מקביל לישר:  $2y = 5x + 3$ .
- מצא את  $A$  ואת  $B$ .

75 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ .

- הראה כי הפונקציה אינה חותכת את הצירים כלל.
- מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר הוא 0.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=5$ .

76 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- $x$ ? נמק והראה חישוב מתאים.
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .
- חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

תרגילים העוסקים במציאת נקודות קיצון לפי הכלל:  $f'(x)=0$  סיווג

ומציאת תחומי עלייה וירידה:

77 לפניך הפונקציות הבאות:

מצא את נקודות הקיצון (כולל נקודות קצה במידה וישנן) שלהן וקבע את סוגן (זכור למצוא תחילה את תחום ההגדרה ולפסול נקודות שאינן נמצאות בו).

- |                                 |  |                               |
|---------------------------------|--|-------------------------------|
| א. $y = x - \sqrt{x}$           | ב. $y = x^2 \sqrt{x+2}$                | ג. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 25}$ |
| ד. $y = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$ | ה. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$          | ו. $y = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$ |
| ז. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$ | ח. $y = \frac{x}{\sqrt{3x^2 - x - 2}}$ |                               |

78 נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קצה)?
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

79 נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4.5}$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

80 נתונה הפונקציה :  $y = \sqrt{x^2 + 3x} - x$ .

- כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון מקומיות כלל.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

### תרגילים העוסקים בחקירה מלאה של פונקציה אי-רציונאלית:

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = 2x - \frac{\sqrt{16x-1}}{4} \quad (82)$$

$$y = 2\sqrt{x} - x \quad (81)$$

$$y = \sqrt{x^3 - x} \quad (84)$$

$$y = x^2 \sqrt{4x+5} \quad (83)$$

$$y = \sqrt{x+8} + \sqrt{x+1} \quad (86)$$

$$y = x\sqrt{x^2 + 5x + 7} \quad (85)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \quad (88)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+2} \quad (87)$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{10-x}} \quad (90)$$

$$y = \frac{\sqrt{x+8}}{x^2} \quad (89)$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{9-x^2}} \quad (92)$$

$$y = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} \quad (91)$$

93 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ .

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיים וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

94 נתונה הפונקציה:  $f(x) = -2\sqrt{36x - x^2}$ .

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיים וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

95 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ .

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

96 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 24x - 25}$ .

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- כתוב את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

97 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 16} + k$ , פרמטר  $k$ .

ידוע כי לפונקציה יש נקודת מקסימום הנמצאת על ציר ה- $x$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן. אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**98** נתונה הפונקציה:  $f(x) = k\sqrt{9-x^2}$ . ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון שבה:  $y = 12$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן.
- אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**99** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x+1}$ .

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ה. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

**100** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + k - \sqrt{11-2x}$ ,  $k$  פרמטר.

- ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(5,6)$ .
- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
  - ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
  - ג. האם יש לפונקציה נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.
  - ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

**101** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3x + k\sqrt{x}$ ,  $k$  פרמטר.

- ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 16$ .
- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
  - ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
  - ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**102** נתונה הפונקציה:  $f(x) = k\sqrt{x} - x$ ,  $k$  פרמטר.

- ידוע כי הישר  $y = 3$  חותך את הפונקציה בנקודה שבה  $x = 9$ .
- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
  - ב. האם הישר  $y = 3$  חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.
  - ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.



**103** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{8} - 4\sqrt{x}$ .

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

**104** נתונה הפונקציה:  $f(x) = kx + k\sqrt{x} - 4$ ,  $k$  פרמטר.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה:  $(4, 4k)$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**105** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{16-x}$ .

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**106** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{kx} - \sqrt{4-x}$ ,  $k$  פרמטר.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בעוד נקודות?  
אם כן, מצא אותן ואם לא נמק.
- ד. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.

**107** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-2x} + m$ , פרמטר  $m$ .

- א. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את  $m$  אם ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(3, 2)$ .
- ד. מצא את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.

**108** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + \sqrt{16-x^2}$ .

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**109** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{8-x^2} + kx$ , פרמטר  $k$ .

הישר  $y = -2x + 4$  משיק לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**110** נתונה הפונקציה:  $y = \frac{\sqrt{x-2}}{4} + \frac{x}{16}$ .

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון מקומיות (פנימיות)? מצא במידה וכן.
- ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
- ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים? אם כן, מצא אותן.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון הישר:  $y = m$ . לאלו ערכים של  $m$  יש לישר ולגרף הפונקציה נקודה משותפת אחת בלבד?

**(111)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2}$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת קיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. הסבר מדוע הפונקציה חיובית בכל תחום הגדרתה.

**(112)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$ ,  $a$  פרמטר. מעבירים משיק לגרף הפונקציה

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ . ידוע כי הוא מקביל לישר:  $3y - x = 0$ .

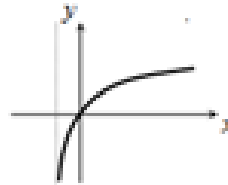
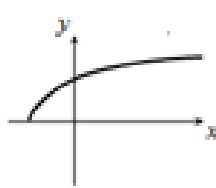
- א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

113 לפניך שלוש פונקציות:  $f(x) = \sqrt{x+k}$ ,  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ,  $h(x) = x\sqrt{x+k}$  ( $k > 0$ ).

- קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו לא נכונות והצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לכל הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.
- כל הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
- כל הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  פעם אחת בלבד.
- מעבירים משיקים לגרפים של הפונקציות:  $f(x)$  ו- $g(x)$  בנקודת החיתוך שלהם עם ציר ה- $y$ . ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:  $g(x)$  גדול ב- $\frac{1}{4}$  משיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$ .
- בטא באמצעות  $k$  את שיפועי המשיקים לכל פונקציה.
- מצא את  $k$ .
- לפניך 4 איורים, קבע איזה איור מייצג כל פונקציה. נמק את בחירותיך.

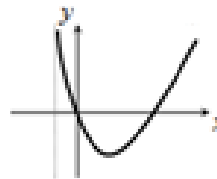
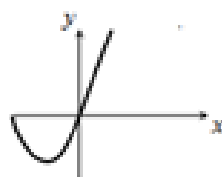
.II

.I



.IV

.III



114) לפניך שלוש פונקציות:  $f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ ,  $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$  ( $k > 0$ )

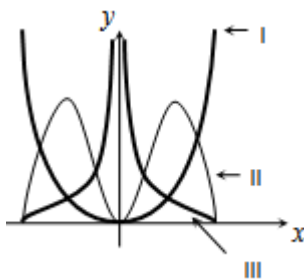
א. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של  $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- $x$  כלל.

iii. הפונקציות  $h(x)$  ו- $g(x)$  הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון אחת בלבד.



מסמנים נקודה  $A(0, \sqrt{12})$  על ציר ה- $y$ .

ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך של גרף

הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  שאינה בראשית הוא:  $d = 6$ .

ב. מצא את  $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה  $f(x)$

וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו משורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות. קבע על פי הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.

115) לפניך הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ ,  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$

א. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר:  $y = x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא:  $h(x) = (g(x))^2$ .

ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה  $h(x)$ .

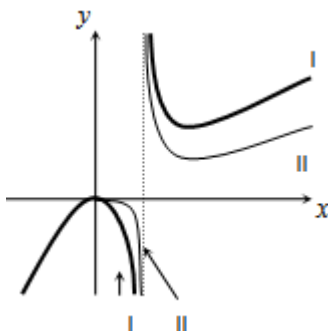
ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$  זהה

לשל  $g(x)$ ? נמק.

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים. קבע על פי הסעיפים

הקודמים איזו פונקציה כל גרף מתאר מבין

הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ . נמק את בחירותיך.



116 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ ,  $k > 0$ .

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות  $k$ ).
  - מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה בעבור כל ערך של  $k$  בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ . (בטא באמצעות  $k$ ).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- $x$  והאסימפטוטה הנ"ל הוא:  $S = 4$ . מצא את  $k$ .

117 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ . מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה  $g(x)$ .
- ב. לפניך מספר טענות. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לפונקציות תחום הגדרה זהה.
  - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
  - שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  באותה נקודה.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות משותפות.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ד. אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:
- מאחר שהפונקציה  $g(x)$  מוגדרת להיות:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  אזי ניתן למצוא את שיעור ה- $y$  של כל נקודה שעל גרף הפונקציה  $f(x)$  על ידי כך שנמצא תחילה את שיעור ה- $y$  של הנקודה בעלת אותו שיעור  $x$  על הגרף של  $g(x)$  ונעלה אותה בריבוע. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

\*הערה: בשאלה הבאה נדרש ידע בפתרון אי-שוויונים ממעלה גבוהה.

(118) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. גזור את הפונקציה  $f(x)$ .

מגדירים פונקציה נוספת  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = (f(x))^2$

לפי כללי הגזירה של פונקציה מורכבת ניתן לכתוב את הנגזרת של  $g(x)$  באופן

הבא:  $g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$

ג. כתוב את הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  לפי המכפלה הני"ל וצמצמם במידת

האפשר. הראה כי הביטוי הסופי של הנגזרת הוא:  $g'(x) = -\frac{4+x^2}{(x^2-4)^2}$

ד. באופן כללי, לפי כלל הגזירה הני"ל, אלו נקודות על גרף הפונקציה  $f(x)$  הן

נקודות החשודות לקיצון בעבור  $g(x)$ ?

ה. ענה על הסעיפים הבאים:

i. האם לגרף הפונקציה  $g(x)$  יש נקודות קיצון במקרה שלנו?

נמק על פי הסעיף הקודם.

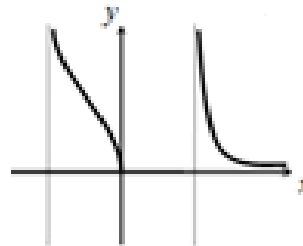
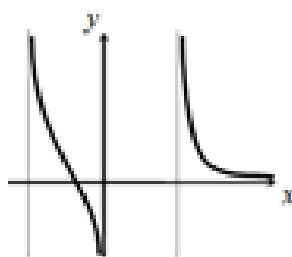
ii. מה ניתן לומר על גרף הפונקציה  $f(x)$  לפי זה?

ו. לפניך שתי סקיצות:

קבע איזו סקיצה מתארת את גרף הפונקציה  $f(x)$ . נמק את בחירתך.

.II

.I



## תשובות סופיות:

- (1)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- (2)  $y' = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$
- (3)  $y' = 2x - \frac{8}{\sqrt{x}}$
- (4)  $y' = 2\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}$
- (5)  $y' = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$
- (6)  $y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$
- (7)  $y' = -\frac{3x^2+4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$
- (8)  $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$
- (9)  $y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$
- (10)  $y' = \sqrt{5x-2} + \frac{5x}{2\sqrt{5x-2}}$
- (11)  $y' = 2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2+4}{2\sqrt{x-2}}$
- (12)  $y' = \frac{8-3x}{2x^3\sqrt{x-2}}$
- (13)  $y' = -\frac{x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$
- (14)  $y' = -\frac{4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$
- (15)  $y' = \frac{1-x}{2(x^2+x+1)^{1.5}}$
- (16)  $6(x+10)^5\sqrt{x} + \frac{(x+10)^6}{2\sqrt{x}}$
- (17)  $(3x+1)^7\sqrt{x^2+x} + \frac{(2x+1)(3x+1)^8}{2\sqrt{x^2+x}}$
- (18)  $\frac{3x^4+12x^2-8}{\sqrt{x^4+6x^2-8}}$
- (19)  $y' = -\frac{3}{2(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$
- (20)  $y' = \frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$
- (21)  $y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$
- (22) א.  $x \geq 0$  ב.  $x \geq 5$  ג.  $x \leq 3.5$  ד.  $x \leq -1, x \geq 1$
- ה.  $x \leq -2, x \geq 0$  ו.  $x \leq -1, x \geq 5$  ז.  $x \geq 0$  ח.  $-1 \leq x \leq 0, x \geq 4$
- ט.  $x \leq 2$  י.  $x \leq -1, x \geq 0$  יא.  $x \geq 0$  יב.  $x \geq 0, x \neq 5$
- יג.  $x \neq \pm 4$  יד.  $x > 0$  יו.  $x > 2\frac{2}{3}$  יז.  $x < -5, x > 5$
- יח.  $x < -3, x \geq 1$  יט.  $x \geq 0$  כ.  $x < -2, 0 \leq x \leq 25$
- כא.  $-4.5 < x < 4.5$  כב.  $3$  כג.  $-7$  כד.  $-16$
- (23) א. 2 ב. 3 ג. 4 ד. 5
- (24)  $a=1, b=2$
- (25)  $a=2, b=1$
- (26)  $a=1, b=7$
- (27) א. 3.5 ב. 3.5 ג.  $66\frac{5}{6}$  ד.  $\frac{1}{16}$  ה.  $-\frac{2}{9}$  ו.  $\frac{28}{\sqrt{20}}$
- (28) א. (1,1) ב. (8,5) ג.  $(\frac{1}{36}, -\frac{1}{72})$  ד. (4,2)
- ה.  $(\frac{10}{9}, \frac{10}{27})$  ו.  $(2,2)$  ז.  $(9,36)$  ח.  $(\frac{1}{9}, \frac{28}{27})$
- (29) א. (-1,-2) ב. (2,12)



30 א.  $m = \frac{2}{\sqrt{28}}$  ב.  $(2, \sqrt{252})$  הנקודה  $x = -2$  נפסלת עקב העלאה בריבוע.

ג.  $m = 0$ .

31 א.  $(4, 1)$

32 א.  $(5, 4)$

33  $(1, 6)$

34  $(0, 0)$  ,  $(2.25, 4.5)$

35 א.  $y = 5.5x - 3.5$  ב.  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$  ג.  $y = 38x - 104$

ד.  $y = 1.25x - 2$  ה.  $y = 4\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$  ו.  $y = -\frac{5}{8}x + 1\frac{5}{6}$

ז.  $y = 3.74x - 4.5$  ח.  $y = -2x + 4$

36 א.  $(16, 0)$  ,  $(0, 0)$  ב.  $y = 0.5x - 8$

37 א.  $(\frac{1}{36}, 0)$  ,  $(0, 0)$  ב.  $y = x - \frac{1}{36}$

38 א.  $y = \frac{2}{3}x - 3$  ב.  $(4.5, 0)$  ,  $(0, -3)$  ג.  $90^\circ$  ,  $33.69^\circ$  ,  $56.31^\circ$  ד. 6.75

39 א.  $(0, 3)$  ב.  $y = -\frac{2}{3}x + 3$

40 א.  $(0, -4)$  ב.  $y = 3x - 4$

41 א.  $(0, 0)$  ,  $(1, 0)$  ב.  $y = 1.5x - 1.5$  ג.  $A(5, 6)$

42 א.  $y = 3.4x - 1.35$  ב.  $(-, -1.35)$  ג. 3.825

43 א.  $2 \leq x \leq 6$

ב. משוואת המשיק:  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  ניתן לראות כי הגרף עובר ב-  $(0, 0)$ .

44 א.  $m = 2.4$

ב.  $y = 2.4x - 8\frac{1}{15}$  ג. לא. מתקבל פתרון שנפסל עקב העלאה בריבוע.

45 א.  $y = -1\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$  ב. 4.225

46 א.  $(0, 1)$  ב.  $y = -x + 1$  ג. 0.5

47 א.  $(1, 2)$  ב.  $y = -1.5x + 3.5$

48 א.  $y = 0.5x + 6$  ב.  $y = 5x + 4$  ג.  $y = 4x + 0.25$  ד.  $y = -x + 0.75$

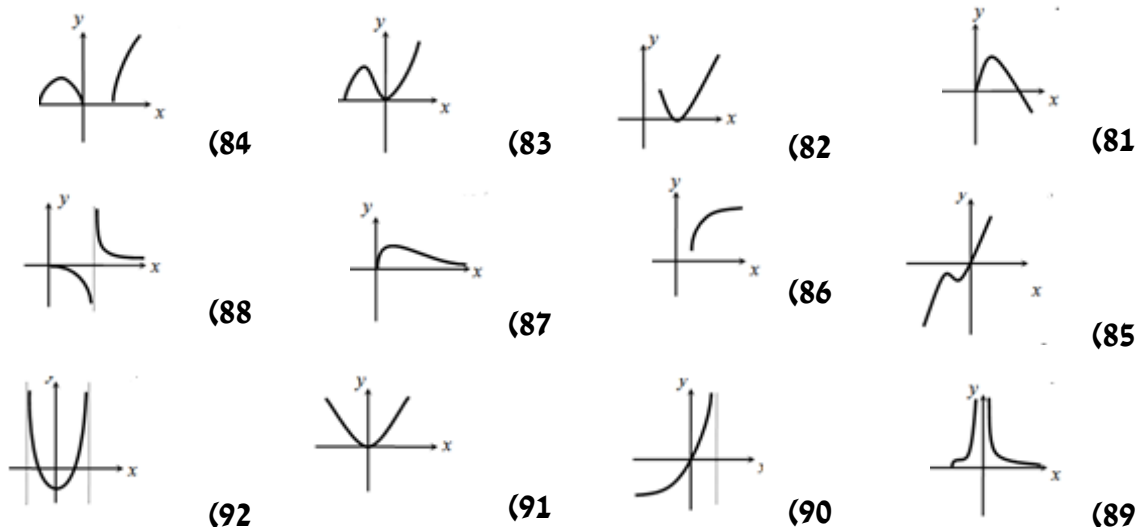
49 א.  $(1, 7)$  ב.  $(0, 0)$  ,  $(64, 0)$  ג.  $9y + x = 64$

- (50) א.  $(0,0)$  ,  $(100,0)$  ב.  $(25,-25)$  ג.  $y = \frac{x}{3} - 37.5$
- (51) א.  $y = 20x - 48$  ב.  $(3,12)$  ג.  $y = \frac{4}{3}x + 8$
- (52)  $y = 3x + 2$
- (53) א.  $y = 2x + 36$
- (54) א.  $x \geq 2$  ב.  $(-2,0)$  ג.  $(-1,0.5)$  ד.  $y = 0.5x + 1$
- (55) א.  $x \leq 4$  ,  $x \neq 0$  ב.  $(4,0)$
- (56) א.  $x \geq 0$  ,  $x \neq 1$  ב.  $(9,6)$  ג.  $y = 6$
- (57) א.  $(0.75, \sqrt{0.75})$  ג.  $y = -\sqrt{3}x + 1.25\sqrt{3}$  ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- ד.  $A(0.25, 0.25)$  ,  $B(0.25, 1.5)$
- (58) א.  $A(6, 2\sqrt{6} + 4)$  ,  $B(6, 2\sqrt{6} - 4)$  ב.  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)x + \sqrt{6} + 1$  ,  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)x + \sqrt{6} - 7$
- (59) א. 4 ב. 15 ג. 20 ד. 1 ה. 2,5 ו. -64
- (60)  $A = 1$  ,  $B = 2$
- (61)  $A = B = 4$
- (62) א.  $a = 2$  ב.  $y = \frac{1}{3}x + 2$  ג.  $S = 6$
- (63) א.  $(11,14)$  ב.  $a = 2$  ג. לא ד.  $7y - 3x = 65$
- (64) א.  $k = 3$  ב.  $x \geq 0$  ג. אין עוד נקודות חיתוך בניהם. ד.  $y = 10x - 34.0625$  ,  $y = 11.9x - 42.8125$
- (65) א.  $k = 0.48$  ב. כן.  $(0.6, 0.57)$  ג.  $y = 0.74x + 0.1352$
- (66) א.  $A = 9$  ,  $B = -9$  ב.  $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$
- (67)  $A = B = 2$
- (68) א.  $A = 1$  ב.  $y = 2.25x - 0.25$  ג.  $y = \frac{4}{9}x + 2\frac{4}{9}$
- (69) א.  $A = -16$  ,  $x = 4$  ב.  $y = -\frac{7}{72}x - \frac{1}{18}$  ג.  $\left(4, -\frac{4}{9}\right)$
- (70) א.  $(0,0)$  ,  $(1,1)$  ב.  $y = 0.5x + 0.5$  ג.  $(-0.5, 0.25)$
- (71) א.  $A(5.5, \sqrt{2})$  ב.  $y = 6.5\sqrt{2} - \sqrt{2}x$  ,  $y = \frac{x}{\sqrt{8}} - \frac{3}{4\sqrt{2}}$  ג.  $S = \frac{5}{\sqrt{2}}$

- 72) א.  $k=1, f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{2}$       ב.  $(0,0), (1,0)$       ג.  $y=0.25x-0.25$
- 73) א.  $A=10$       ב.  $y=5$
- 74)  $A=1, B=-7$
- 75) א.  $\left(3, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$       ב.  $y=0.125x+2.375$
- 76) א.  $(2,0)$
- ב. לא, מאחר שאין פתרון למשוואה:  $f'(x)=0$       ג.  $y=\frac{4}{\sqrt{2}}x-4\sqrt{2}$
- ד.  $S=4\sqrt{2}$
- 77) א.  $\max(0,0), \min(0.25, -0.25)$       ב.  $\max(-1.6, 1.619), \min(0,0), \min(-2,0)$
- ג.  $\min(2, \sqrt{21})$       ד.  $\max(0,4), \min(2,0), \min(-2,0)$
- ה.  $\max\left(3, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \min(0,0)$       ו.  $\max(0,0)$       ז. אין קיצונים כלל.
- ח.  $\max\left(-4, -\frac{4}{\sqrt{50}}\right)$
- 78) א.  $x \leq -4, x \geq 1$       ב.  $\min(-4,0), \min(1,0)$
- ג. עולה:  $x > 1$  יורדת:  $x < -4$
- 79) א. כל  $x$       ב.  $\min(-1.5, 1.5)$       ג. עולה:  $x > -1.5$  יורדת:  $x < -1.5$
- 80) א.  $x \leq -3, x \geq 0$       ג. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < -3$
- 81) א.  $x \geq 0$       ב.  $\max(1,1), \min(0,0)$
- ג. עולה:  $0 < x < 1$  יורדת:  $x > 1$       ד.  $(0,0), (0,4)$       ה. אין.
- 82) א.  $x \geq \frac{1}{16}$       ב.  $\max\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right), \min\left(\frac{1}{8}, 0\right)$
- ג. עולה:  $x > \frac{1}{8}$  יורדת:  $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$       ד.  $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$       ה. אין.
- 83) א.  $x \geq -\frac{5}{4}$       ב.  $\max(-1,1), \min(0,0), \min\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$
- ג. עולה:  $-\frac{5}{4} < x < -1, x > 0$  יורדת:  $-1 < x < 0$       ד.  $\left(-\frac{5}{4}, 0\right), (0,0)$       ה. אין.
- 84) א.  $-1 \leq x \leq 0, x \geq 1$       ב.  $\max(-0.57, 0.62), \min(0,0), \min(1,0), \min(-1,0)$
- ג. עולה:  $-1 < x < -0.57, x > 1$  יורדת:  $-0.57 < x \leq 0$
- ד.  $(0,0), (1,0), (-1,0)$       ה. אין.

- (85) א. כל  $x$ . ב.  $\max(-2, -2)$ ,  $\min(-1.75, -2.004)$ . ג. עולה:  $x < -2$ ,  $x > -1.75$ ; יורדת:  $-2 < x < -1.75$ . ד.  $(0, 0)$ . ה. אין.
- (86) א.  $x \geq 1$ . ב.  $\min(1, 3)$ . ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. אין. ה. אין.
- (87) א.  $x \geq 0$ . ב.  $\max\left(2, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ ,  $\min(0, 0)$ . ג. עולה:  $0 < x < 2$ ; יורדת:  $x > 2$ . ד.  $(0, 0)$ . ה. אין.
- (88) א.  $x \geq 0$ ,  $x \neq 2$ . ב.  $\max(0, 0)$ . ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד.  $(0, 0)$ . ה.  $x = 2$ .
- (89) א.  $x \geq -8$ ,  $x \neq 0$ . ב.  $\min(-8, 0)$ . ג. עולה:  $-8 < x < 0$ ; יורדת:  $x > 0$ . ד.  $(-8, 0)$ . ה.  $x = 0$ .
- (90) א.  $x < 10$ . ב. אין קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד.  $(0, 0)$ . ה.  $x = 10$ .
- (91) א. כל  $x$ . ב.  $\min(0, 0)$ . ג. עולה:  $x > 0$ ; יורדת:  $x < 0$ . ד.  $(0, 0)$ . ה. אין.
- (92) א.  $-3 < x < 3$ . ב.  $\min\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ . ג. עולה:  $0 < x < 3$ ; יורדת:  $-3 < x < 0$ . ד.  $(\pm 2, 0)$ ,  $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ . ה.  $x = \pm 3$ .

סקיצות של שאלות 81-92:



93 א.  $0 \leq x \leq 16$  ב.  $\max(8,8)$  ,  $\min(0,0)$  ,  $\min(16,0)$

ג. עולה:  $0 < x < 8$  , יורדת:  $8 < x < 16$ .

94 א.  $0 \leq x \leq 36$  ב.  $\max(36,0)$  ,  $\max(0,0)$  ,  $\min(18,-36)$

ג. עולה:  $18 < x < 36$  , יורדת:  $0 < x < 18$ .

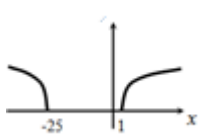
95 א.  $x \geq 4$  ,  $x \leq 1$  ב.  $\min(4,0)$  ,  $\min(1,0)$

ג. עולה:  $x > 4$  , יורדת:  $x < 1$  ד.  $(0,2)$ .

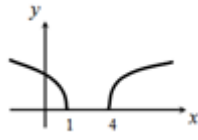
96 א.  $x \geq 1$  ,  $x \leq -25$  ב.  $\min(-25,0)$  ,  $\min(1,0)$

ג. עולה:  $x > 1$  , יורדת:  $x < -25$ .

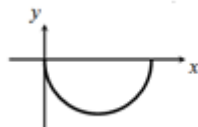
סקיצות של שאלות: 93-96:



(96)



(95)



(94)



(93)

97 א.  $k = -3$  ב.  $2 \leq x \leq 8$

ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה:  $\min(2,-3)$  ,  $\min(8,-3)$

ד. עולה:  $2 < x < 5$  , יורדת:  $5 < x < 8$ .

98 א.  $k = 4$  ב.  $-3 \leq x \leq 3$

ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה:  $\min(-3,0)$  ,  $\min(3,0)$

ד. עולה:  $-3 < x < 0$  , יורדת:  $0 < x < 3$ .

99 א.  $x \geq -1$  ב.  $\max(-1,0)$  ,  $\min(0,-1)$  ג.  $(-1,0)$  ,  $(3,0)$

ד. עולה:  $x > 0$  , יורדת:  $-1 < x < 0$ .

ה. חיובית:  $x > 3$  , שלילית:  $-1 < x < 3$ .

100 א.  $k = 2$  ב.  $x \leq 5.5$

ג. כן – ישנה נקודת קיצון קצה:  $(5.5, 7.5)$  . לא קיימת נקודת קיצון מקומית מאחר

ש-  $x = 5$  המתקבל בעת השוואת הנגזרת לאפס נפסל כי אינו מקיים את המשוואה המקורית.

ד.  $(1,0)$  . הנקודה שבה  $x = -7$  אינה מקיימת את המשוואה המקורית

ולכן נפסלת.

101 א.  $k = -12$  ב.  $\min(4,-12)$  ,  $\max(0,0)$  ג. עולה:  $x > 4$  , יורדת:  $0 < x < 4$ .

102 א.  $k = 4$  ב.  $(1,3)$  ג.  $\min(0,0)$  ,  $\max(4,4)$

ד.  $(0,0)$  ,  $(16,0)$ .

- 103 א.  $x \geq 0$  ב.  $\min(4, -6)$ ,  $\max(0, 0)$  ג. עולה:  $x > 4$  יורדת:  $0 < x < 4$ .  
ד.  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt[3]{1024})$ .  
ו. חיובית:  $x > 10$ , שלילית:  $0 < x < 10$ .
- 104 א.  $k = 2$  ב. יש קיצון קצה -  $(0, -4)$  ג. עולה בכל תחום הגדרתה.  
ד.  $(1, 0)$ .
- 105 א.  $0 \leq x \leq 16$  ב.  $\min(0, 4)$ ,  $\min(16, 4)$ ,  $\max(8, 2\sqrt{8})$  ג. עולה:  $0 < x < 8$ , יורדת:  $8 < x < 16$ .  
ד. אין קיצונים.
- 106 א.  $k = 1$  ב.  $0 \leq x \leq 4$  ג. לא. ד. אין קיצונים.
- 107 א. יש להראות כי הנגזרת מורכבת מחיבור של שני ביטויים שחיוביים תמיד ומכאן שסימן הנגזרת חיובי והפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
-  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$  הנגזרת בנויה משני ביטויים חיוביים.
- ב.  $0 \leq x \leq 4.5$  ג.  $m = 2$  ד.  $\min(0, -1)$ ,  $\max(4.5, 2 + \sqrt{4.5})$ .
- 108 א.  $-4 \leq x \leq 4$  ב.  $\min(-4, -4)$ ,  $\min(4, 4)$ ,  $\max(\sqrt{8}, 2\sqrt{8})$  ג.  $(0, 4)$ ,  $(-\sqrt{8}, 0)$ .
- 109 א.  $k = -1$  ב.  $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$  ג.  $\min(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$ ,  $\min(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$ ,  $\max(-2, 4)$  ד. עולה:  $-\sqrt{8} < x < 2$ , יורדת:  $-2 < x < -\sqrt{8}$ .
- 110 א.  $x \geq 2$  ב. אין נקודות קיצון ג.  $(2, \frac{1}{8})$  ד. אין נקודות חיתוך עם הצירים  
ו.  $m \geq \frac{1}{8}$ .
- 111 א.  $x \geq 2$ ,  $x < 0$  ב.  $\min(2, 0)$ ,  $\max(3, \frac{1}{\sqrt{27}})$  ג.  $(2, 0)$
- 112 א.  $a = 1$  ב.  $-3 < x < 3$  ג.  $(-1.5, \sqrt{3})$  ד. יורדת:  $-3 < x < -1.5$ , עולה:  $-1.5 < x < 3$ .

סקיצות של שאלות 101-111 (אלו שיש בהן גרף):



(105)



(104)



(103)



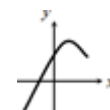
(101)



(111)



(110)



(108)

**113 א. i. הטענה אינה נכונה.**

תחומי ההגדרה הם:  $f(x): x \geq -k$ ;  $g(x): x > -k$ ;  $h(x): x \geq -k$ .

ii. הטענה אינה נכונה. הפונקציה:  $f(x)$  עולה תמיד שכן:  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}} > 0$ .

הפונקציה:  $g(x)$  גם עולה תמיד שכן:  $g'(x) = \frac{x+2k}{(x+k)^{1.5}} > 0$  כי הנקודה  $x = -2k$

אינה בתחום ההגדרה וערך הנגזרת בתחום ההגדרה חיובי. לפונקציה:  $h(x)$  יש

נקודת מינימום ב-  $x = -\frac{2}{3}k$  אשר בתוך תחום הגדרתה ולכן היא יורדת

בעבור:  $-k < x < -\frac{2}{3}k$ .

iii. הטענה אינה נכונה.

נקודות החיתוך:  $f(x): (-k, 0)$ ;  $g(x): (0, 0)$ ;  $h(x): (-k, 0), (0, 0)$ .

ב. i.  $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$ ,  $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ . ii.  $k = 4$ . ג.  $I = g(x)$ ,  $II = f(x)$ ,  $IV = h(x)$ .

**114 א. i. הטענה אינה נכונה.**

ת"ה:  $f(x): -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$ ;  $g(x): -\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$ ;  $h(x): -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}, x \neq 0$ .

ii. הטענה אינה נכונה.

נקודות החיתוך הן:  $f(x): (\pm\sqrt{k}, 0), (0, 0)$ ;  $g(x): (0, 0)$ ;  $h(x): (\pm\sqrt{k}, 0)$ .

iii. הטענה נכונה. בעבור  $g(x)$  נקבל:  $g'(x) = \frac{2kx - x^3}{(k - x^2)^{1.5}}$  ולכן:  $x = 0$  נקודת

מינימום. (הנקודות  $x = \pm\sqrt{2k}$  נפסלות). בעבור  $h(x)$  נקבל:  $h'(x) = \frac{x^3 - 2kx}{(k - x^2)^{1.5}}$

ולכן:  $x = 0$  נקודת מקסימום. (הנקודות  $x = \pm\sqrt{2k}$  נפסלות).

iv. הטענה אינה נכונה. לפונקציה יש 3 נקודות קיצון:  $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}k}$ .

ב.  $k = 24$ .

ג.  $\min(0, 0)$ ,  $\max(\pm 4, 32\sqrt{2})$ .

ד.  $I = g(x)$ ,  $II = f(x)$ ,  $III = h(x)$ .

- 115 א. i. הטענה אינה נכונה. תחומי ההגדרה הם:  $f(x): x \geq 0, x \neq 1$ ;  $g(x): x > 1$ .  
 ii. הטענה נכונה. ל- $f(x)$  יש נקודת קיצון  $(4, 4)$  ול- $g(x)$  יש קיצון  $(2, 2)$ . שתיהן נמצאות על הישר  $y = x$ .  
 iii. הטענה נכונה. מתקבלים:  $x = 0, 1$  אשר שניהם נפסלים מחמת תחום ההגדרה של הפונקציות.

ב.  $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$  ג. לא.  $h(x): x \neq 1$  ד.  $\Pi = f(x)$ ,  $I = h(x)$

- 116 א. i.  $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$  ii.  $x = \pm\sqrt{k}$   
 ב. הנגזרת היא:  $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$  ג.  $y = \sqrt{k}x$  ד.  $k = 4$

117 א.  $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$

- ב. i. הטענה אינה נכונה. ת"ה:  $g(x) = x < -4, x \geq -2$ ;  $f(x): x \neq 4$

ii. הטענה נכונה. הנגזרות חיוביות:  $f(x) = \frac{2}{(x+4)^2} > 0$

ג.  $g(x) = \frac{1}{(x+4)^2 \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}} > 0$

- iii. הטענה נכונה. הנקודה היא:  $(-2, 0)$

- iv. הטענה נכונה. האסימפטוטות משותפות הן:  $x = -4, y = 1$

ג.  $f(x): \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ;  $g(x): \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- ד. אסף צודק שכן מכוח ההגדרה:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ . ניתן לראות כי בעבור

כל ערך של  $x_0$  בחיתוך תחום ההגדרה המשותף קיימות שתי נקודות:

$A(x_0, f(x_0))$  ו-  $B(x_0, g(x_0))$  (אחת על כל גרף כמובן) ושיעורי ה- $y$  שלהן

מקיימות:  $g(x_0) = \sqrt{f(x_0)}$

118 א.  $-2 < x \leq 0, x > 2$  ב.  $f'(x) = -\frac{x^2+4}{2(x^2-4)^2 \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}}$

- ד. נקודות החיתוך של  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  ונקודות המאפסות את הנגזרת של  $f(x)$ .

- ה. i. לא. ל- $f(x)$  אין נק' קיצון והנקודה  $(0, 0)$  אינה קיצון בעבור  $g(x)$ .

- ii. יורדת בכל תחום הגדרתה. i. I.



## תוכן העניינים:

פרק 20 ..... 458

חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות ..... 458

סיכום כללים : ..... 458

שאלות – הוספת קבוע : ..... 459

שאלות – הכפלה בקבוע : ..... 461

שאלות – הזזת פונקציה ימינה ושמאלה : ..... 463

שאלות – מתיחה וכיווץ של פונקציה : ..... 464

שאלות – היפוך גרף של פונקציה ביחס לציר  $y$  : ..... 465

שאלות – ערך מוחלט של פונקציה : ..... 466

תשובות סופיות : ..... 467

## פרק 20

# חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות

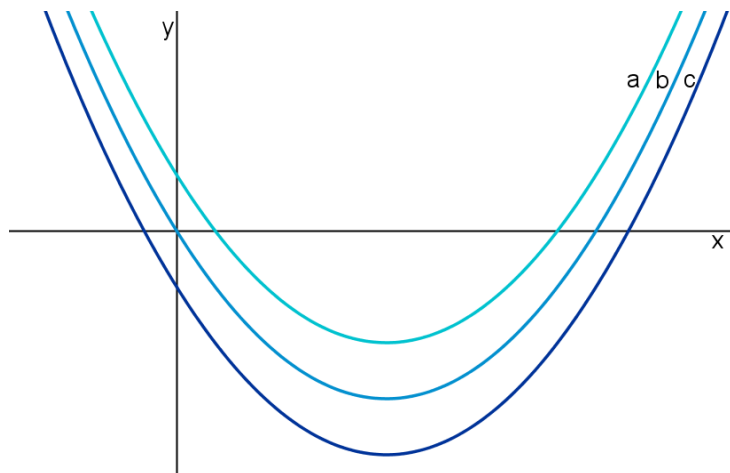
### סיכום כללים:

- הוספת קבוע לפונקציה :  
בהינתן פונקציה  $y = f(x)$ , כל הנקודות שעל גרף הפונקציה :  $g(x) = f(x) + k$  מתקבלת ע"י הוספת קבוע  $k$  לערך ה- $y$ . במילים אחרות, אם נקודה  $(x_0, y_0)$  נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  אז הנקודה  $(x_0, y_0 + k)$  תמצא על גרף הפונקציה  $g(x)$ .  
הוספת קבוע מעלה ומורידה את גרף הפונקציה  $f(x)$  ב- $k$  יחידות.
- הכפלת פונקציה בקבוע :  
בהינתן פונקציה  $y = f(x)$  ועליה נקודה כללית  $(x_0, y_0)$ , הפונקציה  $g(x) = k \cdot f(x)$  מתקבלת ע"י הכפלת  $f(x)$  בקבוע  $k$  ( $k \neq 0$ ). נקודה על  $g(x)$  תהיה מהצורה :  $(x_0, k \cdot y_0)$ .  
הכפלת פונקציה בקבוע חיובי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית. הכפלת פונקציה בקבוע שלילי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית והופכת אותו ביחס לציר ה- $x$ .
- הזזת פונקציה ימינה ושמאלה :  
כדי להזיז פונקציה  $y = f(x)$  ב- $k$  יחידות ימינה נציב :  $g(x) = f(x - k)$   
וכדי להזיז אותה שמאלה ב- $k$  יחידות נציב :  $g(x) = f(x + k)$
- מתיחה וכיווץ של פונקציה :  
כדי לכווץ פונקציה כלשהי  $y = f(x)$  פי  $k$  (מניחים  $k > 1$ ) נציב :  $g(x) = f(k \cdot x)$ .  
כדי להרחיב פונקציה כלשהי  $y = f(x)$  פי  $k$  (מניחים  $k > 1$ ) נציב :  $g(x) = f(x/k)$ .
- היפוך גרף פונקציה ביחס לציר  $y$  :  
כדי להפוך את גרף הפונקציה  $y = f(x)$  סביב ציר ה- $y$  נכפיל את ערך ה- $x$  פי -1.  
הגרפים של הפונקציות  $y_1 = f(x)$  ו- $y_2 = f(-x)$  מהווים שיקוף זה לזה ביחס לציר ה- $y$ .

- ערך מוחלט של פונקציה:  
הערך המוחלט של:  $y = f(x)$ , מתקבל ע"י לקיחת ערכי ה- $y$  בגודלם בלבד.  
במילים אחרות, הערך המוחלט של  $f(x)$  הוא:  $y = |f(x)|$ . הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $|f(x)|$  זהים לחלוטין בערכם החיובי (ז"א בחלקם שמעל לציר ה- $x$ ) וסימטריים לחלוטין בערכם השלילי ביחס לציר ה- $x$  כאשר הגרף של  $f(x)$  נמצא מתחת לציר ה- $x$  והגרף של  $|f(x)|$  נמצא מעל לציר ה- $x$ .

## שאלות – הוספת קבוע:

- (1) סרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$  ואת הגרף  $y = f(x) + k$  עבור  $k = 1$  ו- $k = -4$ .
- (2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = -2x^2$ . מגדירים את הפונקציה:  $g(x) = f(x) + b$ .  
א. מהו ערך הפרמטר  $b$  עבורו גרף הפונקציה  $g(x)$  יעבור בנקודה  $(2, 10)$ ?  
ב. מצא את ערך הפרמטר  $b$  עבורו  $g(x)$  תקבל ערך מקסימלי של 4.  
ג. מצא את ערך הפרמטר  $b$  עבורו  $g(x)$  תקבל ערך מקסימלי של -3.
- (3) לפניך שלוש גרפים של פונקציות:  
 $f(x) = x^2 - 6x$ ,  $g(x) = x^2 - 6x - 2$ ,  $h(x) = x^2 - 6x + 2$ .  
התאם כל גרף מבין הגרפים  $a, b$  ו- $c$  לכל פונקציה:



4 נתונה הפונקציה :  $f(x) = x^3 - 4x$  . מגדירים את הפונקציה :  $g(x) = f(x) + A$  כאשר  $A$  הוא פרמטר השונה מאפס.

א. הבע באמצעות  $A$  את הפונקציה  $g(x)$  .

ב. מהו  $A$  עבורו גרף הפונקציה  $g(x)$  יהיה נמוך משל  $f(x)$  ב-5 יחידות?

ג. מהו  $A$  עבורו גרף הפונקציה  $g(x)$  יחתוך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 3$  ?

5 נתונות שתי פונקציות :  $f(x) = \frac{3-2x}{x}$  ו-  $g(x) = \frac{3}{x}$  .

א. הראה כי גרף הפונקציה  $f(x)$  נמצא מתחת לגרף הפונקציה  $g(x)$

לכל ערך של  $x$  וחשב בכמה יחידות  $f(x)$  מתחת ל- $g(x)$  .

ב. כתוב פונקציה שערכיה יהיו גדולים משל  $g(x)$  ב-4 יחידות לכל  $x$

6 נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{2}{x^2}$  . מגדירים את הפונקציה :  $g(x) = f(x) + B$  ,  $B \neq 0$  .

א. מהן האסימפטוטות האופקיות של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  ?

ב. סרטט במערכת צירים אחת באופן איכותי את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$

ו- $g(x)$  עבור  $B > 0$  .

ג. האם גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $x$  עבור  $B > 0$  ? נמק אלגברית

וגרפית (היעזר בסעיף הקודם).

ד. מצא את  $B$  עבורו גרף הפונקציה  $g(x)$  יחתוך את ציר ה- $x$  בנקודה

שבה  $x = 2$  וקבע איזה גרף מבין השנים יהיה מעל השני ובכמה יחידות.

7 מצא בכמה יחידות יש להוריד את גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  על מנת שהיא תהיה

אי-חיובית בכל תחום הגדרתה.

8 הפונקציה :  $f(x) = \sqrt{x} + b$  ,  $b$  פרמטר) חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 9$  .

מצא בכמה יחידות היא נמוכה מהפונקציה :  $g(x) = \sqrt{x}$  .

9 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, נקודת הקיצון המקומית שלה ונקודות החיתוך שלה עם הצירים.

ב. מגדירים את הפונקציה  $g(x) = f(x) + 3$ .

סרטט במערכת צירים את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

## שאלות – הכפלה בקבוע:

10 סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x^2, \quad h(x) = 4x^2.$$

11 סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad h(x) = \frac{1}{4}x^2.$$

12 סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = -2x^2, \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

13 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 8}$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של  $f(x)$  עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מגדירים את הפונקציה:  $g(x) = 3 \cdot f(x)$ . ענה על השאלות הבאות:

i. מהו תחום ההגדרה של  $g(x)$ ?

ii. מהן נקודות הקיצון של  $g(x)$ ?

iii. מהם תחומי העלייה והירידה של  $g(x)$ ?

iv. מהם שיעורי נקודות החיתוך של  $g(x)$  עם הצירים?

v. מהם האסימפטוטות המקבילות לצירים של  $g(x)$ ?

ח. סרטט על אותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה  $g(x)$  לצד  $f(x)$ .

**14** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 8}$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של  $f(x)$  עם הצירים.
- ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. מגדירים את הפונקציה:  $g(x) = -2 \cdot f(x)$ . ענה על השאלות הבאות:
  - i. מהו תחום ההגדרה של  $g(x)$ ?
  - ii. מהן נקודות הקיצון של  $g(x)$ ?
  - iii. מהם תחומי העלייה והירידה של  $g(x)$ ?
  - iv. מהם שיעורי נקודות החיתוך של  $g(x)$  עם הצירים?
  - v. מהם האסימפטוטות המקבילות לצירים של  $g(x)$ ?
- ח. סרטט על אותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה  $g(x)$  לצד  $f(x)$ .

**15** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x^3 - x$  ומגדירים גם את הפונקציה:  $g(x) = -f(x)$ .

- א. מצא את נקודות הקיצון ונקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. התייחס לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  וענה על השאלות הבאות:
  - i. הוכח כי לשתי הפונקציות אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ .
  - ii. מה הקשר בין נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  של כל פונקציה?
  - iii. מה הקשר בין נקודות הקיצון של כל פונקציה?
  - iv. האם, ואם כן – כיצד, משתנים תחומי העלייה והירידה של  $g(x)$  ביחס ל- $f(x)$ ? נמק.

**16** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = k \cdot \frac{x-1}{x^2+3}$ ,  $k \neq 0$ .

ידוע כי הנקודה הגבוהה ביותר על גרף הפונקציה מקיימת:  $y = 1$ .

- א. מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום הגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. הוסף באותו הסרטוט סקיצה של הפונקציה:  $g(x) = -f(x)$ .

## שאלות – הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:

17) לפניך הפונקציה:  $f(x) = x^2$ .

סרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה  $f(x)$  ואת הגרפים של

הפונקציות:  $g(x) = f(x-2)$  ו-  $h(x) = f(x+3)$ .

18) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2$ .

א. כתוב ביטוי מפורש לפונקציה המתקבלת מהזזת  $f(x)$  3 יחידות ימינה ו-4 יחידות למעלה.

ב. כתוב ביטוי מפורש לפונקציה המתקבלת מהזזת  $f(x)$  4 יחידות שמאלה ו-2 יחידות למטה.

ג. כתוב ביטוי מפורש לפונקציה המתקבלת מהזזת  $f(x)$   $\frac{1}{2}$  יחידה שמאלה ולמעלה.

19) נתונה פונקציה  $f(x) = x^2$ . מזיזים את הפונקציה ומקבלים:  $g(x) = f(x+a)+b$ . כאשר  $a$  ו- $b$  הם פרמטרים השונים מאפס.

א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  אם ידוע כי:  $g(x) = x^2 + 2x$ .

ב. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  אם ידוע כי:  $g(x) = x^2 - 4x + 7$ .

20) מזיזים את גרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  5 יחידות ימינה כך שמתקבלת הפונקציה  $g(x)$ .

א. כתוב באופן מפורש את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. מצא בכמה יחידות יש להזיז את גרף הפונקציה  $f(x)$  שמאלה על מנת

שיחתוך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 1$ .

## שאלות – מתיחה וכיווץ של פונקציה:

**(21)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2$ . כתוב באופן מפורש וסרטט במערכת צירים אחת את

הפונקציות הבאות:  $g(x) = f(2x)$ ,  $h(x) = f(x/2)$ .

**(22)** הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^4 - 8x}{16}$  חותכת את ציר ה- $x$  בחלקו החיובי בנקודה A.

מצא כיווץ של הפונקציה כך ששיעורי הנקודה A יהיו  $(1,0)$ .

**(23)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 6x - x^2$ . רוצים לכווץ אותה פי  $k$  כך שנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- $x$  שאינה ראשית הצירים תקטן פי 3. נסמן את הפונקציה המכווצת ב- $g$ .

א. מצא את ערכו של הפרמטר  $k$ .

ב. כתוב את הפונקציה המכווצת  $g(x)$  בצורה מפורשת.

ג. סרטט את הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  באותה מערכת צירים.

ד. הראה כיצד משתנה נקודת הקיצון במקרה זה.

**(24)** גרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax - x^2}$ ,  $a \neq 0$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A שאינה בראשית

הצירים, וגרף הפונקציה  $g(x) = f(4x)$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה B שאינה בראשית

הצירים. ידוע כי  $x_B = 3$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $a$  וחקור את הפונקציה  $f(x)$  לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. נקודות קיצון (מקומיות ומוחלטות אם ישנן) וקביעת סוגן.

iii. תחומי עלייה וירידה.

iv. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. היעזר בתוצאות הסעיף הקודם וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

נמק כל שלב בקביעותיך.

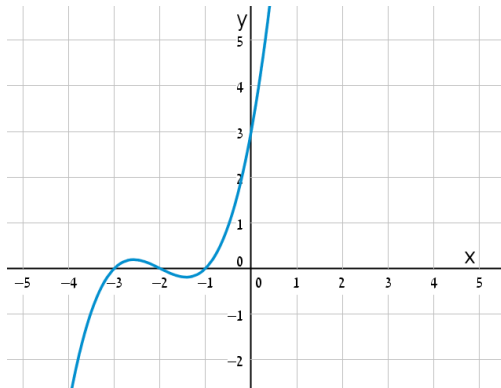


## שאלות – היפוך גרף של פונקציה ביחס לציר y:

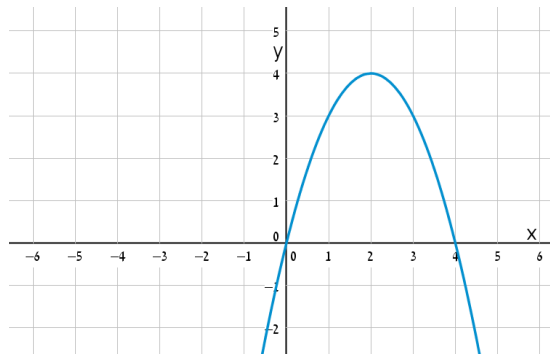
25) סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות:  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = f(-x)$ . והראה כי ציר ה-  $y$  מהווה את ציר הסימטריה בין הגרפים.

26) לפניך סרטוטים של פונקציות שונות. הוסף לכל מערכת צירים גרף משוקף ביחס לציר ה-  $y$ .

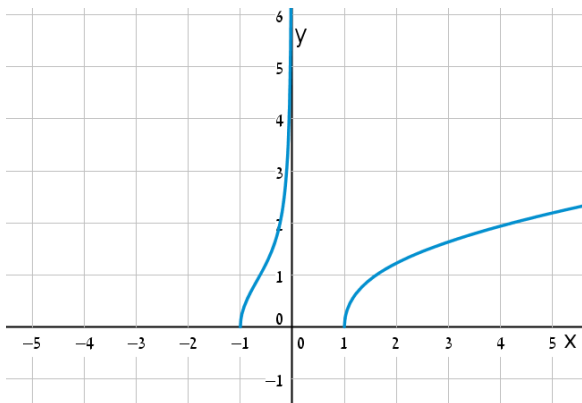
ב.



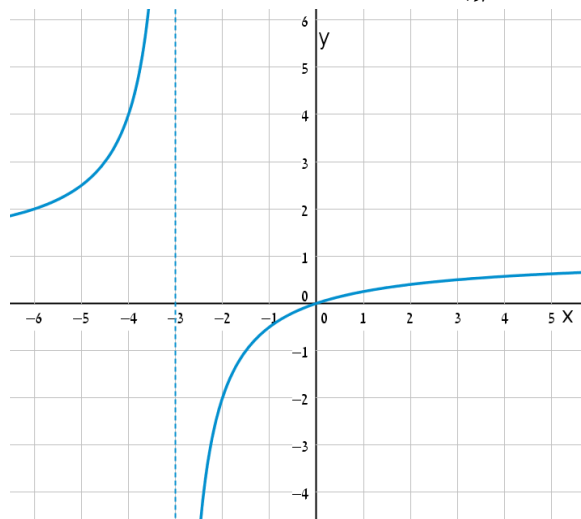
א.



ד.



ג.



27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה-  $x$ .

ב. שקף את הפונקציה וכתוב ביטוי מפורש של הפונקציה המתקבלת.

ג. הראה כי נקודות החיתוך עם ציר ה-  $x$  של הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ושל הפונקציה המשוקפת שלה הם מספרים נגדיים.

(28) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$ .

סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ,  $g(x) = f(-x)$

ו-  $h(x) = -f(x)$  והסבר איזה ציר מהווה סימטריה בכל מקרה ביחס ל-  $f(x)$ .

(29) הראה כי הפונקציה  $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2 + 1}$  זהה לפונקציה  $g(x) = f(-x)$  והסבר מה ניתן לומר על הגרפים של הפונקציות הללו ועל הסימטריה שלהן זו לזו ביחס לציר ה-  $y$ .

## שאלות – ערך מוחלט של פונקציה:

(30) נתונות הפונקציות:  $f(x) = x$  ו-  $g(x) = |x|$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הגרפים עם ציר ה-  $x$ .
- סרטט את שני הגרפים במערכת צירים אחת והסבר מה ההבדל ביניהם.
- כיצד ישתנו הגרפים עבור:  $f(x) = x - 2$  ?
- כיצד ישתנו הגרפים עבור:  $f(x) = 3(x - 2)$  ?
- כיצד ישתנו הגרפים עבור:  $f(x) = 3x - 2$  ?

(31) סרטט במערכת צירים אחת את זוגות הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = x^2 - 2x$  ו-  $g(x) = |x^2 - 2x|$ .

ב.  $f(x) = x^3$  ו-  $g(x) = |x^3|$ .

ג.  $f(x) = \frac{1}{x}$  ו-  $g(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$ .

(32) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x}$  ועליה מבצעים את הפעולות הבאות:

- מזיזים את הפונקציה  $f(x)$  ב-3 יחידות ימינה.
- מורידים 4 יחידות מערך הפונקציה.
- לוקחים את הערך המוחלט של הפונקציה.
- א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה המתקבלת.
- ב. האם תשתנה התוצאה אם נחליף בין שתי הפעולות הראשונות?

## תשובות סופיות:

הערה: כל הסרטוטים לשאלות המתאימות מופיעים במרכז בסוף התשובות.

(1) סרטוט בסוף.

(2) א.  $b=18$  ב.  $b=4$  ג.  $b=-3$

(3) ההתאמה:  $f(x) \rightarrow b, g(x) \rightarrow c, h(x) \rightarrow a$

(4) א.  $g(x) = x^3 - 4x + A$  ב.  $A = -5$  ג.  $A = 3$

(5) א. הוכחה. ב.  $h(x) = \frac{3+4x}{x}$

(6) א.  $f(x) \rightarrow y=0, g(x) \rightarrow y=B$  ב. סרטוט בסוף ג. לא.

ד.  $B = -\frac{1}{2}$  נמצאת מעל  $g(x)$  ב-  $\frac{1}{2}$  יחידה.

(7)  $\frac{1}{2}$  יחידה (לפחות).

(8) 3 יחידות.

(9) א. תחום הגדרה:  $-3 \leq x \leq 3$ , נקודת קיצון:  $\max(0,3)$ ,

נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,3), (3,0), (-3,0)$  ב. סרטוט בסוף.

(10) סרטוט בסוף.

(11) סרטוט בסוף.

(12) סרטוט בסוף.

(13) א. תחום הגדרה: כל  $x$  ב. נקודת קיצון:  $\max\left(-2, \frac{1}{4}\right)$  ג. עולה:  $x < -2$

יורדת:  $x > -2$  ד. נקודות חיתוך עם הצירים:  $\left(0, \frac{1}{8}\right)$  ה. אסימפטוטות:  $y=0$

ו. סרטוט בסוף ז. i. תחום הגדרה: כל  $x$  ii. נקודת קיצון:  $\max\left(-2, \frac{3}{4}\right)$

iii. עולה:  $x < -2$ , יורדת:  $x > -2$  iv. נקודות חיתוך עם הצירים:  $\left(0, \frac{3}{8}\right)$

v. אסימפטוטות:  $y=0$  ח. סרטוט בסוף.

14) א. תחום הגדרה: כל  $x$  ב. נקודת קיצון:  $\max\left(-2, \frac{1}{4}\right)$  ג. עולה:  $x < -2$

יורדת:  $x > -2$  ד. נקודות חיתוך עם הצירים:  $\left(0, \frac{1}{8}\right)$  ה. אסימפטוטות:  $y = 0$

ו. סרטוט בסוף ז. i. תחום הגדרה: כל  $x$  ii. נקודת קיצון:  $\max\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

iii. עולה:  $x > -2$ , יורדת:  $x < -2$  iv. נקודות חיתוך עם הצירים:  $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

v. אסימפטוטות:  $y = 0$  ח. סרטוט בסוף.

15) א. נקודות קיצון:  $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, 0.192\right)$ ,  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -0.192\right)$  נקודות חיתוך עם

הצירים:  $(0,0)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  ב. סרטוט בסוף ג. i. הוכחה ii. זו אותה נקודה

iii. שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון זהים, אך שיעורי ה- $y$  הפוכים בסימנם וסוג הקיצון הפוך iv. כל תחומי העלייה והירידה מתהפכים.

16) א.  $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$ ,  $k = 6$  ב. תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות קיצון:  $\max(3,1)$ ,  $\min(-1,-3)$ ,

עולה:  $-1 < x < 3$ , יורדת:  $x > 3$ ,  $x < -1$ , נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,-2)$ ,  $(1,0)$ , אסימפטוטות:  $y = 0$  ג. סרטוט בסוף ד. סרטוט בסוף.

17) סרטוט בסוף.

18) א.  $g(x) = x^2 - 6x + 13$  ב.  $g(x) = x^2 + 8x + 14$  ג.  $g(x) = x^2 + x + \frac{3}{4}$

19) א.  $a = 1$ ,  $b = -1$  ב.  $a = -2$ ,  $b = 3$

20) א.  $g(x) = \sqrt{x-5}$  ב. 1.

21)  $g(x) = 4x^2$ ,  $h(x) = \frac{x^2}{4}$

22)  $f(2x) = x^4 - x$

23) א.  $k = 3$  ב.  $g(x) = 18x - 9x^2$  ג. סרטוט בסוף

ד. ערך ה- $x$  של נקודת הקיצון מתכווץ פי 3 (במקום  $\max(3,9)$  הופך ל- $\max(1,9)$ ).

24) א.  $a = 12$ , i. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 12$  ii. נקודת קיצון:  $\min(12,0)$  קצה,  $\max(6,6)$ ,

iii. עולה:  $0 < x < 6$ , יורדת:  $6 < x < 12$  iv. סרטוט בסוף

ב. סרטוט בסוף.

25) סרטוט בסוף.

26) סרטוטים בסוף.

27) א.  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(2,0)$  ב.  $f(-x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2$  ג. הוכחה.

28) סרטוט בסוף. ציר ה- $y$  מהווה את ציר הסימטריה בין  $f(x)$  ל- $g(x)$  וציר ה- $x$  מהווה את ציר הסימטריה בין  $f(x)$  ל- $h(x)$ .

29) הפונקציות זהות. עבור שתיהן ציר ה- $y$  מהווה ציר סימטריה.

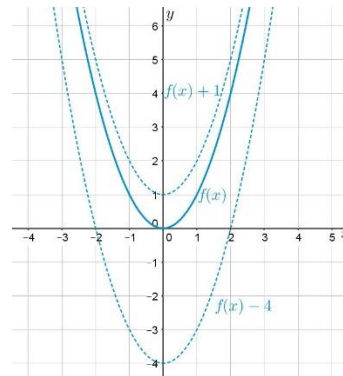
30) א.  $(0,0)$  ב. סרטוט בסוף.

31) א. סרטוט בסוף ב. סרטוט בסוף ג. סרטוט בסוף

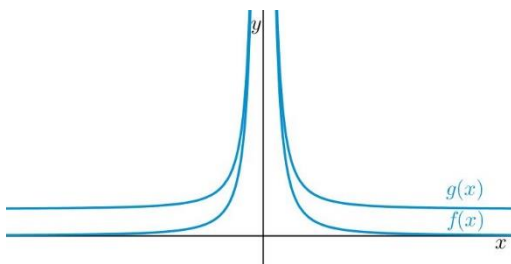
32) א. סרטוט בסוף ב. התוצאה לא תשתנה.

סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

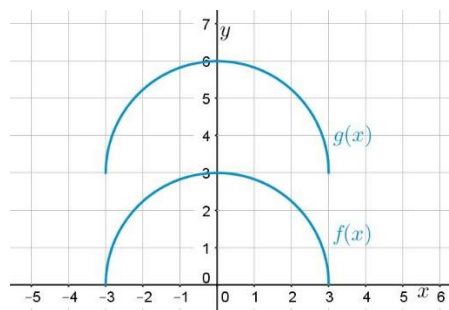
(1



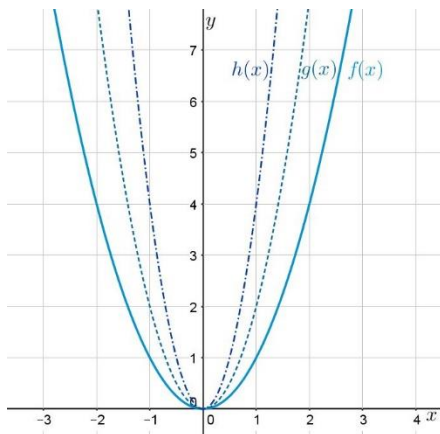
(6



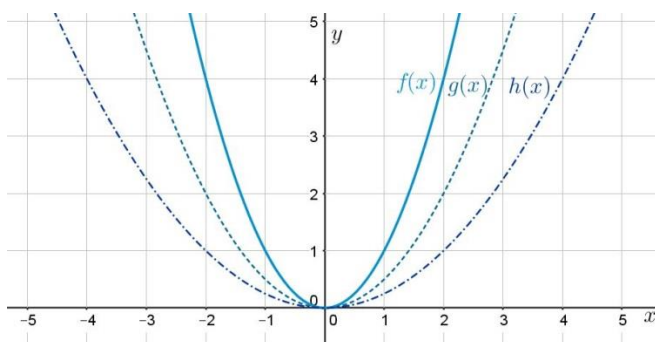
(9



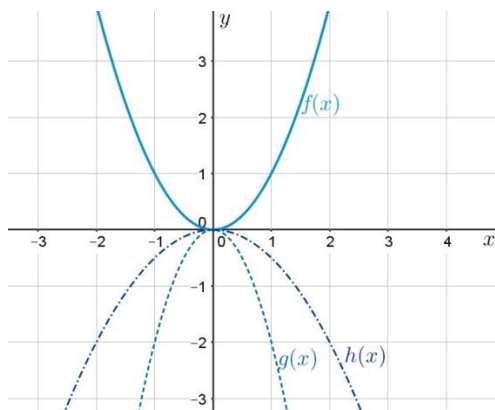
(10



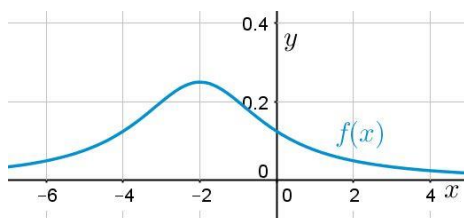
(11)



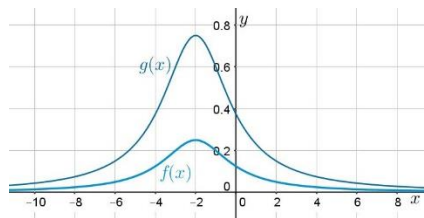
(12)



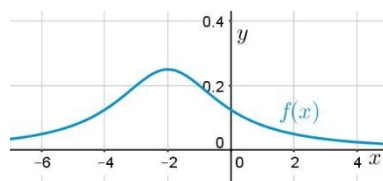
(13) סעיף ו'



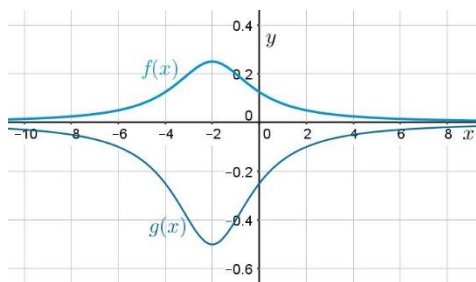
(13) סעיף ח'



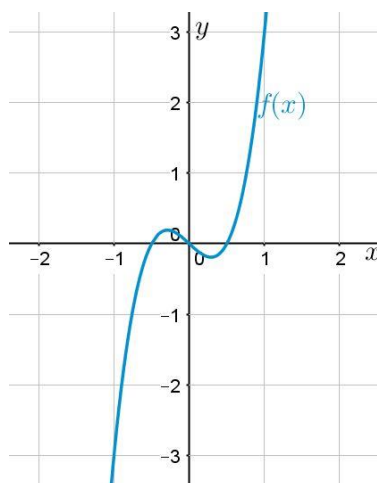
(14) סעיף ו'



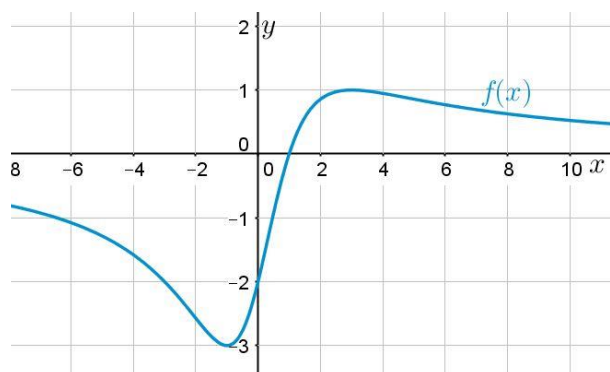
(14) סעיף ח'



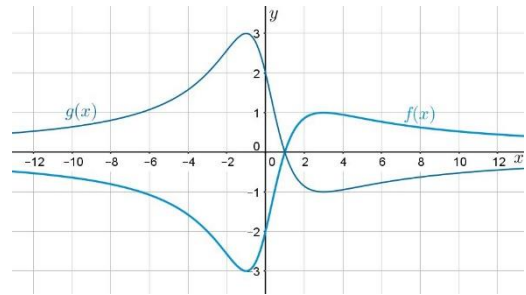
(15)



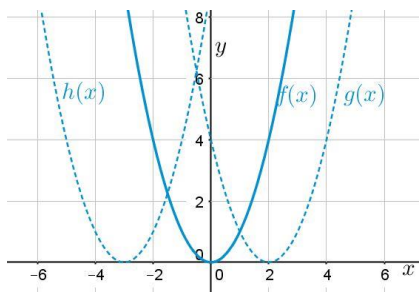
(16) סעיף א'



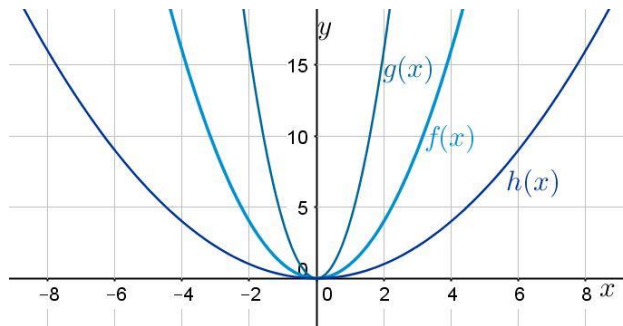
16) סעיף ב'



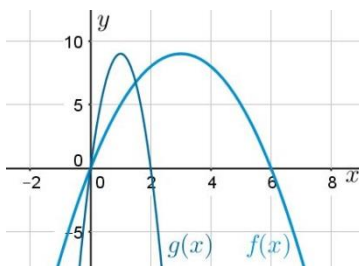
17)



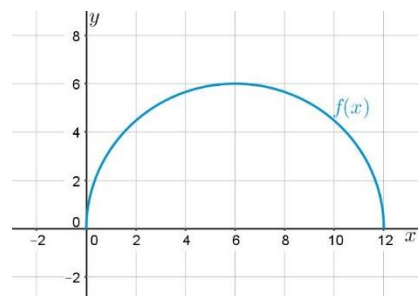
21)



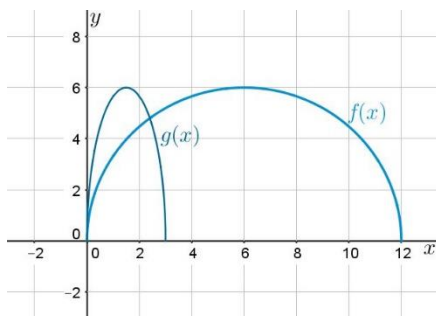
23)



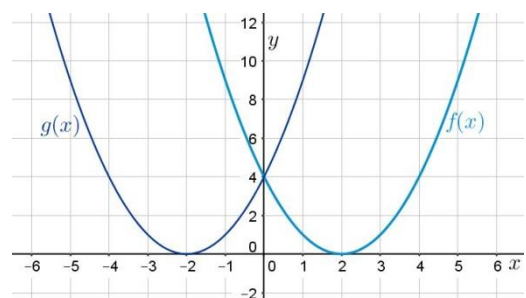
24) סעיף א'



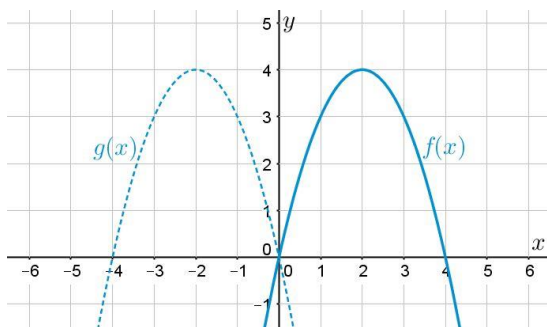
24) סעיף ב'



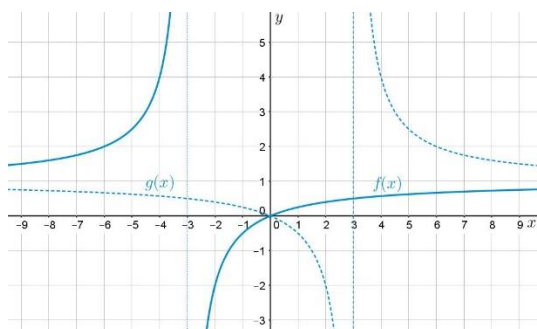
25)



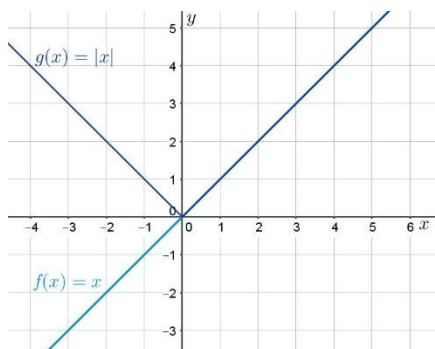
26) סעיף א'



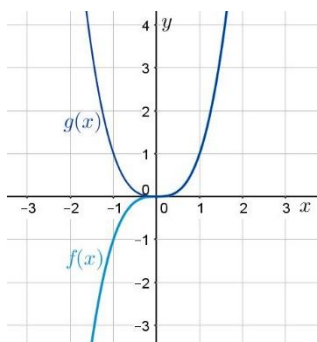
(26) סעיף ג'



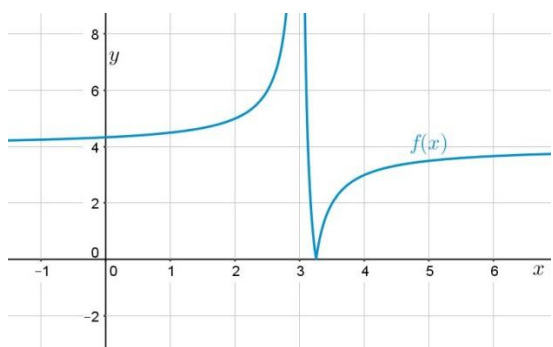
(30



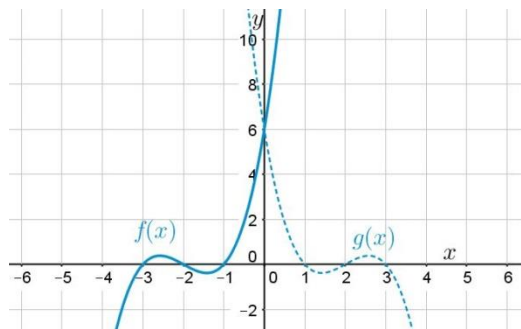
(31) סעיף ב'



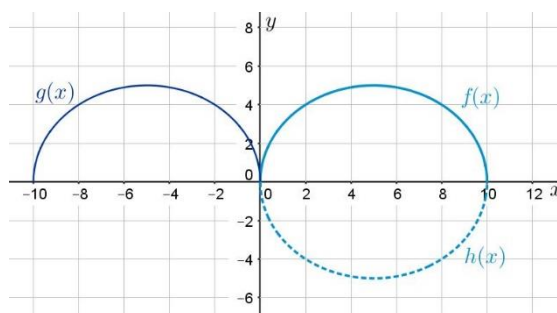
(32



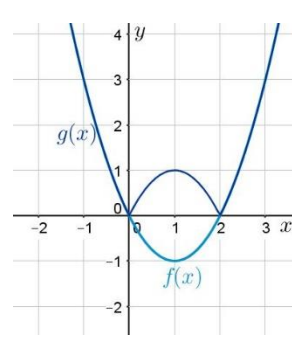
(26) סעיף ב'



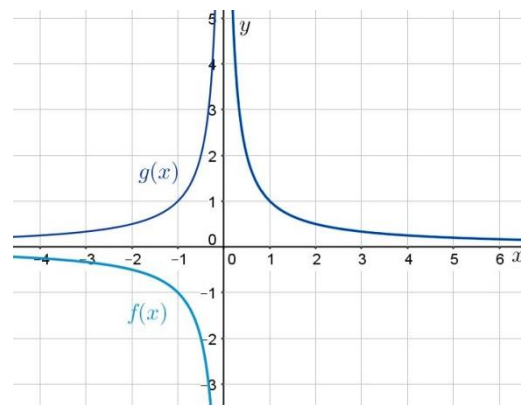
(28



(31) סעיף א'



(31) סעיף ג'





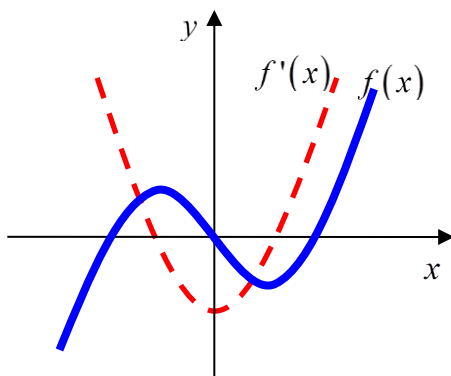
## תוכן העניינים:

474	.....	פרק 21
474	.....	חשבון דיפרנציאלי - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
474	.....	חוקים כלליים:
474	.....	שאלות:
478	.....	תשובות סופיות:

## פרק 21

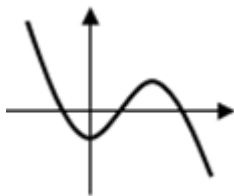
# חשבון דיפרנציאלי - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

### חוקים כלליים:

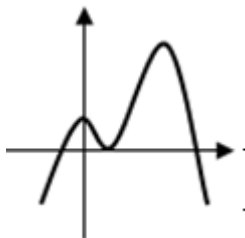


- כאשר  $f(x)$  עולה,  $f'(x)$  חיובית ולהפך.
- כאשר  $f(x)$  יורדת,  $f'(x)$  שלילית ולהפך.
- כאשר ל- $f(x)$  יש נקודת קיצון,  $f'(x)$  מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- $x$ ) ולהפך.

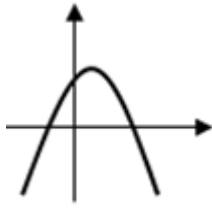
### שאלות:



- (1) נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת. נמק את שיקוליך בשרטוט.



- (2) נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת. נמק את שיקוליך בשרטוט.



- (3) נתון גרף של פונקציה.  
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע  
שהיא עוברת בראשית הצירים.  
נמק את שיקוליך בשרטוט.



- (4) נתון גרף הנגזרת של פונקציה.  
צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה  
אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים.  
נמק את שיקוליך בשרטוט.

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 - 6x + 5$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  ושל גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 3x$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

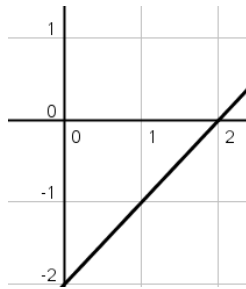
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  ושל גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

7) לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת קיצון אחת.  
הערך המקסימלי שלה מתקבל בנקודה שבה:  $x = 2$ .

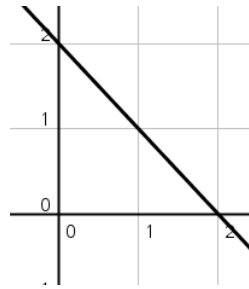
א. מהו סימן הנגזרת עבור:  $x < 2$  ?

ב. מהו סימן הנגזרת עבור:  $x > 2$  ?

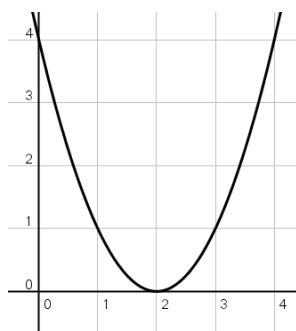
ג. איזה מבין הגרפים הנ"ל יכול לתאר את גרף הנגזרת:



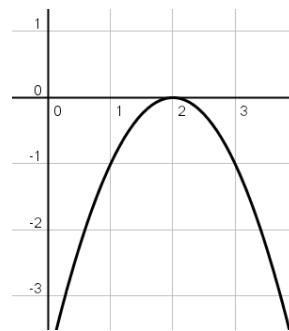
ii.



i.



iv.

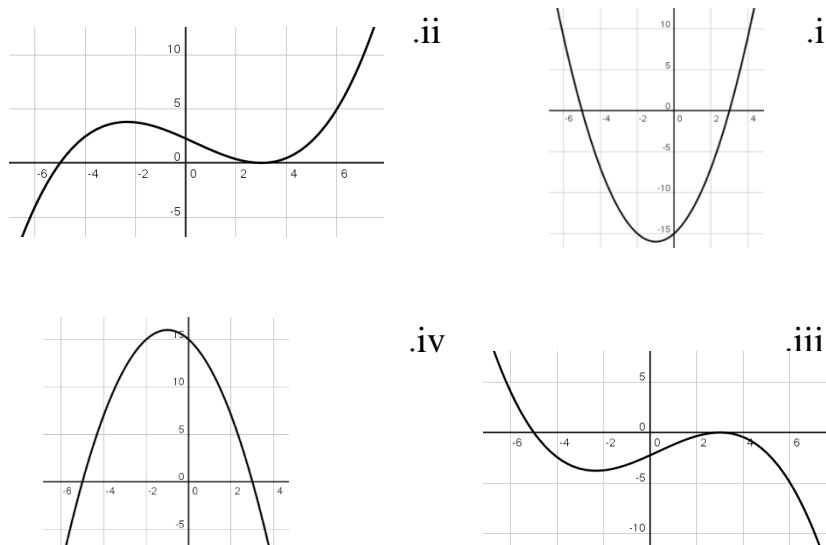


iii.

8 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x$ .

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. איזה מבין הגרפים הבאים מתאר סקיצה של הנגזרת  $f'(x)$ ? נמק.



9 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 4x^3$ .

א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט באמצעות נתונים אלו את הגרף של נגזרת הפונקציה.

10 ענה על הסעיפים הבאים:

א. סרטט את גרף פונקצית הנגזרת  $f'(x)$  של  $f(x)$ , אם ידוע כי ל- $f(x)$

יש שתי נקודות קיצון: מקסימום כאשר  $x = -1$  ומינימום

כאשר  $x = 3$ .

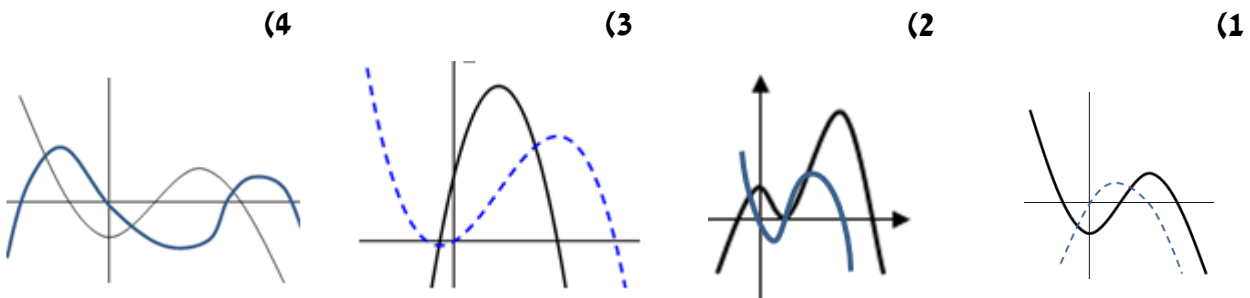
ב. נתונה הפונקציה  $f(x)$  ולה 3 נקודות קיצון: מקסימום כאשר  $x = 0, 5$

ומינימום כאשר  $x = 2$ . סרטט את גרף הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. סרטט את גרף הנגזרת,  $f'(x)$ , של  $f(x)$ , אם ידוע כי היא יורדת לכל  $x$

והנגזרת שלה מתאפסת בנקודה שבה:  $x = 3$ .

## תשובות סופיות:



(5) א. i.  $(5,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,5)$  .ii  $\min(3,-4)$ .

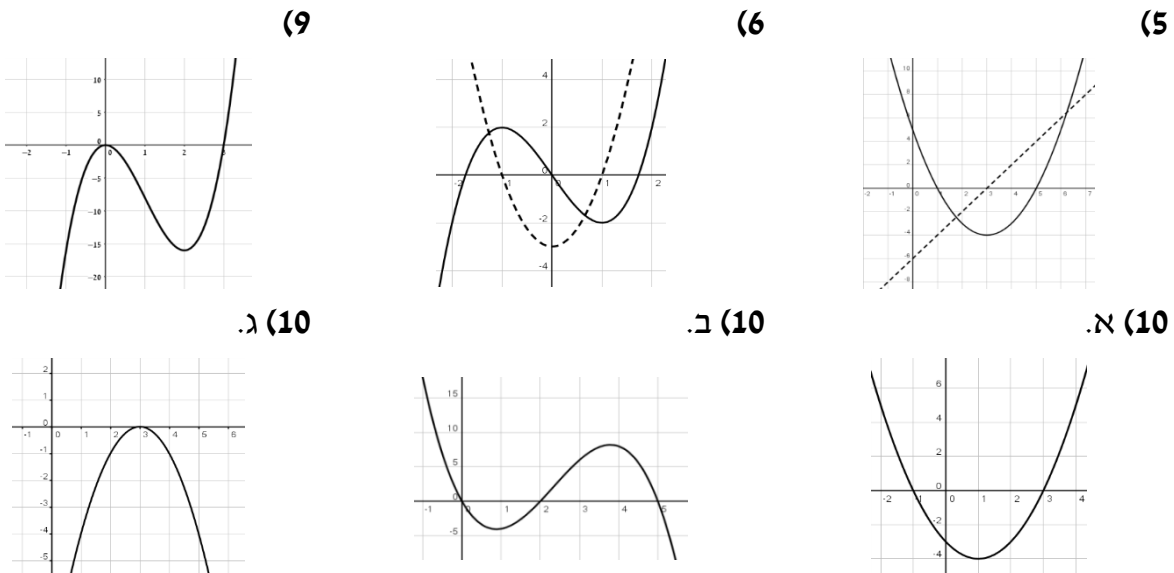
(6) א. i.  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{3},0)$ ,  $(-\sqrt{3},0)$  .ii  $\min(1,-2)$ ,  $\max(-1,2)$ .

(7) א.  $f'(x) > 0$  .ב.  $f'(x) < 0$  .ג. 1.

(8) א. עולה  $x < -5$ ,  $x > 3$  יורדת:  $-5 < x < 3$  .ב. 1.

(9) א. עולה  $x > 3$  יורדת:  $0 < x < 3$  .  $x < 0$ .

## סקיצות לשאלות:



## תוכן העניינים:

480 .....	פרק 22 .....
480 .....	חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון.....
480 .....	שלבי עבודה :
480 .....	שאלות :
484 .....	תשובות סופיות :
485 .....	תרגול נוסף :
485 .....	תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית :
493 .....	תשובות סופיות :
495 .....	תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית :
505 .....	תשובות סופיות :
507 .....	תרגילים העוסקים בפונקצית שורש :
512 .....	תשובות סופיות :

## פרק 22

# חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

### שלבי עבודה:

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$ .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות  $x$ .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$ .
- נוודא שערך ה- $x$  מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "  $y$  (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

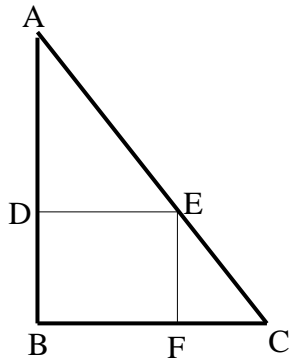
### שאלות:

- (1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
- (2) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (3) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (4) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

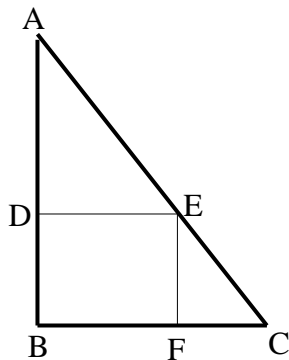


(5) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם  $a$ , מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.
- ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



- (6) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) הנקודה  $E$  נמצאת על היתר  $AC$  כך שהמרובע  $EDBF$  הוא מלבן. נתון:  $AB = 20$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



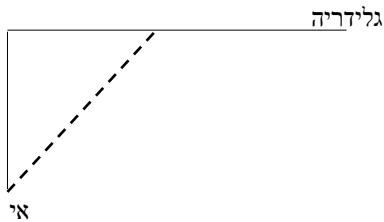
- (7) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) הנקודה  $E$  נמצאת על היתר  $AC$  כך שהמרובע  $EDBF$  הוא מלבן. נתון:  $AB = a$ ,  $BC = b$ . מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

- (8) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

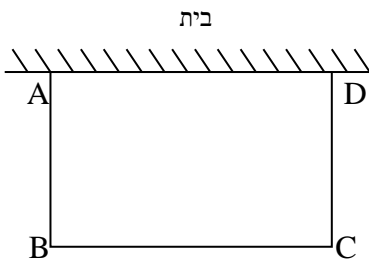
- (9) מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא  $k$ , מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



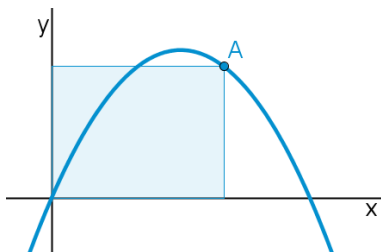
- 10** שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C. המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ. מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש. כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי? מצא גם את המרחק המינימלי.



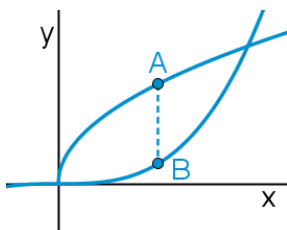
- 11** אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



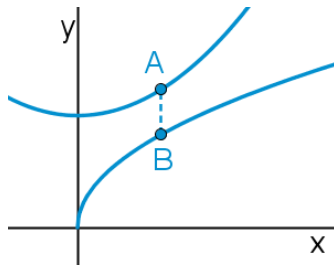
- 12** אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצד המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



- 13** נתונה הפונקציה  $f(x) = 6x - x^2$ . מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



- 14** נתונות הפונקציות  $f(x) = 2\sqrt{x}$  ו-  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$ . את הנקודה A שעל  $f(x)$  חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



**15) נתונות שתי הפונקציות:**

$$f(x) = 4\sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 + 5$$

א. התאם לכל גרף את הפונקציה המתאימה.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודות A ו-B כדי שאורך הקטע AB (המקביל לציר

ה-y) יהיה מינימלי? חשב את אורך הקטע המינימלי.

**16) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  והישר  $y = 2x$ .**

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

## תשובות סופיות:

- |                                  |                        |                                   |
|----------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 1 (2                             | 8,8,8 (1               | 7,7 (1                            |
| 80 סמ"ר (5                       | $\frac{a}{3}$ . א. (4  | 8 יחידות אורך (3                  |
| $V = \frac{k^3}{216\pi}$ יח"נ (8 | 4x4x4 (7               | $\frac{ab}{4}$ יח"ש (6            |
| 4x6 (11                          | $2\frac{1}{3}$ ק"מ (10 | 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ (9 |
| A(1,6) , B(1,4) ב. (14           | A(1,2) (13             | A(4,8) (12                        |
|                                  |                        | 2x1 (15                           |

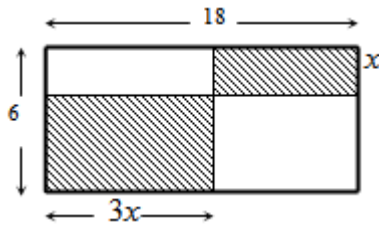
## תרגול נוסף:

### תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

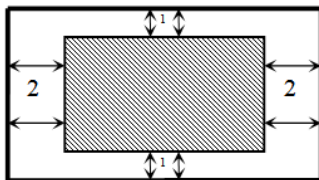
\*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 45. ידוע שמספר אחד זהה לשני.  
 א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?  
 ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום זהה לו?  
 ג. באיזה מקרה (א' או ב') המכפלה תהיה גדולה יותר? הראה דרך חישוב.
- (2) ענה על הסעיפים הבאים:  
 א. מבין כל המספרים המקיימים:  $3x + y = 60$  מצא את המספרים  $x$  ו- $y$  שמכפלת ריבועיהם מקסימלית.  
 ב. מהי המכפלה הנ"ל?
- (3) סכום שלושה מספרים הוא 11. ידוע כי המספר הראשון גדול ב-4 מהמספר השני. הראה כי המספרים שמכפלתם היא מקסימלית מקיימים:  
 א. מכפלת שני המספרים הקטנים שווה למספר הגדול.  
 ב. ערך המכפלה של שלושת המספרים שווה לריבוע המספר הגדול מבניהם.
- (4) סכום שלושה מספרים הוא 26. מספר אחד גדול פי 3 מהשני. מצא את שלושת המספרים שסכום ריבועיהם הוא מינימלי.
- (5)  $x$  ו- $y$  הם שני מספרים המקיימים:  $x + 6y = 60$ .  
 א. הבע את  $y$  באמצעות  $x$ .  
 ב. מה צריכים להיות המספרים  $x$  ו- $y$  כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?  
 ג. מהי המכפלה הנ"ל?

- 6) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.  
 א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?  
 ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום זהה לו?  
 ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

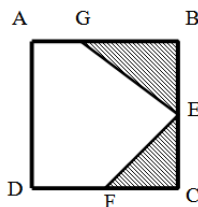


- 7) במלבן שצלעותיו הן 6 ס"מ ו-18 ס"מ חסומים שני מלבנים מקווקווים. אורך אחד המלבנים המקווקווים גדול פי 3 מרוחב המלבן השני כמתואר באיור.  
 א. מה צריך להיות האורך  $x$  כדי שסכום שטחי שני המלבנים יהיה מקסימלי.  
 ב. בעבור ה- $x$  שמצאת מהו סכום השטחים הללו?



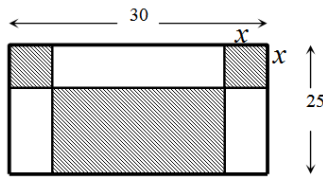
- 8) יוסי רוצה לקנות דף מחשב צבעוני ומיוחד בעל היקף של 60 ס"מ כדי להכין ברכה ליום הולדתה של חברתו רחל. המדפסת של יוסי אינה מדפיסה עד גבולות הדף אלא משאירה מרחק של 2 ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון, ומרחק של 1 ס"מ מצדי הדף (ראה איור).

יוסי רוצה לבחור דף שבו השטח שהמדפסת תוכל להדפיס יהיה מקסימלי. מה הן מידות הדף שיוסי צריך לקנות כדי שהשטח המודפס יהיה מקסימלי?



- 9) בריבוע ABCD חסומים שני משולשים ישרי-זווית GBE ו-ECF כמתואר באיור. ידוע שאורך הקטע AG הוא 5 ס"מ ואורך צלע הריבוע ABCD הוא 13 ס"מ. המשולש ECF הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים (CE=CF).

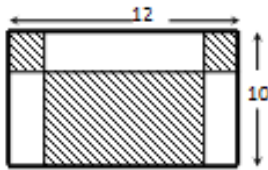
- א. מצא מה צריך להיות אורך שוק המשולש ECF בעבורו סכום שטחי שני המשולשים הנ"ל יהיה מינימלי?  
 ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



10 במלבן שצלעותיו הן 30 ס"מ ו-25 ס"מ חסומים שני ריבועים ומלבן (המסומנים) כמתואר באיור. מסמנים את צלע הריבוע ב- $x$ .

א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.

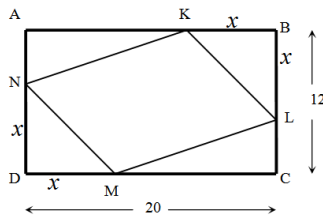
ב. בעבור אורך הצלע שמצאת מהו סכום השטחים המינימלי?



11 במלבן שמידותיו הן 12 ס"מ ו-10 ס"מ חסומים בצדדים למעלה שני ריבועים ומלבן מתחתיהם במרכז.

א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.

ב. מה יהיה השטח שלהם במקרה זה?



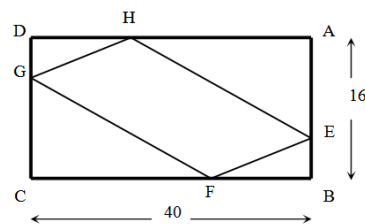
12 הנקודות K, L, M, N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD כך ש:  $BK = BL = DM = DN = x$  צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

א. הבע באמצעות  $x$  את סכום שטחי המשולשים:

$$\Delta AKN + \Delta BKL + \Delta CLM + \Delta DNM$$

ב. מצא מה צריך להיות  $x$  כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מה הוא השטח של המרובע LKNM במקרה זה?



13 במלבן ABCD שמידותיו הן 40 ס"מ ו-16 ס"מ מקצים נקודות על צלעות המלבן כך

שמתקיים:  $AE = BF = CG = DH = x$ .

א. הבע באמצעות  $x$  את שטחי ארבעת המשולשים:

$$\Delta AEH + \Delta BEF + \Delta CGF + \Delta DGH$$

ב. מצא מה צריך להיות  $x$  בעבורו שטח המרובע EFGH יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה שטח המרובע EFGH במקרה זה?

14) אורך המלבן ABCD הוא 20 ס"מ ורוחבו הוא 12 ס"מ.

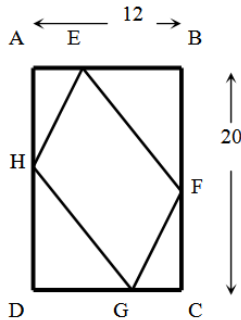
מקצים על צלעות המלבן קטעים

כך ש:  $AH = BE = CF = DG = x$ .

א. מצא מה צריך להיות  $x$  בעבור שטח המרובע

EFGH יהיה מינימלי.

ב. בעבור ה- $x$  שמצאת מה השטח המינימלי?



15) נתון מלבן שמידותיו הן 8 ס"מ על 40 ס"מ.

מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן כך שנוצרים

4 מלבנים. מסמנים צלע אחת של המלבן הימני ב- $x$ , כך

שהצלע הסמוכה לה גדולה פי 4 ממנה כמתואר באיור

ובמלבן השמאלי בונים משולש.

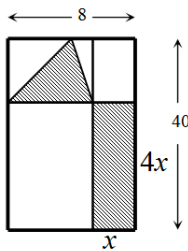
א. בטא באמצעות  $x$  את סכום השטחים של המלבן

והמשולש המקווקוים.

ב. מצא מה צריכות להיות מידות המלבן הימני כדי

שסכום השטחים הנ"ל יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



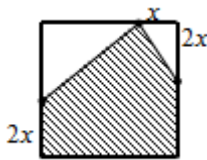
16) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע

שאורכו  $x$  על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם הוא  $2x$

על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור, כך שנוצר

המחומש המקווקו. מצא מה צריך להיות ערכו של  $x$

בעבור שטח המחומש יהיה מקסימלי.



17) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 16 - 2x^3, \quad g(x) = -6x^2 - 18x$$

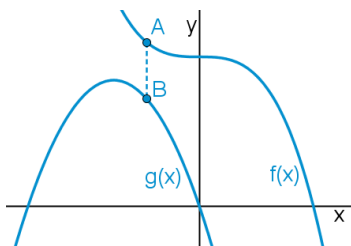
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ברביע

השני ומותחים ממנה ישר המקביל לציר ה- $y$

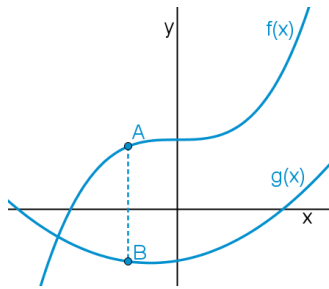
שחותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה B.

א. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?





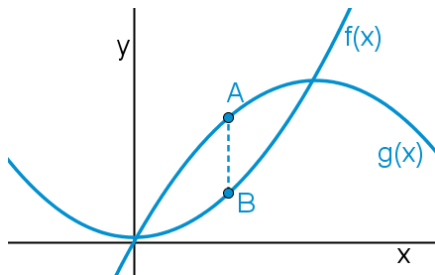


**18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^3 + 8, \quad g(x) = x^2 + x - 6$$

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ומורידים ממנה ישר המקביל לציר ה- $y$  שחותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה B.

- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי.  
ב. מה יהיה האורך המקסימלי?

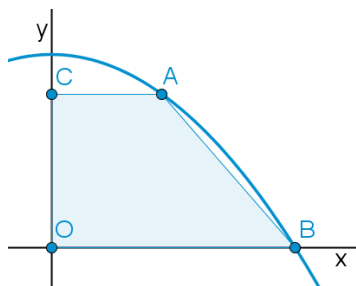


**19** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות:

$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = 20x - x^2$$

מעבירים קטע AB המקביל לציר ה- $y$  כך שהנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ .

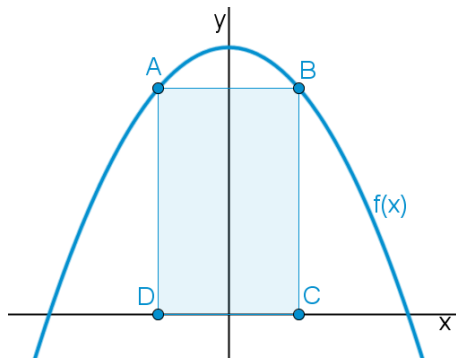
- א. נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ . הבע באמצעות  $t$  את אורך הקטע AB.  
ב. מה צריך להיות  $t$  כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?  
ג. מהו האורך AB במקרה זה?



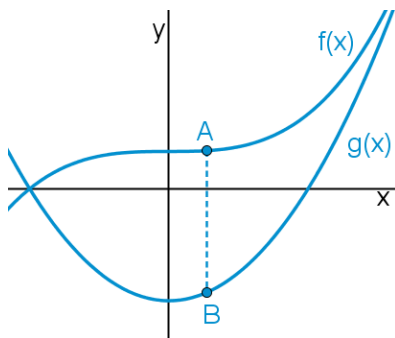
**20** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 36 - x^2$ .

על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  שחותך את ציר ה- $y$  בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  ו-O ראשית הצירים.

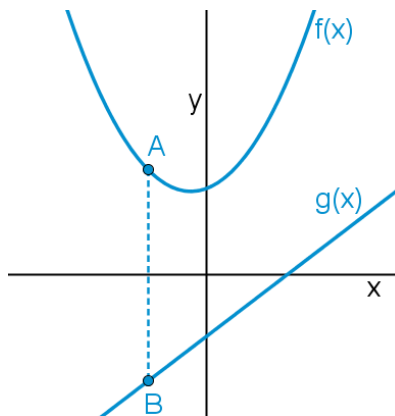
- א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?  
ב. מהו שטח הטרפז המקסימלי?



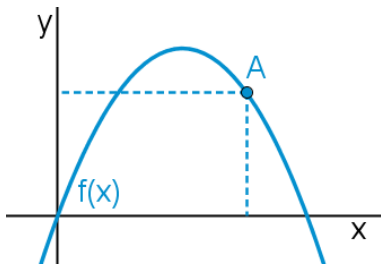
- 21** מעבירים ישר AB המקביל לציר ה- $x$  כך שהנקודות A ו-B נמצאות על גרף הפונקציה  $f(x) = 48 - x^2$ . מהנקודות A ו-B מורידים אנכים לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן ABCD.
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B בעבור שטח המלבן ABCD יהיה מקסימלי.
- ב. בעבור שיעורי הנקודה B שמצאת מה יהיה השטח?



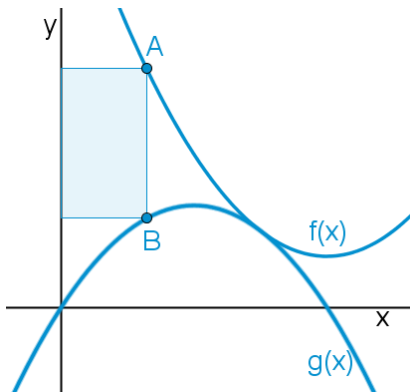
- 22** באיור שלפניך נתונות הפונקציות:
- $f(x) = x^3 + 8$  ו- $g(x) = 6x^2 - 24$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
- א. מצא את שיעורי הנקודה A בתחום:  $x_A < 4$  עבורם הקטע AB יהיה מקסימלי.
- ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



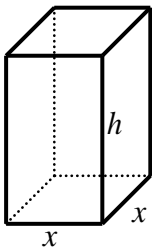
- 23** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = x^2 + x + 7$  ו- $g(x) = 2x - 5$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  ונקודה נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .
- א. הבע באמצעות  $t$  את שיעורי הנקודה B.
- ב. מצא את  $t$  בעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.
- ג. בעבור הערך של  $t$  שמצאת בסעיף הקודם, מה יהיה אורך הקטע AB?



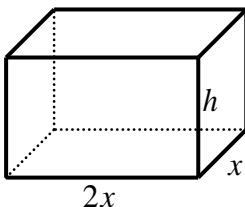
- (24)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  
 $f(x) = -x^2 + 7x$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.  
 א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם היקף המלבן יהיה מקסימלי.  
 ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם היקף המלבן יהיה מינימלי?



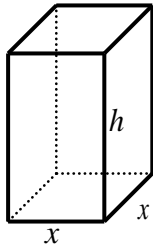
- (25)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  
 $f(x) = x^2 - 8x + 18$  ו-  
 $g(x) = -x^2 + 4x$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה-y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.  
 א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.  
 ב. מצא את ערכו של t בעבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.  
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



- (26)** נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x. נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים:  
 $4x + h = 63$ .  
 א. הבע את h באמצעות x.  
 ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x.  
 ג. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- (27)** נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים:  
 $x + h = 9$ . מצא מה צריכות להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



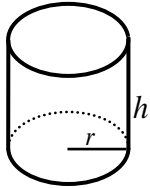
28 נתונה תיבה שבסיסה הוא ריבוע. ידוע כי סכום כל המקצועות הוא 60 ס"מ.

נסמן את אורך צלע הבסיס ב- $x$  ואת גובה התיבה ב- $h$ .

א. הבע את  $h$  באמצעות  $x$ .

ב. מצא את מידות התיבה עבורן נפחה הוא מקסימלי.

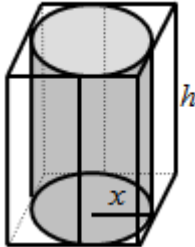
ג. מה הוא הנפח המקסימלי של התיבה?



29 נתון גליל שרדיוס בסיסו הוא  $r$  וגובהו  $h$ .

ידוע כי סכום הרדיוס והגובה הוא 6 ס"מ.

מצא את מידות רדיוס הגליל וגובהו בעבורן נפח הגליל יהיה מקסימלי.



30 באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$  וגובהו ב- $h$ .

ידוע כי הסכום של  $x$  ו- $h$  הוא 12 ס"מ.

א. הבע באמצעות  $x$  את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות  $x$  את נפח הגליל.

ii. הבע באמצעות  $x$  את נפח התיבה.

ג. מצא את  $x$  בעבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

## תשובות סופיות:

- (1 א. 15, 15, 15 ב. 15, 20, 10 ג. מקרה א'.
- (2 א.  $x = 10, y = 30$  ב.  $M = 90000$  ג. מקרה א'.
- (3 המספרים: 2, 3, 6.
- (4 12, 10, 4.
- (5 א.  $y = 10 - \frac{x}{6}$  ב.  $x = 30, y = 5$  ג.  $M = 22500$ .
- (6 א. 12, 12, 12 ב. 16, 12, 8 ג. מקרה א'.
- (7 א.  $x = 3$  ב.  $S = 54$  ג. מקרה א'.
- (8 14 ס"מ, 16 ס"מ.
- (9 א. 4 ס"מ ב.  $S = 125$  ג. מקרה א'.
- (10 א.  $x = 10$  ב.  $S = 350$  ג. מקרה א'.
- (11 א. 4 ס"מ ב.  $S = 56$  ג. מקרה א'.
- (12 א.  $2x^2 - 32x + 240$  ב.  $x = 8$  ג.  $S = 128$ .
- (13 א.  $-2x^2 + 56x$  ב.  $x = 14$  ג.  $S = 248$ .
- (14 א.  $x = 8$  ב.  $S_{Min} = 112$  ג. מקרה א'.
- (15 א.  $6x^2 - 36x + 160$  ב. 3 ס"מ על 12 ס"מ ג.  $S = 214$ .
- (16  $x = 6$ .
- (17 א.  $A(-1, 18)$  ב. 6.
- (18 א.  $A\left(-\frac{1}{3}, 7\frac{26}{27}\right)$  ב.  $AB = 14\frac{5}{27}$  ג.  $AB = 47$ .
- (19 א.  $-2t^2 + 20t - 3$  ב.  $t = 5$  ג.  $AB = 47$ .
- (20 א.  $A(2, 32)$  ב.  $S = 128$  ג. מקרה א'.
- (21 א.  $B(4, 32)$  ב.  $S = 256$  ג. מקרה א'.
- (22 א.  $A(0, 8)$  ב.  $AB = 32$  ג. מקרה א'.
- (23 א.  $B(t, 2t - 5)$  ב.  $t = 0.5$  ג.  $AB = 11.75$ .

א.  $A(0,0)$  ב.  $A(4,12)$  א. (24

א.  $S=8$  ב.  $t=1$  א.  $S=2t^3-12t^2+18t$  (25

א.  $x=9$  ב.  $p=-14x^2+252x$  א.  $h=63-4x$  (26

א.  $x=6$  (27

א.  $V=125$  סמ"ק ב.  $5 \times 5 \times 5$  א.  $h=15-2x$  (28

א.  $r=4$  ס"מ,  $h=2$  ס"מ (29

א.  $V=12\pi x^2-\pi x^3$  ב.  $2x$  (30

א.  $x=8$  ב.  $V=48x^2-4x^3$  ii. (31

## תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית:

\*הערה: לשאלות בחוץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

(1) נתונים שני מספרים  $x$  ו- $y$  שמקיימים:  $2x^2y = 27$ .

- א. הבע את  $y$  באמצעות  $x$ .
- ב. מה צריכים להיות המספרים כדי שסכומם יהיה מינימלי?

(2) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מבין כל המשולשים שווים השוקיים ששטחם הוא 128 סמ"ר מצא את אורך הבסיס ואורך גובהו במשולש שבו סכום אורך הבסיס וגובהו הוא מינימלי.
- ב. מה יהיה הסכום במשולש זה?

(3) מכפלת שלושה מספרים היא 27. ידוע כי המספר הראשון זהה לשני. נסמן ב- $x$  את המספר הראשון.

- א. הבע באמצעות  $x$  את המספר השלישי.
- ב. מצא את שלושת המספרים שסכומם מינימלי.

(4) נתונים שני מספרים חיוביים. ידוע כי המספר הראשון גדול פי 4 מהמספר השני.

- א. מחברים את המספר השני עם ההופכי של המספר הראשון.
- ב. מצא מה יהיו המספרים בעבורם חיבור זה יהיה מינימלי.
- ג. מה הוא ערך החיבור?

(5) נתונים שלושה מספרים חיוביים כך שהמספר השני גדול פי 3 מהמספר הראשון והמספר השלישי גדול פי 9 מהמספר הראשון. המספר הראשון יסומן ב- $x$ .

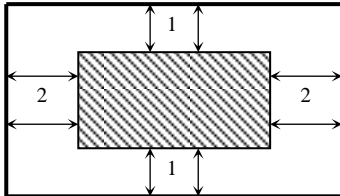
- א. הבע באמצעות  $x$  את המספרים השני והשלישי.
- ב. הבע באמצעות  $x$  את הסכום בין המספר הראשון למספרים ההופכיים של המספרים השני והשלישי.
- ג. מצא את שלושת המספרים בעבורם הסכום שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.

(6) נתונים שני מספרים. ידוע כי המספר הראשון גדול ב-14 מהמספר השני. סמן ב- $x$  את המספר הקטן.

- א. מצא את המספרים בעבורם ההפרש בין המספר ההופכי של המספר הקטן למספר ההופכי של המספר הגדול הוא מקסימלי.

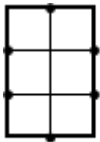
(7)  $x$  ו- $y$  הם שני מספרים חיוביים המקיימים:  $xy + y = 16$ .

- א. הבע את  $y$  באמצעות  $x$ .  
 ב. מצא מה צריכים להיות  $x$  ו- $y$  בעבור הסכום:  $x + y$  יהיה מינימלי.  
 מה יהיה הסכום במקרה זה?

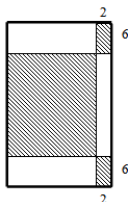


(8) בבית הדפוס "עמירן" רוצים לעצב גלויה על גבי קרטון ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר. הנהלת החברה החליטה שיש להשאיר רווחים של ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון ו-2 ס"מ מצדי הדף (ראה איור).

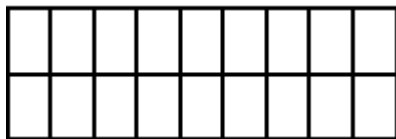
- א. מצא מה צריכות להיות מידות הקרטון כדי שהשטח של התמונה יהיה מקסימלי.  
 ב. מה יהיה השטח במקרה זה?



(9) בחלון מלבני ששטחו הכולל הוא 192 מ"ר בונים סורגי מתכת מ-7 מוטות: 3 מאונכים ו-4 אופקיים (ראה איור). מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים שיחסמו את חלון זה.



(10) נתון מלבן ששטחו 1176 סמ"ר. מקצים בצדדי המלבן העליון והתחתון קטעים שאורכם 2 ס"מ ובצדדי המלבן הימניים קטעים שאורכם 6 ס"מ כך שנוצרים שישה מלבנים. מסמנים שלושה מלבנים כמתואר באיור. חשב מה צריכות להיות מידות המלבן כדי שסכום שטחי המלבנים המסומנים יהיה מקסימלי.

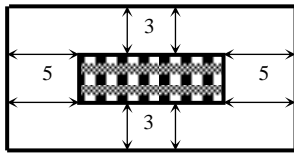


(11) בתור תשתית לקיר עץ, קנו רפי וחבריו מוטות מתכת. מחיר המוטות נקבע בהתאם לאורכם.

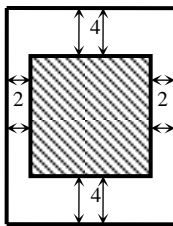
החבורה העמידה 10 מוטות מתכת מאונכים ולאחר מכן תפסו אותם עם שלושה מוטות נוספים אופקיים כמתואר בתרשים.

אחד מחבריו של רפי מדד וגילה ששטח המלבן שנוצר הוא 120 מ"ר. רפי בתגובה שמח ואמר "איזה יופי! עכשיו אני יודע שהשקעתנו הייתה מינימלית". מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים בעבור השטח שמדד חברו של רפי.

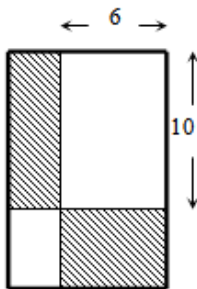




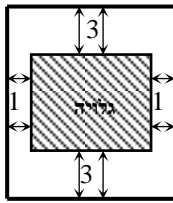
- 12) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ". תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור). יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר. מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"**
- א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.  
ב. מה תהיינה מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?



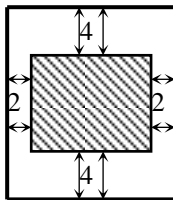
- 13) לרותי צבעי מים ומשטח עץ ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר. רותי רוצה לצייר מלבן במרכז המשטח כך שמרחקו מצדי המשטח 2 ס"מ ומהקצוות העליון והתחתון של המשטח - 4 ס"מ.**
- רותי ראתה שהמשטח שברשותה לא עומד בתנאים אלו ולכן החליטה לקנות משטח חדש. כשהגיעה רותי לנגר הוא אמר לה שמחיר העץ נקבע לפי מידותיו. איזה מידות רותי צריכה לבקש כדי לקבל משטח שבו היא תוכל לצייר מלבן בעל שטח מקסימלי לפי דרישותיה?



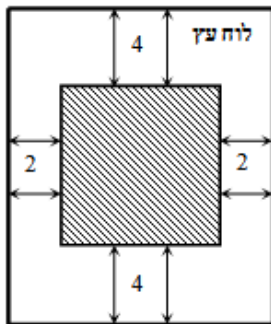
- 14) נתון מלבן ששטחו הוא 135 סמ"ר. מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן ומקצים עליהם קטעים באורכים של 6 ו-10 ס"מ (ראה איור). על ידי הקצאת קטעים אלו נוצרים מלבנים נוספים המסומנים באיור.**
- א. מצא מה צריכות להיות מידות המלבן הנתון בעבורם סכום שטחי מלבנים אלו יהיה מינימלי.  
ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?



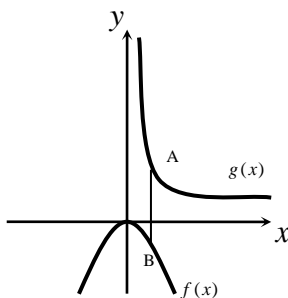
- 15) לדני גלויה מלבנית במידות לא ידועות ששטחה הכולל הוא 12 סמ"ר.
- דני רוצה לקנות קרטון כדי להדביק את הגלויה במרכזו. כשהלך דני לחנות כלי מלאכה אמר לו המוכר שניתן לבחור קרטון על פי שטח. דני הדגיש למוכר שהוא רוצה שהגלויה תהיה מודבקת במרכז הקרטון כך שמרחקה מצידי הקרטון יהיה 1 ס"מ בלבד ומרחקה מהקצוות העליון והתחתון יהיה 3 ס"מ. המוכר נתן לדני קרטון בעל שטח מינימלי בעבור הגלויה שלו.
- א. מה הן מידות הגלויה בעבורן שטח הקרטון הוא מינימלי?  
ב. מה הוא שטח הקרטון שנתן המוכר לדני?



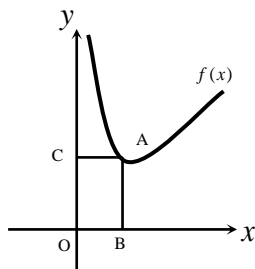
- 16) לרבקה קרטון מלבני ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר. רבקה רוצה לחתוך מלבן במרכז הקרטון כדי שתוכל להשתמש בשארית הקרטון כמסגרת לתמונה. כדי שהקרטון לא יקרע רבקה צריכה לשמור על רווחים של 2 ס"מ מצידי הקרטון ו-4 ס"מ מקצותיו העליון והתחתון. מה הן מידות הקרטון בעבורן שטח המלבן שרבקה תחתוך יהיה מקסימלי?



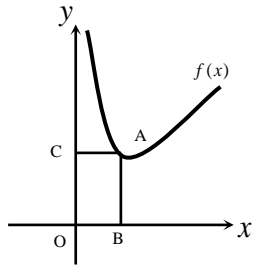
- 17) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ.
- כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר בעבור המקום לתמונה (השטח המסומן).
- א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין בעבור המשימה?  
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה בעבור המידות שאלינה בחרה?



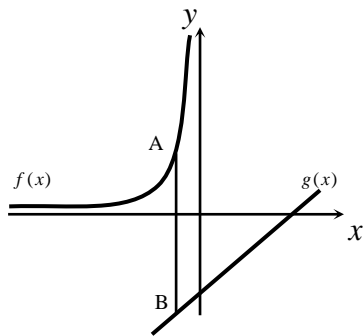
- 18) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{-x^2}{16}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ .
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.
- א. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.  
ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



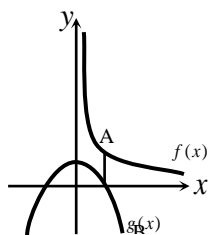
- (19)** הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x) = x + \frac{16}{x^3}$   
ברביע הראשון. מהנקודה A מורידים אנכים לצירים  
כפי שמתואר באיור כך שנוצר המלבן ABOC.  
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח  
המלבן יהיה מינימלי.



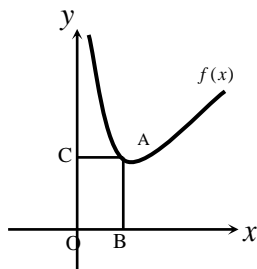
- (20)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה  $f(x) = x + \frac{8}{x}$  ברביע  
הראשון. מנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים  
אנכים לצירים כך שמתקבל מלבן ABOC.  
א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי  
שהיקף המלבן ABOC יהיה מינימלי.  
ב. מה הוא ההיקף המינימלי?



- (21)** הגרפים שלפניך מתארים את הפונקציות:  
 $f(x) = -\frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x - 3$   
מסמנים על גרף הפונקציה  $f(x)$  נקודה A ועל  
גרף הפונקציה  $g(x)$  נקודה B כך שהקטע AB  
מקביל לציר ה-y.  
א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה  
A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.  
ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



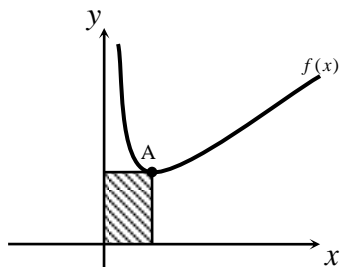
- (22)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  
 $f(x) = \frac{1}{x}$  ו-  $g(x) = -4x^2 + 1$   
מעבירים ישר המקביל לציר ה-y שחותך את  
גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה A ואת גרף  
הפונקציה  $g(x)$  בנקודה B.  
א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם  
אורך הקטע AB יהיה בעל אורך מינימלי.  
ב. מה יהיה האורך AB במקרה זה והיכן תמוקם הנקודה B?



**(23)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = x + \frac{16}{x^2}$

ברביע הראשון. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים שיוצרים את המלבן ABCO (O-ראשית הצירים). נסמן ב- $t$  את שיעור ה- $x$  של הנקודה A.

- א. בטא באמצעות  $t$  את שיעור ה- $y$  של הנקודה A ואת שטח המלבן ABCO.
- ב. מצא מה צריך להיות ערכו של  $t$  בעבורו שטח המלבן יהיה מינימלי.
- ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



**(24)** באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה:

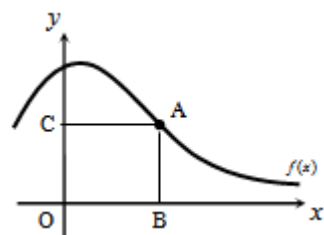
$$f(x) = x + \frac{8}{x^2} + 3$$

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$ .

מנקודה זו מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המקווקו).

הנקודה A תסומן ב- $A\left(t, t + \frac{8}{t^2} + 3\right)$ .

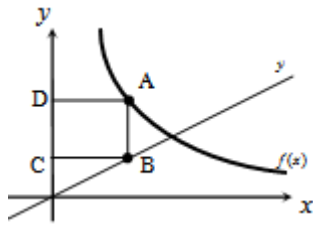
- א. הבע באמצעות  $t$  את היקף המלבן.
- ב. מצא את ערכו של  $t$  בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.
- ג. בעבור הערך של  $t$  שמצאת בסעיף הקודם, מה יהיה שטחו של המלבן?



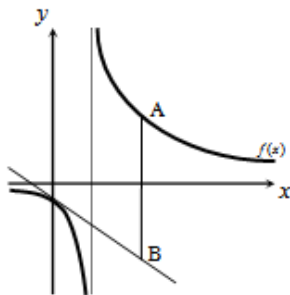
**(25)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+0.5}$  בתחום:  $x \geq 0$ .

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.

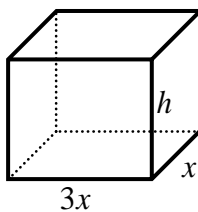
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.



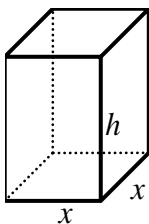
- 26 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{4x-5}{4(x-2)}$  והישר:  $y = \frac{x}{4}$ . הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה-y כך שנוצר המלבן ABCD. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t. א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD. ב. מצא את t עבורו היקף המלבן הוא מינימלי. ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?



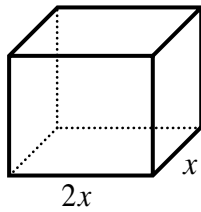
- 27 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+6}{x-3}$  ברביע הראשון. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y. א. מצא את משוואת המשיק. מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם אורך הקטע AB הוא מינימלי. ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



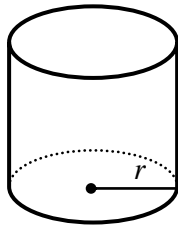
- 28 נתונה תיבה שבסיסה מלבן ונפחה הוא  $V = 288$ . ידוע כי אורך הבסיס גדול פי 3 מרוחבו (ראה איור). מסמנים ב-x את מקצוע המלבן הקטנה וב-h את גובה התיבה. א. הבע את h באמצעות x. ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x. ג. מצא את מידות התיבה בעבורם שטח הפנים של התיבה יהיה מינימלי.



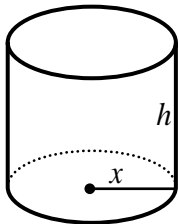
- 29 נפח תיבה שבסיסה ריבוע הוא 729 סמ"ר. נסמן ב-x את אורך מקצוע הבסיס וב-h את גובה התיבה (ראה איור). א. הבע את h באמצעות x. ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x. ג. מה צריך להיות x בעבורו שטח הפנים של התיבה יהיה מינימלי?



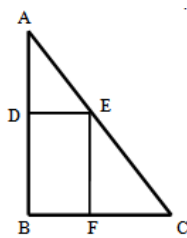
- 30) נפח קופסה בצורת תיבה הפתוחה מלמעלה הוא 36 סמ"ר. בסיס הקופסה הוא מלבן שרוחבו גדול פי 2 מאורכו.  
א. מצא את מידות בסיס הקופסה בעבורן שטח הפנים שלה יהיה מינימלי.  
ב. מה יהיה גובה הקופסה במקרה זה?



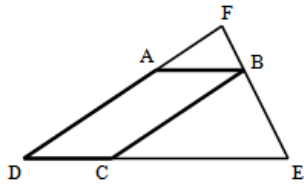
- 31) נתון גליל שרדיוסו  $r$  וגובהו  $h$ .  
ידוע כי רדיוס הגליל וגובהו מקיימים:  $r^2 \cdot h = 128$ .  
א. ענה על הסעיפים הבאים:  
i. הבע באמצעות  $r$  את גובה הגליל.  
ii. הבע באמצעות  $r$  את שטח הפנים של הגליל.  
ב. מצא את אורך הרדיוס בעבורו שטח הפנים של הגליל יהיה מינימלי.  
ג. מה יהיה נפח הגליל במקרה זה?



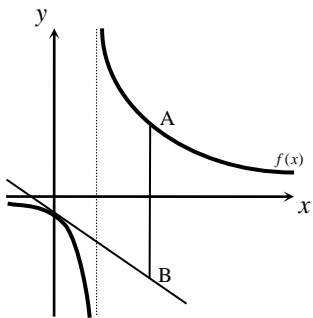
- 32) הנפח של קופסת עפרונות בצורת גליל הוא  $V = 512\pi$ .  
ידוע כי הקופסה פתוחה מלמעלה.  
רדיוס הקופסה יסומן ב- $x$  וגובה הקופסה יסומן ב- $h$ .  
א. הבע באמצעות  $x$  את גובה הקופסה ואת שטח הפנים שלה.  
ב. מצא את רדיוס הקופסה בעבורו שטח הפנים שלה יהיה מינימלי.  
ג. מה יהיה שטח הפנים של הקופסה במקרה זה?



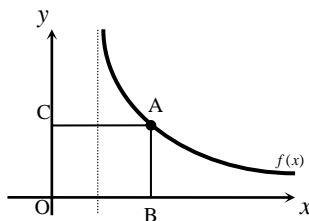
- 33) במשולש הישר זווית ABC חוסמים מלבן BDEF כמתואר באיור. מידות המלבן הן:  $DE = 6$ ,  $EF = 12$ .  
מסמנים את אורך הצלע AB ב- $x$ .  
א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הצלע BC.  
ב. מצא את אורכי הניצבים AB ו-BC של המשולש בעל השטח המינימלי?



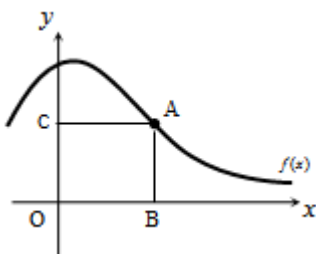
- 34** המרובע ABCD הוא מקבילית. מהקדקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי הצלעות AD ו-DC. ידוע כי מידות המקבילית הן:  $AD = 8$ ,  $AB = 2$ . מסמנים את אורך הצלע DE ב- $x$ .
- הבע באמצעות  $x$  את אורך הצלע DF.
  - מצא את  $x$  בעבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.
  - מה הוא הסכום המינימלי?



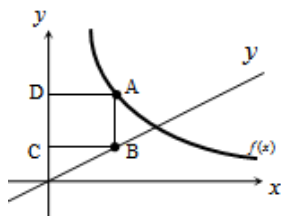
- 35** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$  ברביע הראשון. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .
- מצא את משוואת המשיק.
  - מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
  - מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB הוא מינימלי.
  - מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



- 36** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$  ברביע הראשון. מהנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABOC.
- מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.



- 37** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$  בתחום:  $x \geq 0$ .
- מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABOC כמתואר באיור.
- מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.
  - מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



38 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$  והישר:  $y = \frac{9x}{25}$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה-y

כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t.

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את t בעבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $y = \frac{27}{2x^2}$  ב.  $x = 3, y = 1.5$
- (2) א. 16, 16 ב. 32
- (3) א.  $\frac{27}{x^2}$  ב. 3, 3, 3
- (4) א. 0.5, 2 ב. 1
- (5) א.  $3x, 9x$  ב.  $S = x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x}$  ג.  $6, 2, \frac{2}{3}$
- (6) 7, -7
- (7) א.  $y = \frac{16}{x+1}$  ב.  $x = 3, y = 4$  ג.  $S = 7$
- (8) א. 11 ס"מ ו-22 ס"מ.
- (9) 12 ס"מ ו-16 ס"מ.
- (10) 14 ס"מ ו-84 ס"מ.
- (11) 6 מטרים ו-20 מטרים.
- (12) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.
- (13) 9 ס"מ על 18 ס"מ.
- (14) א. 15 ס"מ על 9 ס"מ ב.  $S = 75$
- (15) א. 2 ס"מ על 6 ס"מ ב.  $S = 48$
- (16) 9 ס"מ על 18 ס"מ.
- (17) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ ב.  $S = 98$
- (18) א.  $A(2, 0.25)$  ב.  $AB = \frac{1}{2}$
- (19)  $A(2, 4)$
- (20) א.  $A(2, 6)$  ב.  $p = 16$
- (21) א.  $A(-2, 2)$  ב.  $AB = 7$
- (22) א.  $A(0.5, 2)$  ב. 2, הנקודה B ממוקמת על ציר ה- $x$ .

23) א.  $S = t^2 + \frac{16}{t}$ ,  $t = 2$  ב.  $S = 12$  ג.

24) א.  $P = 4t + \frac{16}{t^2} + 6$ ,  $t = 2$  ב.  $S = 14$  ג.

25) A(1,2).

26) א.  $P = \frac{3t^2 - 2t - 5}{2(t-2)}$ ,  $t = 3$  ב. 8 ס"מ ג.

27) א.  $y = -x - 2$  ב. A(6,4) ג. 12 ס"מ.

28) א.  $h = \frac{96}{x^2}$  ב.  $S = 6x^2 + \frac{768}{x}$  ג.  $x = 4 \rightarrow 4, 6, 12$

29) א.  $h = \frac{792}{x^2}$  ב.  $S = 2x^2 + \frac{2916}{x}$  ג.  $x = 9$

30) א. 6, 3 ב.  $h = 2$

31) א. i.  $h = \frac{128}{r^2}$  ii.  $S = \frac{256\pi}{r} + 2\pi r^2$  ב.  $r = 4$  ג.  $V = 128\pi$

32) א.  $S = \frac{1024\pi}{x} + \pi x^2$ ,  $h = \frac{512}{x^2}$  ב.  $x = 8$  ג.  $S = 192\pi$

33) א.  $BC = \frac{6x}{x-12}$  ב. 12 ס"מ ו-24 ס"מ.

34) א.  $DF = \frac{8x}{x-2}$  ב. מתקבלת הפונקציה:  $L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$  הפתרון הוא:  $x = 6$ .

ג.  $L = 18$

35) א.  $y = -3x - 5$  ב. A(4,7) ג. AB = 24

36) A(10,2.5)

37) א. A(2,2) ב. בקצה התחום שטח המלבן יהיה אפס ולכן: A(0,0).

38) א.  $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1}$  ב.  $t = 4\frac{3}{4}$  ג.  $P = 12.88$

## תרגילים העוסקים בפונקצית שורש:

\*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

(1)  $x$  ו- $y$  הם שני מספרים המקיימים:  $x + y = 15$ .

א. הבע את  $y$  באמצעות  $x$ .

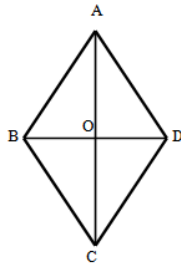
ב. מצא את  $x$  ו- $y$  בעבורם סכום השורשים שלהם יהיה מקסימלי.

(2) נתונים שני מספרים חיוביים  $x$  ו- $y$  המקיימים:  $3x + y = 36$ .

א. הבע את  $y$  באמצעות  $x$ .

ב. מצא את המספרים בעבורם סכום השורשים שלהם מקסימלי.

ג. מה יהיה סכום השורשים שלהם במקרה זה?



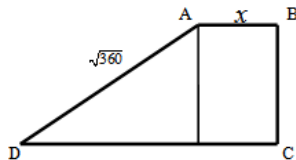
(3) נתון המעוין ABCD. ידוע כי סכום אורכי האלכסונים של המעוין הוא 80 ס"מ.

הנקודה O היא נקודת מפגש האלכסונים במעוין.

הקטע AO יסומן ב- $x$ .

א. הבע את אורכי האלכסונים באמצעות  $x$ .

ב. מה צריך להיות ערכו של  $x$  בעבורו אורך צלע המעוין היא מינימלית?



(4) באיור שלפניך מתואר טרפז ישר זווית ABCD המחולק למלבן ומשולש ישר זווית.

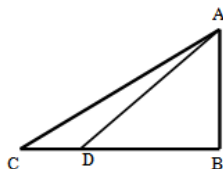
גובה הטרפז BC גדול פי 3 מהבסיס הקטן AB

ואורך השוק הארוכה AD הוא  $\sqrt{360}$ .

הבסיס הקטן יסומן ב- $x$ .

א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הבסיס הגדול DC.

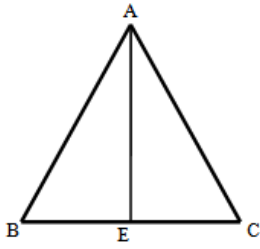
ב. מצא את ערכו של  $x$  בעבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.



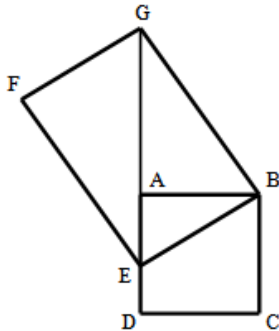
(5) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית. הנקודה D נמצאת על הניצב BC כך שהקטע BD גדול פי 2 מהקטע CD. ידוע כי סכום הניצבים הוא 13 ס"מ.

א. מצא את אורכי הניצבים בעבורם אורך הקטע AD יהיה מינימלי.

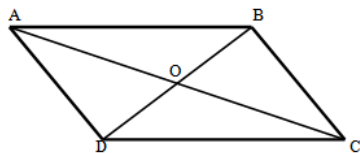
ב. מה יהיה אורך היתר AC במקרה זה?



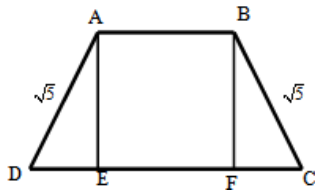
- 6) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB=AC$ ).  
 הקטע AE הוא גובה לבסיס BC.  
 ידוע כי סכום אורכי הבסיס והגובה הוא 20 ס"מ.  
 הגובה AE יסומן ב- $x$ .  
 א. הבע באמצעות  $x$  את היקף המשולש ABC.  
 ב. מצא את  $x$  בעבורו ההיקף שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.  
 ג. בעבור הערך של  $x$  שמצאת בסעיף הקודם מה הוא השטח של המשולש?



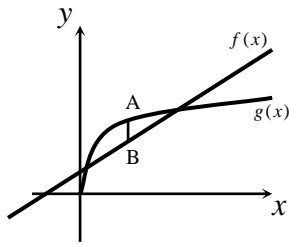
- 7) המרובע ABCD הוא ריבוע. הנקודה E נמצאת על הצלע AD של הריבוע והנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD. מעבירים את הקטעים BE ו-BG ומוסיפים את הנקודה F, כך שהמרובע BEFG הוא מלבן כמתואר באיור.  
 הקטע AG גדול פי 2 מהצלע BE של המלבן וסכום הצלע BE ואלכסון המלבן GE הוא 16 ס"מ. הקטע BE יסומן ב- $x$ .  
 א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הקטע AE.  
 ב. מצא את  $x$  בעבורו אורך צלע הריבוע תהיה מקסימלית.  
 (היעזר במשולש ABE).



- 8) המרובע ABCD הוא מקבילית. הנקודה O היא פגישת האלכסונים AC ו-BD.  
 ידוע כי האלכסון BD מאונך לצלעות BC ו-AD של המקבילית. כמו כן האלכסון AC גדול ב-27 ס"מ מהצלע BC.  
 סמן את הצלע BC ב- $x$  וענה על השאלות הבאות:  
 א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הקטע CO.  
 ב. הבע באמצעות  $x$  את אורך הקטע BO.  
 ג. מצא בעבור איזה ערך של  $x$  יהיה אורך הקטע BO מקסימלי.

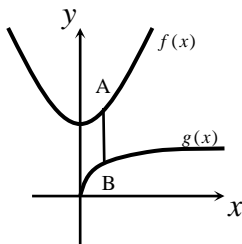


9) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים. מורידים את הגבהים לטרפז AE ו-BF כך שהמרובע ABFE הוא ריבוע. ידוע כי אורך שוק בטרפז הוא  $\sqrt{5}$  ס"מ. מצא מה צריך להיות אורך הבסיס הקטן AB בעבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.

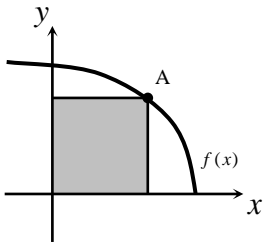


10) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:  
 $f(x) = x + 3$  ו-  $g(x) = 4\sqrt{x} - 1$ . מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $g(x)$  ונקודה B על גרף הפונקציה  $f(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

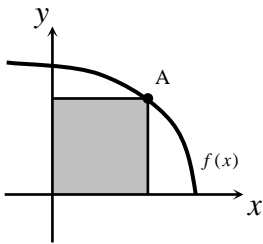
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A בעבורם אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.  
 ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



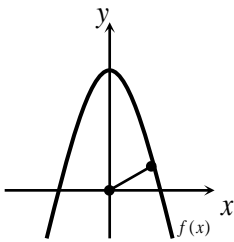
11) נתונים הגרפים של הפונקציות:  
 $f(x) = 2x^2 + 30$  ו-  $g(x) = 8\sqrt{x} - 1$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .  
 א. הבע באמצעות  $t$  את:  
 i. שיעורי הנקודה B.  
 ii. אורך הקטע AB.  
 ב. מצא את  $t$  בעבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.



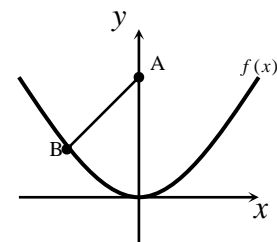
- 12** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2\sqrt{4-x}$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  ברביע הראשון. מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המסומן). מסמנים את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .
- הבע באמצעות  $t$  את היקף המלבן.
  - מצא את  $t$  בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.
  - מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?



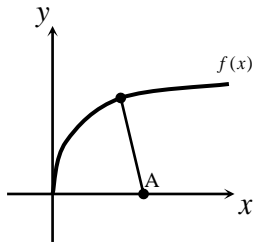
- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4\sqrt{5-x}$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  ברביע הראשון. מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המסומן). מסמנים את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .
- הבע באמצעות  $t$  את היקף המלבן.
  - מצא את  $t$  בעבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.
  - מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?



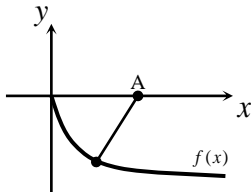
- 14** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 6\frac{3}{4} - x^2$ .
- מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה מראשית הצירים הוא מינימלי.
  - האם קיימת נקודה על גרף הפונקציה שמרחקה מראשית הצירים הוא מקסימלי? אם כן היכן היא ממוקמת?



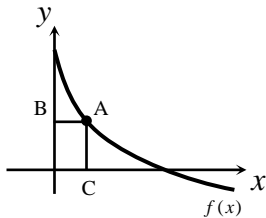
- 15** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ . הנקודה A(0, 6) נמצאת על ציר ה- $y$  והנקודה B היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה ברביע השני. מצא את שיעורי הנקודה B בעבורם המרחק בין A ל-B יהיה מינימלי.



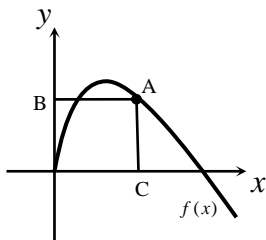
- 16** נתון גרף הפונקציה:  $f(x) = 2\sqrt{x}$ . מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה מהנקודה  $A(6,0)$  מינימלי.



- 17** נתון גרף הפונקציה:  $f(x) = -3\sqrt{x}$ . מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הרביעי שמרחקה מהנקודה  $A(5.5,0)$  הוא מינימלי.



- 18** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור. נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .  
א. הבע באמצעות  $t$  את סכום הקטעים  $AC+AB$ .  
ב. מצא את ערכו של  $t$  בעבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.



- 19** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים AB ו-AC כמתואר באיור. מצא את שיעורי הנקודה A בעבורם סכום הקטעים  $AB+AC$  יהיה מקסימלי.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $y = 15 - x$  ב.  $x = y = 7.5$
- (2) א.  $y = 36 - 3x$  ב.  $x = 3, y = 27$  ג.  $4\sqrt{3} - 6.92$
- (3) א.  $AC = 2x, BD = 80 - 2x$  ב.  $x = 20$
- (4) א.  $DC = x + 3\sqrt{40 - x^2}$  ב.  $x = 2$
- (5) א.  $AB = 4, BC = 9$  ב.  $AC = \sqrt{97}$
- (6) א.  $P = 2\sqrt{1.25x^2 - 10} + 100 + 20 - x$  ב.  $x = 8$  ג. 48
- (7) א.  $AE = 16 - 3x$  ב.  $x = 6$
- (8) א.  $CO = 0.5x + 13.5$  ב.  $BO = \sqrt{-\frac{3x^2}{4} + \frac{27x}{2} + 182\frac{1}{4}}$  ג.  $x = 9$
- (9)  $AB = 1$
- (10) א.  $A(4, 8)$  ב.  $AB = 1$
- (11) א. i.  $B(t, 8\sqrt{t})$  ii.  $AB = 2t^2 - 8\sqrt{t} + 30$  ב.  $t = 1$
- (12) א.  $P = 2t + 4\sqrt{4 - t}$  ב.  $t = 3$  ג.  $P = 10$
- (13) א.  $P = 2t + 8\sqrt{5 - t}$  ב.  $t = 1$  ג.  $P = 18$
- (14) א.  $(2.5, 0.5)$  ב. כן, הנקודה  $(0, 6.75)$  והיא נמצאת על ציר ה- $y$ .
- (15)  $B(-4, 4)$
- (16)  $(4, 4)$
- (17)  $(1, -3)$
- (18) א.  $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$  ב.  $t = 2.25$
- (19)  $(16, 0)$



## תוכן העניינים:

פרק 23 .....	514
חשבון אינטגרלי.....	514
האינטגרל הכללי: .....	514
הגדרה וחוקים יסודיים: .....	514
שאלות יסודיות – חישובי אינטגרלים: .....	514
שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה: .....	515
תשובות סופיות: .....	517
האינטגרל המסוים וחישובי שטחים: .....	518
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים): .....	518
שאלות – האינטגרל המסוים: .....	519
תשובות סופיות: .....	520
שאלות בחישובי שטחים – פונקציה פולינומית: .....	521
שאלות יסודיות: .....	521
שאלות עם פרמטר: .....	530
שאלות בחישובי שטחים – פונקציה רציונאלית: .....	531
שאלות בחישובי שטחים – פונקצית שורש: .....	531
חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים: .....	532
תשובות סופיות: .....	536
תרגול נוסף - חשבון אינטגרלי: .....	539
תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית: .....	539
תשובות סופיות: .....	551
תרגילים העוסקים בפונקציה רציונאלית: .....	554
תשובות סופיות: .....	559
תרגילים העוסקים בפונקציה אי-רציונאלית: .....	560
תשובות סופיות: .....	566

## פרק 23

# חשבון אינטגרלי

### האינטגרל הכללי:

הגדרה וחוקים יסודיים:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- עבור מקדם קבוע  $a$  נקבל:  $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

### שאלות יסודיות – חישובי אינטגרלים:

1) מצא את האינטגרלים הבאים:

- |  |   |
|--|---|
| א. $\int x^3 dx$   | ב. $\int 12x^5 dx$  |
| ג. $\int x^4 dx$   | ד. $\int 2x^3 dx$   |
| ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$   | ו. $\int 7 dx$  |
| ז. $\int \left( \frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$ | ח. $\int \left( \frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$ |

(2) מצא את האינטגרלים הבאים :

ב.  $\int \frac{1}{x^3} dx$

א.  $\int x^{-3} dx$

ד.  $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

ג.  $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$

(3) מצא את האינטגרלים הבאים :

ב.  $\int \sqrt{x} dx$

א.  $\int x^{\frac{1}{2}} dx$

ד.  $\int \left( \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx$

ג.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(4) מצא את האינטגרלים הבאים :

ג.  $\int \frac{18}{(6x+5)^2} dx$

ב.  $\int 3(2-7x)^4 dx$

א.  $\int (5x-1)^3 dx$

ה.  $\int \sqrt{ax+b} dx$

ד.  $\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx$

## שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה:

(5) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = 3x^2 - 7$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(2, -1)$ .

(6) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = 2x - 6$ .

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
מצא את הפונקציה.

(7) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = x^2 - 8x + 2$ . נתון:  $f(-2) = 1$ .

א. מצא את  $f(x)$ .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .

(8) נתונה הנגזרת של פונקציה  $f(x)$ :  $f'(x) = 9x^2 - 4$ .

ערך הפונקציה בנקודה  $x = 1$  הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 1$ .

ב. מצא את  $f(x)$ .

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

(9) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x - 3$ .

לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.

א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.

ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

(10) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -6x - 5$ .

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

א. מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה A.

ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.

ג. מצא את משוואת המשיק.

(11) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 3x - 4$ .

הישר  $y = 2x + 5$  משיק לגרף הפונקציה. מצא את  $f(x)$ .

(12) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$ :  $f''(x) = 8x - 6$ .

א. מצא את  $f'(x)$  אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = 2$ .

ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא  $\frac{2}{3}$ .

(13) נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$ :  $f''(x) = 2x - 3$ .

א. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 4. מצא את  $f'(x)$ .

ב. ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצא את  $f(x)$ .

## תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \frac{x^4}{4} + c & \text{ב. } 2x^6 + c & \text{ג. } \frac{x^5}{5} + c & \text{ד. } \frac{x^4}{2} + c \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{lll} \text{ה. } \frac{x^6}{9} + c & \text{ו. } 7x + c & \text{ז. } \frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c & \text{ח. } \frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{א. } -\frac{x^{-2}}{2} + c & \text{ב. } -\frac{1}{2x^2} + c & \text{ג. } -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c & \text{ד. } 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \frac{x^{1.5}}{1.5} + c & \text{ב. } \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c & \text{ג. } 2\sqrt{x} + c & \text{ד. } 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \frac{(5x-1)^4}{20} + c & \text{ב. } -\frac{3(2-7x)^5}{35} + c & \text{ג. } -\frac{3}{6x+5} + c & \text{ד. } \frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{ll} \text{ה. } \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c & \text{ו. } \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - 7x + 5 \quad (5)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$y = -5x + 27 \quad \text{ב.} \quad (8)$$

$$y = 5x - 2 \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f(x) = 3x^3 - 4x + 4 \quad \text{ב.} \quad (9)$$

$$x = 0 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 7 \quad \text{ב.} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$f(x) = -3x^2 - 5x - 8 \quad \text{ב.} \quad (11)$$

$$f(x) = 1.5x^2 - 4x + 11 \quad (11)$$

$$f'(x) = 4x^2 - 6x - 4 \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{4x^3}{3} - 3x^2 - 4x + 10 \quad \text{ב.} \quad (13)$$

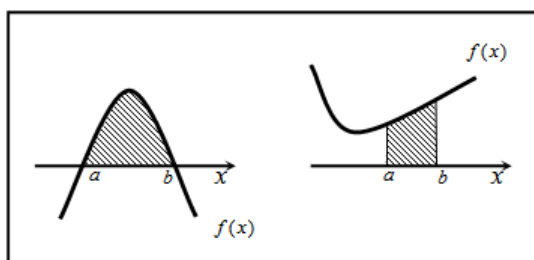
$$f'(x) = x^2 - 3x + 6 \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{6} \quad \text{ב.} \quad (14)$$

## האינטגרל המסוים וחישובי שטחים:

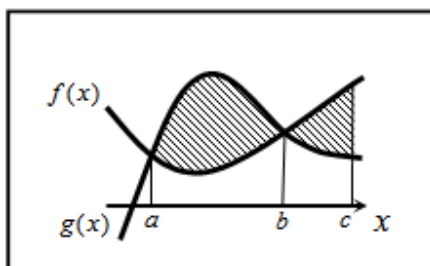
### חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים):

- שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- שטח הכלוא בין שני גרפים כך שגרף אחד כולו מעל השני:

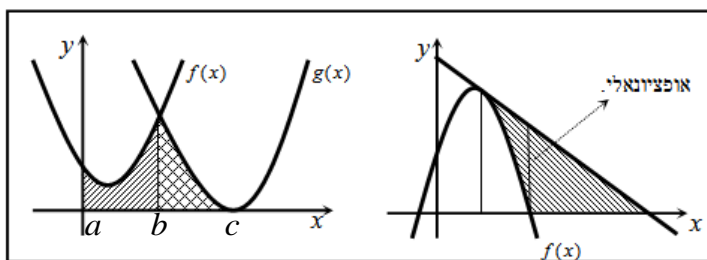


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

$$S = S_1 + S_2$$

- שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :



$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

## שאלות – האינטגרל המסוים:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\int_{-4}^{-1} x^2 (x-3) dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_2^5 (x^2 + 5x) dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_{-1}^1 3(2x-1)^5 dx \quad \text{ו.}$$

$$\int_{-3}^3 (x^3 + 4x) dx \quad \text{ה.}$$

$$\int_1^4 \frac{x-1}{x^3} dx \quad \text{ח.}$$

$$\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2} dx \quad \text{ז.}$$

$$\int_{-5}^0 \frac{3}{\sqrt{4-x}} dx \quad \text{י.}$$

$$\int_1^2 \sqrt{3x-1} dx \quad \text{ט.}$$

(2) לפניך האינטגרל הבא:  $\int_1^a (4x-7) dx$ .

מצא עבור אלו ערכים של  $a$  ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

(3) לפניך האינטגרל הבא:  $\int_a^2 (x-3x^2) dx$ .

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- $a$ .

ב. מצא עבור אלו ערכים של  $a$  ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$ .

(4) לפניך האינטגרל הבא:  $\int_a^{a+4} \left( \frac{1}{\sqrt{x-a}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx$ .

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- $a$ .

ב. מצא את ערכו של  $a$  עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

## תשובות סופיות:

(1) א. 91.5    ב. -126.75    ג. 0    ד. -182    ה. 1

ו.  $\frac{9}{32}$     ז. -12    ח. 9.5    ט. 1.856    י. 6.

(2)  $a = 2, 1.5$

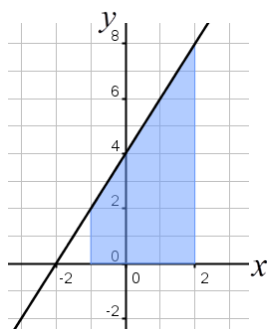
(3) א.  $a^3 - \frac{1}{2}a^2 - 6$     ב.  $a = 0, 1, -\frac{1}{2}$

(4) א.  $4 + 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+5})$     ב.  $a = 1\frac{1}{4}$

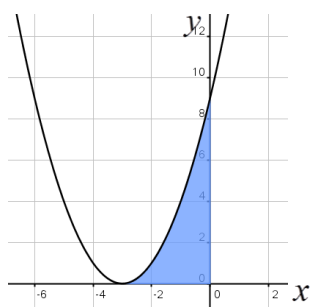


## שאלות בחישובי שטחים – פונקציה פולינומית:

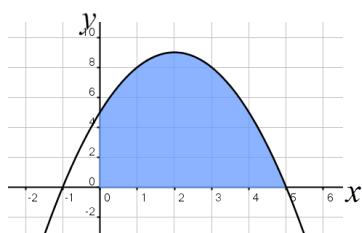
### שאלות יסודיות:



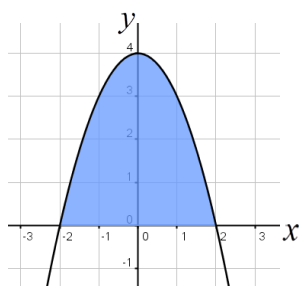
- (1) בסרטון זה מוסבר כיצד להשתמש באינטגרל המסוים כדי לחשב שטחים.  
נתונה הפונקציה:  $y = 2x + 4$ .  
חשב את השטח המוגבל שמתחת הישר, ציר ה- $x$  והישרים  $x = -1$  ו- $x = 2$ .



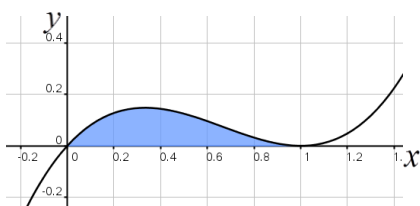
- (2) נתונה הפונקציה  $y = (x + 3)^2$ .  
א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לצירים.



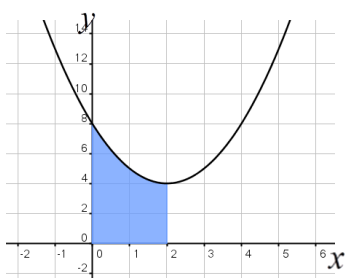
- (3) נתונה הפונקציה:  $y = -x^2 + 4x + 5$ .  
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  וציר ה- $y$ .



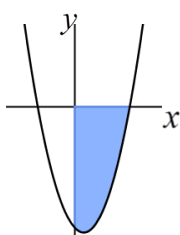
- (4) נתונה הפונקציה  $y = -x^2 + 4$ .  
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לציר ה- $x$ .



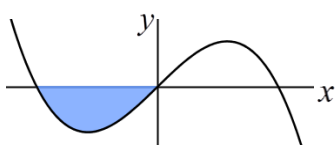
- (5) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$  וציר ה- $x$  כמתואר באיור:



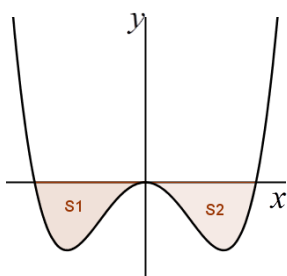
- (6) נתונה הפונקציה  $y = x^2 - 4x + 8$ . חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים וקדקוד הפרבולה.



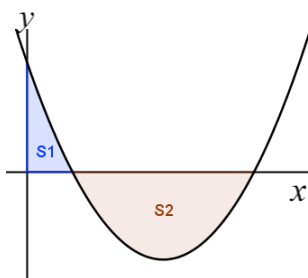
- (7) בסרטון זה מוסבר כיצד לחשב שטח שמתחת לציר ה- $x$ . נתונה הפונקציה  $y = x^2 - x - 6$ . חשב את השטח המוגבל שמתחת לפונקציה ולצירים שברביע הרביעי.



- (8) נתונה הפונקציה  $f(x) = x(4 - x^2)$ . חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- $x$  שברביע השלישי.

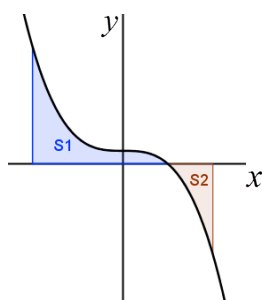


- (9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$ . חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- $x$ .

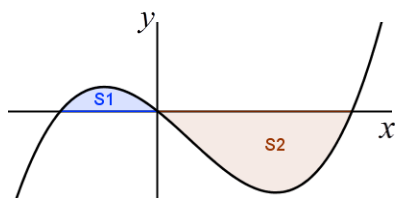


- 10** חשב את האינטגרל המסוים של הפונקציה  $y = x^2 - 6x + 5$  בין 0 ל-5. האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים:  $S_1 + S_2$ ? אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.

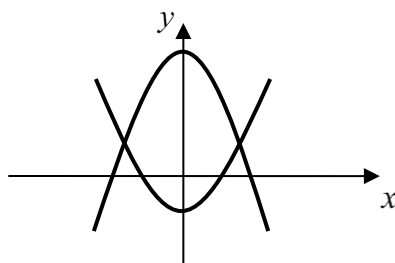
- 11** ענה על השאלות הבאות:



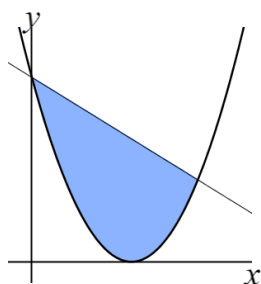
- א. חשב את ערך האינטגרל הבא:  $\int_{-2}^2 (-x^3 + 1) dx$ .  
 ב. נתונה הפונקציה:  $f(x) = -x^3 + 1$ . מעבירים ישרים:  $x = -2$  ו-  $x = 2$  כך שנוצרים השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  כמתואר באיור. חשב את סכום השטחים:  $S_1 + S_2$  והסבר מדוע תוצאת החישוב שונה מסעיף א'.



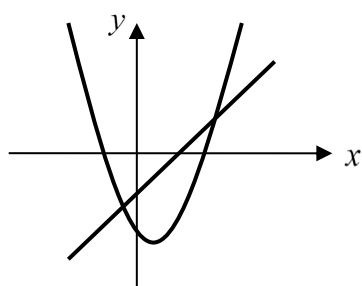
- 12** נתונה הפונקציה:  $y = x^3 - x^2 - 2x$ . יוצרים את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  בין גרף הפונקציה וציר ה-  $x$  כמתואר באיור. א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$ . ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-  $x$ .



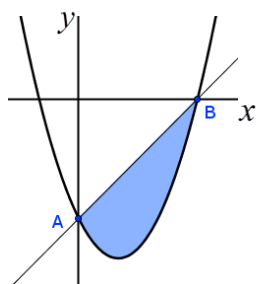
- 13** נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ . חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



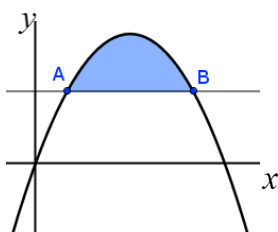
14 נתונות הפונקציות:  $y = -x + 9$ ;  $y = (x-3)^2$ .  
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



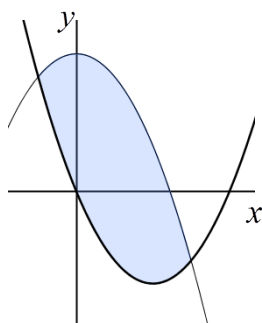
15 נתונות הפונקציות הבאות:  
 $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ;  $g(x) = x - 6$   
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



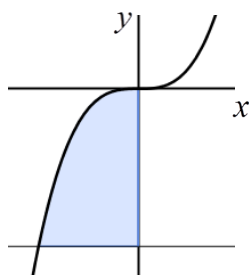
16 נתונה הפונקציה:  $y = 3x^2 - 6x - 9$ .  
א. מצא נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים (נסמן ב-A ו-B).  
ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AB.



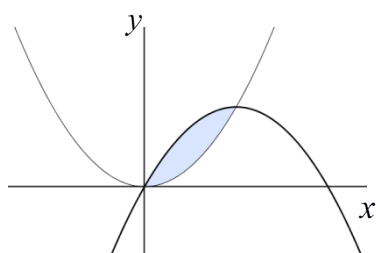
17 נתונה הפרבולה:  $y = -x^2 + 6x$  והישר  $y = 5$ .  
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה לישר.



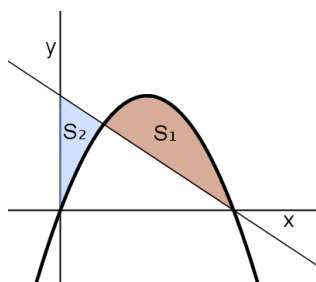
18 חשב את השטח המוגבל בין גרפים של הפונקציות:  $y = x^2 - 4x$ ;  $y = -x^2 + 6$ .



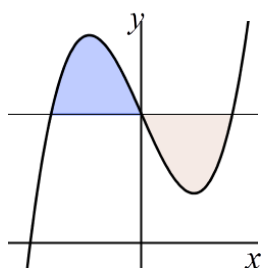
- (19) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3$ .**  
 חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,  
 הישר  $y = -8$  וציר ה- $y$  כמתואר באיור.



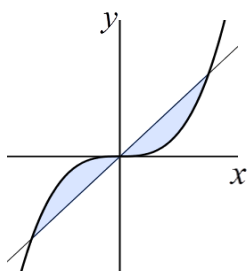
- (20) מצא את השטח הכלוא בין גרף  
 הפונקציה:  $y = x^2$   
 לבין גרף הפונקציה:  $y = 2x - x^2$ .**



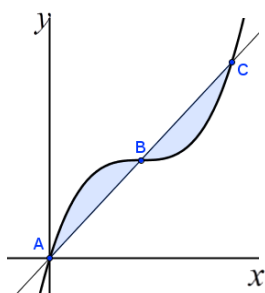
- (21) נתונות הפונקציות הבאות:**  
 $g(x) = -x + 4$ ;  $f(x) = -x^2 + 4x$   
 מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב- $S_1$ ,  
 ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה- $y$  ב- $S_2$   
 כמתואר באיור.  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.  
 ב. חשב את היחס שבין השטחים:  $\frac{S_1}{S_2}$ .



- (22) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 4x + 5$  והישר  $y = 5$ .**  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה  
 והישר.  
 ב. חב את השטח המוגבל ביניהן.



- (23) נתונות הפונקציות:  $y = x^3$ ;  $y = x$ .  
חשב את השטח המוגבל ביניהן.



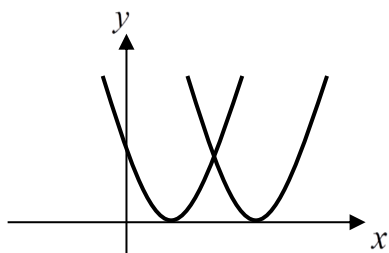
- (24) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .  
הישר AC חותך את גרף הפונקציה  
בנקודות הבאות:  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(2,2)$ .  
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

- (25) הפונקציות:  $f(x) = x^2$  ו-  $g(x) = -x^2 + 2x$  נחתכות ב-2 נקודות.  
א. מצא את נקודות החיתוך.  
ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.

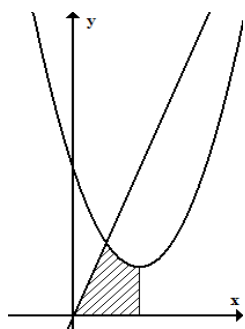
- (26) נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  ו-  $g(x) = x + 2$ .  
א. סרטט את הפונקציות במערכת צירים אחת.  
ב. מצא את השטח המוגבל בין הגרפים והצירים.

- (27) חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות:  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x$ .

- (28) חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה  $f(x) = x^3 - 4x$  לציר ה-  $x$ .



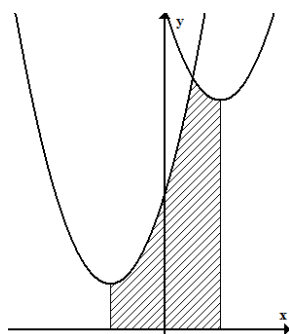
- (29) נתונות שתי פונקציות:  
 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות  
ובין ציר ה-  $x$ .



30 הפונקציות המתוארות בשרטוט הן :

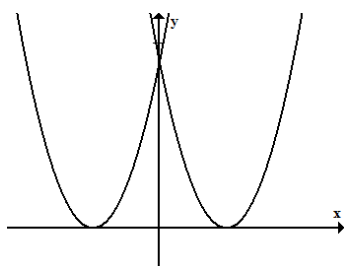
$$y = 3x ; y = x^2 - 4x + 6$$

- א. מצא את קדקוד הפרבולה.
- ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשאל לקדקוד הפרבולה.
- ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.



31 נתונות הפונקציות :  $y = x^2 - 4x + 14$  ,  $y = x^2 + 4x + 6$

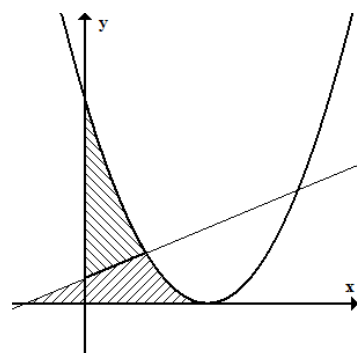
- א. מצא את שיעורי ה- $x$  של קדקודי הפרבולות.
- ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
- ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.



32 נתונות הפונקציות :  $f(x) = (x-3)^2$

$$\text{ו-} g(x) = (x+3)^2 \text{ כמתואר באיור :}$$

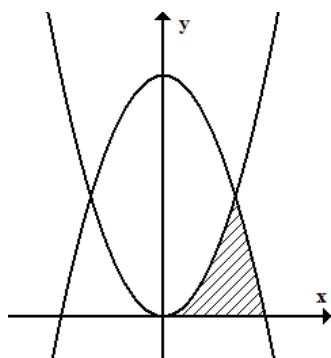
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- $x$ .



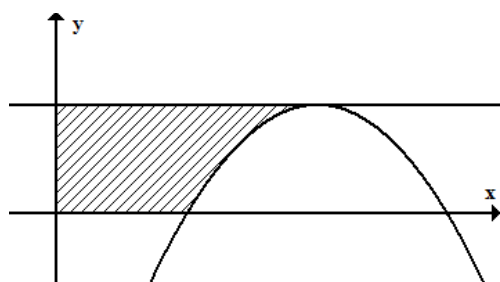
33 נתונות שתי הפונקציות :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} , y = (x-2)^2$$

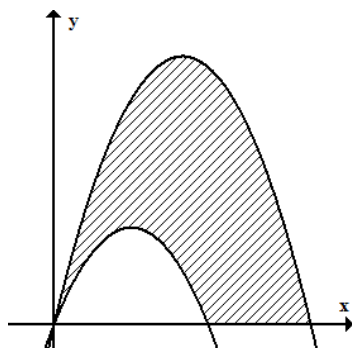
- א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- $x$ .
- ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- $y$ .



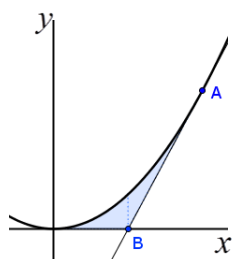
**(34)** נתונות הפונקציות:  $y = x^2$ ,  $y = 8 - x^2$ .  
חשב את השטח המוגבל על ידי שתי הפונקציות  
וציר ה- $x$  ברביע הראשון.



**(35)** נתונה הפרבולה:  $y = -x^2 + 4x - 3$ .  
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$   
מקדקוד הפרבולה.  
א. מצא את שיעורי קדקוד  
הפרבולה.  
ב. מצא את השטח המוגבל בין  
גרף הפונקציה, הישר  
והצירים.

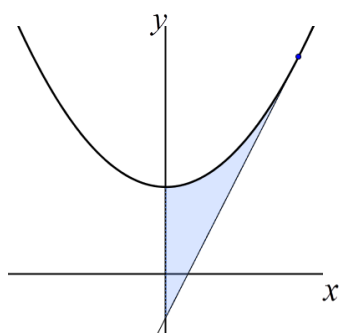


**(36)** נתונות הפרבולות הבאות:  
 $f(x) = -x^2 + 5x$ ,  $g(x) = -x^2 + 3x$ .  
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים  
של הפרבולות וציר ה- $x$ .

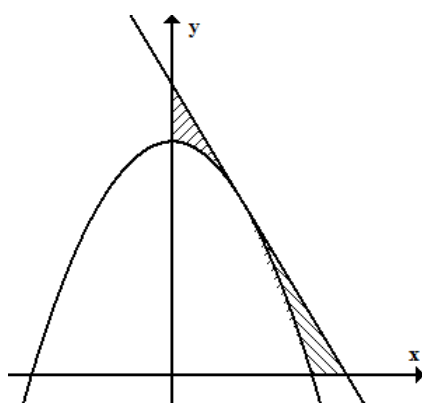


**(37)** נתונה הפונקציה:  $y = 2x^2$ .  
מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה:  $A(1, 2)$ .  
המשיק חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $B$ .  
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק  
וציר ה- $x$ .

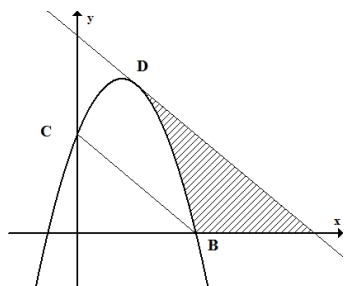




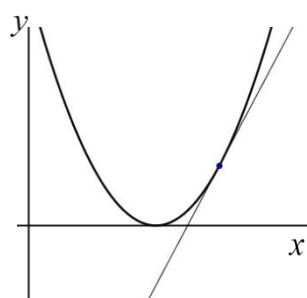
**(38) נתונה הפונקציה:  $y = 3x^2 + 2$ .**  
 מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(1, 5)$ .  
 חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק  
 וציר  $y$ .



**(39) נתונה הפונקציה  $y = -x^2 + 4$ .**  
 בנקודה  $(1, 3)$  העבירו משיק.  
 א. מצא את משוואת המשיק.  
 ב. מצא את השטח המוגבל בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $y$ .  
 ג. חשב את השטח המוגבל בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .

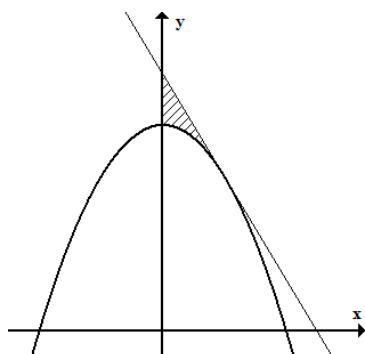


**(40) משוואת הפרבולה היא:  $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ .**  
 הנקודות  $B(2, 0)$ ,  $C(0, 2)$  הן נקודות חיתוך של  
 הפרבולה עם הצירים. המשיק לפרבולה בנקודה  
 D מקביל לישר BC.  
 א. מצא את משוואת המשיק.  
 ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה,  
 המשיק וציר ה- $x$ .  
 ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה,  
 המשיק וציר ה- $y$ .

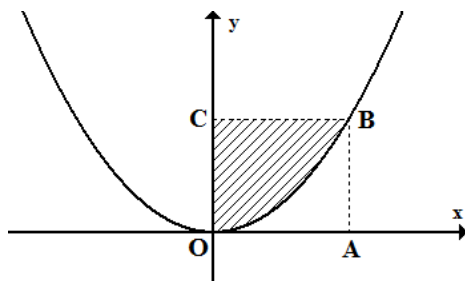


**(41) נתונה הפונקציה:  $y = (x-4)^2$ .**  
 מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך  
 הנקודה שבה:  $x = 6$ .  
 א. מצא את משוואת המשיק.  
 ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .

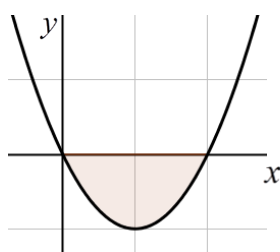
## שאלות עם פרמטר:



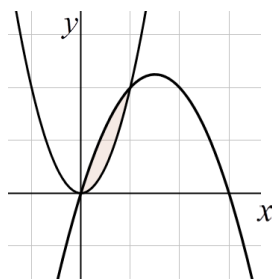
- 42** נתונה הפרבולה:  $y = ax^2 + 8$ .  
שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה  $x = 2$  הוא  $-2$ .  
א. חשב את  $a$ .  
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר  $y$ .



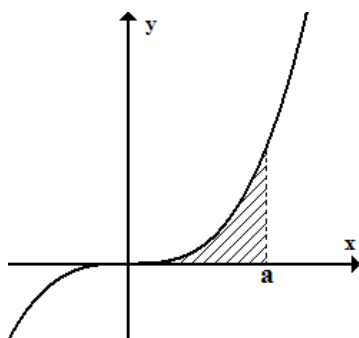
- 43** הפונקציה המתוארת בשרטוט היא:  $y = ax^2$  ( $a$  פרמטר).  
המרובע ABCO הוא ריבוע.  
הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.  
ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות. מצא את ערך הפרמטר  $a$  ואת השטח המסומן בשרטוט.



- 44** הפונקציה:  $y = ax^2 + bx$  ( $a > 0$ , פרמטרים  $b, a$ ).  
חותכת את ציר ה- $x$  בנקודות  $(0,0)$  ו- $(2,0)$ .  
חשב את ערכי הפרמטרים  $b, a$  אם ידוע כי השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה וציר ה- $x$  הוא 8 יחידות שטח.

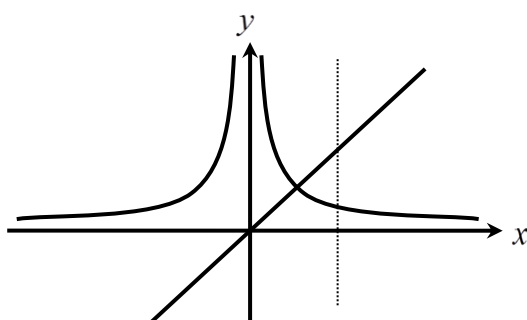


- 45** הפונקציות  $y = 2x^2$  ו- $y = ax^2 + bx$  ( $a < 0$ ).  
נחתכות בנקודות:  $(0,0)$  ו- $(1,2)$ . ידוע כי השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות הוא 0.5 יחידות שטח. מצא את ערכי הפרמטרים  $b, a$ .



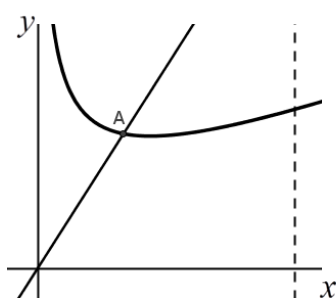
- (46) נתונה הפונקציה  $y = x^3$ .  
 מעבירים אנך לציר ה- $x$ :  $x = a$  ( $a$  פרמטר חיובי)  
 כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה  
 וציר ה- $x$ .  
 א. הבע באמצעות  $a$  את השטח המקווקו  
 בציר.  
 ב. חשב את  $a$  אם ידוע כי שטח  
 זה שווה ל- $a^2$ .

### שאלות בחישובי שטחים – פונקציה רציונאלית:



- (47) נתונות שתי פונקציות:  
 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = x$   
 חשב את גודל השטח הכלוא בין  
 הפונקציות, הישר  $x = 2$  וציר ה- $x$ .

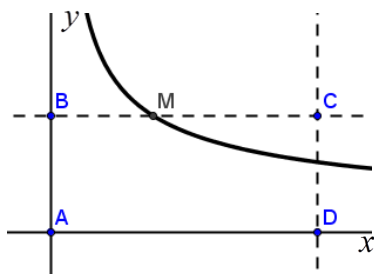
### שאלות בחישובי שטחים – פונקצית שורש:



- (48) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x$ .  
 מעבירים ישר:  $y = 4x$  החותך את גרף הפונקציה  
 בנקודה A המסומנת באיור.  
 א. מצא את שיעורי הנקודה A.  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  
 $f(x)$ , הישר  $y = 4x$ , ציר ה- $x$  ואנך  
 לציר ה- $x$ :  $x = 4$ .

49 באיור שלפניך מתוארת

$$f(x) = \frac{9}{\sqrt{2x-1}}$$



מעבירים את הישרים המקבילים לצירים:  $x=13$  ו- $y=3$  כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור. הישר  $y=3$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

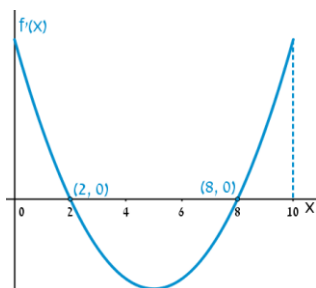
- מצא את שיעורי הנקודה M.
- מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים ב- $S_1$  ואת שטח המלבן ב- $S_2$ . הראה כי:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{13}$$

### חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

50 הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$ .

בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$ .



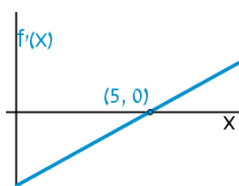
א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  אם:

$$f(0) = -4, f(2) = 6$$

$$f(5) = 0 \text{ וכן: } f(10) > 0$$

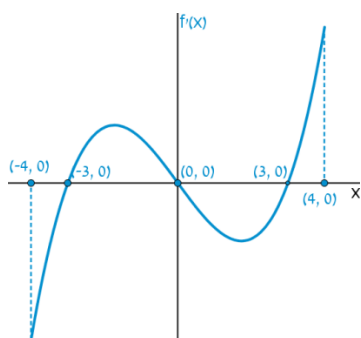
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים ברביע הראשון עד לנקודה שבה  $x=2$ .

51 לפניך הגרף של הפונקציה  $f'(x)$ .



הגרף המתואר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד והיא  $(5, 0)$ .

- מצא את התחומים שבהם  $f'(x)$  היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.
- קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי שיעור ה- $y$  שלה הוא -2.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y=8$ .
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.



52) בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$  של

הפונקציה  $f(x)$ .

א. רשום את תחומי העלייה והירידה

של  $f(x)$ .

ב. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות

הקיצון של  $f(x)$  וקבע את סוגן.

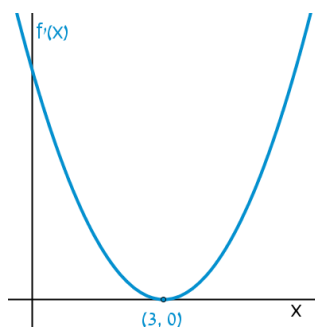
ג. נתון כי הפונקציה  $f(x)$  עוברת

בראשית הצירים וגם מקיימת:  $f(-3) = f(3) = m$ .

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנ"ל (הבע באמצעות  $m$ ).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  וציר ה- $x$  ברביעים השני והרביעי

הוא 16 יח"ש. מצא את  $m$ .



53) הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$  מתוארת

באיור הבא:

א. האם ל- $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמק.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע

כי  $f(3) = 4$  וכי היא חותכת את ציר ה- $y$

בנקודה שבה  $y = -5$ .

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.

54) באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה

$f(x)$ . ידוע כי הנקודות  $B(2, 2)$ ,  $A(5, -4.75)$

ו- $C(0, 14)$  נמצאות על  $f(x)$ .

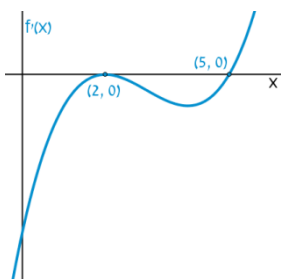
א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של  $f(x)$ .

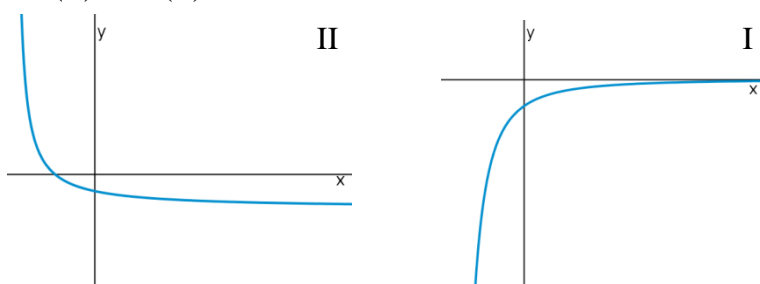
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$

והצירים בתחום  $0 \leq x \leq 5$ .

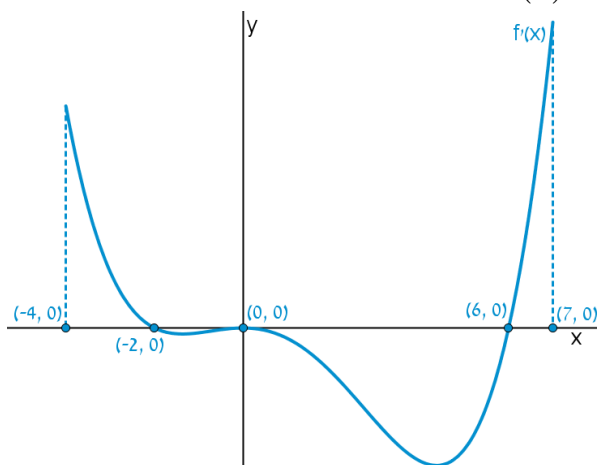


55) באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$  :



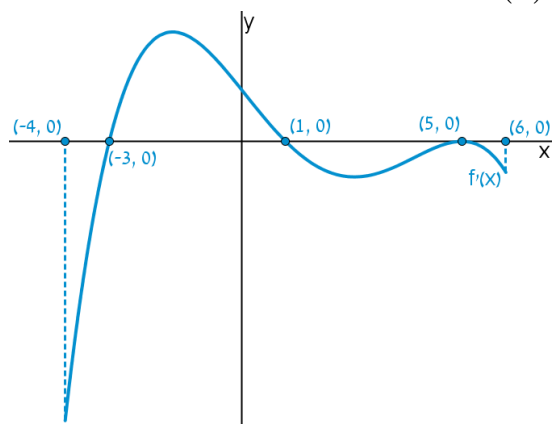
- א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.
- ב. נתון כי  $f(10) = -3$  וכי  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ .
- מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

56) נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  הבא :



- א. סרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$  לפי הנתונים :
- $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$  ו- $f(6) = -606.8$ .
- ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע השלישי.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע הרביעי.

57 נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  הבא :

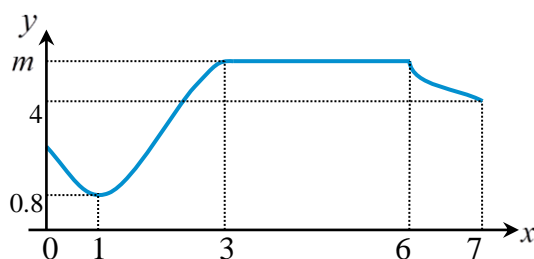


א. סרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 6$  עבור

הנתונים:  $f(-3) = -356\frac{2}{5}$ ,  $f(1) = 36\frac{2}{15}$ ,  $f(5) = -83\frac{1}{3}$ .

ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  בתחום:  $-3 \leq x \leq 5$ .

58 בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 < x < 7$  :



הסתמך על הגרף של  $f(x)$  ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות :

א. מצא עבור אילו ערכים של  $x$  השונים מ-6 מתקיים :

i.  $f'(x) > 0$

ii.  $f'(x) = 0$

iii.  $f'(x) < 0$

ב. נתון כי:  $\int_3^6 m dx = 15$ , כאשר  $m$  הוא פרמטר המסומן על ציר ה- $y$ .

מצא את  $f(5)$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $0 < x < 3$ .

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת  $f'(x)$

וציר ה- $x$  בתחום  $1 < x < 3$ .

## תשובות סופיות:

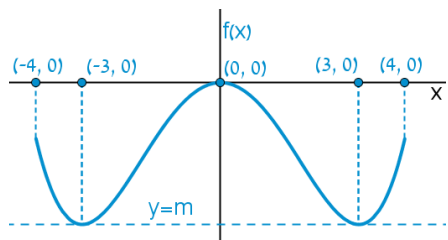
- (1) 15 יח"ש.
- (2) א.  $(-3,0)$  ב. 9 יח"ש. (3) א.  $(5,0)$  ,  $(-1,0)$  ב.  $33\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (4) א.  $(2,0)$  ,  $(-2,0)$  ב.  $10\frac{2}{3}$  יח"ש. (5)  $\frac{1}{12}$  יח"ש.
- (6)  $10\frac{2}{3}$  יח"ש. (7) 13.5 יח"ש.
- (8) 4 יח"ש. (9)  $4\frac{4}{15}$  יח"ש.
- (10) א.  $-8\frac{1}{3}$  ב. 13. (11) א. 4 ב. 9.5 יח"ש.
- (12) א.  $(1,0), (0,0), (2,0)$  ב.  $3\frac{1}{12}$  יח"ש. (13)  $21\frac{1}{3}$
- (14)  $20\frac{5}{9}$  יח"ש. (15)  $57\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (16) א.  $A(0,-9), B(3,0)$  ב. 13.5 יח"ש. (17)  $10\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (18)  $21\frac{1}{3}$  יח"ש. (19) 12 יח"ש.
- (20)  $\frac{1}{3}$  יח"ש. (21) א.  $(1,3)$  ,  $(4,0)$  ב.  $2\frac{5}{11}$ .
- (22) א.  $(-2,5), (0,5), (2,5)$  ב. 8 יח"ש. (23) 0.5 יח"ש.
- (24) 0.5 יח"ש. (25) א.  $(1,1)$  ,  $(0,0)$  ב.  $\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (26)  $7\frac{1}{3}$  יח"ש. (27) 0.5 יח"ש.
- (28) 8 יח"ש. (29)  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (30) א.  $(2,2)$  ב.  $(1,3)$  ג.  $3\frac{5}{6}$  יח"ש. (31) א.  $x = \pm 2$  ב.  $(1,11)$  ג.  $25\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (32) 18 יח"ש. (33) א.  $\frac{4}{3}$  יח"ש ב.  $1\frac{7}{12}$  יח"ש.



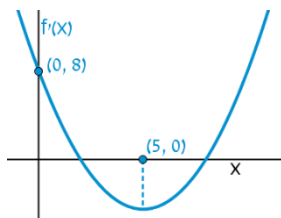
- (34)  $4\frac{5}{12}$  יח"ש. (35) א.  $(2,1)$  ב.  $\frac{4}{3}$  יח"ש.
- (36)  $16\frac{1}{3}$  יח"ש. (37)  $\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (38) 1 יח"ש. (39) א.  $y = -2x + 5$  ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{7}{12}$  יח"ש.
- (40) א.  $y = -x + 4$  ב.  $2\frac{2}{3}$  יח"ש ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (41) א.  $y = 4x - 20$  ב.  $\frac{2}{3}$  יח"ש. (42) א.  $a = -\frac{1}{2}$  ב.  $\frac{4}{3}$  יח"ש.
- (43)  $2\frac{2}{3}$  יח"ש,  $a = \frac{1}{2}$  (44)  $a = 6, b = -12$
- (45)  $a = -1, b = 3$  (46) א.  $\frac{a^4}{4}$  ב.  $a = 2$
- (47) 1 יח"ש. (48) א.  $A(1,4)$  ב. 15.5 יח"ש.
- (49) א.  $M(5,3)$  ב. הוכחה.
- הערה: סרטוטי הסקיצות של השאלות הבאות מופיעות בסוף התשובות.
- (50) ב. 10 יח"ש.
- (51) א. חיובית:  $x > 5$ , שלילית:  $x < 5$ . ב. עולה:  $x > 5$ , יורדת:  $x < 5$ . ג.  $\min(5, -2)$  ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.
- (52) א. עולה:  $3 < x \leq 4$ ,  $-3 < x < 0$ , יורדת:  $0 < x < 3$ ,  $-4 \leq x < -3$ . ב.  $x_{\min} = 3$ ,  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = -3$ . ג. הוכחה ד.  $m = -8$ .
- (53) א. לא. הנקודה  $(3,0)$  היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.
- (54) א.  $\min(5, -4.75)$ . ב. עולה:  $x > 5$ , יורדת:  $x < 5$ . ג. הוכחה ד. 18.75 יח"ש.
- (55) א.  $f(x): \Pi, f'(x): I$  ב. 1 יח"ש.
- (56) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (57) א. הוכחה ב. 512 יח"ש.
- (58) א. i.  $f'(x) > 0: 1 < x < 3$  ii.  $f'(x) = 0: x = 1, 3 \leq x < 6$  iii.  $f'(x) < 0: 6 < x < 7, 0 < x < 1$  ב.  $f(5) = 5, m = 5$  ד. 4.2 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

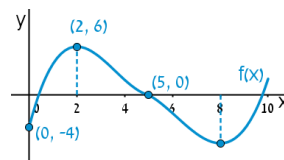
(52)



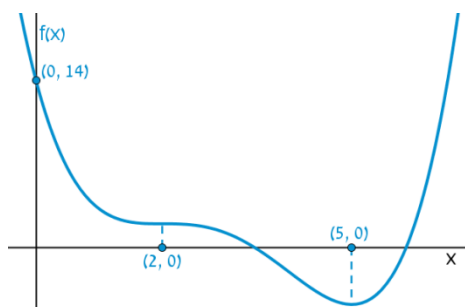
(51)



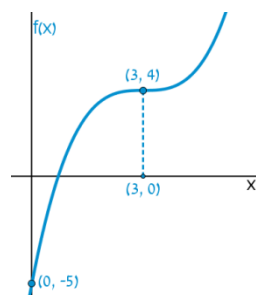
(50)



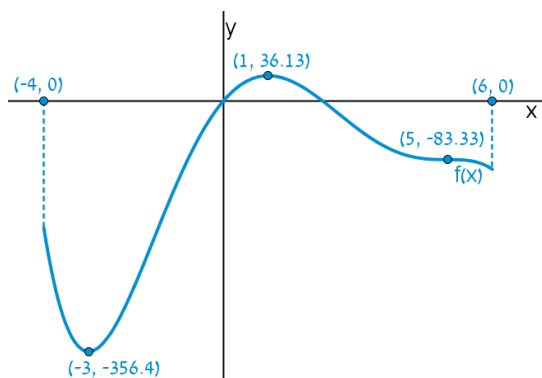
(54)



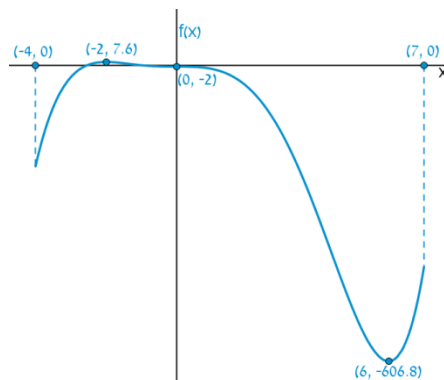
(53)



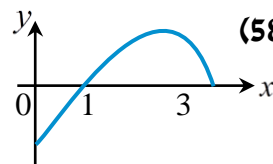
(57)



(56)



(58)



## תרגול נוסף - חשבון אינטגרלי:

\*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

### תרגילים העוסקים בפונקציה פולינומית:

מציאת פונקציה קדומה:

(1) נתונה הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  :  $f'(x) = kx + 2$ , פרמטר  $k$ .

ידוע כי הפונקציה  $f(x)$  חותכת את הפונקציה  $g(x) = \frac{6x-1}{x}$

בנקודה שבה  $y = 5$  וכי שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודת החיתוך שלהן הוא  $m = 4$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

(2) הפונקציה  $f(x)$  משיקה לפונקציה:  $g(x) = \frac{4x-1}{x}$  בנקודת ההשקה העבירו

משיק שמשוואתו  $y = x + 2$ . הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = x$ .

א. מצא את נקודת ההשקה. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = kx + 7\frac{3}{4}$ , פרמטר  $k$ .

(3) ידוע כי לפונקציה  $f(x)$  ולפונקציה  $g(x) = \frac{4x+4}{x}$  יש משיק משותף

בנקודה שבה  $x = 4$ .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

ג. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

(4) נתונה הנגזרת של הפונקציה  $f(x) : f'(x) = ax^2 + 3x$ , פרמטר  $a$ . משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1$  היא  $y = -3x + 8.5$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ . מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד משיקים בעלי שיפוע זהה למשיק זה? אם כן – מצא אותם, אם לא, נמק.

(5) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = ax^3 + bx$ , פרמטרים  $a, b$ . ידוע כי משוואת המשיק לפונקציה באחת מנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא  $y = 16x - 32$ . כמו כן מתקיים גם:  $f'(1) = -4$ .

א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

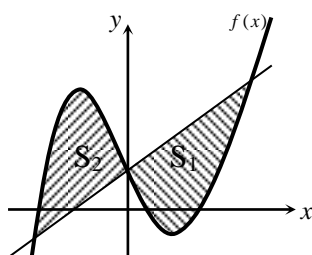
ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

(6) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 3x^2 + kx - 3$ , פרמטר  $k$ . ידוע כי ערך הנגזרת בנקודה שבה  $x=1$  הוא  $-4$ . כמו כן הישר  $y=4$  חותך את גרף הפונקציה בנקודות החיתוך של עם ציר ה- $y$ . א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ . ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

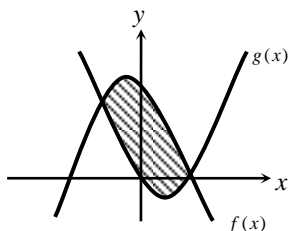
ג. האם הישר  $y=4$  חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן, מהן?

(7) הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$  היא  $f''(x) = 12x$ . לפונקציה יש נקודת קיצון על ציר ה- $x$  שבה  $x=2$ . א. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון? ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

**חישובי שטחים (ללא מציאת פונקציה קדומה):**



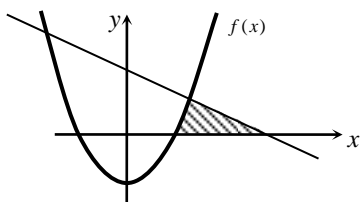
(8) לפניך הגרפים של הפונקציות:  
 $y = 13x + 1, f(x) = x^3 - 12x + 1$   
הוכח:  $S_1 = S_2$ .



9) לפניך נתונות שתי הפונקציות הבאות:

$$g(x) = 3x^2 - 12x, \quad -1.5x^2 - x + 36$$

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
- חשב את השטח הנוצר בין שתי הפונקציות.



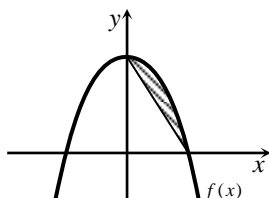
10) נתונות הפונקציה:  $f(x) = x^2 - 16$

$$\text{והישר: } y = -x + 14$$

- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל בין הגרפים ברביע הראשון.

11) נתונה הפונקציה:  $f(x) = -x^3 + 4x$

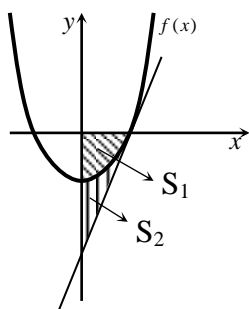
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- הוכח שציר ה- $x$  מחלק את השטח הכלוא בינו לבין הפונקציה לשני חלקים שווים.



12) לגרף הפונקציה:  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 8$  מעבירים ישר העובר

דרך נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים ושיפועו שלילי (ראה איור).

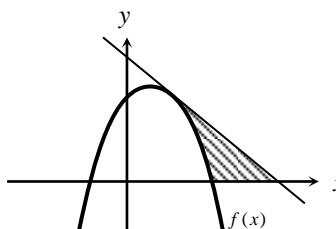
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את משוואת הישר.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישר.



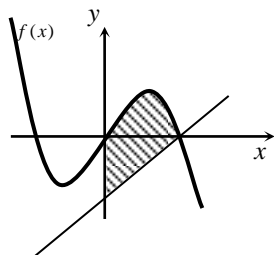
13) לגרף הפונקציה:  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  מעבירים משיק בעל

שיפוע חיובי דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  כמתואר באיור.

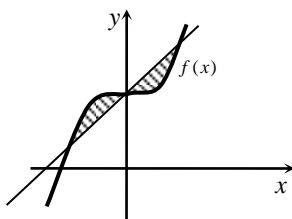
- מצא את משוואת המשיק.
- חשב את יחס השטחים  $\frac{S_1}{S_2}$  המסומנים באיור.



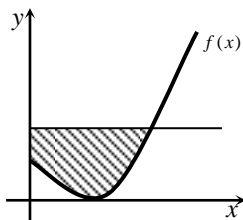
- 14** לגרף הפונקציה:  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  מעבירים משיק בנקודה שבה:  $x = 2$  (ראה איור).  
א. מצא את משוואת המשיק.  
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .



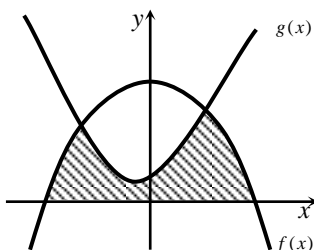
- 15** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה:  $f(x) = 4x - x^3$  והישר:  $y = 4x - 8$ .  
א. מצא את נקודת החיתוך בין שני הגרפים.  
ב. חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר וציר ה- $y$ .



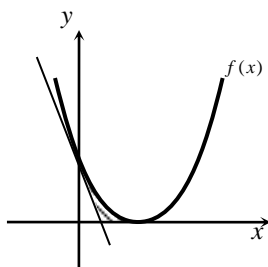
- 16** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה:  $f(x) = x^3 + 8$  והישר:  $y = x + 8$ .  
א. מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.  
ב. חשב את השטח הכלוא בין שתי הפונקציות.



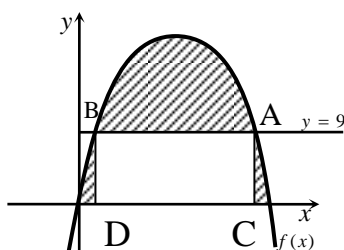
- 17** הישר  $y = 4$  חותך את גרף הפונקציה:  $f(x) = (x-1)^2$  בנקודה A שברביע הראשון.  
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $y$  (המסומן).



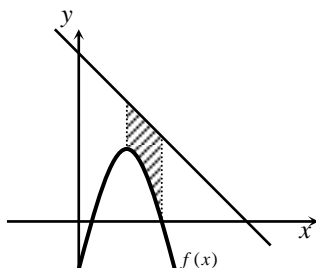
- 18** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות:  $f(x) = 16 - x^2$  ו-  $g(x) = x^2 + 2x + 4$ .  
א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.  
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים לציר ה- $x$ .



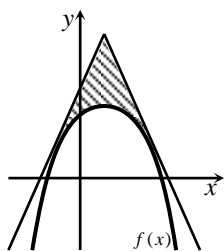
- (19) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-2)^2$ .**  
 מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  מעבירים משיק.  
 א. מצא את משוואת המשיק.  
 ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .  
 ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



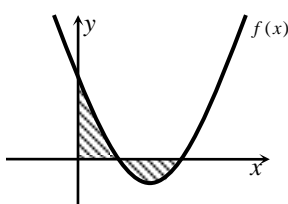
- (20) נתונה הפונקציה:  $f(x) = -x^2 + 10x$ .**  
 הישר:  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B כמתואר באיור. מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן ABCD.  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הישר  $y = 9$  עם גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. מצא את שטח המלבן ABCD.  
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



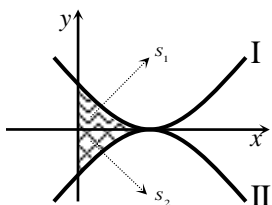
- (21) נתונה הפונקציה:  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ . מעבירים ישר ששיפועו:  $m = -1$  וחותך את ציר ה- $x$  שנקודה שבה:  $x = 8$ . מישור זה מורידים אנך לגרף הפונקציה לנקודת המקסימום שלה ומעלים אנך מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .  
 א. מצא את משוואת הישר.  
 ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.  
 ג. חשב את השטח המוגבל על ידי הישר וגרף הפונקציה.**



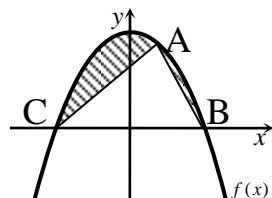
- (22)** לגרף הפונקציה:  $f(x) = -x^2 + 4x + 21$  מעבירים משיקים בנקודות שבהן:  $y = 9$  כמתואר באיור. משיקים אלו נחתכים בנקודה A.
- כתוב את משוואות המשיקים.
  - מצא את שיעורי הנקודה A.
  - חשב את השטח המוגבל על ידי המשיקים לגרף הפונקציה (השטח המסומן).



- (23)** ענה על הסעיפים הבאים:
- חשב את האינטגרל הבא:  $\int_0^6 (x^2 - 8x + 12) dx$ .
  - באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = x^2 - 8x + 12$ . חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-y וציר ה-x.
  - הסבר מדוע התוצאה שקיבלת אינה תואמת את זו של סעיף א'.

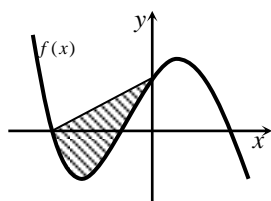


- (24)** נתונות הפונקציות:  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2$  כמתואר באיור.
- התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
  - מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב-  $S_1$  ו-  $S_2$  כמתואר באיור. הראה כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.

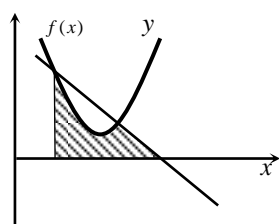


- (25)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 9 - x^2$ . מהנקודה  $A(1, 8)$  שעל הגרף הפונקציה מעבירים ישרים לנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x B ו- C כך שנוצר המשולש ABC.
- מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
  - חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה למשולש ABC (השטח המסומן).

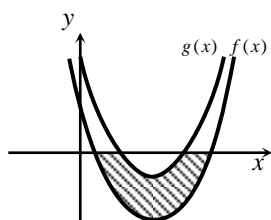




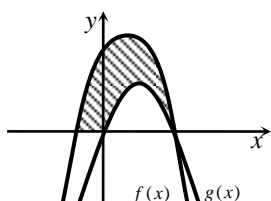
- (26) נתונה הפונקציה:**  $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 18x + 40$ .  
 ידוע כי לפונקציה יש נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$  שבה  $x = -5$ .  
 מנקודה זו מעבירים ישר החותך את הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  (ראה איור).  
 א. כתוב את משוואת הישר.  
 ב. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישר (השטח המסומן).



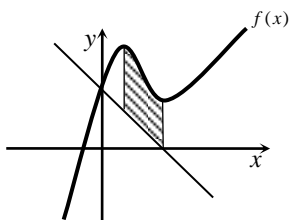
- (27) נתונה הפונקציה:**  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .  
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -4$  כמתואר באיור.  
 א. מצא את משוואת הישר.  
 ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.  
 ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = -4$ .



- (28) נתונות הפונקציות:**  $f(x) = x^2 - 7x + 10$  ו-  $g(x) = x^2 - 7x + 12$ .  
 א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות עם ציר ה- $x$ ?  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- (29) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות:**  
 $f(x) = -x^2 + 2x + k$  ו-  $g(x) = 4x - x^2$ .  
 ידוע כי אחת מנקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- $x$  היא זהה ואינה ראשית הצירים.  
 א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים של הפונקציות וציר ה- $x$ .



**(30)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ . מהנקודה

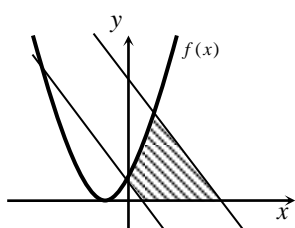
$(3, 0)$  שעל ציר ה- $x$  מעבירים ישר החותך את גרף

הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  כמתואר באיור הסמוך.

א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר שמצאת בסעיף א' ואנכים לציר ה- $x$  מנקודות הקיצון.



**(31)** באיור שלפניך מתוארת הפונקציה:  $f(x) = (x+1)^2$ .

מנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

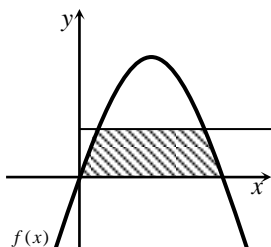
מעבירים ישר  $l_1$  ששיפועו הוא  $m = -2$ . כמו כן

מעבירים ישר נוסף  $l_2$  המקביל לישר  $l_1$  וחותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -5$ .

א. מצא את משוואות הישרים  $l_1$  ו- $l_2$ .

ב. מצא את שאר נקודות החיתוך של הישרים הנ"ל עם הפונקציה.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישרים וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



**(32)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = kx - x^2$ ,  $k$  פרמטר.

הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות החיתוך הוא  $x = 9$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$  (המסומן).

**חישובי שטחים (כולל מציאת פונקציה קדומה):**

**(33)** נתונה הנגזרת:  $f'(x) = 6x$ .

ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 5$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- $x$ .

**(34)** לגרף הפונקציה  $f(x)$  שנגזרתה היא:  $f'(x) = -x^2 + x + 2$  מעבירים משיק

מנקודת המקסימום שלה. ידוע שמשיק זה חותך את גרף הפונקציה בעוד

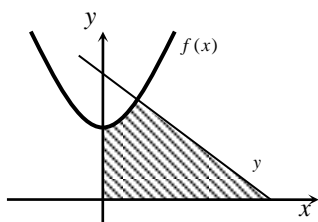
נקודה והיא  $(-2.5, 3)$ .

א. מצא את נקודת המקסימום.

ב. מצא את הפונקציה.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה למשיק

(עגל לשתי ספרות אחרי הנקודה).



**(35)** הנגזרת של פרבולה מרחפת  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x$ .

מהנקודה  $(2, 10)$  שעל גרף הפרבולה מעבירים ישר  $y$

המאונך למשיק שם (נורמל) (ראה איור).

א. מצא את משוואת הפרבולה.

ב. מצא את משוואת הישר  $y$ .

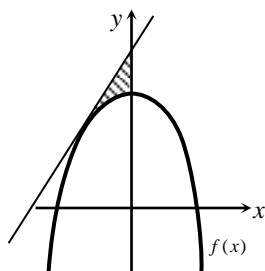
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה, הישר והצירים.

**(36)** נתונה הנגזרת:  $f'(x) = -2x + 3$ .

ידוע שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 4$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לצירים.



**(37)** משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:

$x = -2$  היא:  $y = x + 13$ . הנגזרת של הפונקציה היא:

$f'(x) = -4x - 7$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

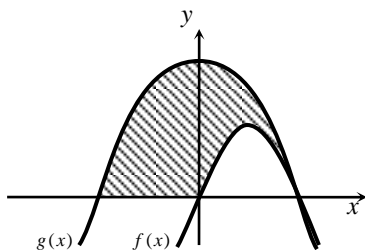
ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  (ראה איור).

38 הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$  היא  $f''(x) = 4$

לפונקציה יש נקודת מינימום:  $(1, -8)$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה- $x$ .



39 באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן:

$$f'(x) = 4 - 2x \quad g'(x) = -2x + 1$$

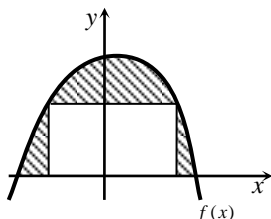
ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$

בנקודה שבה  $x = 4$ .

א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי

הפונקציות וציר ה- $x$ .



40 הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  המתוארת באיור

שלפניך היא  $f'(x) = 3x - 2$ . ישר AB שמשוואתו

היא  $y = 6$  חותך בנקודות A ו-B את גרף הפונקציה.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$  כך שנוצר

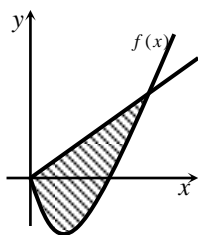
מלבן ABCD ששטחו 30 יחידות. ידוע ששיעור ה- $x$

של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

המלבן וציר ה- $x$ .



41 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$

והישר:  $y = 2x$ . נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x - 6$

וידוע הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך

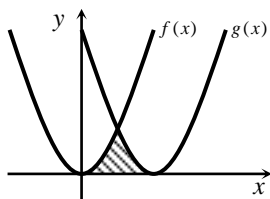
ה- $y$  הוא 16.

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

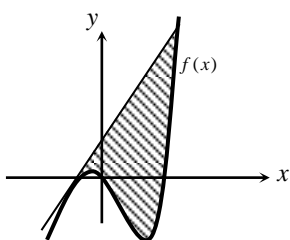
ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך?

אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לישר.

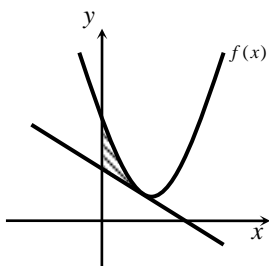


- 42** באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה:  $f(x) = x^2$  את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה שבה  $x = 2$ . הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא  $g'(x) = 2x - 8$ .
- מצא את הפונקציה  $g(x)$ .
  - חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים לציר ה- $x$  (המסומן).

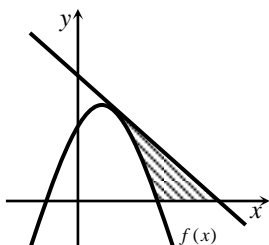


- 43** נתונה הנגזרת:  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$ . משיק ששיפועו 15 לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה:  $y = -20$ .
- מצא את הפונקציה  $f(x)$ .
  - האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15? אם כן, מצא אותם.
  - ענה על הסעיפים:

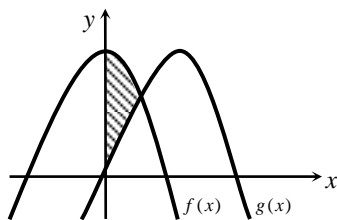
- הראה שהנקודה שבה  $x = 7$  משותפת למשיק שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה  $f(x)$ .
- מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה למשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



- 44** משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x = 2$  היא:  $y = -x + 3$ .
- נגזרת הפונקציה היא:  $f'(x) = x - 3$ .
- מצא את הפונקציה  $f(x)$ .
  - חשב את השטח המוגבל בין המשיק לגרף הפונקציה (ראה איור).



- 45** הישר  $y = -x + 16$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x = 4$ .
- נגזרת הפונקציה היא:  $f'(x) = -x + 3$ .
- מצא את הפונקציה  $f(x)$ .
  - חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (ראה איור).



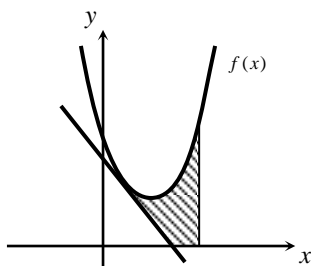
46 הנגזרות של הגרפים  $f(x)$  ו- $g(x)$  הן:

$$f'(x) = -2x, \quad g'(x) = 10 - 2x$$

הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה  $(2.5, 18.75)$ .

א. מצא את הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

ב. היעזר באיור וחשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- $y$ .



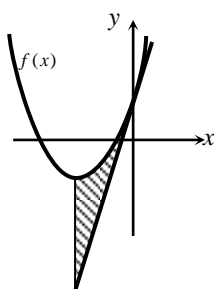
47 הישר  $y = -2x + 5$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$

בנקודה שבה:  $x = 1$ . נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:

$$f'(x) = 2x - 4$$

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$  והישר:  $x = 3$ . (ראה איור).



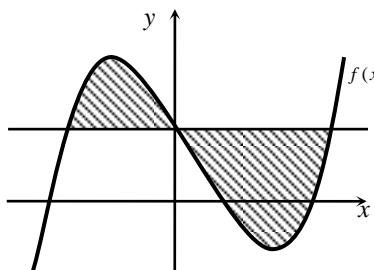
48 הנגזרת של הפרבולה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x + 6$

ידוע שהפרבולה חותכת את ציר ה- $y$

בנקודה שבה  $y = 5$ . מנקודה זו מעבירים משיק לגרף הפרבולה (ראה איור).

א. מצא את  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח מוגבל בין גרף הפרבולה, המשיק וישר היוצא מנקודת הקיצון של הפרבולה (ראה איור).



49 נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$

הישר  $y = 5$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$

על ציר ה- $y$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר לפונקציה (ראה איור).

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $k=1$       ב.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1.5x^2 + \frac{1}{6}$
- (2) א.  $k=2$       ב.  $f(x) = x^2 + 2x + 2$
- (3) א.  $(1,3)$       ב.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}$
- (4) א.  $a=3, b=2$       ב.  $f(x) = x^3 - 2.5x^2 + 2x$
- (5) א.  $y = -0.25x + 6$       ב.  $k = -2$       ג.  $f(x) = -x^2 + 7\frac{3}{4}x - 10$
- (6) א.  $a = -6$       ב.  $f(x) = -2x^3 + 1.5x^2 + 6$       ג. כן.
- $y = -3x + 5\frac{1}{8}$
- (7) א.  $a=4, b=-8$       ב.  $f(x) = x^4 - 4x^2$
- (8) א.  $k = -4$       ב.  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$
- ג. כן.  $(3,4), (-1,4)$
- (9) א. כן      ב.  $f(x) = 2x^3 - 24x + 32$
- (11) א.  $(4,0), (-2,36)$       ב.  $S = 162$  יח"ש
- (12) א.  $(-6,20), (5,9)$       ב.  $S = 44\frac{5}{6}$  יח"ש
- (13) א.  $(-2,0), (0,0), (2,0)$
- (14) א.  $(0,8), (4,0), (-4,0)$       ב.  $y = -2x + 8$       ג.  $5\frac{1}{3}$
- $S = 1$  יח"ש
- (15) א.  $y = 5x - 20$       ב.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{8}$
- (16) א.  $y = -2x + 7$       ב.  $S = \frac{7}{12}$  יח"ש
- (17) א.  $(2,0)$       ב.  $S = 12$  יח"ש
- (18) א.  $(-1,7), (0,8), (1,9)$       ב.  $S = \frac{1}{2}$
- (19) א.  $S = 9$  יח"ש
- (20) א.  $(-3,7), (2,12)$       ב.  $S = 4\frac{2}{3}$  יח"ש

- (21) א.  $y = -4x + 4$  ב.  $(1, 0)$  ג.  $S = \frac{2}{3}$  יח"ש
- (22) א.  $(1, 9)$  ,  $(9, 9)$  ב.  $S_{ABCD} = 72$  יח"ש ג.  $S = 94\frac{2}{3}$  יח"ש
- (23) א.  $y = -x + 8$  ב.  $\max(3, 4)$  ג.  $S = 2\frac{1}{3}$  יח"ש
- (24) א.  $b = 4$  ב.  $(-2, -14)$  ,  $(0, 2)$  ג.  $S = 4$  יח"ש
- (25) א.  $y = 8x + 25$  ,  $y = -8x + 57$  ב.  $A(2, 41)$
- ג.  $S = 42\frac{2}{3}$  יח"ש
- (26) א.  $0$  ב.  $S = 21\frac{1}{3}$  יח"ש
- ג. האינטגרל של סעיף א' מכיל ערכים חיוביים ושליילים יחדיו. פעולת האינטגרל מחסרת בין השניים ומכיוון שהגדלים החיוביים והשליליים שווים בערך מוחלט (וזאת ניתן לראות לפי החישוב של סעיף ב') התקבל הסכום 0.
- (27) א.  $H = g(x)$  ,  $I = f(x)$
- (28) א.  $C(-3, 0)$  ,  $B(3, 0)$  ב.  $S = 12$  יח"ש
- (29) א.  $y = 8x + 40$  ב.  $S = 93\frac{3}{4}$  יח"ש
- (30) א.  $y = -x$  ב.  $(-3, 3)$  ג.  $S = 7\frac{5}{6}$  יח"ש
- (31) א.  $(2, 0)$  ,  $(3, 0)$  ,  $(4, 0)$  ,  $(5, 0)$  ב.  $S = 4\frac{1}{3}$  יח"ש
- (32) א.  $k = 8$  ב.  $S = 25\frac{1}{3}$  יח"ש
- (33) א.  $y = 3 - x$  ב.  $\max(1, 7)$  ,  $\min(3, 3)$  ג.  $S = 8$  יח"ש
- (34) א.  $y_{l_2} = -2x + 6$  ,  $y_{l_1} = -2x + 1$  ב.  $(1, 4)$  ,  $(-4, 9)$
- ג.  $S = 6\frac{1}{12}$
- (35) א.  $k = 10$  ב.  $(1, 9)$  ג.  $S = 81\frac{1}{3}$  יח"ש
- (36) א.  $f(x) = 3x^2 - 75$  ב.  $S = 500$  יח"ש



37 א. (2,3). משיק בנקודת המקסימום מקביל לציר ה- $x$  ולכן משוואתו תהיה

מהסוג  $y = k$ . מאחר שהנקודה הנוספת היא  $(-2.5, 3)$  ניתן להבין שמשוואת

המשיק היא  $y = 3$  ולכן נקודת המקסימום תהיה  $(2, 3)$ .

$$\text{ג. } S = 11\frac{25}{64} \approx 11.391 \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{3}$$

$$\text{א. } f(x) = x^2 + 6 \quad \text{ב. } 4y + x = 42 \quad \text{ג. } S = 214\frac{2}{3}$$

$$\text{א. } f(x) = -x^2 + 3x + 4 \quad \text{ב. } S = 20\frac{5}{6} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = -2x^2 - 7x + 5 \quad \text{ב. } S = 5\frac{1}{3} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = 2x^2 - 4x - 6 \quad \text{ב. } S = 21\frac{1}{3} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = 4x - x^2, g(x) = -x^2 + x + 12 \quad \text{ב. } S = 46.5 \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = -x^2 + 3x + 10 \quad \text{ב. } S = 27\frac{1}{6} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = x^2 - 6x \quad \text{ב. } (0, 0) \quad \text{ג. } S = 85\frac{1}{3} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } g(x) = (x - 4)^2 \quad \text{ב. } S = 5\frac{1}{3} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \quad \text{ב. } y = 15x + 28$$

$$\text{ג. } S = 546.75 \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } S = 1\frac{1}{3} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8 \quad \text{ב. } S = 42\frac{2}{3} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = 25 - x^2, g(x) = 10x - x^2 \quad \text{ב. } S = 31\frac{1}{4} \text{ יח"ש}$$

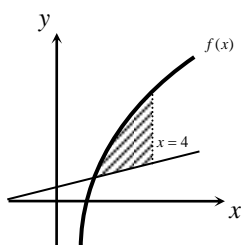
$$\text{א. } f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad \text{ב. } S = 2\frac{5}{12} \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = x^2 + 6x + 5 \quad \text{ב. } S = 9 \text{ יח"ש}$$

$$\text{א. } f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 5 \quad \text{ב. } S = 189\frac{1}{3} \text{ יח"ש}$$

## תרגילים העוסקים בפונקציה רציונלית:

\*הערה: לשאלות בחוץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.

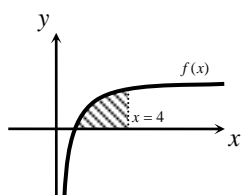


(1) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = \frac{12}{x^4} + 3$ . ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הנמצאת ברביע הראשון היא:  $y = 15x - 16$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

מעבירים ישר  $y = 2.75x$  החותך את גרף הפונקציה בנקודה A הנמצאת ברביע הראשון.

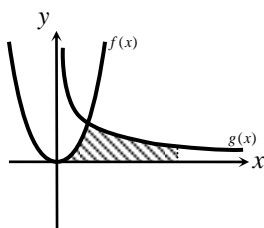
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לישרים:  $y = 2.75x$  ו-  $x = 4$  (המקווקו).



(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2 - \frac{16}{x^3}$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-  $x$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-  $x$  והישר:  $x = 4$ .



(3) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = 2x^2$  ו-  $g(x) = \frac{a}{x^2}$  בתחום:  $x > 0$ , ( $a$  פרמטר).

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה הנמצאת על הישר  $y = 4x$ .

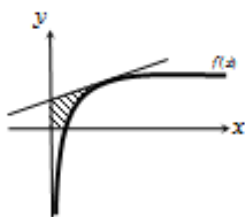
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-  $x$  והישר:  $x = 4$ .

(4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{27}{x^2} + 3x + 1$  עבור:  $x = 1$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק והישר:  $x = 4$ .

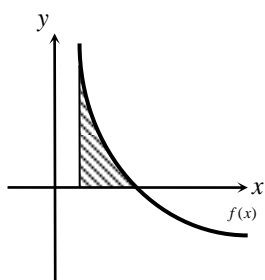


5 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 8 - \frac{a}{x^3}$  בתחום:  $x > 0$ ,  $a$  פרמטר.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 1$  היא:  $y = 3x + 4$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.

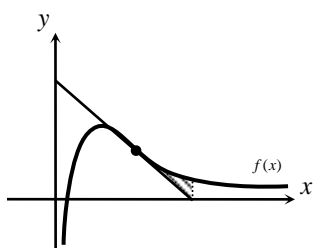
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק והצירים.



6 גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6, 0)$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר:  $x = 2$ .



7 \* הערה: תרגיל זה בנוי מבעיית קיצון וחשוב אינטגרלי יחד:

א. מבין כל המשיקים לגרף

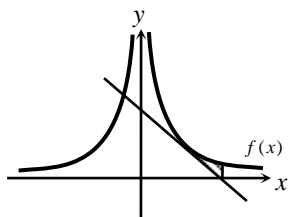
הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף

א'. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- $x$

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .



8 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a + x^2}{x^2}$  ( $a$  פרמטר חיובי).

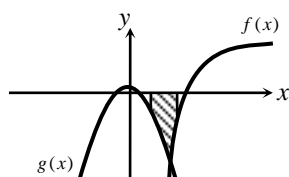
ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה

שבה:  $x = a$  הוא:  $-\frac{2}{9}$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

ב. כתב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = a$ .

ג. היעזר בסרטוט שבצד וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .



9 הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 4 + \frac{6}{x^4}$ . ידוע כי

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הנמצאת

ברביע הראשון היא:  $y = 10x - 6$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מעבירים את הפונקציה:  $g(x) = -64x^2 + 4x + 2$ .

הגרפים נחתכים בנקודה A. מצא את שיעורי הנקודה A.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה  $f(x)$  שלילי עבור  $x = 0.7$  וכי גרף

הפונקציה  $g(x)$  שלילי עבור:  $x = 0.25$ .

ד. היעזר בסקיצה שבצד וחשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- $x$  והישרים:  $x = 0.7$  ו- $x = 0.25$ .

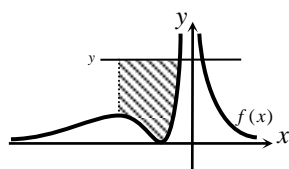
10 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ .

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ב. כתוב את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  היוצא מנקודת המקסימום של הפונקציה.



11 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^4}$ .

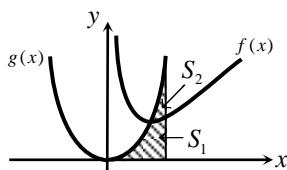
א. הוכח כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודת הקיצון שלו.

ב. כתוב את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מעבירים את הישר:  $y = \frac{4}{81}$  החותך את גרף הפונקציה בנקודה A

ברביע השני. מצא את שיעורי הנקודה A.

ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לישר מנקודת המקסימום של הפונקציה.



12 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{4}{x^2} + x + 1$ .

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

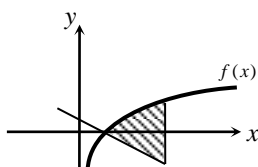
ב. מעבירים פרבולה:  $g(x) = Ax^2$  (פרמטר  $A$ ) דרך נקודת הקיצון של הפונקציה. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

ג. מעבירים אנך לציר ה- $x$ :  $x = 3$ , כך שנוצרים השטחים:

$S_1$  - שבין הגרפים של הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$  וציר ה- $x$ .

$S_2$  - שבין הגרפים של הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$  והאנך.

חשב את יחס השטחים:  $\frac{S_2}{S_1}$ .



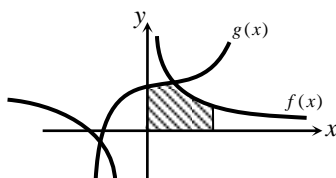
13 נתונה הפונקציה:  $f(x) = k - \frac{80}{x^4}$  ( $k$  פרמטר). גרף

הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 4 יחידות.

א. מצא את  $k$ .

ב. כתוב את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  ברביע הראשון.

ג. היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הנורמל והישר:  $x = 4$ .

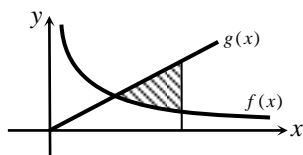


14 נתונות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{162}{3x^2} + 2, \quad g(x) = 6x^3 + 50$$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות, הצירים והאנך:  $x = 2$ .



15) נתונות הפונקציות הבאות :

$$g(x) = 2x, f(x) = \frac{a}{x^3}$$

(a פרמטר). ידוע כי הפונקציות נחתכות

בנקודה שבה  $x = -2$ .

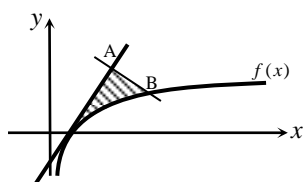
א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. האם הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. מעבירים אנך  $x = k$  (חיובי) החותך את הגרפים של שתי הפונקציות

ויוצר את השטח S. היעזר באיור שלפניך ומצא את k עבורו

$$S = 2\frac{7}{9} \text{ מתקיים.}$$



16) נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = a - \frac{3}{x^3}$  a)

(פרמטר). מעבירים לגרף הפונקציה משיק

מנקודת החיתוך שלו עם ציר ה-x. מסמנים

נקודה A על המשיק ונקודה B על גרף

הפונקציה ומעבירים את הישר AB.

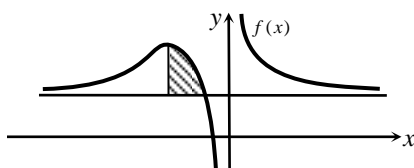
א. מצא את ערך הפרמטר a אם ידוע כי לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה

אופקית :  $y = 3$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. ידוע כי :  $x_A = 2, x_B = 3$ . היעזר באיור שלפניך וחשב את השטח הכלוא

בין גרף הפונקציה, המשיק והישר AB.



17) נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = \frac{4x^3 + kx + 1}{x^3}$

(k פרמטר) ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון

שבה :  $x = -0.5$ .

א. מצא את ערך הפרמטר k וקבע את סוג הקיצון.

ב. הוכח כי לגרף הפונקציה אין נקודות קיצון נוספות.

ג. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

ד. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה והאסימפטוטה האופקית שלו.

מעבירים אנך לאסימפטוטה דרך נקודת הקיצון. חשב את השטח הנוצר

באופן זה.

## תשובות סופיות:

ג.  $S = 1.125$  יח"ש  $A(2, 5.5)$  ב.  $f(x) = -\frac{4}{x^3} + 3x$  א. (1)

ג.  $S = 2.5$  יח"ש  $(2, 0)$  א. (2)

ג.  $S = 13\frac{1}{3}$  יח"ש  $a = 32, (2, 8)$  א. (3)

ג.  $S = 182.25$  יח"ש  $y = -51x + 82$  א. (4)

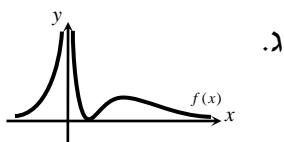
ג.  $S = 3$  יח"ש  $f(x) = 8 - \frac{1}{x^3}, a = 1$  א. (5)

ג.  $S = 8$  יח"ש  $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}, a = 36$  א. (6)

ג.  $S = \frac{1}{8}$  יח"ש  $y = -x + 2$  א. (7)

ג.  $S = 2\frac{2}{3}$  יח"ש  $y = -\frac{2}{9}x + 2$  א. (8)

ד.  $S = 2.537$  יח"ש  $A(0.5, -12)$   $y = 4x - \frac{2}{x^3} + 2$  א. (9)



ג.  $x = 0, y = 0$  ב.  $\min(1, 0), \max\left(-4, \frac{1}{64}\right)$  א. (10)

ד.  $S = \frac{1}{24}$

ג.  $\left(-1.5, \frac{4}{81}\right)$  ב.  $\min(-2, 0), \max\left(-4, \frac{1}{64}\right)$  א. (11)

ד.  $S = \frac{125}{1296} = 0.0964$

ד.  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{13}{41}$  ב.  $A = 1$  א. (12)

ג.  $S = \frac{437}{60} = 7.283$  ב.  $y = -0.1x + 0.2$  א. (13)

ג.  $S = 73.75$  יח"ש  $(-2, -4), (1, 56)$  א. (14)

ג.  $k = 3$  ב. כן -  $(2, 4)$  א. (15)

ג.  $S = 5\frac{7}{9}$  יח"ש  $y = 9x - 9$  א. (16)

ד.  $S = 0.5$  יח"ש  $y = 4$  א. (17)

## תרגילים העוסקים בפונקציה אי-רציונאלית:

**\*הערה: לשאלות בחוצץ תרגילים זה אין פתרון בסרטונים.**

(1) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x}} - 2x$ , פרמטר  $k$ .

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 4$  הוא:  $m = -7.75$ .
- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה משיק לה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

(2) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = kx - \frac{1}{\sqrt{x}}$ , פרמטר  $k$ .

- נתונה הפונקציה:  $g(x) = 2x^2 - 9x - 4$ . ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה שבה:  $x = 3$  מקביל למשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x = 1$ .
- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי היא חותכת את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה שבה:  $y = 77$ .

(3) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא על גרף הפונקציה:  $g(x) = 2\sqrt{x}$  נקודה שבה שיעורי ה- $x$  וה- $y$  זהים.

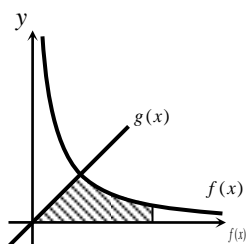
ב. הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$ .

- ידוע כי הפונקציה  $f(x)$  חותכת את הפונקציה  $g(x)$  בנקודה שמצאת בסעיף הקודם. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. האם הגרפים של הפונקציה  $f(x)$  ו- $g(x)$  נחתכים בנקודות נוספות? אם כן, מצא אותן.

(4) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + k$ , פרמטר  $k$ .

- ידוע כי גרף הפונקציה עולה בתחום:  $0 < x < 4$  ויורד בתחום:  $x > 4$ .
- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .
- ב. מצא את הפונקציה אם ידוע כי ערכה המרבי הוא: 8.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

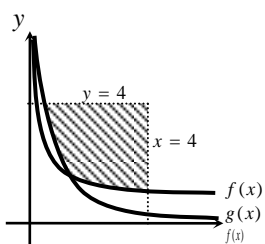




(5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}} \quad g(x) = 2x - 1$$

- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר:  $x = 9$ .



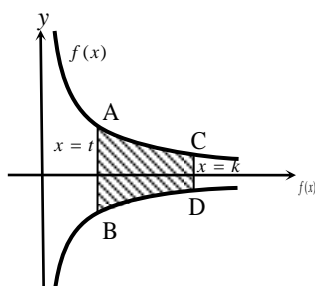
(6) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.  
 ב. מעבירים את הישרים:  $x = 4$  ו- $y = 4$  כך שנוצר ריבוע.

i. חשב את השטח הכלוא בין הישרים הנ"ל והגרפים של שתי הפונקציות.

ii. חשב את היחס בין השטח שמצאת בסעיף הקודם לשטח הריבוע.

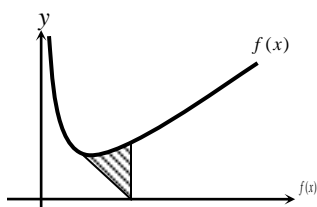


(7) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$$

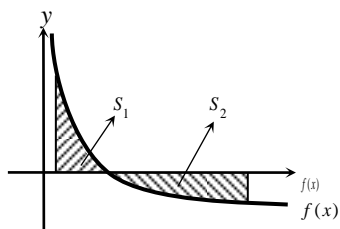
- מעבירים שני ישרים:  $x = t$  ו- $x = k$  אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי:  $AB = 2CD$ .  
 א. הראה כי:  $k = 4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים:  $x = t$  ו- $x = k$  הוא:  $S = 12$ . מצא את  $k$ .



(8) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .

- א. מצא את נקודת המינימום שלה.  
 מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה:  $(2, 0)$  שעל ציר ה- $x$ .  
 ב. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- $x$  היוצא מהנקודה  $(2, 0)$  עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.



(9) לפניך האיור הבא :

א. מצא לאיזה ערך של  $a$  יתקיים :

$$\int_1^a \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$$

ב. באיור שלפניך מתואר גרף

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$$

מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$  והם :  $x=1$  ו- $x=13$  כך שנוצרים השטחים :  $S_1$  ו- $S_2$ . מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. ענה על הסעיפים הבאים :

i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנך  $(S_1)$ ,  $x=1$ .

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח :  $S_2$ .  
נמק את טענתך.

$$(10) \text{ נתונה הפונקציה : } f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא :  $m = \frac{17}{16}$ .

מצא את נקודת ההשקה.

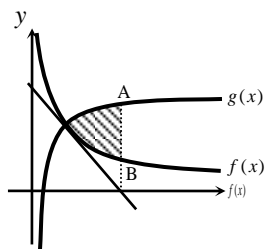
$$(11) \text{ נתונות הפונקציות הבאות : } g(x) = kx, f(x) = \frac{64k}{\sqrt{x}} \text{ ( } k \text{ פרמטר).}$$

א. הבע באמצעות  $k$  את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות.

ידוע כי השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות, ציר ה- $x$

והאנך :  $x=25$  הוא 1024.

ב. מצא את  $k$ .



**12** חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $g(x) = \frac{9}{16} - \frac{1}{x^2}$  ברביע הראשון.

מנקודת החיתוך של הגרפים מעבירים משיק לפונקציה  $f(x)$ .

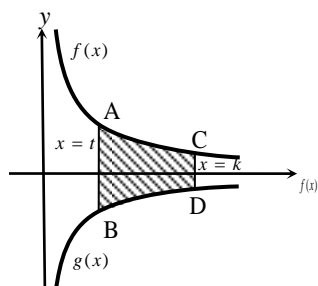
א. הראה כי הגרפים נחתכים בנקודה שבה:  $x = 4$ .

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$  מעלים אנך החותך את

הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B.

חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישר AB.



**13** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

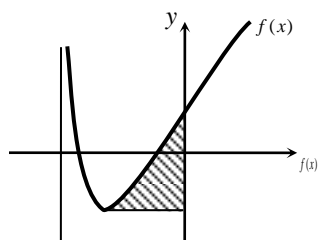
$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = -\frac{5}{\sqrt{x}}$$

מעבירים שני ישרים:  $x = t$  ו- $x = k$  ( $k > t$ ) אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי:  $AB = 3CD$ .

א. הראה כי:  $k = 9t$ .

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים:  $x = t$  ו- $x = k$

הוא:  $S = 80$ . מצא את  $k$ .



**14** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 16x + \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ .

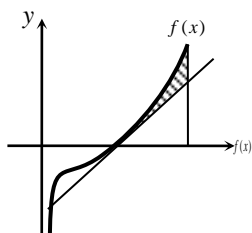
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. מעבירים אנך לציר ה- $y$  ומנקודת הקיצון.

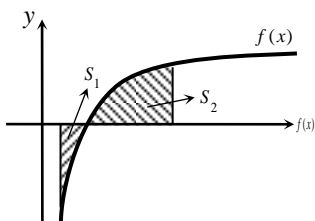
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

האנך וציר ה- $y$ .



15 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 - \frac{32}{\sqrt{x}}$ .

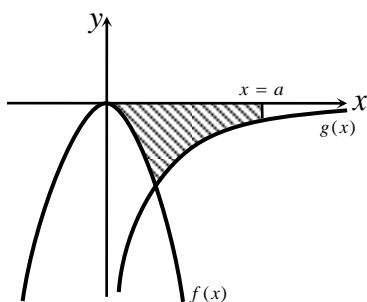
- הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק והאנך  $x=9$  כמתואר באיור שלפניך.



16 ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא עבור איזה ערך של  $a$  יתקיים:  $\int_3^a \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2x-5}}\right) dx = 0$  ( $a > 3$  פרמטר).

- באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2x-5}}$ . מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$  והם:  $x=3$  ו- $x=7$  כך שנוצרים השטחים:  $S_1$  ו- $S_2$ .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ענה על הסעיפים הבאים:
  - חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנך  $x=3$ ,  $(S_1)$ .
  - היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח  $S_2$ . נמק את טענתך.



17 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

- הפונקציות:  $f(x) = -6x^2$  ו-  $g(x) = -\frac{6}{\sqrt{x}}$  ברביע הרביעי. מעבירים ישר  $x=a$  ( $a$  פרמטר) החותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר (השטח המסומן). ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=14$ . מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

18 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x\sqrt{x+k}}{\sqrt{x}}$  ( $k$  פרמטר).

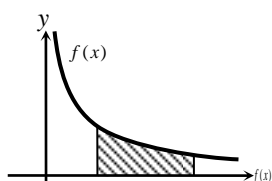
עבור:  $x=1$  מתקיים כי:  $f^2(1) = 676$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $k$  אם ידוע כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. חשב את השטח כלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנך:  $x=36$ .



19 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{k}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}$  ( $k$  פרמטר).

א. הוכח כי גרף הפונקציה לא חותך את הצירים לכל ערך של  $k$ .

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$

מעבירים את האנכים:  $x=4$ ,  $x=8$  כך שנוצר השטח המסומן.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנכים וציר ה- $x$  שווה

ל:  $42\sqrt{2} - 44$ . מצא את  $k$ .

20 הנגזרת של פונקציה:  $f(x)$  היא:  $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x-5}}$ . ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- $x$  בנקודה הנמצאת על הישר:  $18y - 12x = -10$ .

א. מצא את הפונקציה:  $f(x)$ .

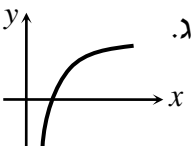
מגדירים פונקציה חדשה:  $g(x) = (f(x))^2 + f'(x)$ .

ב. כתוב את הפונקציה  $g(x)$  בצורה מפורשת.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $g(x)$ , ציר ה- $x$

והאנכים:  $x=1$  ו- $x=5$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $k=1$  ב.  $f(x) = \sqrt{x} - x^2 + 14$
- (2) א.  $k=4$  ב.  $f(x) = 2x^2 - 2\sqrt{x} - 79$
- (3) א.  $(4,4)$  ב.  $f(x) = x - 3\sqrt{x} + 6$  ג. כן -  $(9,6)$
- (4) א.  $k=-2$  ב.  $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$  ג.  $(0,0)$ ,  $(16,0)$
- (5) א.  $(4,8)$  ב. 48 יח"ש  $S$
- (6) א.  $(1,1)$  ב. 1. 11 יח"ש  $S$  2.  $\frac{11}{16}$  יח"ש  $S$
- (7) ב.  $k=4$
- (8) א.  $\min(0.5, 1.5)$  ב. 1.75 יח"ש  $S$
- (9) א.  $a=13$  ב.  $(5,0)$  ג. 1.  $S_1=2$
2. לפי  $\int_1^{13} \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$  נקבל כי:  $S_1 + S_2 = 0$  ולכן:  $S_2 = -S_1 = 2$
- (10) א. 1.  $x > 0$  2.  $(4,0)$
3. הנגזרת היא:  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$  ב.  $(16,14)$  ג. 88 יח"ש  $S$
- (11) א.  $(16, 16k)$  ב.  $k=4$
- (12) א.  $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$  ג.  $S = 8\frac{1}{3} - 4\sqrt{3} \approx 1.405$  יח"ש
- (13) ב.  $k=36$
- (14) א.  $x > -0.5$  ב.  $\min(-0.375, -2)$  ג.  $\frac{5}{8}$  יח"ש  $S$
- (15) א.  $y = 10x - 40$  ב.  $32\frac{2}{3}$  יח"ש  $S$
- (16) א.  $S=7$  ב.  $(4.5, 0)$  ג. 1.  $\frac{1}{2}$  יח"ש  $S_1$  2.  $\frac{1}{2}$  יח"ש  $S_2$
- (17)  $a=4$
- (18) א.  $k=-27$  ב.  $(9,0)$  ג. 
- ד. 445.5 יח"ש  $S$
- (19) ב.  $k=10$
- (20) א.  $f(x) = \sqrt{6x-5}$  ב.  $g(x) = 6x - 5 + \frac{3}{\sqrt{6x-5}}$  ג. 56 יח"ש  $S$