

פתרון בוידאו של בחינות 2023

1	חומר
7	קיים מועד א
13	קיים מועד ב
19	קיים מועד מיוחד

בגרות 2023 מועד חורף:

ענה על חמש מן השאלות 8-1 (לכל שאלה – 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדק רק חמישה התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

- 1) לאורך גדת נהר יש שלוש תחנות: תחנה A, תחנה B ותחנה C - שנמצאת בנקודה מסוימת בין תחנה A לתחנה B. הנהר זורם מכיוון תחנה A לכיוון תחנה B ב מהירות קבועה. שתי סירות, סירה I וסירה II, יצאו בשעה 30:9 מנקודה C ושוו לכיוונים הפוכים: סירה I שטה (נגד הזרם) אל תחנה A, וסירה II שטה (עם הזרם) אל תחנה B. מיד לאחר שכל אחת מהסירות הגיעו לתחנה המתאימה, היא הסתובבה ושטה בכיוון ההפוך. נתנו כי מהירות של כל אחת מהסירות במים עומדים היא קבועה. מהירות של סירה I, כאשר היא שטה עם הזרם, הייתה גדולה פי 2 ממהירותה כאשר היא שטה נגד הזרם. המהירות של סירה II, כאשר היא שטה עם הזרם, הייתה גדולה פי 6.5 ממהירותה של סירה I כאשר היא שטה נגד הזרם. נסמן ב- x את מהירות הזרם בנהר. א. הבינו באמצעות x את מהירות של סירה I במים עומדים ואת מהירות של סירה II במים עומדים. סירה I הגיעה לתחנה A לאחר 2 שעות מרגע היציאה לדרך, ומיד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה B. סירה II הגיעה לתחנה B לאחר 7 שעות מרגע היציאה לדרך, ומיד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה A.
ב. (1) באיזו שעה נפגשו הסירות?
(2) האם הסירות נפגשו בין תחנה A לתחנה C או בין תחנה B לתחנה C? נמכו את תשובהיכם.
הסירות נפגשו במרחק של 90 ק"מ מתחנה C.
ג. מהי מהירות הזרם בנהר?

2) נתונה סדרה הנדסית אינסופית A , שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .

בונים סדרה חדשה B , שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בוגע לכל אחד מההגידים (1)-(2) שלහן, קבעו אם הוא נכון או לא נכון
ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת - בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת - בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום

$$\text{של כל איברי הסדרה } A \text{ הוא } \frac{4}{7}.$$

ג. מצאו את q .

$$\text{נתון: } n \text{ הוא מספר טבעי המקיים } \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{3367}{1024}$$

ד. מצאו את n .

3) בחנות פירות יש ארוגים ובתוכם פירות.

בארכז א' יש a פירות: 6 תפוחים והשאר אגסים.

בארכז ב' יש b פירות: 11 תפוחים והשאר אגסים.

מוחאים באקראי פרי אחד מארגז א'.

אם יצא תפוח - מעבירים אותו לארכז ב', ואם יצא אגס - מחזירים אותו לארכז א'.
לאחר מכן מוחאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

א. הבינו באמצעות a ו- b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

$$\text{נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא } \frac{9}{65}.$$

ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ולאחר מכן אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.

ב. מצאו את a ו- b .

ג. חשבו את ההסתברות שמארכז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארכז א' יצא תפוח.

מעבירים את כל הפירות משני הארכזים לארכז אחר, שהוא ריק, ומוחאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

ד. מצאו את ההסתברות שב-4 מהפעמים בבדיקה יצא תפוח או שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

ה. ידוע שב-4 מהפעמים בבדיקה יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שההתפוחים יצאו ברציפות, בזיה אחר בזיה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

(4) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).

המייתר AC במעגל השמאלי חותך את המעלג הימני בנקודה D.

המייתר AE במעגל הימני חותך את המעלג השמאלי בנקודה F.

הקטע CE עובר דרך הנקודה B.

א. הוכחו כי $\Delta ACE \sim \Delta ABCD$.

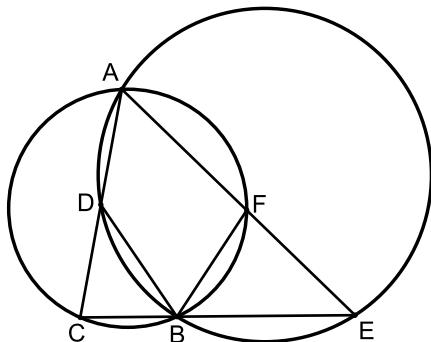
נתון : $DC = FE$.

ב. הוכחו כי $\Delta BFE \cong \Delta ABCD$.

ג. (1) הוכחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) הוכחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.

ד. הוכחו כי $\angle DEC = \angle FCE$.



(5) משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R .

הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD, כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).

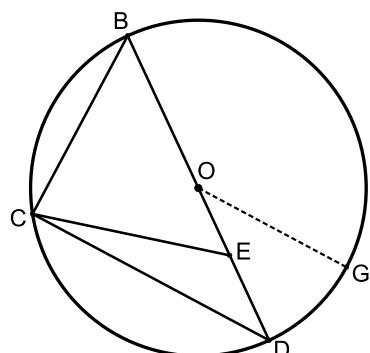
נסמן $\angle CDB = \alpha$, $CD = k$.

א. הבינו את $\cos \alpha$ באמצעות k ו- R .

$$\text{ב. הוכחו כי } CE = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 + R^2}$$

נתון : $BC = EC$.

ג. חשבו את α .



מעבירים רדיוס OG, המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

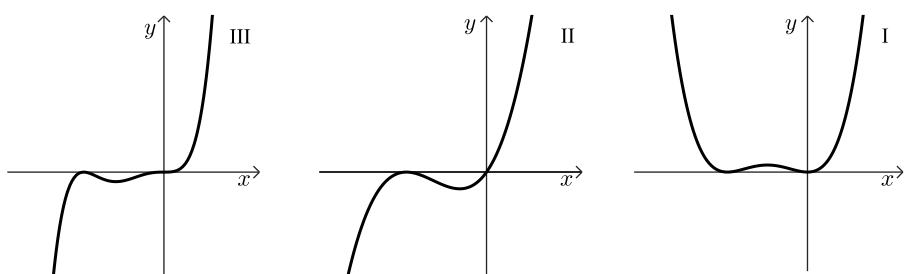
ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

פרק שלישי – חישובו דיפרנציאלי וaintגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רצינליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה $f(x) = x^n \cdot (x+1)^2$, כאשר $n > 1$ מספר טבעי, והפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

- א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- ב. מצאו את תחומי החיבור והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.
- ג. מצאו את שיעורי $-x$ של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
הביעו את תשובה בסמצעות n , אם יש צורך.
הבחינו בין n זוגי לבין n אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מהגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי.



ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה מהם מתאר

את הפונקציה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעתכם.

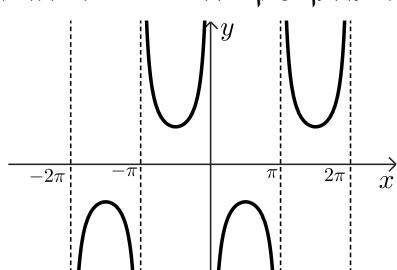
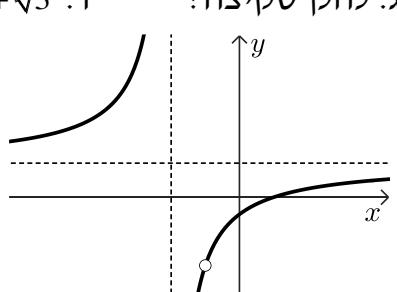
נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x-6)$, כאשר k הוא פרמטר חופשי.

נסמן ב- A את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x .

ה. הביעו באמצעות k את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x . נמקו.

- 7)** נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4\sin(x)}{\cos^2(x)-1}$, בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - מצאו את משויות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .
 - האם הפונקציה $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובהיכם.
 - ענו על סעיפים (1)-(2) שלහן עבור התחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
- מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גраф הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 - מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 - סרטטו סקיצה של גраф הפונקציה $f(x)$ (בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$).
 - הוכיחו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
 - חשבו את השטח הכלוא בין גраф פונקציית הנגזרת $(f')'$ ובין ציר ה- x , בתחום $1.9 \leq x \leq 2.2$.
- 8)** לפניכם שלוש פונקציות, לכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.
- $$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x+2)}, \quad h(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x+2)}, \quad k(x) = \frac{x^3}{x(x+2)}$$
- ידוע כי לאחת שלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.
- मבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקציה מקיימת את כל התכונות הללו. נמקו.
 - ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקציה שקבעתם בסעיף א.
- מצאו את המשווה של האסימפטוטה האופקית ושל האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
 - מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גраф הפונקציה עם הצירים. נתון כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון.
 - סרטטו סקיצה של גраф הפונקציה.
- נסמן נקודה D על גראף הפונקציה, שעבורה $x = t$, $-1 < t < 1$.
- מהנקודה D מעבירים שני ישרים, אחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקציה, כך שנוצר מלבן על ידי הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .
- מצאו את ערכו של t , שעבורו היקף המלבן המתתקבל הוא מינימלי. תוכלו להסביר שורש בתשובתכם.

תשובות סופיות:

- .C ב. (1) בשעה 30:21 בין תחנה B לתחנה C
 א. $v_I = 3x$, $v_{II} = 12x$ **(1)**
 ג. 2.5 קמ"ש.
- .n=6 $q = \frac{3}{4}$ ב. (2) לא נכון. ג. (1) נכון. ב. (1) נכון. א. הוכחה. **(2)**
- .0.2 0.176 $\frac{7}{13}$ ב. $a=20$ א. $\frac{72}{a(b+1)}$ **(3)**
- . $\angle OEG = 115.38^\circ$ $\alpha = 37.76^\circ$ ג. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. **(4)**
- . $\forall x < -1, -1 < x < 0, x > 0$ ב. עבור n זוגי: תחום חיובית: $x > 0$,
 (אין תחום שליליות). עבור n אי-זוגי: תחום חיובית: $x > 0$, תחום שליליות:
 ג. עבור n זוגי: מינימום: $x = -1, 0$, מקסימום: $x < -1, -1 < x < 0$
 עבור n אי-זוגי: מינימום: $x = -\frac{n}{n+2}$, מקסימום: $x = -1$
 ד. עבור n זוגי: גרף I. עבור $n > 1$ אי-זוגי: גרף III. **(5)**
- . $x = \pm 2\pi, x = \pm \pi, x = 0$ א. $x \neq \pm 2\pi, x \neq \pm \pi, x \neq 0$ **(6)**
 ב. (1) אין חיתוך. ג. (3) אי-זוגית. א. (1) **(7)**
- .0.72 ה. 0.72 ד. הוכחה. ג. להלן סקיצה:
- 
- . $x = -2, y = 1$ ב. (1) ג. $t = -2 + \sqrt{3}$ א. $h(x)$ **(8)**
 ג. להלן סקיצה:
- 

בגרות 2023 מועד קיץ א':

ענה על חמש מן השאלות 8-1, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר מخمس שאלות, ייבדק רק חמישה התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

- 1)** שני רוכבי אופניים, רוכב א' ורוכב ב', יצאו משני מקומות, A ו-B, בהתאם, ורכבו זה לקראת זה. המרחק בין המקומות A ו-B הוא d והוא פרמטר חיובי.
רוכב ב' יצא בדרך 2.5 שעות אחרי רוכב א' יצא בדרך.
 בשעה 18:18 התברר שככל אחד מן הרוכבים עבר שליש מן המרחק בין המקומות A ו-B. מהירות של כל אחד מן הרוכבים הייתה קבועה.
لحמרת שוב יצאו הרוכבים מאותם המקומות, A ו-B, ורכבו זה לקראת זה.
כל אחד מן הרוכבים רכב באותו המהירות שבה רכב ביום הראשון.
הפעם הם יצאו באותו הזמן ונפגשו כעבור 9 שעות.
א. (1) באיזו שעה ביום הראשון יצא רוכב א' למקום A?
(2) הבינו באמצעות d את המהירות של כל אחד מן הרוכבים.
זמן שנדרש לרוכב א' לעבור קילומטר אחד גדול ב-1.5 דקות מן הזמן שנדרש לרוכב ב'
לעבור קילומטר אחד.
ב. מצאו את המרחק בין A ל-B.
- 2)** נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנשות A ו-B, שכל איבריהן שונים מ-0.
האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A .
האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .
משתי הסדרות הנדסיות A ו-B בונים סדרה הנדסית אינסופית מתכנשת חדשה
שאיבריה הם : $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$
כל שלוש הסדרות, הסדרה A, הסדרה B והסדרה החדשה אין קבועות.
א. הבינו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B .
הסדרה A אינה עולה ואיינה יורדת, והסדרה B עולה.
ב. בוגע לכל אחד משני ההיגדים (1) – (2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון
ונמכו את קביעתכם.
(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.
(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.
המספרים c_1 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשוניים בסדרה חשבונית.
נתון כי c_2 שווה ל- $-c_1$, ומתקיים גם : $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{24}$

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי חמנה של הסדרה A שווה ל- c_1 , ומתקיים גם :

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

ד. מצאו את הערך של q_B .

(3) במקללה גדולה הועלתה הצעה לkür את הפסיקת הצהרים כדי לסייע מוקדם יותר את יום הלימודים.

בעקבות זאת ערכו משלאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'. על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבعد ההצעה הם תלמידי שנה א'.

עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבعد ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה.

מ בין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

נסמן ב- d את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבعد ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה? ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא بعد ההצעה,

גודלה ב- $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא بعد ההצעה.

ב. חשבו את הערך של d .

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה :

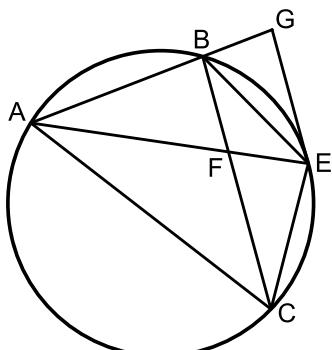
- (1) המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב'.
- (2) המשתתף שנבחר بعد ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל.

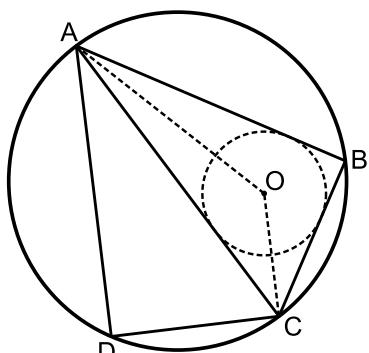
ידוע כי כל החמשה שנבחרו הם תלמידי שנה ב'.

מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם بعد ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



- 4) הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל. נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם. בנקודה E מעבירים משיק ל מעגל. המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G. המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.
- הוכחו : $\Delta ACE \sim \Delta AEG$
 - נתון : $AE = 9\sqrt{6}$, $AG = 18$
 - חשבו את אורך המיתר AC.
 - הוכחו : $BC \parallel GE$.
- נתון : שטח המשולש ABF גדול פי 2 משלוח המשולש BFE.
- חשבו את אורך המיתר AB.
 - מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו את תשובתכם.



- 5) דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R . המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט). נסמן : $\angle CAB = \alpha$.
- מצאו את זוויות המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).
 - הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו- R . נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.
 - מצאו את גודל הזווית α . נתון כי שטח הדלתון הוא $16\sqrt{3}$.
 - מצאו את R .
- ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החסום את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

פרק שלישי – חישובו דיפרנציאלי וaintגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רצינליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2a-x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הבינו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העליה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$, אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקוירות כלפי מעלה (\cup) ואת תחום הקוירות כלפי מטה (\cap) של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x) = |f(x)| - b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באותו התוחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

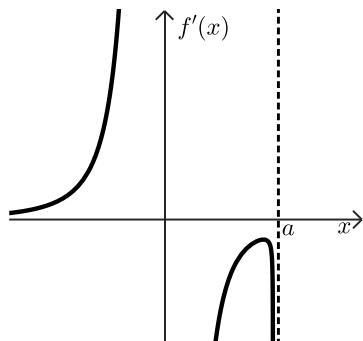
ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא: $(3, -8)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו- b .

נתונה גם הפונקציה: $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום: $1 < x$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתיכם.

7) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $a < x \leq 0$



הוא פרמטר חיובי.
בפרטות שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x < a$, $x \neq 0$.
לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות
לצירים שמשווות להן: $x = 0$, $y = 0$, $x = a$.
בתחום: $0 < x < a$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה.
הישר $x = a$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקציה $f(x)$.

$$f(a) = 0$$

א. (1) מצאו את תחום העליה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$

(הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר: $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתחת סעיף (2).

נתון כי אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

$$\frac{\sqrt{x-a}}{x} . \text{IV} \quad \frac{\sqrt{a-x}}{x} . \text{III} \quad \frac{\sqrt{x-a}}{x^2} . \text{II} \quad \frac{\sqrt{a-x}}{x^2} . \text{I}$$

ג. איזה מן הביטויים I-IV מייצג את הפונקציה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת שבה: $x = -2$, הוא:

ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = 1$.

8) נתון מעוין ABCD. נקודה E היא אמצע הצלע BC.

$$\angle ECD = x$$

נתון: שטח המשולש ECD הוא 25.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

תשובות סופיות:

(1) א. (1). בשעה 00:11. (2). מהירות רוכב א' היא: $\frac{2d}{15}$, מהירות רוכב ב' היא:

ב. 300 ק"מ.

$q_B = \frac{1}{4} \cdot 7$ $c_1 = -\frac{1}{8}$ ב. (1). לא נכון. ג. (2). נכון. א. $\frac{q_A}{q_B}$

$\frac{32}{125} = 0.256$ $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{5}{12}$ א. 0.8 (3)

$\frac{4}{9}$ AB = 12 ד. הוכחה. ג. הוכחה. ב. AC = 27 א. הוכחה. (4)

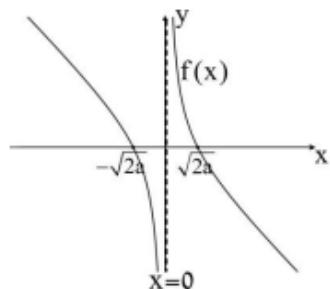
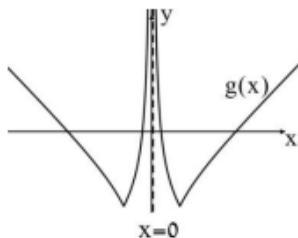
$AO = 2\sqrt{2}R \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.(2) א. $135^\circ, 45^\circ, -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}$.(1) (5)

2.07 R = 4 $\alpha = 30^\circ$

$(-\sqrt{2a}, 0), (\sqrt{2a}, 0)$.(3) ב. (2). הוכחה. א. (1). x = 0 (6)

(4). תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x > 0$ או $x < 0$.

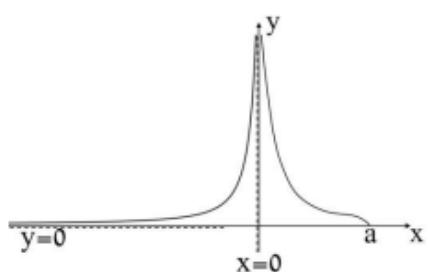
(5). תחומי קעירות כלפי מעלה: $x > 0$, תחומי קעירות כלפי מטה: $x < 0$.
ג. שרטוט:



ד. נקודת מינימום. b = 8, a = 4.5.

(7) א. (1). תחומי עלייה: $0 < x < a$, תחומי ירידה: $a < x$. נקודה אחת.

ב. שרטוט: ג. ביטוי I א. $\frac{5}{24}$ ב. $a = 2$ ד. $b = 8$, $a = 4.5$.



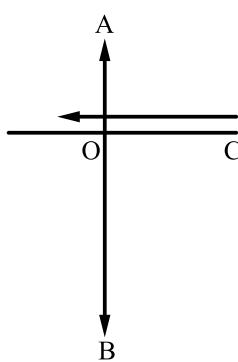
ב. $5\sqrt{3} = 8.66$ א. $\frac{10}{\sqrt{\sin x}}$ (8)

בגרות 2023 מועד קיז ב:

ענה על חמש מן השאלות 8-1, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר מخمس שאלות, ייבדק רק חמישה התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1) הנקודה A נמצאת משמאל לנקודה O והנקודה B נמצאת מימין לנקודה O. הנקודה C נמצאת מימין לנקודה O, במרחק של 12 ק"מ ממנה, כמפורט בסרטוט.



ביום ראשון יצא אורי להיליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה A. באותו הזמן יצא סמדר לריצה מן הנקודה C לכיוון הנקודה O. מהירות הריצה של סמדר גדולה פי 3 ממהירות הליכה של אורי. נתון כי ברגע שהגיע אורי לנקודה A, המרחק האויררי בין לבין סמדר היה 424 ק"מ. המהירות של אורי ושל סמדר קבועות. א. מצאו את המרחק שהלך אורי ואת המרחק שרצה סמדר ביום ראשון, אם נתון שסמדר חלפה בריצתה על פני הנקודה O.

באותו יום יצא בוועז להיליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה B. בוועז יצא להיליכה 20 דקות לאחר מכן אורי להיליכה. מהירות ההליכה של בוועז הייתה קבועה וגדולה ב-50% ממהירות הליכה של אורי. כאשר הגיע אורי לנקודה A, המרחק בין לבין בוועז היה 23 ק"מ, ובאותו רגע שניהם עצרו.

ב. מצאו את מהירות ההליכה של אורי ואת מהירות ההליכה של בוועז ביום שני יצאו אורי ובוועז להיליכה באותו הזמן. כל אחד מהם יצא מאותה הנקודה שבה עצר ביום ראשון, והמשיך ללכת באותו הכיוון שהלך ביום ראשון. בוועז הקטינו את מהירות הליכתו ב- $\frac{1}{7}$ קמ"ש ואורי הגדיל את מהירות הליכתו ב- $\frac{1}{7}$ קמ"ש.

ג. מצאו כמה דקות הלך אורי ביום שני.

2) נתונה סדרה חשבונית: a_1, a_2, \dots, a_{3n} שבה 3ai ברים, וההפרש שלה הוא d .
נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי: $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתנו כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.
ידוע כי מתקיים: $|d| = 19 \cdot a_1$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.
מוחקם כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_1, a_2, \dots, a_5, a_8, a_{3n-4}$. סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 54.

ד. מצאו את d .

3) עיתון יומי המופץ למוניים שגורים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 00:00. מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המוניים, ושאלה בונגעו ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן. כל המוניים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מני שקיבל את העיתון בזמן מבין המוניים שגורים בחיפה היא $\frac{2}{3}$, וההסתברות לבחור באקראי מני שגר בחיפה מבין המוניים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{7}$.

נסמן ב- p את ההסתברות שמוני שנבחר באקראי מני כל המוניים גר בחיפה. בוחרים באקראי אחד מן המוניים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמוני שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

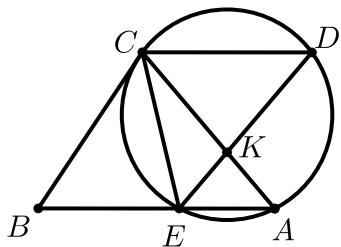
נתון כי מספר המוניים שגורים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5. ממספר המוניים שגורים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המוניים קיבלו את העיתון בזמן?
מבין המוניים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מוניים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?
באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מוניים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היוטר 4 מהם גרים בחיפה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4) מנוקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר ממשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט.

הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמייתר CD

מקביל למייתר EA. המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.

א. הוכחו : $\triangle ACE \sim \triangle DCE$

נתון : $ED = 7$, $AK = 3$. נסמן את שטח המשולש CEK ב- S .

ב. הבינו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

$$\text{נתון : } BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$$

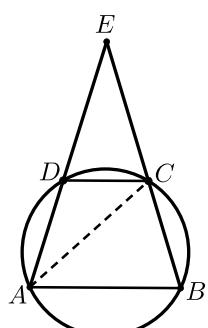
ג. הבינו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

הנקודה O היא מרכז המעגל.

ד. הוכחו : $\angle COE = \angle CKE$

$$\text{נתון : } \angle CAE = 45^\circ$$

ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו-K נמצאות על מעגל אחד.



5) נתון טרפז ABCD ($AB \parallel DC$), החסום במעגל. המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.

$$\text{נתון : } \angle ACB = 60^\circ$$

$$\text{נסמן : } \angle CDE = \alpha, AC = k$$

א. (1) מצאו את זוויות המשולש ACE

(הבינו באמצעות α אם יש צורך).

(2) הבינו באמצעות α ו- k את אורך הצלעות AB ו-DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

ג. מצאו את הערך של k שבverboro אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC והוא 63.

פרק שלישי – חישובו דיפרנציאלי וaintגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רצינליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x-3)^2}$, $0 < a < 3$ הוא פרמטר.

- א. ענו על התת-סעיפים (1)-(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
- (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 - (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 - (4) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
 - (5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^2}{(x-3)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $g(x)$.

- ב. (1) הוכחו כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.
- (2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר : $x=1$ ועל ידי ציר ה- y .

7) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + x}}$.

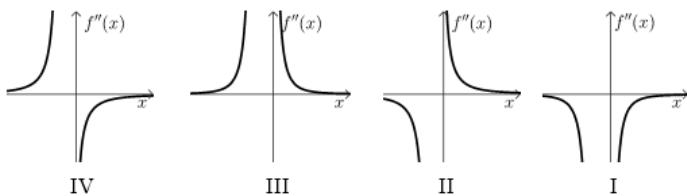
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.
 - (3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 - (4) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$.

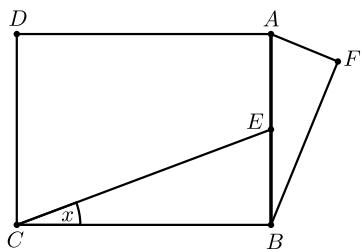
נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיטול.

- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.

- ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים : $x=1$ ו- $x=2$.





8) הנקודה E היא אמצע הקטע AB.

על הקטע AB בונים מלבן AFBF' ,

ומושולש ישר זווית $\angle AFB = 90^\circ$, $\angle AFB'$

כמתואר בסרטוט.

נתון : $\angle FAB = 2x$, $\angle ECB = x$.

נסמן את אורך הקטע AB ב- h .

א. מהו תחומי הערכים האפשריים עבור x ? הסבירו את תשובהיכם.

ב. הבינו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.

ג. מצאו את הערך של x שבבBORO ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבר הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

תשובות סופיות:

- 1) א. אורי - 10 ק"מ, סמדר - 30 ק"מ.
 ב. אורי - 4 קמ"ש, סמדר - 6 קמ"ש.
 ג. 24 דקות.

ד. $d = -3$. ג. 39 איברים. ב. הפרש הסדרה שלילי. א. הוכחה. (2)

$$\text{ד. } \frac{30}{121} \text{ ג. } 56\% \text{ ב. } \frac{4}{15} p \text{ א. } 0.92 \text{ (3)}$$

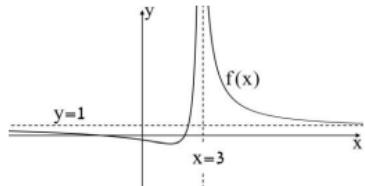
$$\text{ד. } \frac{175}{96} S \text{ ג. } \frac{4}{3} S \text{ ב. } \text{א. הוכחה. (4)} \text{ ה. הוכחה.}$$

$$\angle EAC = 2\alpha - 120^\circ, \angle ECA = 120^\circ, \angle E = 180 - 2\alpha^\circ. (1) \text{ א. } (5)$$

$$k=6 \text{ ג. } \alpha=75^\circ \text{ ב. } CD = \frac{k \sin(2\alpha - 120)}{\sin \alpha}, AB = \frac{\sqrt{3}k}{2 \sin \alpha} \text{ .(2)} \text{ ד. } 2.07 \text{ ג. } R=4 \text{ ב. } \alpha=30^\circ \text{ (2)}$$

$$\left(0, \frac{-a^2}{9}\right), (-a, 0), (a, 0). (3) \quad y=1, x=3. (2) \quad x \neq 3. (1) \text{ א. } (6)$$

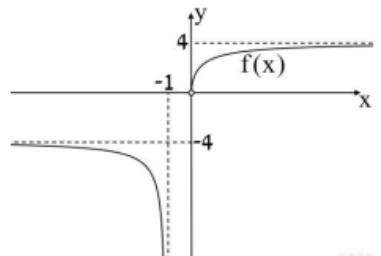
: סרטוט: (5). מינימום. $x = \frac{a^2}{3}$. (4)



$$\text{ב. } (1). \text{ הוכחה. } \frac{a^2}{6}. (2) \quad \text{א. } (1). \text{ או } 0 < -1. (2). \text{ לא. (7)}$$

. תחומי עלייה: $x > 0$, תחומי ירידיה: $x < -1$: (4)

ב. סרטוט: (I) גרף I



$$4. \text{ ד. } x = 30^\circ \text{ ג. } \frac{h}{2 \sin x} - h \cos(2x) \text{ ב. } 0 < x < 45^\circ \text{ א. } (8)$$

בגרות 2023 מועד מיוחד:

ענה על חמש מן השאלות 8-1, (לכל שאלה – 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר מخمس שאלות, ייבדק רק חמישה התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

- 1)** רוני ושיר יצאו בשעה 00:10 לרכיב אורך מסלול AB.
רוני יצא מנקודה A ושיר יצא מנקודה B.
הן רצו זו לקרה זה ונפגשו בשעה 00:40.
כל אחת מהן רצה במהירות קבועה.
מהירות הריצה של רוני הייתה גבוהה פי 1.4 מאשר מהירות הריצה של שיר.
א. הבינו את אורך המסלול AB באמצעות מהירות הריצה של שיר.
רוני עצרה במקום המפגש למנוחה של שעה, ואילו שיר המשיכה לרוץ באותה מהירות
שבה היא רצתה לפני כן, עד שהגיעה לנקודה A.
מיד כשהגיעה שיר לנקודה A היא רצתה בחזרה לנקודה B, ב מהירות גבוהה פי 1.5
 מאשר מהירותה ההתחלתית. מיד בסוף המנוחה שלה, המשיכה רוני להתקדם בהילכה
לכיוון נקודה B.
מהירות הhilכה של רוני הייתה נמוכה ב-6.6 קמ"ש מאשר מהירות הריצה שלה.
רוני ושיר הגיעו לנקודה B בדיק באותה השעה.
ב. מצאו את מהירות הריצה ההתחלתית של שיר.
ג. באילו שעות, לאחר הפעם הראשונה, היה המרחק בין רוני לשיר 3 ק"מ?
מצאו את שתי האפשרויות.
- 2)** נתונה סדרה חשבונית A וביה n איברים (n הוא מספר טבעי).
 d הוא הפרש הסדרה ($d \neq 0$).
מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה:

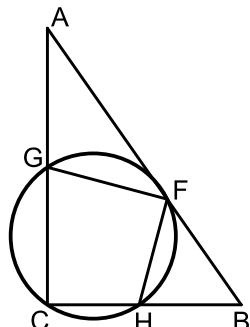
$$b_t = \frac{a_t + a_{t+1}}{2}$$
 בסדרה B יש $1-2n$ איברים.
א. הוכחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והבינו באמצעות d את ההפרש שלה.
נסמן ב- S_A את סכום האיברים בסדרה A.
נסמן ב- S_B את סכום האיברים בסדרה B.
ב. הוכחו:

$$\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$$
 נתון:

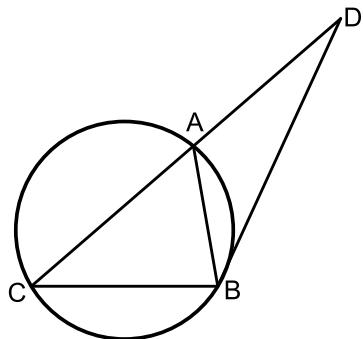
$$S_A = 220 + S_B, S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$$
 ג. (1) מצאו את n .
 (2) מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

- (3) כדי להתקבל ללימודים בפקולטה מסוימת מועמד צריך להיבחן בשני מבחנים. ההסתברות שמועמד יצליח ב מבחון הראשון היא $P > 0.5$.
 אם המועמד הצלח ב מבחון הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח ב מבחון השני היא : $P + 0.1$.
 אם המועמד נכשל ב מבחון הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח ב מבחון השני היא : $P - 0.4$.
- נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיק ב מבחון אחד מבין השניים היא $\frac{1}{4}$.
- א. מצאו את P .
- כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני מבחנים.
- ב. ידוע כי מועמד הצלח לפחות ב מבחון אחד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לפוקולטה?
- שלושה מועמדים נבחנו בשני מבחנים.
- ג. מהי ההסתברות שני מועמדים מבין השלושה התקבלו לפוקולטה ואחד מהם נכשל בשני מבחנים?
- ה. מועמדים נבחנו בשני מבחנים ($n \geq 2$).
- ד. הבינו באמצעות n את ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפוקולטה וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפוקולטה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



- (4) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית, $\angle ACB = 90^\circ$.
 הנקודות H, G ו- F נמצאות על הצלעות CB, AC ו-AB בהתאם, כך שהמרובע GCHF חסום במעגל (ראו סרטווט).
 נתון: AB משיק למעגל בנקודה F, $AB \parallel GH$.
 א. הוכיחו: $FG = FH$.
- ב. (1) מצאו את גודל הזווית $\angle ACF$.
 (2) הוכיחו: $\triangle GFC \sim \triangle FBC$.
- קוטר המעגל היוצא מנקודה F חותך את הצלע AC בנקודה E.
 ג. הוכיחו: $\angle FEB = \angle FCB$.



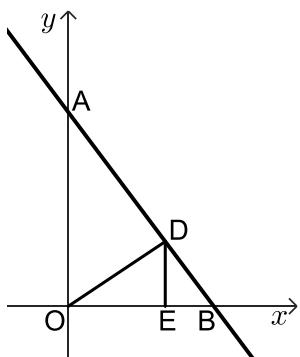
- 5) המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R . המשיק
למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA בנקודה D,
כמתואר בסרטוט. נסמן: $\angle ABD = \alpha$. נתון: $\angle DBC = 120^\circ$.
א. הבינו את אורך הצלעות AB ו-BC באתרי R ו- α ,
אם יש צורך.
נתון: היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA
הוא 1.8.
ב. מצאו את α .
נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 6.
ג. מצאו את R .

פרק שלישי – חישובו דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רצינליות ושל פונקציות טריגונומטריות

- 6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin(x) \cdot \cos^3(x)$ המוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו.
 - מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גраф הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 - מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 - סרטטו סקיצה של גраф הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
 - מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
 - סרטטו (בקו מכווקו) סקיצה של גраф הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת
ציריים שבה סרטטתם את גраф הפונקציה $f(x)$.
- ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
- מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

- 7) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 9}$.
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).
 - מצאו את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 - מצאו את תחומי הקוירוט כלפי מעלה (\cup) וככלפי מטה (\cap) של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 - סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה: $f(x) = -f(-x) - h(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.
- באותה מערכת צירים שבה סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, $h(x)$ הוסיף בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $-h(x)$.
 - נתון: $a > 5$ הוא פרמטר.
 - סדרו את הביטויים I-III שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדל ביותר
(כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

$$\int_{-a+1}^{-a+2} (f(x) - h(x)) dx \quad . \text{III} \quad \int_{a+1}^{a+2} (f(x) - h(x)) dx \quad . \text{II} \quad \int_a^{a+1} (f(x) - h(x)) dx \quad . \text{I}$$



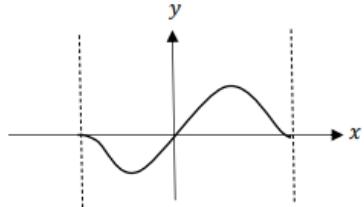
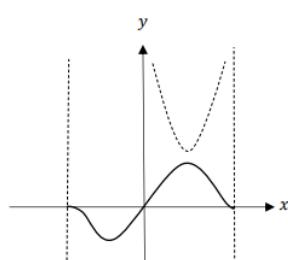
8) ישר שSHIPOU 2- חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה B, ואת החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה A. הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון. הנקודה E נמצאת על ציר ה- x כך שהקטע DE מקביל לציר ה- y . הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט. נסמן את אורך הקטע OE ב- p .

נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.

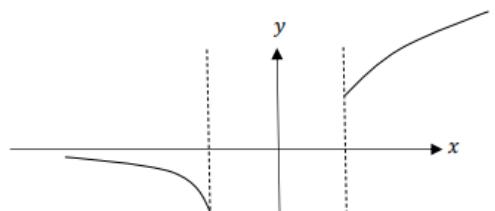
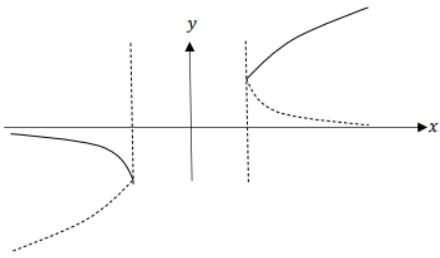
- הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB.
- מצאו את הערך של p שבuboaro היחס בין שטח המשולש OED ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

- א. $AB = 1.6x$. (1)
 ב. 9 קמ"ש. (2)
 ג. הוכחה, ההפרש הוא d . (2)
- א. $\alpha = 40.20^\circ$. (5)
 ב. $BD = \sqrt{3}R$, $AB = 2R \sin \alpha$. (5)
- א. (1). אי-זוגית (6)
 ב. (2). $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, 0.324\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}, -0.324\right)$ מינימום, מקסימום.
- א. $\left(\frac{\pi}{6}, 1.756\right)$. (2)
 ב. $0 < x < \frac{\pi}{2}$. (4)
 ג. שרטוט: (3).



- א. (1). $x < -3$ או $3 \leq x$ (2) אין.
 ב. (3). עליה: $x < 3$, ירידה: $x > 3$. (7)
 ג. (4). קעירות כלפי מטה: $x < -3$ או $x > 3$, קעירות כלפי מעלה: אין.
 ד. שרטוט: (5).



III < I < II . ד

$$p = \frac{1}{2}. \text{ ב. } y = -2x + 1 + 2p. \text{ א. } (8)$$